1970 г. Декабрь *Том 102, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

ПРОБЛЕМА НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ И ИНВАРИАНТНОСТИ ВАКУУМА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. А. Гриб, Е. В. Дамаскинский, В. М. Максимов

ВВЕДЕНИЕ

Данный обзор посвящен проблеме нарушения симметрии в теории элементарных частиц и в теории многих тел. Специальное рассмотрение проблемы симметрии в квантовой теории поля необходимо, так как за последнее десятилетие выяснились принципиальные отличия свойств симметрии в квантовой теории поля и в квантовой механике. Эти различия связаны с бесконечным числом степеней свободы у систем, рассматриваемых в теории поля. В квантовой механике преобразование симметрии всегда переводит любой вектор из гильбертова пространства состояний в вектор из этого же пространства. Из сохранения математических ожиданий следует, что это преобразование является унитарным. При этом инвариантность гамильтониана всегда приводит к наличию соответствующих правил отбора и законов сохранения.

В квантовой теории поля могут быть два типа неинвариантности состояний.

1. Неинвариантность того же типа, что и в квантовой механике, когда состояние из данного гильбертова пространства переходит в состояние из этого же пространства. Такова, например, неинвариантность одночастичных состояний свободного поля относительно преобразований неоднородной группы Лоренца.

2. Неинвариантность всего гильбертова пространства состояний системы. Преобразование симметрии не является унитарным и переводит любой вектор состояния из данного пространства в вектор другого гильбертова пространства состояний.

Различие обоих типов неинвариантности легко заметить на примере квантовой теории многих тел. Пусть имеется N атомов со спином единица во внешнем магнитном поле, направленном по оси z. В основном состоянии спины всех атомов направлены по оси z, и волновую функцию основного состояния можно представить в виде $\Psi^0=\prod_{j=1}^{N}\psi_j^0$, где ψ_j^0 — собственная функция оператора спина S_z с собственным значением единица, преобразующаяся по векторному представлению группы вращений. Возбужденные состояния описываются волновыми функциями, отличающимися от Ψ^0 тем, что спины некоторого числа ($\ll N$) атомов направлены не по оси z. Ψ^0 и возбужденные над ним состояния образуют гильбертово пространство состояний H_0. Состояние Ψ^0 инвариантно относительно вращений вокруг оси z. Возбужденные состояния неинвариантны относительно этих вращений, но в целом H_0 инвариантно, так как эти состояния переходят друг в друга. Таким образом мы видим, что если основное состояние инвариантно, то неинвариантность возбужденных состояний — первого типа.

Рассмотрим теперь вращения вокруг оси x. Основное состояние Ψ^0 уже неинвариантно относительно этих поворотов и переходит в $\Psi^\theta = \prod_{j=1}^{N} \psi_j^\theta$, где ψ_j^θ описывает атом со спином, повернутым на угол θ вокруг оси x. Так как волновые функции атомов со спином единица преобразуются по векторному представлению группы вращений, то $(\psi_j^0, \psi_j^\theta) = \cos\theta$. Следовательно,

$$(\Psi^0, \Psi^\theta) = \prod_{j=1}^{N} (\psi_j^0, \psi_j^\theta) = (\cos\theta)^N$$

и при $N \to \infty$ *) $(\Psi^0, \Psi^\theta) \to 0$. Таким образом, состояния Ψ^0 и Ψ^θ ортогональны при всех $0 < \theta < 2\pi$. Аналогично, любое возбужденное над Ψ^0 состояние ортогонально любому состоянию, возбужденному над Ψ^θ. Итак, Ψ^θ ортогонально любому состоянию из гильбертова пространства H_0 и потому не принадлежит ему. То же справедливо и для любого состояния, возбужденного над Ψ^θ. Следовательно, мы приходим к необходимости рассмотрения гильбертова пространства H_θ, в котором содержится Ψ^θ и возбужденные над ним состояния. В пространствах H_0, H_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ реализуются различные унитарно-неэквивалентные представления наблюдаемых [2-6] (в данном случае операторов спина).

Рассмотренная выше неинвариантность Ψ^0 и возбужденных над ним состояний и есть неинвариантность второго типа. В теории многих тел неинвариантность второго типа есть макроскопическая неинвариантность состояния системы. При этом всегда существует неинвариантная макроскопическая наблюдаемая, которая ведет се я классически (см. гл. 1). В рассмотренном примере такой величиной является намагниченность $\mathbf{m} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_j \mathbf{S}_j$, где $\mathbf{S}_j$ — оператор спина j-го атома. Значение таких макроскопических величин одинаково для всех векторов фиксированного гильбертова пространства. Разным пространствам соответствуют разные значения этих величин.

Неинвариантность основного состояния в теории многих тел всегда второго типа. В теории элементарных частиц роль основного состояния выполняет вакуум, определяемый как состояние, инвариантное относительно пространственно-временных трансляций. Неинвариантность вакуума всегда есть неинвариантность второго типа.

Концепция неинвариантного вакуума была введена Гейзенбергом в конце 50-х годов [7-8]. Основным утверждением Гейзенберга было то, что вакуум не может быть состоянием, инвариантным относительно нарушенных внутренних симметрий: свойства вакуума отражают свойства мира физических явлений, и потому для вакуума нарушено все то, что нарушено в этом мире. После появления теоремы Коулмена [9], утверждающей, что «инвариантность вакуума есть инвариантность мира», это предположение Гейзенберга можно считать доказанным (причем не только для непрерывных внутренних, но и для дискретных P-, CP-, T-симметрий [10,11]). Таким образом, из теоремы Коулмена следует, что вакуум в теории элементарных частиц неинвариантен относительно всех нарушенных симметрий: изотопической симметрии, нарушаемой электромагнитными и слабыми взаимодействиями, симметрии группы гиперзаряда, нарушаемой слабыми взаимодействиями, группы $SU(3)$, а также C- и CP-отражений.

*) $N \to \infty$ — обычно предполагаемое условие в теории многих тел и соответствует так называемому термодинамическому пределу (см., например, [1], гл. 1 и 7).

Однако вакуум может быть неинвариантным и при полностью инвариантном взаимодействии. В теории многих тел взаимодействие инвариантно относительно пространственных вращений и трансляций, тем не менее основное состояние (вакуум) кристалла неинвариантно относительно этих преобразований, основное состояние ферромагнетика — неинвариантно относительно вращений и т. д. При этом неинвариантность вакуума приводит к отсутствию соответствующих правил отбора и законов сохранения. Например, для фононов кристалла закон сохранения импульса не выполняется и имеет место лишь с точностью до вектора обратной решетки. Такое нарушение симметрии, когда вакуум неинвариантен при инвариантном гамильтониане, называется спонтанным. В теории элементарных частиц нарушение симметрии обычно считается неспонтанным, однако существуют модели, демонстрирующие возможность спонтанного нарушения симметрии и в этой теории (см. гл. 7). Теория спонтанного нарушения симметрии естественна для случаев, когда проблематично существование взаимодействия, нарушающего симметрию, например в случае группы $SU(3)$ [12, 14], при объяснении разности масс мюона и электрона [12,13], а также в теории CP-нарушения [15, 16] в K^0-распадах, не проявляющегося ни в каких других экспериментах, и т. д.

На современном этапе трудно решить, какие из нарушений симметрии в физике элементарных частиц являются спонтанными, а какие нет. Это связано с тем, что в релятивистской теории неизвестны свойства симметрии лагранжиана: известны лишь законы сохранения и правила отбора в процессах реальных частиц. Но спонтанное нарушение симметрии может привести к тем же самым нарушениям законов сохранения и правил отбора, что и наличие нарушающих симметрию взаимодействий. Отметим также, что в ряде случаев имеется возможность рассматривать нарушение симметрии как комбинацию спонтанного нарушения с последующим неспонтанным [17–19].

