1971 г. Июнь Том 104, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.951

КРИТЕРИИ НАРАСТАНИЯ ВОЛН

А. И. Ахиезер, Р. В. Половин

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости динамических систем возникает в самых различных задачах физики и техники.

Если параметры, характеризующие систему. сосредоточены в отдельных точках, так что система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, то проблема устойчивости, как правило, может быть решена на основе линейного приближения. Для динамических систем не с сосредоточенными, а с распределенными параметрами ситуация значительно усложняется, так как такие системы описываются не обыкновенными дифференциальными уравнениями, а либо уравнениями в частных производных, либо интегро-дифференциальными уравнениями (эти уравнения могут быть и нелинейными). Характеристические частоты, которые для систем с сосредоточенными параметрами образуют дискретный спектр, для систем с распределенными параметрами могут образовывать непрерывный спектр. В этом случае суперпозиции характеристических решений будут иметь вид не сумм, а интегралов, асимптотическое поведение которых при возрастании времени t не будет совпадать, вообще говоря, с асимптотическим поведением подынтегрального выражения. Поэтому уже в линейном приближении исследование устойчивости систем с распределенными параметрами оказывается значительно более сложным, чем исследование устойчивости систем с сосредоточенными параметрами.

Целью настоящего обзора является изложение теории устойчивости динамических систем с распределенными, не зависящими от времени и координат параметрами в линейном приближении.

Динамическую систему мы будем предполагать достаточно протяженной. В этом случае линеаризованные уравнения для величин $\mathbf{u}_\alpha \equiv \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$, характеризующих состояние системы *), имеют решения в виде плоских

*) Совокупность этих величин мы будем называть вектором состояния динамической системы.

волн

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор и ω — собственные частоты системы.

Если уравнения, описывающие систему, являются уравнениями в частных производных, то существует определенная зависимость между частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Эта зависимость носит алгебраический характер, т. е. существует уравнение

$$D(\mathbf{k},\ \omega) = 0, \tag{1,1}$$

где $D(\mathbf{k}, \omega)$ — некоторый полином. Это уравнение называется дисперсионным уравнением.

Если исходные уравнения, описывающие систему, являются интегро-дифференциальными, то частота не является, вообще говоря, определенной функцией волнового вектора. Однако такая функциональная зависимость возникает асимптотически при больших значениях t. При этом мы снова получаем дисперсионную зависимость (1,1), где $D(\mathbf{k}, \omega)$ уже не полином, а некоторая трансцендентная функция. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только алгебраических дисперсионных уравнений *) и покажем, что эти уравнения позволяют выяснить характер неустойчивости в линейном приближении.

2. АБСОЛЮТНАЯ И КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Если некоторым вещественным значениям волнового вектора $\mathbf{k}$ соответствуют комплексные значения частоты ω с $\operatorname{Im}\omega > 0$, то возмущение, имеющее вид плоской монохроматической волны $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, будет неограниченно возрастать со временем и рассматриваемая динамическая система будет неустойчивой.

В действительности малые возмущения не имеют вид отдельных плоских монохроматических волн, а представляют собой волновые пакеты, т. е. суперпозиции плоских монохроматических волн. Асимптотическое же поведение волнового пакета может существенно отличаться от поведения отдельных волн. Именно, если в волновом пакете отдельные компоненты неограниченно возрастают со временем, то тем не менее весь пакет в целом может оставаться ограниченным в фиксированной точке пространства, так как возмущение может «сноситься» вниз по течению. Поэтому для выяснения характера неустойчивости динамической системы необходимо решить задачу о развитии начального возмущения.

Будем предполагать, что вектор состояния $u = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами **):

$$\sum_{\beta=1}^{n} P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) u_\beta(x,\ t) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2,1}$$

где $P_{\alpha\beta}$ — некоторые полиномы относительно $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$ с постоянными коэффициентами. Мы должны найти решение этой системы уравнений, удовлетворяющее произвольным начальным условиям $u_1(x,\ 0),\ u_2(x,\ 0),\ \ldots$ $\ldots,\ u_n(x,\ 0)$.

Если в волновом пакете $u(x,\ t)$, несмотря на наличие компонент с $\operatorname{Im}\omega > 0$, возмущение при $x = \text{const}$ и $t \to \infty$ остается ограниченным

*) Исследование трансцендентных дисперсионных уравнений дано в работе [1].

**) Мы для простоты ограничиваемся рассмотрением одномерного случая; исследование многомерного случая см. в [2].

(обычно оно стремится при этом к нулю),

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x=\mathrm{const}}} u(x,\ t)=0, \tag{2,2}$$

то говорят о *конвективной* или сносовой неустойчивости.

Если же возмущение $u(x,\ t)$ неограниченно возрастает при фиксированном x и $t\to\infty$,

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x=\mathrm{const}}} u(x,\ t)=\infty, \tag{2,3}$$

то неустойчивость называют *абсолютной* *).

Таким образом, при исследовании неустойчивости недостаточно убедиться в существовании комплексных частот у дисперсионного уравнения $D(\mathbf{k},\ \omega)=0$, а необходимо еще выяснить, как ведет себя волновой пакет в фиксированной точке пространства при $t\to\infty$.

Ясно, что в случае абсолютной неустойчивости существование равновесного состояния $u=0$ невозможно. Действительно, нарастание случайных возмущений (которые всегда возникают, хотя бы из-за тепловых флуктуаций) приведет либо к переходу в устойчивое состояние, либо к разрушению рассматриваемого состояния. В случае же конвективной неустойчивости равновесное состояние $u=0$ может существовать. При этом в системе устанавливается стационарный (т. е. не зависящий от времени) уровень возмущений, соответствующий равновесным тепловым флуктуациям на входе системы.

Если система является неустойчивой, то она может быть использована для генерирования колебаний. Можно сказать, что для генерирования необходима абсолютная неустойчивость.

Если система обладает конвективной неустойчивостью, то возмущение «сносится по течению»; это значит, что этому виду неустойчивости соответствует усиление, а не генерирование колебаний, иными словами, системы с конвективной неустойчивостью могут быть усилителями колебаний. Следует, однако, иметь в виду, что системы с конвективной неустойчивостью также могут быть использованы для генерирования колебаний, если связать в них *вход* и *выход*; благодаря этому осуществляется обратная связь, и «снесенное» возмущение возвращается обратно, т. е. неустойчивость в системе приобретает абсолютный характер.

