1971 г. Июль Том 104, вып. 3
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

БИБЛИОГРАФИЯ

019.941:517.9

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЛНЫ

Hyperbolic Equation's and Waves, Battelle Scattle 1968 Recontres, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970, 393 pp.

Рецензируемый сборник представляет собой отчет о симпозиуме в Баттле. Симпозиум был посвящен гиперболическим уравнениям и задачам распространения волн. Его целью являлось ознакомление математиков и физиков различных специальностей, интересующихся этой проблематикой, с последними работами.

Организаторы симпозиума поставили своей задачей постепенную выработку в процессе семинарских занятий и неофициальных обсуждений, единой синтетической точки зрения на обсуждаемый материал. Впрочем, как указано в предисловии, такая общая точка зрения не может быть выражена словами, и должна складываться из всего многообразия частных подходов, точек зрения и аналитических описаний, представленных на симпозиуме. Было признано целесообразным в тех случаях, когда в лекциях излагались уже опубликованные результаты, не печатать текста лекций, заменяя их перепечаткой соответствующих статей (см. [1-12]), сопровождаемой краткими предисловиями (введениями) авторов, написанными специально для сборника.

В целом сборник «Гиперболические уравнения и волны» дает достаточно полное представление о современном состоянии этого раздела математики и математической физики.

Переходим к включенным в сборник работам. В этой рецензии мы можем дать лишь самое краткое и схематичное изложение содержания этих работ.

В лекциях Лайтхилла по волновой механике рассматриваются общие подходы к изучению распространения колебаний в средах, для которых скорость распространения колебаний зависит от частоты колебаний и их амплитуды. Эти лекции воспроизводят работы [1-7]. Затронутая в них тематика связана в основном с задачами гидромеханики и, в частности, с теорией распространения поверхностных волн. Некоторые из указанных выше статей опубликованы на русском языке в сборнике [13]. Как нам кажется, этот сборник дает достаточно подробное изложение проблематики и методов того направления, которое представлено в лекциях Лайтхилла. (Мы считаем полезным опубликовать в русском переводе работу [1]. Эта работа не содержит каких-либо существенно новых результатов, однако представляет собой весьма общее и в то же время наглядное изложение вопроса о групповой скорости. Основным аппаратом, используемым в ней, является изучение кинематики волновых гребней и метод суперпозиции плоских волн.)

Лекции Лере о не строго гиперболических операторах воспроизводят работы [8-11]. В этих работах рассматриваются гиперболические операторы специального вида:

$$a_1(x, D)\, a_2(x, D) \ldots a_p(x, D)\, u(x) = b(x, D)\, u(x) + v(x), \qquad (*)$$

где $x = (t, x_1, \ldots, x_m)$, $D = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$, а операторы $a_1(x, D) \ldots$ $\ldots a_p(x, D)$ — строго гиперболические операторы, т. е. операторы, не имеющие кратных характеристик.

Известно, что для строго гиперболических операторов решение задачи Коши всегда существует в классе функций, имеющих конечное число производных, если начальные данные содержатся в этом же классе. Известно также, что таких решений может не существовать, если оператор обладает кратными характеристиками. Уравнение $(*)$ не является строго гиперболическим, так как операторы $a_1, a_2, \ldots, a_p$ могут иметь совпадающие характеристики. В работах [9,10] доказывается, что для уравнения $(*)$ решение задачи Коши существует и единственно в классе бесконечно дифференцируемых по $x_1, \ldots, x_m$ функций, удовлетворяющих оценке

$$\sup_{\beta_1+\ldots+\beta_m\leqslant s} \frac{\partial^{n+\beta_1+\ldots+\beta_m} f}{\partial t^n \partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_m^{\beta_m}} \leqslant A^s(s!)^\alpha,$$

выполняющейся при любом $s \geqslant 0$, причем выбор чисел n, α зависит от оператора (*).

В работе [11] эти результаты переносятся на случай, когда $a_1, \ldots, a_p$ — квазилинейные гиперболические операторы. Тогда частным случаем уравнений (*) являются уравнения релятивистской магнитной гидродинамики. Автор указывает, что необходимость рассматривать для таких уравнений только бесконечно дифференцируемые решения весьма неудобна для применений. Однако в [11] доказано, что для этих уравнений сохраняется существенное требование релятивистской теории — конечность скорости распространения возмущений.

В лекциях Лере о задаче Коши излагаются результаты цикла работ автора (русские переводы см.[14–16]), посвященных задаче Коши для уравнений с голоморфными коэффициентами в случае голоморфных начальных данных, заданных на голоморфной поверхности S. При этом начальные данные могут иметь особые точки, а поверхность S — характеристические точки, и изучается поведение решения в окрестности таких точек.