Общей чертой любого нарушения симметрии является неинвариантность вакуума. Напомним, что инвариантность вакуума $|0\rangle$ относительно преобразований некоторой группы $U(\tau) = \exp(iQ\tau)$ означает, что вакуумное состояние переводится в себя при преобразованиях этой группы: $U(\tau)|0\rangle = |0\rangle$. Если эта группа есть непрерывная группа Ли, то инфинитезимальный оператор группы Q обладает тогда свойством $Q|0\rangle = 0$. Если вакуум неинвариантен, то $Q|0\rangle \neq 0$. Физически неинвариантность вакуума проявляется в том, что существуют неинвариантные вакуумные средние для некоторых локальных наблюдаемых $A_\tau(x)$, т. е. таких наблюдаемых, для которых коммутатор с оператором поля обращается в нуль для пространственно-подобных интервалов. Это эквивалентно условию

$$\frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}\alpha\tau(\tau)\Big|_{\tau=0} = \langle 0|[Q, A(x)]|0\rangle \equiv \beta \neq 0,$$

где $|0\rangle$ — вакуум, $\alpha(\tau) = \langle 0|A_\tau(x)|0\rangle \equiv \langle 0|U(\tau)A(x)U(\tau)^{-1}|0\rangle$, $U(\tau) = \exp(i\tau Q)$, Q — генератор преобразования симметрии. При инвариантном вакууме $\beta = 0$. Обратно, если для любых локальных $A(x)$ $\beta = 0$, то вакуум инвариантен. Это доказывается в рамках аксиоматического подхода (см., например, [11, 29]). При неинвариантности вакуума генератор Q не существует как эрмитов оператор в гильбертовом пространстве (см. гл. 1 и 4), состояния не преобразуются по унитарному представлению группы симметрии и им не могут быть приписаны соответствующие квантовые числа.

Будем называть неинвариантные вакуумные средние аномальными. В теории многих тел наличие аномальных средних связано с существованием неинвариантных макроскопических классических параметров, таких, как намагниченность, плотность числа частиц и т. д. (см. гл. 1).

В теории элементарных частиц физический смысл таких аномальных средних неясен, однако имеются модели, в которых им можно придать смысл массы, константы связи или плотности числа частиц в некоторой космологической модели (см. гл. 5, 7 и 8).

Изменение аномального среднего имеет место при изменении вакуума. Переход от одного вакуума к другому, как видно из рассмотренного примера теории многих тел, требует уже неунитарного преобразования. Последнее означает, что этот переход не может быть описан законами квантовой механики [20] и требует иной логической схемы, отличной от квантовой. В теории многих тел такой схемой оказалась классическая физика. В теории элементарных частиц вопрос о возможности многих вакуумов и изменения соответствующих аномальных средних остается открытым (в ряде работ это изменение связывается с развитием во времени [21], с ролью гравитационного поля [22, 23], с новой ролью измерений [24–26] и т. д.).

В теории спонтанного нарушения симметрии понятие неинвариантного вакуума тесно связано с вырождением вакуума. Последнее означает, что одна и та же система при фиксированном значении энергии может обладать различными вакуумами (основными состояниями). Термин вырождение вакуума употребляется в двух разных смыслах: 1) наличие разных гильбертовых пространств состояний системы, в каждом из которых вакуум единствен, различающихся значениями некоторого классического параметра; 2) существование различных вакуумов в одном и том же гильбертовом пространстве, в этом случае значение классического параметра не является фиксированным, что в нерелятивистской теории соответствует отсутствию полной информации о системе (наличие статистики).

Если значение вышеупомянутого классического параметра зафиксировано и меняться не может, то это — случай единственного неинвариантного вакуума. Подобная ситуация возможна в теории элементарных частиц. Так, например, нарушение четности в теории двухкомпонентного нейтрино связано с тем, что преобразование пространственного отражения переводит нейтрино в несуществующее состояние, поскольку нейтрино характеризуется определенной спиральностью. Аналогично и для непрерывных групп в случае единственного, но неинвариантного вакуума преобразование симметрии переводит систему в физически несуществующее состояние.

При спонтанном нарушении симметрии переход от одного вакуума к другому может быть описан как возбуждение бесконечного числа частиц (бесконечного, поскольку при изменении вакуума меняется макроскопический параметр, например намагниченность в ферромагнетике и т. п.), причем так как полная энергия системы при этом не меняется и состояние остается трансляционно инвариантным, энергия отдельной частицы должна стремиться к нулю при стремлении импульса к нулю. Это утверждение о необходимости существования частиц с массой нуль при спонтанном нарушении симметрии получило в литературе название теоремы Голдстоуна. Примерами голдстоуновских частиц являются фононы и магноны в теории многих тел. В теории элементарных частиц ими могут быть фотоны.

Настоящий обзор посвящен проблеме инвариантности вакуума и спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля. В связи с тем, что первоначально эта проблема возникла в теории многих тел, мы вначале излагаем общие особенности спонтанного нарушения симметрии в этой теории (гл. 1), иллюстрируя эти особенности примерами из теорий ферромагнетизма (гл. 2) и сверхтекучести (гл. 3). Затем дается формулировка и доказательство теоремы Коулмена (гл. 4), показывающей, почему в теории элементарных частиц вакуум должен быть неинвариантным, после чего излагается релятивистский вариант теоремы Голдстоуна (гл. 5), физический смысл которой, а также измененный вид теоремы Голдстоуна при неспонтанном нарушении симметрии обсуждается далее (гл. 6). В гл. 7 приводятся некоторые типичные примеры спонтанного нарушения симметрии в теории элементарных частиц (модели Намбу и Иона-Ласинио, Голдстоуна и др.). Наконец, в связи с проблемой классического параметра в теории элементарных частиц в гл. 8 разбирается вопрос о квантовании полей в пространстве-времени с нестационарной метрикой. Вакуум в этой теории меняется во времени, и его изменение соответствует изменению некоторой величины типа плотности вещества: процесс этого типа некоторые авторы [22, 23] называют процессом рождения вещества при расширении Вселенной.

1. ОБЩИЕ ОСОБЕННОСТИ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ МНОГИХ ТЕЛ

Спонтанное нарушение симметрии — широко распространенное явление в физике многих тел. В любой нерелятивистской системе многих тел имеется нарушение симметрии основного состояния относительно преобразований группы Галилея. Спонтанное нарушение симметрии часто встречается при фазовых переходах: так, при отвердевании теряется трансляционная симметрия жидкости и остается симметрия только относительно дискретной группы сдвигов на вектор кристаллической решетки, при переходе через точку Кюри в теории ферромагнетизма необходимо учитывать спонтанное нарушение симметрии относительно группы вращений, в теориях сверхпроводимости и сверхтекучести переход от нормальной к сверхпроходящей или сверхтекучей фазам сопровождается потерей калибровочной инвариантности.

Спонтанное нарушение симметрии в нерелятивистской области проявляется в том, что некоторые макроскопические параметры, характеризующие рассматриваемую физическую систему, неинвариантны относительно преобразований симметрии. Наличие макроскопических параметров, как инвариантных, так и неинвариантных, является общей особенностью физики многих тел. Под макроскопическими параметрами мы понимаем те характеристики физической системы, изменение которых описывается классической физикой, в отличие от квантовых «микроскопических» наблюдаемых, которые позволяют судить о микроскопической природе системы, описываемой квантовой теорией. Наблюдаемые этих двух типов различаются методами измерения их. Действительно, методы измерения микронаблюдаемых, таких, как энергия и импульс квазичастичных возбуждений, и макронаблюдаемых, таких, как плотность, температура, намагниченность, совершенно различны.

При наличии полной информации о системе макроскопические наблюдаемые имеют точно определенные значения. Каждому из значений макровеличины соответствует множество состояний физической системы, отличающихся друг от друга только значениями микронаблюдаемых. Совокупность этих состояний образует гильбертово пространство, характеризующееся данным значением макроскопической величины. Разным значениям ее соответствуют разные гильбертовы пространства, что проявляется физически в отсутствии интерференции между состояниями с различными значениями макровеличин. В каждом из этих пространств микронаблюдаемые описываются операторами, реализующими унитарно-неэквивалентные представления наблюдаемых.

Значение макронаблюдаемой в данном гильбертовом пространстве может быть получено как среднее по объему Ω вида

$$b=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}B(\mathbf{x})\,d^3x, \tag{1,1}$$

где $B(\mathbf{x})$ — соответствующая локальная микронаблюдаемая. Ее локальность означает, что коммутатор $B(\mathbf{x})$ с операторами рождения (и уничтожения) поля $[B(\mathbf{x}),\ a^+(\mathbf{y})]$ достаточно быстро обращается в нуль при $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\to\infty$.