Чтобы сформулировать критерии абсолютной и конвективной неустойчивостей, свяжем предварительно вектор состояния u_α с функцией Грина $g(x,\ t)$ уравнений (2,1):

$$u_\alpha(x,\ t)=L_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)g(x,\ t),$$

где $L_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)$ — некоторый дифференциальный оператор, связанный простыми соотношениями с операторами $P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)$, и функция $g(x,\ t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D\left(-i\frac{\partial}{\partial x},\ i\frac{\partial}{\partial t}\right)g(x,\ t)=\delta(x)\,\delta(t),$$

где D — полином относительно $-i\frac{\partial}{\partial x}$, $i\frac{\partial}{\partial t}$, $D\left(-i\frac{\partial}{\partial x},\ i\frac{\partial}{\partial t}\right)\equiv$

*) Понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей были введены Твиссом [3] и Ландау и Лифшицем [4].

$\equiv \det \left| P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right|$, входящий в левую часть дисперсионного уравнения (1,1).

Сделав преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате в последнем уравнении, получим

$$g(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega} e^{-i\omega t}\, d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}\, dk}{D(k, \omega)}, \tag{2,4}$$

где Ω — прямая в комплексной плоскости ω, параллельная вещественной оси и проходящая выше всех особых точек подынтегрального выражения.

Выполним в формуле (2,4) сперва интегрирование по ω:

$$g(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{e^{ikx - i\omega_\alpha(k)t}}{D_\omega[k, \omega_\alpha(k)]}\, dk,$$

где $D_\omega \equiv \partial D/\partial\omega$ и суммирование производится по всем корням дисперсионного уравнения (1,1) $\omega = \omega_\alpha(k)$.

Положим в этой формуле $x = 0$ и заменим в подынтегральном выражении переменную интегрирования k на ω_α:

$$g(0, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha} \int\limits_{\Omega_\alpha} \frac{e^{-i\omega_\alpha t}\, d\omega_\alpha}{D_\omega[k(\omega_\alpha), \omega_\alpha]\frac{d\omega_\alpha}{dk}}, \tag{2,5}$$

где Ω_α — контур, описываемый точкой ω_α в комплексной плоскости, когда величина k пробегает вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$. (Так как мы рассматриваем случай неустойчивости, то некоторым вещественным значениям k соответствуют $\operatorname{Im}\omega_\alpha > 0$.)

Будем теперь деформировать контуры интегрирования Ω_α, опуская их вниз: $\operatorname{Im}\Omega_\alpha \to -\infty$. При этом интеграл (2,5) представится как сумма членов вида $e^{-i\omega_\beta t}$, где ω_β — особые точки подынтегрального выражения. Обычно особыми точками являются точки ветвления ω_β функции $k(\omega)$.

Если между контуром Ω_α и вещественной осью ω_α находится хотя бы одна точка ветвления функции $k = k(\omega)$, расположенная в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\omega_\beta > 0$, то имеет место абсолютная неустойчивость. Если же ни при каком значении α в верхней полуплоскоси $\operatorname{Im}\omega_\beta > 0$ нет точек ветвления функции $k(\omega)$, то неустойчивость будет конвективной [5].

Исследуем в качестве примера дисперсионное уравнение

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) + m = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\omega_{1,2}(k) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\, k \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_1 - v_2)^2 k^2 - 4m}. \tag{2,6}$$

Если $m > 0$ и

$$-\frac{2\sqrt{m}}{|v_1 - v_2|} < k < \frac{2\sqrt{m}}{|v_1 - v_2|},$$

то частота ω будет комплексной. При этом одно из значений ω имеет положительную мнимую часть, что означает наличие неустойчивости. Для выяснения характера этой неустойчивости найдем обратную функцию

$$k(\omega) = \frac{(v_1 + v_2)\,\omega \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 \omega^2 - 4v_1 v_2 m}}{2v_1 v_2}.$$

Мы видим, что функция $k(\omega)$ имеет точки ветвления при

$$\omega = \pm \frac{2\sqrt{v_1 v_2 m}}{v_1 - v_2}.$$

Если $m > 0$ и $v_1 v_2 > 0$, то точки ветвления лежат на вещественной оси, т. е. неустойчивость является конвективной.

Покажем, что при $m > 0$, $v_1 v_2 < 0$ одна из точек ветвления

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{|v_1 v_2| m}}{|v_1 - v_2|} i$$

функции $k(\omega)$ лежит в верхней полуплоскости между контуром Ω_α и вещественной осью ω, т. е. при $m > 0$, $v_1 v_2 < 0$ имеет место абсолютная неустойчивость. Рассмотрим с этой целью контур Ω_1, определяемый формулой (2,6) и расположенный в верхней полуплоскости ω.

Полагая

$$\omega = \alpha + i\beta,$$

получим уравнение части контура Ω_1, расположенной в верхней полуплоскости,

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2 \alpha^2 - m^2}.$$

Так как в точке ветвления $\omega_0 = \alpha_0 + i\beta_0$

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \frac{2\sqrt{|v_1 v_2| m}}{|v_1 - v_2|}$$

и $2\sqrt{|v_1 v_2|} \leqslant |v_1 - v_2|$ при $v_1 v_2 < 0$, то точка ветвления ω_0 расположена между контуром Ω_1 и вещественной осью, т. е. при $m > 0$, $v_1 v_2 < 0$ имеет место абсолютная неустойчивость.

При выводе критерия абсолютной неустойчивости мы выполнили в формуле (2,4) сперва интегрирование по ω. Можно получить другую форму этого критерия, если выполнить в формуле (2,4) сперва интегрирование по k. Применяя теорему о вычетах, получим

$$g(x, t) = \begin{cases} \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_\Omega \sum_r \frac{e^{ik_r(\omega)x - i\omega t}}{D_k[k_r(\omega), \omega]} d\omega & \text{при} \quad x > 0, \\ -\dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_\Omega \sum_l \frac{e^{ik_l(\omega)x - i\omega t}}{D_k[k_l(\omega), \omega]} d\omega & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{2,7}$$

где $D_k \equiv \partial D/\partial k$ и $k_r(\omega)$, $k_l(\omega)$ — корни дисперсионного уравнения, лежащие при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ соответственно в верхней или нижней полуплоскости,

$$\operatorname{Im} k_r(\omega) > 0, \quad \operatorname{Im} k_l(\omega) < 0 \quad (\operatorname{Im}\omega \to +\infty).$$

Будем говорить, что слагаемые $k_r(\omega)$, входящие в верхнюю сумму (2,7), описывают волны, распространяющиеся вправо, а слагаемые $k_l(\omega)$, входящие в нижнюю сумму, — волны, распространяющиеся влево.