В лекции Лере об интегралах Фейнмана излагается следующий результат:

Пусть $P_1, \ldots, P_M$ — полиномы от l переменных $x_l, \ldots, x_l$, алгебраически зависящие от m параметров $t_1, \ldots, t_m$; $a_1, \ldots, a_M$ — некоторые числа. Пусть D — такая область в пространстве $t_1, \ldots, t_m$, что при $t_1, \ldots, t_m \in D$ $P_1 \geqslant 0, P_2 \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, P_M \geqslant 0$ и что функция

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |P_1|^{a_1} |P_2|^{a_2} \ldots |P_M|^{a_M} dx_1 \ldots dx_l$$

— ограниченная функция при $t_1, \ldots, t_m \in D$. Тогда интеграл

$$F_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [P_k]^{a_k} dx_1 \ldots dx_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, M),$$

первоначально определенный лишь на D, является аналитической функцией в m-мерном комплексном пространстве $t_1, \ldots, t_m$, принадлежащей классу Нильсена (см.[17]), т. е. ветвящейся на некоторой алгебраической поверхности и в некотором смысле медленно растущей.

В лекциях Гординга по теории лакун излагаются результаты совместной работы Гординга, Атья и Ботта [17], в которой анализируется и обобщается классическая статья И. Г. Петровского [18] о диффузии волн и лакунах. Рассматривается гиперболическое уравнение $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$ и функция Грина для решения задачи Коши. Лакуной (по Петровскому) называется область, в которой функция Грина тождественно обращается в нуль или является полиномом по t. Устанавливаются условия (выраженные в терминах комплексной аналитической поверхности $P(\lambda, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$), необходимые и достаточные для того, чтобы рассматриваемая область была лакуной.

Лекция Тауба была посвящена общей релятивистской гидродинамике. Она опирается на две статьи. В первой из них[12] уравнения движения для специальной релятивистской гидродинамики выводятся, исходя из лоренц-инвариантной формулировки уравнений Больцмана. Далее для общей релятивистской гидродинамики выводятся уравнения для поля при помощи трех методов: 1) отыскание уравнений поля, исходя из метрики и алгебраических свойств тензора энергии-напряжений для газа; 2) прибавление к уравнениям закона сохранения количества частиц; 3) прибавление уравнения состояния, согласно которому давление p зависит лишь от плотности энергии W.

Во второй работе, опубликованной лишь в рассматриваемом сборнике (стр. 24—37), показано, что в случае 3) уравнения движения могут быть частично проинтегрированы, а уравнения поля могут быть получены как следствие некоторых вариационных принципов.

Далее идет написанный Дайсоном список литературы по пульсарам.

Лекция И. Бейды (стр. 39—50) была посвящена разностному методу решения плоской задачи динамической вязкопластичности. Рассматриваются малые деформации упругой вязкопластичной среды. Они описываются системой полулинейных уравнений, в которой коэффициенты при производных от неизвестных функций не зависят от этих функций. Поэтому уравнения бихарактеристик не зависят от неизвестных и систему удобно решать методом характеристик. Часть результатов лекции содержится в работе [19], где даны также численные примеры. Если нелинейные члены обращаются в нуль, то разностная схема, предложенная автором, переходит в схему из работы[20].

В лекции И. А. Смоллера (стр. 51—60) дан обзор современного состояния теории систем квазилинейных гиперболических уравнений вида

$$u_t+(f(u, v))_x=0, \qquad v_t+(g(u, v))_x=0. \qquad (**)$$

Примером такой системы является, например, система одномерных уравнений газовой динамики. Хорошо известно, что решения системы (**), даже принимающие гладкие начальные условия, становятся при росте t разрывными из-за возникновения ударных волн. Лекция излагает содержание работы[21], где доказано, что решение системы (**) существует при всех $t>0$, если начальные данные $u(x, 0)=u_0(x)$, $v(x, 0)=v_0(x)$ мало отличаются от константы, и работы[22], где доказывается, что если начальные функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ можно сколь угодно точно приблизить последовательностью левых волн разрежения и правых ударных волн, то решение существует при всех $t>0$ и также может быть приближено такой последовательностью.

В лекциях Ошера (стр. 61—84) рассматриваются разностные схемы для решения смешанной задачи в полупространстве для гиперболических и параболических систем линейных уравнений. Автор формулирует условия, при выполнении которых разностные схемы устойчивы, а для максимума модуля их решения существуют априорные оценки через максимум модуля данных Коши, не зависящие от величины шага.

Сформулированные критерии близки к критериям из монографии[23], а результаты, излагаемые в лекциях, содержатся частично в работах[24] и [25].