Примерами макровеличин являются: плотность числа частиц

$$\rho=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}a^+(\mathbf{x})\,a(\mathbf{x})\,d^3x,$$

плотность кинетической энергии

$$\varepsilon=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}a^+(\mathbf{x})\frac{1}{2m}\nabla^2a(\mathbf{x})\,d^3x \qquad \text{и т. д.}$$

Величины типа (1,1) коммутируют со всеми операторами рождения и уничтожения. Действительно, например,

$$[b,\ a^+(\mathbf{y})]=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}d^3x\,[B(\mathbf{x}),\ a^+(\mathbf{y})]=0$$

из-за локальности $B(\mathbf{x})$. Можно показать, что все величины вида (1,1) коммутируют также и друг с другом, что позволяет рассматривать их как c-числа. В теориях с трансляционно-инвариантным основным состоянием (вакуумом) значения этих наблюдаемых совпадают с ожиданием по вакууму от соответствующих локальных величин:

$$\lim_{\Omega\to\infty}\left\langle 0\left|\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}B(\mathbf{x})\,d^3x\right|0\right\rangle=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\langle 0|B(\mathbf{x})|0\rangle\,d^3x=\langle 0|B(\mathbf{x})|0\rangle=b\,^{*)}. \tag{1,2}$$

Покажем, что разным значениям макровеличин соответствуют унитарно-неэквивалентные представления наблюдаемых, что означает, что изменение состояния системы, при котором меняется макровеличина, не может быть описано унитарным оператором. Пусть $a_i^+(\mathbf{x}),\ a_i(\mathbf{x})$ — операторы рождения и уничтожения в гильбертовом пространстве H_i $(i=1,\ 2)$, а макроскопическая величина определяется по (1,1) и ее значение в H_i есть b_i. Предположим, что рассматриваемые представления связаны унитарным оператором, т. е.

$$a_1(\mathbf{x})=Ua_2(\mathbf{x})U^{-1},\quad a_1^+(\mathbf{x})=Ua_2^+(\mathbf{x})U^{-1}.$$

Тогда

$$B_1(\mathbf{x})=UB_2(\mathbf{x})U^{-1}, \tag{1,3}$$

где $B_i(\mathbf{x})$ — оператор, представляющий макронаблюдаемую в H_i. Предельный переход в (1,1) понимается в слабом смысле, т. е. как сходимость матричных элементов. Тогда имеем

$$b_1=\langle\psi_1|b_1|\psi_1\rangle=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\langle\psi_1|B_1(\mathbf{x})|\psi_1\rangle\,d^3x \qquad (\psi_1\in H_1). \tag{1,4}$$

*) В силу трансляционной инвариантности вакуума

$$\langle 0|B(\mathbf{x})|0\rangle=\langle 0|\exp(i\mathbf{P}\mathbf{x})\,B(0)\exp(-i\mathbf{P}\mathbf{x})|0\rangle=\langle 0|B(0)|0\rangle=b=\mathrm{const},$$

где $\mathbf{P}$ — оператор импульса.

Используя (1,3), получаем

$$\langle\psi_1 | B_1(\mathbf{x}) | \psi_1\rangle = \langle U^{-1}\psi_1 | B_2(\mathbf{x}) | U^{-1}\psi_1\rangle = \langle\psi_2 | B_2(\mathbf{x}) | \psi_2\rangle \qquad (\psi_2 \in H_2). \qquad (1,5)$$

Подставив (1,5) в (1,4), имеем с учетом (1,2)

$$b_1 = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} \langle\psi_2 | B_2(\mathbf{x}) | \psi_2\rangle\, d^3x = \langle\psi_2 | b_2 | \psi_2\rangle = b_2. \qquad (1,6)$$

Таким образом, если представления эквивалентны, то макровеличина имеет в них одно и то же фиксированное значение. Следовательно, разным значениям ее соответствуют унитарно-неэквивалентные представления.

Отметим кстати, что обычно используемое представление Фока операторов рождения и уничтожения описывает системы с нулевой плотностью, т. е. $\rho = \lim\limits_{\Omega\to\infty} \frac{N}{\Omega} = 0$ в любом состоянии системы. Следовательно, все макроскопические тела должны описываться представлениями, унитарно-неэквивалентными фоковскому. При изменении плотности, так как она является макроскопическим параметром, представление (гильбертово пространство) должно меняться.

Проведенное выше разбиение наблюдаемых на макроскопические и микроскопические позволяет определить понятие точной симметрии следующим образом. Симметрия является точной, если соответствующие ей преобразования не меняют значений макропараметров. В этом случае операция симметрии переводит векторы данного гильбертова пространства в векторы этого же пространства и может быть представлена унитарным оператором. Основное состояние (вакуум) не меняется под действием симметрии.

Если же преобразование симметрии меняет значение макроскопической наблюдаемой, то оно переводит вектор данного гильбертова пространства в вектор другого гильбертова пространства. В этом случае симметрия не может быть описана унитарным оператором, что при наличии инвариантности гамильтониана относительно преобразований симметрии означает спонтанное нарушение симметрии. При этом основное состояние неинвариантно.

Например, неинвариантность основного состояния любой нерелятивистской системы многих тел относительно группы Галилея связана с тем, что в любой реальной системе средняя плотность числа частиц ρ отлична от нуля. Эта плотность является макроскопической наблюдаемой. Макроскопической величиной является и функция распределения частиц по импульсу $\rho(\mathbf{p})$, которая не может быть константой. Если бы $\rho(\mathbf{p}) = \mathrm{const}$, то система характеризовалась бы бесконечной плотностью энергии в единице объема. При преобразованиях Галилея $\rho(\mathbf{p})$ изменяется:

$$\rho(\mathbf{p}) \longrightarrow \rho(\mathbf{p}') = \rho(\mathbf{p} + m\mathbf{v}_0),$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость движения системы отсчета. Изменение же $\rho(\mathbf{p})$ требует перехода в другое гильбертово пространство, что и означает неинвариантность основного состояния (вакуума).

Обратно, неинвариантность основного состояния системы многих тел приводит к появлению не равного тождественно нулю неинвариантного макроскопического параметра. Как отмечено во введении, неинвариантность основного состояния вакуума проявляется как существование отличного от нуля аномального вакуумного среднего $\alpha_\tau \equiv \langle 0 | A_\tau(\mathbf{x}) | 0\rangle \neq 0$ от локальной наблюдаемой $A_\tau(\mathbf{x})$. В силу трансляционной инвариантности основного состояния α_τ может быть представлено как вакуумное среднее от оператора $C_\tau = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \int_\Omega d^3x A_\tau(\mathbf{x})$, являющегося соответствующей неинвариантной макронаблюдаемой. Среднее по вакууму $|0\rangle$ от оператора C_τ совпадает со средним по любому нормированному состоянию $\psi(\mathbf{x})$ из гильбертова пространства, содержащего $|0\rangle$:

$$\alpha_\tau = \langle 0 | A_\tau(\mathbf{x}) | 0\rangle = \langle 0 | C_\tau | 0\rangle = \langle \psi(\mathbf{x}) | C_\tau | \psi(\mathbf{x})\rangle.$$

Покажем, что генератор Q преобразования

$$A_{\tau_1}(\mathbf{x}) \to A_{\tau_2}(\mathbf{x}) = \exp\{iQ(\tau_2 - \tau_1)\} A_{\tau_1}(\mathbf{x}) \exp\{-iQ(\tau_2 - \tau_1)\},$$

сопровождавшегося изменением C_τ (так, что $C_{\tau_1} \to C_{\tau_2}$), не является наблюдаемой (измеримой) величиной. Действительно, в соответствии с теорией измерения в квантовой механике [20] система при измерении Q переводится в состояние, описываемое собственным вектором наблюдаемой Q. Из-за некоммутативности Q и C_τ среднее значение C_τ в таком состоянии неопределено, что явно противоречит доказанному выше утверждению о том, что это среднее имеет одно и то же значение для любого состояния $\psi(\mathbf{x})$. Таким образом, в случае неинвариантного вакуума Q не может быть измерено и не является оператором в гильбертовом пространстве *). Физический смысл этого факта состоит в том, что C_τ является классической характеристикой системы, так что значение этой величины не изменяется при измерении (отсутствие дополнительности по Бору).

С другой стороны, невозможность представить Q и $U(\tau) = \exp(iQ\tau)$ операторами в гильбертовом пространстве означает, как уже указано во введении, нарушение симметрии. В случае инвариантного основного состояния (вакуума) $C_\tau \equiv 0$, так что изменение основного состояния с инвариантного на неинвариантное должно проявляться физически как появление новой классической характеристики системы, в соответствии с тем, что мы утверждали выше.