Особыми точками подынтегрального выражения (2,7) могут быть только точки ветвления функции $k(\omega)$. Однако не все точки ветвления функции $k(\omega)$ вносят вклад в интеграл (2,7). Если в точке ветвления ω_0 становятся равными величины $k_\alpha(\omega)$ и $k_\beta(\omega)$, соответствующие двум волнам, распространяющимся в одну сторону, то (так как в формуле (2,7) производится суммирование по r или по l) точка ω_0 не будет в действительности точкой ветвления подынтегрального выражения. Поэтому критерий абсолютной неустойчивости состоит в том, что в верхней полуплоскости ω, $\operatorname{Im}\omega > 0$, должна находиться точка ветвления функции $k(\omega)$, в которой совпадают две ветви этой функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположные стороны [6]:

$$k_r(\omega) = k_l(\omega).$$

В противном случае неустойчивость будет конвективной.

Исследуем, используя эту формулировку критерия абсолютной и конвективной неустойчивостей, характер неустойчивости системы, характеризуемой дисперсионным уравнением

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) + m = 0 \quad (m > 0),$$

которое мы уже рассматривали выше.

Если $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, то мнимая часть функции

$$k(\omega) = \frac{(v_1 + v_2)\,\omega \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2\,\omega^2 - 4v_1v_2m}}{2v_1v_2}$$

при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ будет положительной. Поэтому при $v_1 > 0$, $v_2 > 0$ обе волны распространяются вправо и, следовательно, абсолютной неустойчивости не будет, т. е. неустойчивость будет конвективной.

Если же $v_1v_2 < 0$, то одна из волн $k(\omega)$ распространяется вправо, а другая влево. При этом одна из точек ветвления, а именно,

$$\omega = \frac{2\sqrt{|v_1v_2|\,m}}{|v_1 - v_2|}\,i,$$

расположена в верхней полуплоскости. Таким образом, при $v_1v_2 < 0$ мы имеем дело с абсолютной неустойчивостью.

Как мы уже указывали, при конвективной неустойчивости возмущение, нарастая, в то же время сносится по течению. Если s представляет собой скорость «сноса» пакета, то, очевидно, в системе отсчета, движущейся со скоростью s, возмущение будет неограниченно возрастать, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} u(st,\ t) = \infty. \tag{2,8}$$

Иными словами, конвективная неустойчивость в этой системе отсчета становится абсолютной. Скорость s равна [7]

$$s = \left(\frac{d\,\operatorname{Re}\omega(k)}{dk}\right)_{k=k_0}, \tag{2,9}$$

где k_0 — значение волнового числа, при котором

$$\frac{d\,\operatorname{Im}\omega(k)}{dk} = 0$$

(ω и k связаны дисперсионным уравнением (1,1)). Выражение (2,9) является обобщением известного выражения для групповой скорости на случай волн, нарастающих во времени [8].

В случае простейшего дисперсионного уравнения

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) + m = 0$$

скорость сноса s является средним арифметическим скоростей v_1 и v_2:

$$s = \frac{1}{2}(v_1 + v_2).$$

3. УСИЛЕНИЕ И НЕПРОПУСКАНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Перейдем теперь к рассмотрению усиления колебаний.

Усиливаться могут, очевидно, те колебания, для которых $\operatorname{Im} k < 0$ при вещественных ω (система предполагается полубесконечной, $x > 0$, ось x выбрана таким образом, чтобы усиливаемые волны двигались в сторону возрастающих значений x).

Однако самого по себе условия $\operatorname{Im} k < 0$ при вещественных ω еще недостаточно для усиления колебаний. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим монохроматическую волну $e^{i(kx-\omega t)}$, распространяющуюся в плоском волноводе. В этом случае дисперсионное уравнение имеет, как легко убедиться, вид

$$\omega^2 = k^2c^2 + a^2, \tag{3,1}$$

где c — скорость света, $a = n\pi c/d$ (d — расстояние между плоскостями волновода, n — целое число). При $|\omega| < a$ уравнение (3,1) имеет два мнимых корня:

$$\left.\begin{aligned} k_1(\omega) &= \frac{i}{c}\sqrt{a^2-\omega^2}, \\ k_2(\omega) &= -\frac{i}{c}\sqrt{a^2-\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3,2}$$

Корню $k_1(\omega)$ соответствует волна с экспоненциально убывающей при $x > 0$ амплитудой

$$u_1 = A_1 \exp\left(-\frac{x}{c}\sqrt{a^2-\omega^2} - i\omega t\right),$$

а корню $k_2(\omega)$ — волна с экспоненциально нарастающей амплитудой

$$u_2 = A_2 \exp\left(\frac{x}{c}\sqrt{a^2-\omega^2} - i\omega t\right).$$

В области $x > 0$ эта волна приводила бы к экспоненциально нарастающей энергии колебаний, что невозможно, так как в рассматриваемой задаче отсутствует внешний источник энергии. Очевидно этому решению соответствует в действительности не нарастающая волна, двигающаяся в положительном направлении оси x, а затухающая волна, двигающаяся в противоположном направлении. Если источник энергии расположен в плоскости $x = 0$, то нарастающее решение следует отбросить. Можно сказать, что в рассматриваемом случае, несмотря на то, что $\operatorname{Im} k < 0$, имеет место не усиление колебаний, а их *непропускание* *).

В рассмотренном случае ситуация очень проста и выяснение характера распространяющихся колебаний при $\operatorname{Im} k < 0$ не представляет затруднений. Могут, однако, представиться более сложные случаи, когда отличить усиление от непропускания колебаний не так просто. Такие случаи возникают всякий раз, когда в системе имеются внешние источники энергии. В качестве примера можно привести систему плазма — пучок заряженных частиц. В этом случае пучок все время доставляет энергию в плазму, и выяснение вопроса о том, каков характер распространяющихся при этом колебаний, требует специального анализа.