Наконец, в лекциях Херша излагается общая теория смешанных задач. Для эволюционного уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)u=0$ в области $t>0$; $x_1>0$; $-\infty<x_2, \ldots, x_n<\infty$ рассматривается смешанная задача

$$Pu=0, \quad u|_{t=0},$$

$$B_k\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)u|_{x_1=0}=f_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Отыскиваются условия (см.[26,27]) на операторы $B_1, B_2, \ldots, B_m$, при которых эта задача разрешима, корректна и имеет единственное решение. Кроме того, для гиперболического оператора P вводится понятие гиперболического краевого условия B, при котором скорость распространения возмущения в краевом условии конечна. Примером негиперболического краевого условия является уравнение $u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=0$, причем при $x=0$ поставлено краевое условие $u_t-u_{yy}=f(t, y)$.

Автор указывает, когда краевое условие является гиперболическим.

Далее приводятся возможные обобщения этих результатов. Автор ставит задачу о «склейке», когда при $x_1<0$ на функцию действует оператор $P_L: P_L u=0$, а при $x>0$ — оператор $P_R: P_R u=0$, и отыскиваются условия склейки, связывающие значения u при $x=0$ слева и справа, при которых задача разрешима и корректна (см. [28]). Далее, результаты работ[26], [27] можно перенести на разностные схемы[29]. Наконец, можно рассматривать задачу не в полупространстве $x_1>0$, а в полосе $0<x_1<1$ [30]. В этом случае существование решения требует более жестких условий на оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

В. А. Боровиков

ЛИТЕРАТУРА

1. M J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl. **1**, 1 (1965).
2. M. J. Lighthill, J. Fluid Mech. **27** (4), 725 (1967).
3. G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. **A299**, 6 (1967) (см. перевод в[13]).
4. M. J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl. **1**, 269 (1965).
5. F. P. Bretherton, I. R. Garret, Proc. Roy. Soc. **A302**, 529 (1969).
6. M. J. Lighthill, Proc. Roy. Soc. **A299**, 28 (1967) (см. перевод в[13]).
7. M. S. Howe, J. Fluid Mech. **32** (4), 779 (1968) (см. перевод в[13]).
8. J. Leray, Math. Ann. **162**, 228 (1966).
9. J. Leray, Y. Ohya, Systèmes Linéaires, Hyperboliques Non-Stricts. Centre Belge de Rechuchs Mathematiques Deuxième Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, p. 105.
10. J. Leray, L. Waelbroeck, Norme Formelle d'une Fonction Composée (Prèliminaire à l'Etude des Systèmes Non-Linéaires, Hyperboliques Non-Stricts), там же, p. 145.
11. J. Leray et Y. Ohya, Math. Ann. **170**, 167 (1967).
12. A. H. Taub, Relativistic Hydrodinamics, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 8, p. 170.

13. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
14. Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, М., ИЛ, 1961.
15. Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котаке, Задача Коши, М., «Мир», 1967.
16. Ж. Лере, Обобщенное преобразование Лапласа, М., «Мир», 1969.
17. M. F. Atiyah, R. Bott, L. Gårding, Acta Mathematica **124**, 109 (1970). Русский перевод см. УМН **XXVI**, вып. 2 (158), 25 (1971).
18. И. Г. Петровский, Матем. сборник (новая серия) **17**, 289 (1945).
19. J. Bejda, Propagation of Two-dimensional Stress Waves in an Elastic/Visco Plastic Material, Proc. of 12th International Congress of Applied Mechanics, Stanford (August 26—30, 1968). (Ed. M. Hetényi and W. G. Wincenti), Springer-Verlag, (1969).
20. P. D. Lax, B. Wendroff, Comm. Pure Appl. Math. **17**, 381 (1964).
21. J. Glimm, Comm. Pure Appl. Math. **18**, 697 (1965).
22. J. L. Johnson, J. A. Smoller, Arch. Rational Mech. Anal. **32**, 169 (1969).
23. С. К. Годунов, В. С. Рябенький, Введение в теорию разностных схем, М., Физматгиз, 1962.
24. H. O. Kreiss, Math. Comp. 22, 703 (1968).
25. S. Osher, A. M. S. Transactions **137**, 177 (1969).
26. R. Hersh, Arch. Rat. Mech. and Anal. **12**, 317 (1963).
27. R. Hersh, Arch. Rat. Mech. and Anal. **16**, 243 (1964).
28. R. Hersh, Arch. Rat. Mech. and Anal. **21**, 368 (1966).
29. R. Hersh. SIAM Jour. Numer. Anal. **5** (2), 436 (1968).
30. R. Hersh, The Method of Reflection for Two-sided Problems of General Type. Denver Univ. NSF Conference on Stability Theory of Initial-Boundary Value Problems (1968).