Ситуация этого типа имеет место при некоторых фазовых переходах: новая фаза характеризуется новым параметром, отсутствующим в нормальной фазе. Так, при переходе жидкого гелия из нормального в сверхтекучее состояние этим новым параметром является так называемая классическая волновая функция частиц конденсата $C_\tau = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \int_\Omega a^+(\mathbf{x})\, e^{i\tau} d^3x$, неинвариантная относительно калибровочного преобразования $a^+(\mathbf{x}) \to a^+(\mathbf{x})\, e^{i\tau}$. При переходе металла из нормального в сверхпроводящее состояние появляется функция щели

$$\Delta(\mathbf{x}) = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \int\int_\Omega b(\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{z})\, a^+(\mathbf{z})\, a^+(\mathbf{y})\, d^3z\, d^3y,$$

где $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{z}) \to 0$ при фиксированном $\mathbf{x}$ и $|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \to \infty$. $\Delta(\mathbf{x})$ неинвариантна относительно тех же калибровочных преобразований. При переходе через точку Кюри в ферромагнетике появляется ненулевая намагниченность, неинвариантная относительно вращений.

Неинвариантные макроскопические наблюдаемые при спонтанном нарушении симметрии могут быть описаны при помощи понятия квази-

*) Ситуация подобного типа получила в литературе название «сверхотбор» [27, 29]. В случае непрерывной группы говорят об непрерывном сверхотборе [28], в случае дискретной — о дискретном [30]. Например, дискретный сверхотбор по барионному или электрическому заряду в квантовой теории поля проявляется как невозможность обнаружить систему в собственном состоянии оператора (C или CP), не коммутирующего с операторами этих зарядов (если они ненулевые).

средних, введенного Боголюбовым [31, 32]. Известно, что в статистической механике среднее значение $\langle A\rangle$ любой динамической величины A определяется равенством

$$\langle A\rangle=\frac{\operatorname{Sp} Ae^{-\beta\mathscr{H}}}{\operatorname{Sp} e^{-\beta\mathscr{H}}}; \qquad (1{,}7)$$

здесь $e^{-\beta\mathscr{H}}$ — матрица плотности, описывающая основное состояние системы, $\mathscr{H}$ — гамильтониан, $\beta=1/kT$ *).

Однако если имеется макроскопическая величина, изменение которой не сопровождается изменением энергии (вакуум — вырожден), то усреднение (1,7) содержит лишнее усреднение по различным значениям этой величины. Таким образом, для вычисления средних при фиксированном значении макроскопического параметра необходимо модифицировать определение этих средних (1,7). Модифицированное при спонтанном нарушении симметрии определение средних разработано Боголюбовым, который ввел в рассмотрение бесконечно слабое внешнее поле, нарушающее симметрию системы. Для этого в гамильтониан системы $\mathscr{H}$ вводится новый член $\nu\mathscr{H}_{\text{int}}$, где ν — малый параметр. Новый гамильтониан $\mathscr{H}_\nu=\mathscr{H}+\nu\mathscr{H}_{\text{int}}$ уже не коммутирует с операцией симметрии из-за несимметричной добавки. В этом случае среднее от некоторой динамической величины A, определенное по (1,7) и равное нулю при $\nu\equiv 0$, будет отлично от нуля при $\nu\neq 0$. Более того, оно может остаться отличным от нуля и в пределе $\nu\to 0$.

Следуя Боголюбову, назовем квазисредней $<A>$ этот двойной предел:

$$<A>=\lim_{\nu\to 0}\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\operatorname{Sp} Ae^{-\beta\mathscr{H}_\nu}}{\operatorname{Sp} e^{-\beta\mathscr{H}_\nu}}=\lim_{\nu\to 0}\langle A\rangle_\nu. \qquad (1.8)$$

Важно подчеркнуть, что предел $\nu\to 0$ следует брать после термодинамического предела. Отличие $\langle A\rangle$ от $\langle A\rangle$ для некоторого $\mathscr{H}_{\text{int}}$ означает спонтанное нарушение симметрии. Легко видеть также, что обычное среднее есть квазисреднее, усредненное дополнительно по группе нарушенной симметрии.

Таким образом, процедура предельного перехода $\nu\to 0$ эквивалентна выбору основного состояния или, что то же, конкретного значения макроскопического параметра, характеризующего представление.

Имеется точка зрения [37], что реальные системы обладают спонтанным нарушением симметрии потому, что они находятся во внешнем поле, не имеющем всей симметрии системы. В силу дальнего упорядочения, имеющегося в некоторых системах, эффект выделения того или иного из различных вакуумов (фиксация конкретного значения макропараметра) может быть проведен при помощи очень слабого внешнего воздействия.

Отметим, что в нерелятивистской теории многих тел всякое локальное изменение состояния можно описать как рождение квазичастиц. Рассмотрим некоторую систему. Произведем над ней локальное преобразование спонтанно нарушенной симметрии. Например, в случае ферромагнетика это соответствует ситуации, когда все спины атомов в некотором подобъеме системы повернуты на один и тот же угол по сравнению со спинами основной части атомов. Если воздействие, имеющееся в системе, характеризуется конечным радиусом, то изменение энергии, вызванное этим локальным преобразованием симметрии, пропорционально поверх-

---

*) Заметим, что всегда существует такое гильбертово пространство, в котором среднее (1,7) при любой фиксированной T может быть записано как ожидание по трансляционно-инвариантному вектору (вакууму) [33].

ности раздела выделенного подобъема Ω (т. е. $E \sim \Omega^{2/3}$). Число же возбуждаемых квазичастиц пропорционально Ω. Следовательно, энергия в расчете на одну квазичастицу $\sim \Omega^{2/3}/\Omega$ и стремится к нулю при $\Omega \to \infty$, т. е. в системе должны существовать возбуждения с энергией, обращающейся в нуль в длинноволновом пределе. В присутствии дальнодействующих сил (например, кулоновских) изменение энергии уже не будет пропорционально $\Omega^{2/3}$, так как вклад в энергию дают не только частицы, находящиеся вблизи границы подобъема Ω, а и все частицы этого подобъема. В этом случае в спектре квазичастиц может присутствовать энергетическая щель в длинноволновом пределе [1, 39].

Существование бесщелевых возбуждений в случае, когда система обладает только короткодействующими силами, составляет содержание нерелятивистской теоремы Голдстоуна, известной также как «$1/q^2$-теорема» Боголюбова [31, 32] и теорема Гугенгольца — Пайнса [38] в теории сверхтекучести. Эту теорему можно сформулировать в общем виде следующим образом.

Теорема. *Пусть имеется непрерывная группа симметрии G, генераторы которой записаны в виде интегралов по всему пространству от локальных плотностей, а гамильтониан системы (или уравнения движения) инвариантен относительно данной группы. Если основное состояние неинвариантно относительно этой группы симметрии, а взаимодействие достаточно быстро убывает с расстоянием, то в спектре гамильтониана обязательно присутствует ветвь элементарных возбуждений, энергия которых стремится к нулю при стремлении к нулю импульса (т. е. в длинноволновом пределе).*

Доказательство этой теоремы имеется в работе Ланге [40] (см. перевод в книге Гугенгольца [1]), а также в работах [39, 41, 42].

Для доказательства нерелятивистской теоремы Голдстоуна нужно рассмотреть коммутатор генератора Q группы спонтанно нарушенной симметрии с некоторым локальным оператором $A(\mathbf{x})$, $[Q, A(\mathbf{x})] = \eta(\mathbf{x})$, таким, что

$$\eta = \langle 0 | \eta(\mathbf{x}) | 0 \rangle \neq 0. \tag{1,9}$$

Условие (1,9) означает неинвариантность макроскопической величины A_τ при преобразованиях симметрии. Суть теоремы Голдстоуна состоит в утверждении, что среднее $\langle 0 | [Q, A(\mathbf{x})] | 0 \rangle = \eta$ отлично от нуля только в том случае, когда существуют состояния $|\psi_j\rangle$, энергия которых стремится к нулю в длинноволновом пределе, являющиеся промежуточными состояниями в матричном элементе

$$\sum_j \langle 0 | Q | \psi_j \rangle \langle \psi_j | A(x) | 0 \rangle. \tag{1,10}$$

Отсюда видно, что свойства голдстоуновских возбуждений тесно связаны со свойствами локальной плотности $A(\mathbf{x})$ неинвариантной макроскопической величины. При нарушении галилеевой инвариантности основного состояния такой макровеличиной является функция распределения по импульсу $\rho(\mathbf{p})$ и голдстоуновские возбуждения являются фононами.