Сформулируем математически, в чем состоит различие между усилением и непропусканием колебаний.

Обозначим через $k_\beta \equiv k_\beta(\omega)$ ($\beta = 1, 2, \ldots, n$) различные решения дисперсионного уравнения относительно k. Ясно, что вектор состояния

---

*) Понятия усиления и непропускания колебаний были введены Твиссом [9].

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ системы можно представить в виде

$$u_\alpha(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}(\omega)\, e^{ik_\beta(\omega)x - i\omega t}\, d\omega, \tag{3,3}$$

где коэффициенты $b_{\alpha\beta}(\omega)$ определяются возмущениями $u_\alpha(0, t)$ на границе области $x = 0$. Величины $u_\alpha(0, t)$ можно всегда выбрать таким образом, чтобы вектор состояния во все моменты времени обращался в нуль при $x < 0$:

$$u_\alpha(x, t) = 0, \quad x < 0. \tag{3,4}$$

Таким выбором граничного возмущения вектора состояния мы достигаем того, что в системе все волны будут распространяться в определенном направлении, а именно, в положительном направлении оси x.

Зафиксируем теперь значение β, которому соответствует $\operatorname{Im} k_\beta < 0$. При этом могут представиться два случая: либо некоторые из величин $b_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ отличны от нуля, либо все они равны нулю. В первом случае имеет место усиление волны с волновым числом $k = k_\beta$, во втором же случае имеет место непропускание этой волны [9-11].

Таким образом, для того чтобы волна с волновым числом $k = k_\beta$ усиливалась, недостаточно выполнения условия $\operatorname{Im} k_\beta < 0$. Необходимо еще, чтобы эта волна содержалась в волновом пакете (3,3), удовлетворяющем условию (3,4).

Чтобы установить критерий усиления и непропускания колебаний, выберем величины $u_\alpha(x, t)$ таким образом, чтобы все волны распространялись в положительном направлении оси x, т. е. чтобы выполнялось условие (3,4).

При этом мнимая часть $k(\omega)$ для волн, движущихся вправо, должна быть при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ положительной. С другой стороны, условие пространственного нарастания волн имеет, очевидно, вид $\operatorname{Im} k(\omega) < 0$ (ω — вещественно).

Таким образом, для усиления волн необходимо, чтобы мнимая часть функции $k(\omega)$ имела при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ и $\operatorname{Im}\omega = 0$ противоположные знаки. Если же знак $\operatorname{Im} k(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ и $\operatorname{Im}\omega = 0$ один и тот же, то имеет место непропускание колебаний [6].

Рассмотрим в качестве примера систему с дисперсионным уравнением

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) + m = 0.$$

Решая это уравнение относительно k, получим

$$k_1(\omega) = \frac{(v_1+v_2)\,\omega + \sqrt{(v_1-v_2)^2\,\omega^2 - 4v_1v_2m}}{2v_1v_2},$$

$$k_2(\omega) = \frac{(v_1+v_2)\,\omega - \sqrt{(v_1-v_2)^2\,\omega^2 - 4v_1v_2m}}{2v_1v_2}.$$

Если $v_1v_2m < 0$, то любым вещественным значениям ω соответствуют вещественные значения k. В этом случае происходит пропускание колебаний. (В действительности, как было показано в разделе 2, при $m > 0$, $v_1v_2 < 0$ система абсолютно неустойчива.)

Если же $v_1v_2m > 0$, то при

$$-\frac{2\sqrt{v_1v_2m}}{|v_1-v_2|} < \omega < \frac{2\sqrt{v_1v_2m}}{|v_1-v_2|} \tag{3,5}$$

величина k становится комплексной. Если к тому же $v_1v_2 < 0$, $v_1 + v_2 > 0$, то для двух волн с волновыми векторами $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega = 0$

и $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ имеют место неравенства

$$\operatorname{Im} k_1(\omega) < 0, \quad \operatorname{Im} k_2(\omega) > 0.$$

Так как $\operatorname{Im} k_{1,2}(\omega)$ не изменяет знака при переходе от $\operatorname{Im}\omega = 0$ к $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$, то рассматриваемая система не пропускает колебаний в интервале частот (3,5), в котором $\operatorname{Im} k \neq 0$.

Если выполняются неравенства

$$v_1 v_2 m > 0, \quad v_1 > 0, \quad v_2 > 0,$$

то обе волны с волновыми числами $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$ имеют при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$ положительную мнимую часть. При $\operatorname{Im}\omega = 0$ имеют место неравенства

$$\operatorname{Im} k_1(\omega) > 0, \quad \operatorname{Im} k_2(\omega) < 0.$$

Поэтому решению $k_1(\omega)$ соответствует непропускание колебаний, а решению $k_2(\omega)$ — усиление колебаний.

Отметим, что усиливаемое возмущение удовлетворяет условию причинности

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ t = \text{const}}} u_\alpha(x, t) = 0. \tag{3,6}$$

Это условие можно рассматривать как определение усиления [12, 13]. Условие (3,6) позволяет отбросить волны, движущиеся влево, и заменяет тем самым граничные условия (3,4).

Для отбрасывания волн, движущихся влево, можно также воспользоваться одним свойством преобразования Фурье — Лапласа

$$u_\alpha(k, p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} u_\alpha(x, t)\, dx,$$

вытекающим из граничного условия (3,4) и из очевидного условия

$$u_\alpha(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{3,7}$$

Из этих условий следует [6, 14], что преобразование Фурье — Лапласа $u_\alpha(k, p)$ должно быть аналитической функцией обеих переменных при $\operatorname{Im} k < 0$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Существенным является то обстоятельство, что волновой пакет как целое усиливается в пространстве, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} u_\alpha\left(x, \frac{x}{s'}\right) = \infty, \tag{3,8}$$

где s' — некоторая величина, характерная для системы. Именно

$$s' = \frac{1}{\left(\frac{d \operatorname{Re} k}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}}, \tag{3,9}$$

где ω_0 — значение частоты, при которой

$$\frac{d \operatorname{Im} k}{d\omega} = 0.$$

Величина s' является обобщением групповой скорости на случай волн, нарастающих в пространстве.

В случае дисперсионного уравнения

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) + m = 0$$

величина s' равна среднему гармоническому скоростей v_1 и v_2:

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right).$$

Так как при $v_1>0$, $v_2>0$ среднее арифметическое больше среднего гармонического, то групповая скорость волн, нарастающих во времени, больше групповой скорости волн, нарастающих в пространстве:

$$s>s'.$$

4. ПРАВИЛА СТЭРРОКА

Практическое применение сформулированных в предыдущих разделах критериев неустойчивости и усиления волн связано, вообще говоря, с большими трудностями, так как нахождение точек ветвления функций в областях, ограниченных вещественными осями плоскостей ω_α и контурами Ω_α (которые сами должны быть определены), а также нахождение направления распространения волн представляет собой сложную и трудоемкую задачу.

Значительные упрощения наступают в том случае, когда дисперсионное уравнение $D(k, \omega)=0$ представляет собой алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами, распадающееся в области больших значений $|k|$ или, что то же самое, в области больших значений $|\omega|$ на произведение множителей вида $\omega - vk$, где v — некоторая константа, отличная от нуля. (Это предположение соответствует условию конечности скорости распространения сигнала *).) Для систем с такого рода дисперсионным уравнением расположение точек ветвления, а следовательно, и характер неустойчивости может быть установлен из общего вида кривой, изображающей дисперсионное уравнение в плоскости (k, ω).

Четыре типичные дисперсионные кривые изображены на рис. 1. Рис. 1, *а* и 1, *б* соответствуют устойчивые системы, а рис. 1, *в* и 1, *г* — неустойчивые системы. Различие между рис. 1, *в* и 1, *г* заключается в том, что в первом случае асимптоты дисперсионной кривой наклонены в разные стороны, а во втором — в одну сторону. Можно показать, что рис. 1, *в* соответствует абсолютная неустойчивость, а рис. 1, *г* — конвективная неустойчивость.

Таким образом, неустойчивость будет абсолютной или конвективной в зависимости от того, наклонены ли асимптоты в разные стороны или в одну сторону (*первое правило Стэррока* [12]).

Разъясним теперь, как по дисперсионной кривой различить усиление и непропускание колебаний.

Рис. 1, *а* и 1, *в* соответствует пропускание колебаний, а рис. 1, *б* и 1, *г* — либо усиление, либо непропускание колебаний. Различие между рис. 1, *б* и 1, *г* состоит в том, что в первом случае асимптоты наклонены в разные стороны, а во втором случае — в одну сторону. Можно показать, что рис. 1, *б* соответствует непропускание колебаний, а рис. 1, *г* — усиление колебаний.

Заметим, что в случае, когда дисперсионное уравнение является полиномом второго порядка,

$$(\omega-kv_1)(\omega-kv_2)+m=0,$$

*) Иными словами, в этом разделе мы полагаем, что система дифференциальных уравнений (2,1) относится к гиперболическому типу. Заметим, что критерии, полученные в двух предыдущих разделах, справедливы для более широкого класса систем дифференциальных уравнений, для которых корректна задача Коши [2], в частности, для систем параболического типа [15].

осуществляются все четыре случая, изображенных на рис. 1, *а* — *г*. Рис. 1, *а* соответствует $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $m < 0$; рис. 1, *б* — $v_1 v_2 < 0$, $m < 0$; рис. 1, *в* — $v_1 v_2 < 0$, $m > 0$ и, наконец, рис. 1, *г* — $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $m > 0$.

Таким образом, если асимптоты дисперсионной кривой наклонены в разные стороны, то имеет место непропускание колебаний, если же

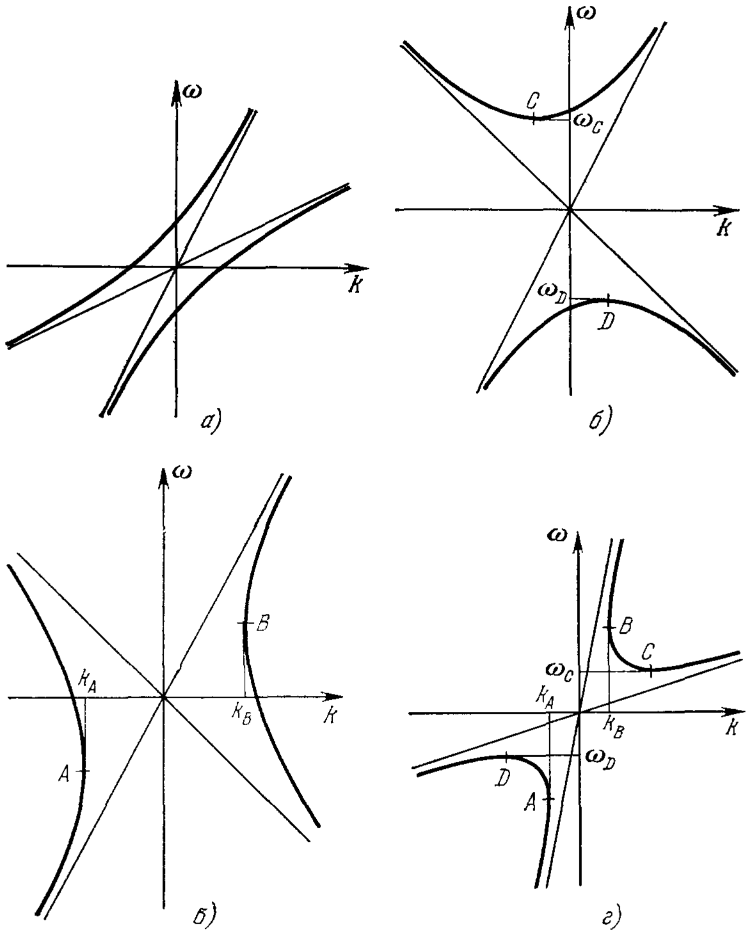

Рис. 1. Типичные дисперсионные кривые.

а) Устойчивость, пропускание; *б*) устойчивость, непропускание; *в*) абсолютная неустойчивость, пропускание; *г*) конвективная неустойчивость, усиление.