Фононами являются также голдстоуновские частицы, связанные с нарушением калибровочной симметрии в сверхтекучем гелии и с нарушением трансляционной симметрии в кристаллах. В ферромагнетике голдстоуновскими частицами являются спиновые волны (магноны), связанные с локальным отклонением спина атомов от направления полной намагниченности (см. гл. 2).

В сверхпроводнике не существует квазичастиц, энергия которых стремится к нулю при нулевом импульсе. Это связано с наличием дальнодействующего кулоновского взаимодействия. Поэтому в спектре возбуждений фононного типа, связанных с локальным изменением плотности электронов, появляется щель, обусловленная кулоновским взаимодействием. Эти возбуждения называются плазмонами и приводят к экранированию кулоновского взаимодействия. Эта ситуация подробно изучена в работах Андерсона [43–46].

Выше изложены характерные особенности спонтанного нарушения симметрии в нерелятивистской области. Две следующие главы посвящены иллюстрации этих особенностей на конкретных примерах ферромагнетика Гейзенберга (гл. 2) и теории сверхтекучести (гл. 3).

2. НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрим основные особенности спонтанного нарушения симметрии на примере модели ферромагнетика Гейзенберга [34–36], в которой он описывается совокупностью неподвижных атомов со спином S, расположенных в узлах некоторой решетки. Предположим, что спин равен 1/2 (в системе единиц, в которой $\hbar = 1$).

В простом случае кубической решетки узлы можно пронумеровать с помощью троек целых чисел (n_1, n_2, n_3). Это множество троек целых чисел будем обозначать Z. Тогда координаты любого узла решетки можно записать как $(n_1 a;\ n_2 a;\ n_3 a)$, где a — постоянная решетки.

Гамильтониан модели имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n,\, m} v_{nm} (\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_m) \quad (n,\, m \in Z), \tag{2,1}$$

где операторы спина $S^{(x)}$, $S^{(y)}$, $S^{(z)}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[S_n^{(x)}, S_m^{(y)}] = iS_n^{(z)} \delta_{nm} \tag{2,2}$$

(остальные коммутационные соотношения получаются циклической перестановкой x, y, z). Удобно перейти к операторам

$$S_n^{(\pm)} = S_n^{(x)} \pm iS_n^{(y)}. \tag{2,3}$$

Для них коммутационные соотношения имеют вид

$$[S_n^{(+)}, S_m^{(-)}] = 2\delta_{nm} S_n^{(z)}, \quad [S_n^{(\pm)}, S_m^{(z)}] = \mp \delta_{nm} S_n^{(\pm)}. \tag{2,4}$$

Отсюда видно, что оператор $S_n^{(+)}$ повышает на единицу значение проекции спина атома «n» на ось z, а оператор $S_n^{(-)}$ — понижает это значение на единицу. В операторах (2,3) гамильтониан (2,1) принимает вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n,\, m} v_{nm} (S_n^{(z)} S_m^{(z)} + S_n^{(-)} S_m^{(+)}). \tag{2,5}$$

Так как система инвариантна относительно трансляций на векторы решетки, v_{nm} зависят только от разности $(n - m) : v_{nm} = v\,(n - m)$. Поскольку в гамильтониан (1,1) операторы $\mathbf{S}_n$ входят только в виде скалярного произведения $(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_m)$, гамильтониан инвариантен относительно группы спиновых вращений $SU\,(2)$. При этих вращениях преобразуются только спины, а решетка не преобразуется. Таким образом, гамильтониан модели инвариантен относительно группы трансляций Z и группы спиновых вращений $SU\,(2)$.

Рассмотрим состояния ферромагнетика, описываемого этой моделью. Мы ограничимся только простейшими состояниями, т. е. такими, в которых отсутствуют корреляции между состояниями различных атомов.

В основном состоянии ферромагнетика спины всех атомов направлены одинаково. Пусть $\mathbf{l}$ — единичный вектор в этом направлении. Состояние n-го атома описывается тогда вектором $\psi_{n\mathbf{l}}$ (в двумерном гильбертовом пространстве), удовлетворяющим уравнению

$$(S_n, \mathbf{l})\,\psi_{n\mathbf{l}} = \psi_{n\mathbf{l}}/2. \tag{2,6}$$

Этим уравнением $\psi_{n\mathbf{l}}$ определен с точностью до фазового множителя. Скалярное произведение векторов $\psi_{n\mathbf{l}_1}$ и $\psi_{n\mathbf{l}_2}$ равно

$$(\psi_{n\mathbf{l}_1}, \psi_{n\mathbf{l}_2}) = e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1+(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)}{2}} = e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}, \tag{2,7}$$

где θ — угол между $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$. Состояние всего ферромагнетика, в котором все спины направлены по $\mathbf{l}$, можно описать тогда, задавая состояния всех атомов $\Psi_\mathbf{l} = \prod_n \psi_{n\mathbf{l}}$. Состояния, в которых спины всех атомов, кроме конечного числа, направлены по $\mathbf{l}$, а также линейные комбинации этих состояний, отличаются от $\Psi_\mathbf{l}$ только микроскопически. Мы рассматриваем здесь случай бесконечного числа атомов. Если же полное число атомов N конечно, то число $\tilde{N}$ «неправильно» ориентированных спинов должно быть много меньше N. Если же их число одного порядка с N, то следует говорить о макроскопически различных состояниях.

Состояния, отличающиеся от Ψ_e микроскопически, образуют гильбертово пространство H^e. Наблюдаемые спинов отдельных атомов описываются операторами в H^e и реализуют представление перестановочных соотношений (2,2). Состояния, отличающиеся направлением полной намагниченности (т. е. макроскопически различные состояния), ортогональны друг другу. Действительно,

$$(\psi_{\mathbf{l}_1}, \psi_{\mathbf{l}_2}) = \prod_{n=1}^{N} (\psi_{n\mathbf{l}_1}, \psi_{n\mathbf{l}_2}) = \left[\cos\frac{\theta}{2}\right]^N e^{iN\varphi} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Легко видеть, что и любое состояние из H^{e_1} также ортогонально любому состоянию из H^{e_2}. Состояния, принадлежащие одному и тому же H^e, характеризуются одним и тем же значением макроскопического параметра (намагниченности) $\mathbf{m} = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}\mathbf{S}_n$. Заметим, что когда говорят о полной намагниченности $\mathbf{S} = \sum\limits_{n=1}^{N}\mathbf{S}_n$, то фактически имеют в виду просто $\mathbf{m}N$, где N — полное число атомов, пренебрегая флуктуациями $\mathbf{S}$, имеющими порядок $\mathbf{S}/\sqrt{N}$. Намагниченность $\mathbf{m}$ коммутирует со всеми операторами отдельных спинов $\mathbf{S}_n$. Например,

$$[m_z, S_n^{(x)}] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}[S_n^{(z)}, S_n^{(x)}] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} iS_n^{(y)} = 0.$$

Легко убедиться в том, что m_x, m_y и m_z коммутируют и друг с другом. Следовательно, $\mathbf{m}$ ведет себя как классическая величина, в частности, все компоненты $\mathbf{m}$ измеримы одновременно и в гильбертовом пространстве H^e являются c-числами. Нетрудно проверить, что $\mathbf{m} = \langle\Psi_\mathbf{l}, \mathbf{S}_n\Psi_\mathrm{e}\rangle = \mathbf{l}/2$. Все остальные средние от произведений $\mathbf{S}_n$ выражаются через $\mathbf{m}$. При $T = 0°$ K $\mathbf{m}$ — единственный макроскопический параметр.

При спиновых вращениях намагниченность преобразуется как вектор, а основное состояние Ψ_{e_1} переходит в основное состояние Ψ_{e_2}. Следовательно, при вращениях состояния из гильбертова пространства $H^{\mathbf{l}_1}$ переходят в векторы другого $H^{\mathbf{l}_2}$, где $\mathbf{l}_2$ получается из $\mathbf{l}_1$ тем же вращением. Если бы основное состояние было инвариантно относительно вращений, то $\langle\Psi_{\mathbf{l}}, \mathbf{S}_n\Psi_{\mathbf{l}}\rangle$ должно было бы быть равным нулю. Отличие $\mathbf{m}$ от нуля означает нарушение симметрии. Так как гамильтониан модели инвариантен, мы имеем спонтанное нарушение симметрии.