асимптоты наклонены в одну сторону, то имеет место усиление колебаний (*второе правило Стэррока* *)).

Мы видим, что одна и та же дисперсионная кривая может соответствовать и задаче о неустойчивости и задаче об усилении волн, причем если имеет место абсолютная неустойчивость, то имеет место также пропускание колебаний. Если же система конвективно неустойчива, то с помощью ее можно также и усиливать колебания. Какая из этих двух возможностей осуществляется, зависит, естественно, от конкретной физической постановки задачи.

*) Эти правила были получены Стэрроком [12], однако доказательство содержало неточности, устранению которых посвящена работа [16]. Эвристический вывод правил Стэррока, связанный с понятием характеристик, приведен в [11] (см. также [17]).

Проиллюстрируем изложенные правила на примере двухлучевой лампы [18], дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$\frac{\omega_1^2}{(\omega-ku_1)^2}+\frac{\omega_2^2}{(\omega-ku_2)^2}=1, \qquad (4,1)$$

где

$$\omega_{1,2}^2=\frac{4\pi e^2 n_{1,2}}{m_{1,2}},$$

$n_{1,2}$ и $u_{1,2}$ — плотности и скорости частиц обоих сортов, $m_{1,2}$ — массы частиц. Этому уравнению соответствует дисперсионная кривая, изображенная на рис. 2, *а*, если скорости u_1 и u_2 направлены в одну сторону,

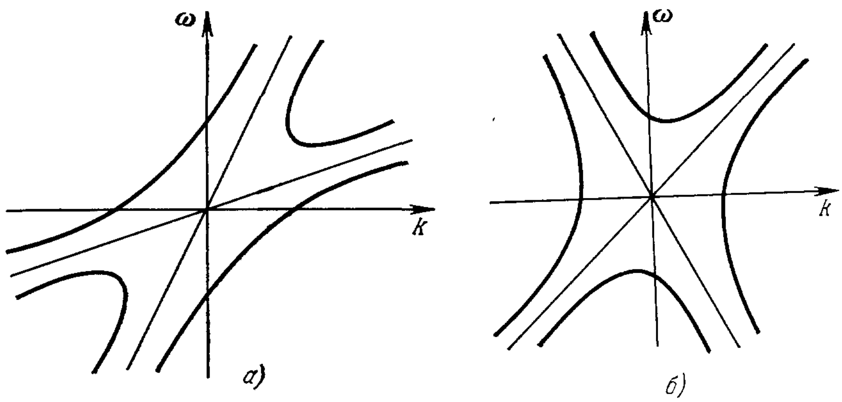

Рис. 2. Дисперсионная кривая двухлучевой лампы.
а) Скорости пучков параллельны; *б*) скорости пучков антипараллельны.

и дисперсионная кривая, изображенная на рис. 2, *б*,— если скорости u_1 и u_2 направлены в противоположные стороны. Из этих рисунков непосредственно видно, что при одинаковых знаках u_1 и u_2 имеется полоса усиления и полоса конвективной неустойчивости, а при разных знаках u_1 и u_2 — полоса непропускания и полоса абсолютной неустойчивости.

Использование правил Стэррока приводит к затруднениям в том случае, когда перекрываются полосы неустойчивости или полосы усиления и непропускания. В этом случае следует ввести в дисперсионное уравнение некоторый параметр ξ, варьируя который, можно добиться того, что полином $D(k, \omega)$ распадается на произведение линейных множителей вида $\omega - v_j k - a_j$. Для определенности будем считать, что значение параметра $\xi = 1$ соответствует исходному уравнению, а значение $\xi = 0$ — разбиению полинома на множители.

Очевидно, при $\xi = 0$ дисперсионная кривая будет представлять собой совокупность прямых. Будем считать, что в каждой точке пересекается не более двух прямых и что при изменении ξ в интервале $0 < \xi \leqslant 1$ топологический характер дисперсионных кривых не изменяется.

При малых ξ полосы неустойчивости (или усиления) будут расположены вблизи точек пересечения прямых $\omega - v_j k - a_j = 0$, на которые распадается дисперсионная кривая при $\xi = 0$. С другой стороны, так как предполагается, что прямые пересекаются попарно, то при малых ξ дисперсионные кривые должны быть, очевидно, подобны кривым, изображенным на рис. 1.

Можно показать, что при непрерывном увеличении параметра ξ характер неустойчивости не может измениться. Это позволяет определить характер неустойчивости исходного дисперсионного уравнения, соответствующего значению параметра $\xi = 1$.

Рассмотрим в качестве примера дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_b^2}{(\omega - ku_b)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 v_p^2} = 1, \qquad (4,2)$$

которому в случае

$$\omega_b < \omega_p, \quad v_p < u_b < v_p \sqrt{1 + \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2}} \qquad (4.3)$$

соответствует дисперсионная кривая, изображенная на рис. 3, *в*.

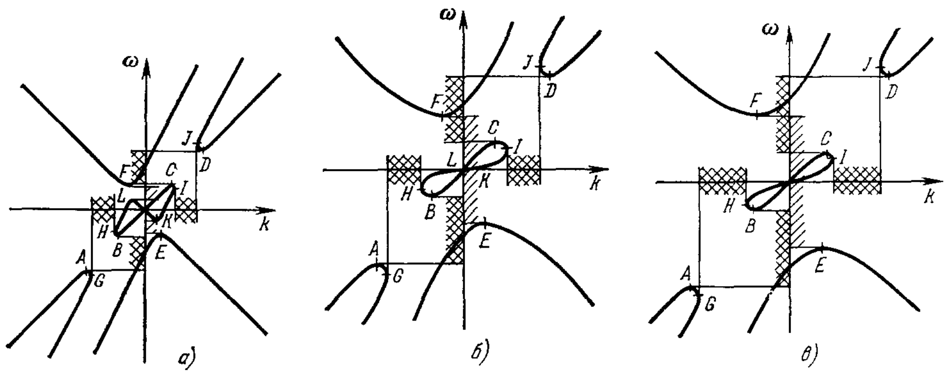

Рис. 3. Сведение дисперсионного уравнения к полиному второго порядка.
а) Малые ξ, *б)* $\xi = \xi_0$; *в)* $\xi = 1$.