При нарушении симметрии в бесконечной системе преобразования симметрии неосуществимы унитарным оператором, т. е. не существует унитарного оператора U, удовлетворяющего соотношениям $S_n^{(k)'} = US_n^{(k)}U^{-1}$ $(k = x, y, z)$, где $S_n^{(k)'}$ получается из $S_n^{(k)}$ рассматриваемым преобразованием (например, при повороте вокруг оси z на угол φ

$$S_n^{(x)} \to S_n^{(x)'} = S_n^{(x)}\cos\varphi + S_n^{(y)}\sin\varphi,$$

$$S_n^{(y)} \to S_n^{(y)'} = -S_n^{(x)}\sin\varphi + S_n^{(y)}\cos\varphi,$$

$$S_n^{(z)} \to S_n^{(z)'} = S_n^{(z)}).$$

Теперь покажем, что в модели ферромагнетика Гейзенберга имеются бесщелевые возбуждения. Утверждение о существовании таких возбуждений при спонтанном нарушении симметрии составляет содержание теоремы Голдстоуна (см. гл. 1).

Уравнение движения в модели Гейзенберга имеет вид

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}S_n^{(-)} = [H, S_n^{(-)}] = \sum_m v_{nm}[S_m^{(z)}S_n^{(-)} - S_m^{(-)}S_n^{(z)}].$$

Совершим преобразование Фурье

$$S_q^{(z)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n S_n^{(z)}e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_n}, \qquad S_q^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n S_n^{(\pm)}e^{\mp i\mathbf{q}\mathbf{R}_n}.$$

Тогда в импульсном представлении уравнения движения принимают вид

$$-i\dot{S}_q^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{q'}[v(\mathbf{q}') - v(\mathbf{q}-\mathbf{q}')]\,S_{q'}^{(z)}S_{q-q'}^{(-)}. \tag{2,8}$$

Далее мы будем рассматривать случай, когда ось z совпадает с направлением намагниченности. Легко видеть, что

$$\frac{1}{\sqrt{N}}S_{q'}^{(z)} \xrightarrow[N\to\infty]{} m\delta_{0q'} = \frac{1}{2}\delta_{0q'}. \tag{2,9}$$

Подставив (2,9) в (2,8), получаем уравнения движения в виде

$$-i\dot{S}_q^{(-)} = \omega_0(\mathbf{q})\,S_q^{(-)}, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = [v(0) - v(\mathbf{q})], \tag{2,10}$$

где $v(\mathbf{q})$ — преобразование Фурье потенциала взаимодействия v_{nm};

$$v_{nm} = v(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m) = \sum_q v(\mathbf{q})\exp\{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)\}.$$

Частота $\omega_0(\mathbf{q})$ обращается в нуль при $\mathbf{q} \to 0$. Таким образом, оператор $S_q^{(-)}$ является оператором рождения частицы Голдстоуна с импульсом $\mathbf{q}$, которая в данном случае является спиновой волной (магноном). При больших N с точностью до членов порядка $N^{-1/2}$ операторы $S_q^{(z)}$, $S_q^{(\pm)}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (ось z совпадает с направлением полной намагниченности):

$$[S_q^{(+)}, S_{q'}^{(-)}] = \delta_{qq'}, \quad [S_q^{(z)}, S_{q'}^{(\pm)}] = 0 \qquad (\mathbf{q} \neq 0).$$

Операторы $S_0^{(z)}$, $S_0^{(\pm)}$ связаны с оператором полного спина $S_0^{(z)} = \frac{1}{\sqrt{N}} S^{(z)} = m^{(z)} \sqrt{N}$, $S_0^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{N}} S^{(\pm)}$. При $N \to \infty$ $S_0^{(z)}$ расходятся, а $S_0^{(\pm)}$ имеют смысл.

Мы видели, что спонтанное нарушение симметрии в ферромагнетике сопровождается появлением макроскопической величины — намагниченности. Так как в отсутствие внешнего поля все направления равноправны, мы имеем бесконечное множество основных состояний, соответствующих разным направлениям намагниченности. Энергия всех этих состояний одинакова. В теории поля всякое изменение состояния может быть описано как возбуждение квазичастиц. Макроскопические изменения, типа поворота всего ферромагнетика, связаны с появлением бесконечного числа частиц. Эти квазичастицы, возбуждаемые при макроскопических изменениях, должны конденсироваться в состоянии с нулевой энергией и нулевым импульсом, так как энергия при таких изменениях не меняется, а состояние остается трансляционно-инвариантным.

Покажем, что изменение направления намагниченности происходит при конденсации магнонов с нулевым импульсом, т. е. что для изменения направления намагниченности необходимо появление магнонов в количестве $\sim N$. Оператор числа магнонов имеет вид $M = \sum_q S_q^{(-)} S_q^{(+)} = \sum_n S_n^{(-)} S_n^{(+)}$ (последнее следует из унитарности преобразования Фурье). Известно, что $S_n^{(-)} S_n^{(+)} = \frac{1}{2} - S_n^{(z)}$. Следовательно, $M = \frac{1}{2} N - \sum_n S_n^{(z)}$. Тогда намагниченность выражается через число спиновых волн соотношением

$$m^{(z)} = \frac{1}{N} \sum_n S_n^{(z)} = \frac{1}{2} - \frac{M}{N}. \tag{2,11}$$

Из (2,11) видно, что для изменения m необходимо рождение спиновых волн в количестве $\sim N$.

В заключение этой главы отметим, что в (2,10) мы предполагали, что $v(n - m)$ достаточно быстро убывает при $|n - m| \to \infty$, так что $v(\mathbf{q})$ несингулярна при $\mathbf{q} \to 0$. Если же в системе имеется дальнодействие, то это условие, вообще говоря, не выполняется и в спектре магнонов может появиться щель. По-видимому, это связано с тем, что при наличии дальнодействия газ квазичастиц, возбуждаемых при макроскопических изменениях в системе, нельзя считать свободным при сколь угодно малых плотностях.

3. НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ

Типичный пример спонтанного нарушения симметрии дает теория сверхтекучести неидеального бозе-газа. Гамильтониан этой системы в координатном представлении имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m} \int \nabla\psi^+(\mathbf{x}) \nabla\psi(\mathbf{x})\, d^3x + \frac{1}{2} \int\int d^3x d^3y \psi^+(\mathbf{x}) \psi^+(\mathbf{y}) V(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}). \tag{3,1}$$

Легко убедиться в том, что этот гамильтониан инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\psi(\mathbf{x}) \to e^{i\alpha}\psi(\mathbf{x}), \quad \psi^+(\mathbf{x}) \to e^{-i\alpha}\psi^+(\mathbf{x}), \tag{3,2}$$

что приводит к сохранению тока

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \psi^+(\mathbf{x}, t)\,\psi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \\ = \frac{1}{i}\left[(\nabla\psi^+(\mathbf{x}, t))\,\psi(\mathbf{x}, t) - \psi^+(\mathbf{x}, t)\,\nabla\psi^+(\mathbf{x}, t)\right], \tag{3,3}$$

$$\partial_t\rho + \nabla\mathbf{J} = 0. \tag{3,4}$$

Сверхтекучесть бозе-газа связана с тем, что при низких температурах число квазичастиц с нулевым импульсом имеет порядок полного числа квазичастиц, т. е. в системе имеется конденсат. Наличие конденсата проявляется в существовании аномального среднего по основному состоянию (вакууму) $|0\rangle$ (см. введение):

$$\langle 0|\psi|0\rangle = \lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int\psi(x)\,d^3x = \sqrt{\rho_0}\,e^{i\alpha}, \tag{3,5}$$

где $\sqrt{\rho_0}$, в силу трансляционной инвариантности, является постоянной. Появление $\sqrt{\rho_0} \neq 0$ означает появление новой макроскопической характеристики системы — классической волновой функции конденсата, неинвариантной относительно калибровочного преобразования (3,2), То, что гамильтониан $\mathcal{H}$ в (3,1) инвариантен при преобразованиях (3,2), означает, что мы имеем спонтанное нарушение калибровочной инвариантности.

В соответствии с нерелятивистской теоремой Голдстоуна (гл. 1), при определенных дополнительных ограничениях на потенциал взаимодействия $V(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ мы должны иметь бесщелевой спектр элементарных возбуждений *).

Следуя Боголюбову [51, 52], найдем явный вид спектра элементарных возбуждений и покажем, что в нем отсутствует щель.