Будем считать величину ω_p^2 переменной и заменим ω_p^2 на $\omega_p^2 \xi$:

$$\frac{\omega_b^2}{(\omega - ku_b)^2} + \frac{\omega_p^2 \xi}{\omega^2 - k^2 v_p^2} = 1. \qquad (4,4)$$

При $\xi = 0$ уравнение (4,4) распадается на четыре линейных уравнения

$$\omega - ku_b = \pm\, \omega_b, \qquad \omega = \pm\, kv_p,$$

и дисперсионная кривая вырождается в четыре прямые.

При малых ξ дисперсионная кривая имеет вид, изображенный на рис. 3, *а*. Как видно из этого рисунка, система, описываемая дисперсионным уравнением (4,4), обладает при малых ξ конвективной неустойчивостью. (Полосам конвективной неустойчивости соответствуют интервалы волновых чисел (k_G, k_H) и (k_I, k_J); k_M обозначает волновое число, соответствующее точке M.)

Если решать задачу об усилении колебаний в системе, описываемой дисперсионным уравнением (4,4), при малых ξ, то из рис. 3, *а* непосредственно видно, что имеются две полосы усиления в интервалах частот (ω_A, ω_B) и (ω_C, ω_D), а также две полосы непропускания в интервалах частот (ω_E, ω_K) и (ω_L, ω_F).

При увеличении ξ дисперсионная кривая (4,4) деформируется, но при этом ее топологический характер не изменяется. Когда параметр ξ достигнет значения

$$\xi_0 = \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2} \frac{v_p^2}{u_b^2},$$

касательная к одной из ветвей дисперсионной кривой, проходящей через начало координат, становится горизонтальной (см. рис. 3, *б*). При этом две полосы непропускания (ω_E, ω_K) и (ω_L, ω_F) сливаются в одну полосу (ω_E, ω_F). Из неравенств (4,3) следует, что такое слияние полос непропускания происходит при $\xi_0 < 1$.

При дальнейшем увеличении ξ дисперсионная кривая принимает вид, изображенный на рис. 3, *в*. Так как кривые, изображенные на рис. 3, *а*, *б* и *в* топологически эквивалентны, то заключение о характере неустойчивости при малых ξ остается справедливым и при $\xi = 1$, т. е. для исходного дисперсионного уравнения (4,2).

Из сравнения рис. 3, *а*, *б* и *в* можно заключить, что исходная система, описываемая дисперсионным уравнением (4,2), обладает конвективной неустойчивостью в интервалах волновых чисел (k_G, k_B) и (k_I, k_J). Кроме того, рассматриваемая система имеет две полосы усиления в интервалах частот (ω_A, ω_B) и (ω_C, ω_D), а также полосу непропускания (ω_E, ω_F).

5. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

До сих пор при исследовании неустойчивости динамических систем мы считали их бесконечно протяженными и не учитывали поэтому наличия границ. Между тем наличие границы может быть очень существенным из-за отражения от нее волн. Благодаря этому может осуществляться обратная связь между «входом» и «выходом» системы, в результате чего конвективно неустойчивая система будет вести себя так, как если бы она была абсолютно неустойчивой. Существенным является то обстоятельство, что такого рода эффективная абсолютная неустойчивость (она носит название *глобальной неустойчивости* *)) будет иметь место и в предельном случае бесконечно протяженных систем, причем этот вывод не зависит от конкретного вида граничных условий.

Чтобы разъяснить понятие глобальной неустойчивости, напомним, что собственные колебания в ограниченных системах возникают в результате суперпозиции бегущих в разных направлениях волн. Частоты этих колебаний являются дискретными, и система будет неустойчивой в том случае, если по крайней мере одна из частот будет обладать положительной мнимой частью.

Как мы уже отмечали в разделе 2, чтобы различить волны, бегущие вправо и влево, следует определить знак мнимой части функции $k \equiv k(\omega)$ при $\operatorname{Im} \omega \to +\infty$: если при этом $\operatorname{Im} k > 0$, то волна бежит вправо, если же $\operatorname{Im} k < 0$, то волна бежит влево. Обозначим в соответствии с этим определением волновые числа волн, бегущих вправо, через $k_r(\omega)$, а волновые числа волн, бегущих влево, через $k_l(\omega)$. Заметим, что эти функции являются решениями дисперсионного уравнения $D(k, \omega) = 0$ для безграничной системы.

Пусть теперь ω представляет собой собственную частоту ограниченной системы и $\min \operatorname{Im} k_r(\omega)$ и $\max \operatorname{Im} k_l(\omega)$ обозначают соответственно наименьшее значение $\operatorname{Im} k$ для волн, бегущих вправо, и наибольшее значение $\operatorname{Im} k$ для волн, бегущих влево. Ясно, что при конечном значении ω величина $\min \operatorname{Im} k_r(\omega)$ не обязательно должна быть положительной, а величина $\max \operatorname{Im} k_l(\omega)$ — отрицательной.

Чтобы получить уравнение для собственной частоты ω, предположим, что на левом конце системы ($x = -L$) возбуждены все волны с волновыми числами $k_r(\omega)$ и $k_l(\omega)$. Тогда вправо будут двигаться только волны с волновыми числами $k_r(\omega)$. При достижении правого конца системы ($x = L$) наибольшую амплитуду при большом L будет иметь волна с волновым числом, соответствующим наименьшему значению $\operatorname{Im} k_r(\omega)$. Если при

*) Понятие глобальной неустойчивости было введено Куликовским [19].

$x = -L$ амплитуда этой волны равнялась единице, то при $x = L$ ее амплитуда будет равна

$$\exp[-2L \min \operatorname{Im} k_r(\omega)].$$

При отражении этой волны на правом конце системы возникнут волны с волновыми числами $k_l(\omega)$, которые будут двигаться влево. При достижении левого конца системы ($x = -L$) наибольшую амплитуду будет иметь волна с волновым числом, соответствующим $\max \operatorname{Im} k_l(\omega)$. Ее амплитуда при $x = -L$ будет равна

$$T_+ \exp(-2L \min \operatorname{Im} k_r + 2L \max \operatorname{Im} k_l),$$

где T_+ — коэффициент трансформации волны с $\min \operatorname{Im} k_r$ в волну с $\max \operatorname{Im} k_l$ на правом конце системы. При отражении волны с $\max \operatorname{Im} k_l$ от левого конца системы снова возникает волна с $\min \operatorname{Im} k_r$, имеющая при $x = -L$ амплитуду

$$T_+T_- \exp(-2L \min \operatorname{Im} k_r + 2L \max \operatorname{Im} k_l),$$

где T_- — коэффициент трансформации волны с $\max \operatorname{Im} k_l$ в волну с $\min \operatorname{Im} k_r$ на левом конце системы.