В импульсном представлении гамильтониан (3,1) можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}}\frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}a_{\mathbf{k}}^+a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2\Omega}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2\\ \mathbf{k}_1',\,\mathbf{k}_2'}} v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')\,a_{\mathbf{k}_1'}^+a_{\mathbf{k}_2'}^+a_{\mathbf{k}_2}a_{\mathbf{k}_1}\delta(\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \tag{3,6}$$

где $v(\mathbf{k})$ — преобразование Фурье потенциала взаимодействия, $a_{\mathbf{k}}^+$, $a_{\mathbf{k}}$ — операторы рождения и уничтожения, Ω — объем квантования.

Для явного учета конденсата совершим каноническое преобразование $\psi(x) \to \varphi(x) = \psi(x) + \sqrt{\rho_0}e^{i\alpha}$. В импульсном представлении оно имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^+ &\to b_{\mathbf{k}}^+ = a_{\mathbf{k}}^+ + \sqrt{\rho_0\Omega}\,e^{-i\alpha}\delta_{\mathbf{k}0},\\ a_{\mathbf{k}} &\to b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} + \sqrt{\rho_0\Omega}\,e^{i\alpha}\delta_{\mathbf{k}0} \end{aligned}\right\} \tag{3,7}$$

Эти операторы обладают теми же перестановочными соотношениями, что и a-операторы. В терминах b-операторов гамильтониан (3,6), с точностью до постоянных членов и членов выше второго порядка, примет вид [1]

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \mu N = \\ = \sum_{\substack{\mathbf{k}\\(\mathbf{k}\neq 0)}}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \rho_0 v(\mathbf{k})\,b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}\right) + \frac{1}{2}\rho_0\sum_{\substack{\mathbf{k}\\(\mathbf{k}\neq 0)}} v(\mathbf{k})\,(b_{\mathbf{k}}^+b_{-\mathbf{k}}^+ + b_{-\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}); \tag{3,8}$$

здесь N — оператор числа частиц, μ — химический потенциал, равный в первом приближении $\rho_0 v(0)$. Члены более высокого порядка можно учесть по теории возмущений. $\mathcal{H}'$ допускает диагонализацию посредством

*) Простое доказательство для данной модели см. в [48, 49, 41].

канонического преобразования Боголюбова

$$\left. \begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\beta^{+}_{-\mathbf{k}}, \quad u_{\mathbf{k}} = u_{-\mathbf{k}}, \\ b^{+}_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}\beta^{+}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{k}}, \quad v_{\mathbf{k}} = v_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \right\} \tag{3,9}$$

Требование, чтобы новые операторы рождения и уничтожения (β-операторы) удовлетворяли бозевским перестановочным соотношениям, накладывает на вещественные функции $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ ограничение

$$u^2_{\mathbf{k}} - v^2_{\mathbf{k}} = 1. \tag{3,10}$$

Значения коэффициентов $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ фиксируются условием отсутствия в преобразованном гамильтониане членов типа $\beta^{+}_{\mathbf{k}}\beta^{+}_{-\mathbf{k}}$. В результате с точностью до постоянной

$$\mathscr{H}' = \sum_{\mathbf{k}>0} \varepsilon_{\mathbf{k}} (\beta^{+}_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} + \beta^{+}_{-\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{k}}), \tag{3,11}$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ — энергия квазичастичных возбуждений. При малых значениях импульса $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ имеет вид

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = c\,|\,\mathbf{k}\,| = |\,\mathbf{k}\,| \sqrt{\frac{\rho_0 v(0)}{m}}\,. \tag{3,12}$$

Таким образом, мы видим, что $\varepsilon_{\mathbf{k}} \to 0$ при $\mathbf{k} \to 0$, как и следовало ожидать из теоремы Голдстоуна. Элементарные возбуждения являются фононами, распространяющимися со скоростью звука c.

4. НЕИНВАРИАНТНОСТЬ ВАКУУМА И ТЕОРЕМА КОУЛМЕНА

В лагранжевой теории поля наличие симметрии выражается инвариантностью лагранжиана относительно некоторой группы преобразований полей. Если эта группа непрерывна, то из теоремы Нётер следует существование 4-вектора плотности тока $j_\mu(x)$, удовлетворяющего локальному закону сохранения

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{4,1}$$

и порождающего преобразование группы в том смысле, что изменение любого локального оператора $A(\mathbf{y}, t)$ равно

$$\delta A(\mathbf{y}, t) = i\delta\lambda \int d^3x\, [A(\mathbf{y}, t), j^0(\mathbf{x})]\,|_{x^0=t}. \tag{4,2}$$

Оператор $A(\mathbf{y}, t)$ является функцией полей в момент времени t. Предполагается также, что ток $j^\mu(x)$ локален, т. е. $[A(y), j^\mu(x)] = 0$ при пространственно-подобных $|\, y - x\,|$, так что интеграл в (4,2) сходится. Если симметрия является точной, то существует не зависящий от времени оператор заряда

$$Q = \int d^3x j^0(x). \tag{4,3}$$

Заряд Q является генератором группы симметрии, т. е. (4,2) можно записать в виде

$$\delta A(y) = i\delta\lambda\, [A(y), Q]. \tag{4,4}$$

Важно отметить, что (4,2) остается справедливым, даже если Q не существует как оператор (достаточно существования $j^0(x)$).

Покажем, что при неинвариантности вакуума (т. е. когда $Q|0\rangle \neq 0$) Q не может быть оператором в гильбертовом пространстве и, следовательно, преобразование симметрии выводит вакуум из H. Предположим, что Q является оператором в H и $Q\,|\,0\rangle = |\,\psi\rangle$. Тогда, из-за коммутации Q с оператором импульса $\mathbf{p}$, $|\,\psi\rangle$ — трансляционно инвариантное состояние. Его норма

$$\|\psi\|^2 = \langle 0\,|\,QQ\,|\,0\rangle = \left\langle 0 \left| \int j^0(\mathbf{x},t)\,d^3x \right| \psi \right\rangle = \int \langle 0\,|\,j^0(\mathbf{x},t)\,|\,\psi\rangle\,d^3x = \infty,$$

так как, в силу трансляционной инвариантности $|\,0\rangle$ и $|\psi\rangle$, матричный элемент $\langle 0|\,j^0(\mathbf{x},t)\,|\,\psi\rangle$ не зависит от $\mathbf{x}$. Следовательно, наше предположение неверно и Q не существует как оператор в гильбертовом пространстве.

Коулменом [9] была высказана теорема, утверждающая, что инвариантность вакуума относительно группы преобразований означает инвариантность соответствующего гамильтониана. Из этой теоремы следует, что вакуум не может быть инвариантным относительно нарушенной симметрии *) (если бы вакуум был инвариантен, то и гамильтониан был бы инвариантен относительно тех же преобразований) и преобразование нарушенной симметрии (см. введение) не может быть представлено унитарным оператором. Теорема Коулмена обсуждалась затем в работах Фабри и Пикассо [53], Свиеки [54] и др. [10, 55, 56]. В случае дискретной группы симметрии (P-, CP-, C- и T-преобразования) доказательство аналогичной теоремы можно найти в [11] (стр. 386), где эта теорема формулируется как невозможность описания любой нарушенной симметрии унитарным оператором.

Непосредственными физическими следствиями теоремы Коулмена в физике элементарных частиц являются следующие утверждения:

1. В теории электромагнитных взаимодействий физический вакуум не может быть изотопически инвариантным состоянием.

2. В теории слабых взаимодействий физический вакуум не может быть состоянием с нулевой странностью и нулевым изотопическим спином. Кроме этого, вакуум не может быть P-инвариантным состоянием (и CP — в теории K^0-мезонов).

3. Физический вакуум не может быть инвариантным относительно группы $SU(3)$, нарушенной во всех взаимодействиях.

Сформулируем и докажем теорему Коулмена в рамках релятивистской локальной теории поля.

Т е о р е м а. *Пусть существует локальный 4-ток $j^\mu(x)$, такой, что заряд $Q = \int j^0(\mathbf{x},t)\,d^3x$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве состояний. Тогда ток j^μ удовлетворяет локальному закону сохранения $\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x},t) = 0$, а заряд $Q(t)$ не зависит от времени.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы уже показали, что Q существует как оператор, только если

$$Q(t)\,|\,0\rangle = 0. \tag{4,5}$$

Определим операторы

$$\varphi(x) = \partial_\mu j^\mu(x), \quad \pi(x) = \partial_t\varphi(x).$$

Из (4,5) следует тогда, что

$$\langle 0\,|\,[Q,\pi(0)]\,|\,0\rangle = \left\langle 0 \left| \left[\int j^0(\mathbf{x},t)\,d^3x,\ \pi(0) \right] \right| 0 \right\rangle = 0,$$

*) Подчеркнем, что это относится как к абелевым, так и к неабелевым группам таким, как, например, $SU(2)$ или $SU(3)$.