Устремим теперь L к бесконечности. Тогда написанное выражение для амплитуды волны при $x = -L$ будет отлично от нуля, если выполняется условие

$$\min \operatorname{Im} k_r(\omega) = \max \operatorname{Im} k_l(\omega), \qquad (5,1)$$

которое вместе с дисперсионным уравнением $D(k, \omega) = 0$ определяет собственные частоты достаточно длинной системы. Им соответствует некоторая линия (может быть, несвязная) на плоскости комплексного переменного ω. Заметим, что вместо дискретного спектра собственных частот мы получили непрерывную линию, так как произвели предельный переход $L \to \infty$: каждая точка этой линии является предельной точкой дискретных собственных частот при $L \to \infty$.

Если эта линия имеет точки, расположенные в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} \omega > 0$), то система будет глобально неустойчивой.

Можно показать, что система, обладающая абсолютной неустойчивостью, всегда будет глобально неустойчивой. Что же касается конвективно неустойчивой системы, то, как мы сейчас увидим, она может быть и глобально устойчивой, и глобально неустойчивой.

В качестве примера рассмотрим систему, дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$3\omega^2 - 4\omega k + k^2 + 1 = 0.$$

Этому дисперсионному уравнению соответствуют две волны 1 и 2 с волновыми числами

$$k_{1,2}(\omega) = 2\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

Легко видеть, что рассматриваемая система является конвективно неустойчивой. Действительно, полагая $\operatorname{Im} \omega \to +\infty$, получим $\operatorname{Im} k_1 > 0$, $\operatorname{Im} k_2 > 0$. Поэтому обе волны 1 и 2 распространяются вправо, т. е. в данном случае отсутствуют точки ветвления, в которых становятся равными волновые числа волн, двигающихся в противоположные стороны.

Выясним теперь вопрос о глобальной неустойчивости этой системы. Так как обе волны двигаются вправо, то в данном случае не возникает уравнения типа (5,1), т. е. система оказывается глобально устойчивой.

Рассмотрим теперь второй пример. Пусть дисперсионное уравнение имеет вид

$$(3\omega^2 - 4\omega k + k^2 + 1)(\omega + k) = 0.$$

В этом случае возникают три волны 1, 2, 3 с волновыми числами

$$k_{1,2} = 2\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}, \quad k_3 = -\omega,$$

причем волны 1 и 2 двигаются вправо, а волна 3 — влево.

Ясно, что система является конвективно неустойчивой, так как волновые числа первых двух волн не отличаются от волновых чисел k_1 и k_2, рассмотренных в предыдущем примере (третья волна не приводит к неустойчивости).

Однако, в отличие от предыдущего примера, теперь система будет глобально неустойчивой, причем неустойчивость возникнет из-за существования третьей волны. Чтобы убедиться в этом, определим собственные частоты согласно уравнению (5,1):

$$\operatorname{Im} k_{1,2}(\omega) = \operatorname{Im} k_3(\omega). \tag{5,2}$$

Полагая $\omega = \alpha + i\beta$, получим

$$\operatorname{Im} k_{1,2} = 2\beta \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-1)^2+4\alpha^2\beta^2}-(\alpha^2-\beta^2-1)}{2}},$$

и из уравнения (5,2) следует

$$\alpha^2 + 17\beta^2 - 1 = \sqrt{(\alpha^2-\beta^2-1)^2+4\alpha^2\beta^2}. \tag{5,3}$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, находим уравнение линии (5,2):

$$8\alpha^2 + 72\beta^2 = 9. \tag{5.4}$$

При этом, как следует из (5,3), должно выполняться условие $\alpha^2 + 17\beta^2 \geqslant 1$ (выполнение этого условия соответствует положительному знаку перед радикалом).

Легко видеть, что эллипс (5,4) целиком лежит в области $\alpha^2 + 17\beta^2 \geqslant 1$. Это означает, что все точки линии (5,4) удовлетворяют уравнению (5,2), а так как часть эллипса (5,4) расположена в верхней полуплоскости ($\beta > 0$), то рассматриваемая система является глобально неустойчивой.

Таким образом, динамическая система, обладающая конвективной неустойчивостью, может быть как глобально устойчивой, так и глобально неустойчивой.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. Weizner, Phys. Fluids 5, 933 (1962).
2. K. B. Dysthe, Nucl. Fusion 6, 215 (1966).
3. R. Q. Twiss, Proc. Phys. Soc. **B64**, 654 (1951).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954, стр. 141.
5. Я. Б. Файнберг, В. И. Курилко, В. Д. Шапиро, ЖЭТФ **31**, 633 (1961).
6. R. J. Briggs, Electron-stream Interaction with Plasmas, The Massachusetts Inst. of Technol. Press, Cambridge, Massachusetts, 1964.
7. G. Convert, Ann. de radioélectricité **19**, 300 (1964).
8. M. Feix, Nuovo Cimento **27**, 1130 (1963).
9. R. Q. Twiss, Phys. Rev. **84**, 448 (1951).
10. J. R. Pierce, Bell. Syst. Tech. J. **30**, 626 (1951).
11. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, М., Атомиздат, 1964.
12. P. A. Sturrock, Phys. Rev. **112**, 1488 (1959).
13. А. М. Федорченко, Радиотехника и электроника **7**, 1455 (1962).
14. P. Rolland, Phys. Rev. **140**, 776 (1965).
15. А. М. Федорченко, ЖТФ **39**, 1549 (1969).
16. Р. В. Половин, ЖТФ **31**, 1220 (1961).
17. Г. Ф. Филимонов, Радиотехника и электроника **4**, 75 1959).
18. P. A. Sturrock, Phys. Rev. **117**, 1426 (1960).
19. А. Г. Куликовский, ПММ **30**, 148 (1966).