Дифференцируя по времени и добавляя члены $\partial_i j^i(\mathbf{x}, t)$, обращающиеся в нуль при интегрировании по d^3x, так как, из-за локальной коммутативности, члены на бесконечно удаленной поверхности не дают вклада в коммутатор, имеем $\langle 0 \mid [\int \varphi(\mathbf{x}, 0)\, d^3x, \pi(0)] \mid 0 \rangle = 0$. Применяя разложение Челлена — Лемана $(\rho(\varkappa^2) \geqslant 0)$

$$\langle 0 \mid [\varphi(x), \varphi(y)] \mid 0 \rangle = \int_0^\infty \rho(\varkappa^2)\, \Delta(x-y, \varkappa^2)\, d\varkappa^2 \qquad (\rho(\varkappa^2) \geqslant 0)$$

и используя равенство $\frac{\partial}{\partial y^0} \Delta(x-y, \varkappa^2)\Big|_{x^0=y^0} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, получаем $\int_0^\infty \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 0$, т. е. $\rho(\varkappa^2) = 0$. Но тогда и

$$\langle 0 \mid \varphi(x)\, \varphi(y) \mid 0 \rangle = \int_0^\infty \rho(\varkappa^2)\, \Delta^+(x-y, \varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 0,$$

откуда, учитывая положительность метрики в гильбертовом пространстве, получаем $\varphi(x) \mid 0 \rangle = 0$. Теорема Федербуша — Джонсона [57], утверждающая, что если локальный оператор, действуя на вакуум, дает нуль, то и сам оператор равен нулю, приводит к тому, что $\varphi(x) = \partial_\mu j^\mu = 0$. Отсюда следует, что заряд сохраняется: $Q(t) = Q(0)$.

Из теоремы Коулмена следует, в частности, что если гамильтониан неинвариантен относительно некоторой группы, то неинвариантен и вакуум.

Поясним, почему такого рода утверждения не имеют места в нестрогой квантовой теории поля, предполагающей возможность унитарной связи между физическим и математическим вакуумами. Эти вакуумы связаны друг с другом соотношением $\mid 0 \rangle_\text{ф} = S(0, -\infty) \mid 0 \rangle_\text{м}$, где $S(0, -\infty)$ — половинная S-матрица. Нарушение симметрии, вызванное неинвариантностью $S(0, -\infty)$ относительно соответствующего преобразования, приведет к тому, что $\mid 0 \rangle_\text{ф}$ под действием преобразования перейдет в $\mid 0' \rangle_\text{ф} = U \mid 0 \rangle_\text{ф}$, где U — оператор преобразования симметрии. Если бы оператор $S(0, -\infty)$ действительно существовал (что имеет место в нерелятивистской квантовой механике), то $\mid 0 \rangle_\text{ф}$ существовал бы в том же гильбертовом пространстве, что и $\mid 0 \rangle_\text{м}$. В том же пространстве существовал бы и $\mid 0' \rangle_\text{ф}$, так что преобразования нарушенной симметрии были бы представлены унитарными операторами в этом пространстве. Но в том то и состоит принципиальное отличие релятивистской квантовой теории поля от квантовой механики, что, в силу теоремы Хаага [11, 58], $S(0, -\infty)$ не существует и $\mid 0 \rangle_\text{ф}$ не лежит в том же гильбертовом пространстве, что и $\mid 0 \rangle_\text{м}$ (иногда этот факт выражают словами, что «математический вакуум ортогонален физическому»). Поэтому, если преобразование группы представляется унитарным оператором на $\mid 0 \rangle_\text{м}$, то в релятивистской теории отсюда не следует, что оно представляется унитарно и на физическом вакууме, т. е. $\mid 0' \rangle_\text{ф}$, вообще говоря (а в силу теоремы Коулмена всегда), не лежит в том же гильбертовом пространстве, что и $\mid 0 \rangle_\text{ф}$. Последнее и приводит к отсутствию представления нарушенной симметрии унитарными операторами. Таким образом, видна глубокая связь между теоремой Коулмена и теоремой Хаага.

Теперь сделаем несколько замечаний в связи со следствиями теоремы Коулмена в теории элементраных частиц. Малость константы связи нарушающего симметрию взаимодействия не имеет существенного значения для теоремы Коулмена: достаточно сколь угодно малого нарушения симметрии. чтобы она не могла быть представлена унитарным оператором. Нарушение симметрии в гамильтониане означает неинвариантность вакуума, проявляющуюся в наличии аномального среднего $\langle 0 \mid [Q(t), A(\mathbf{x}, t)] \mid 0\rangle \neq 0$.

В аксиоматическом подходе имеется доказательство [10], что в случае нарушения симметрии всегда найдется локальная наблюдаемая, аномальное вакуумное среднее которой вообще не зависит от константы связи. Однако конкретный вид этой наблюдаемой остается неизвестным.

В лагранжевой теории, использующей концепцию единственного физического вакуума, неинвариантные члены, не учитываемые в лагранжиане из-за малости константы связи, тем не менее могут воздействовать на инвариантную часть «через неинвариантный вакуум».

Иными словами, так как единственный физический вакуум должен быть неинвариантным относительно всех нарушенных симметрий, уже в теории сильных взаимодействий неинвариантность вакуума должна приводить к аномальным средним, величина которых, вообще говоря, не выражается аналитично через константу связи нарушающих симметрию взаимодействий. Обычная теория возмущений в таком случае означает предположение об аналитичности этих средних, так что ими можно пренебрегать, если пренебрегать соответствующими взаимодействиями. Альтернативный путь состоит в том, что теория нарушенных симметрий строится в два этапа: сначала рассматривается теория с симметричным лагранжианом, но несимметричным вакуумом (спонтанное нарушение симметрии), затем производится учет с помощью теории возмущений неинвариантной добавки в лагранжиан. Этот подход, как мы увидим ниже (гл. 7), уже на первом этапе предполагает отказ от теории возмущений и от предположения об аналитичности аномальных средних по константе связи (причем эти средние неаналитичны и по константе связи, сохраняющих симметрию взаимодействий (см. гл. 7)). От метода теории возмущений этот подход отличается физически тем, что в нем учитывается появление новых частиц — голдстоуновских бозонов нулевой массы (гл. 5 и 6). Учет неинвариантной добавки в лагранжиане приводит к появлению массы у этих частиц (см. гл. 6).

5. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА

В предыдущей главе мы видели, что вакуум неинвариантен, если неинвариантен лагранжиан. Однако вакуум может быть неинвариантным и при инвариантном лагранжиане. Такое нарушение симметрии называется спонтанным. Важным следствием последнего является наличие в теории частиц с нулевой массой. Это утверждение известно как теорема Голдстоуна [59–60] (см. также [61–64]). Мы приведем ниже формулировку и доказательство этой теоремы в рамках релятивистской квантовой теории поля, предполагая, как обычно, что симметрия теории может быть выражена как сохранение локального тока $j^\mu(x)$.

Теорема. *В локальной *) трансляционно-инвариантной теории поля с сохраняющимся локальным 4-током $j^\mu(x)$ и вакуумом, неинвариантным относительно непрерывной группы симметрии, генератором которой является заряд $Q = \int j^0(\mathbf{x}, t)\, d^3x$, обязательно имеются частицы массы нуль.*

*) Требование локальности весьма существенно: оно заменяет ограничения на потенциал, вводимые в нерелятивистской формулировке (см. гл. 1).

Другими словами, теорема утверждает, что условия

$$\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ (сохранение тока)}, \tag{5,1}$$

$$\langle 0 | [Q, \Phi(x)] | 0 \rangle \neq 0 \text{ (неинвариантность вакуума)} \tag{5,2}$$

(здесь $\Phi(x)$ — некоторый локальный оператор) совместны только в том случае, когда в теории имеются частицы массы нуль. Из доказательства теоремы мы увидим, что эти частицы дают вклад в матричный элемент $\langle 0 | [j^\mu(x), \Phi(y)] | 0 \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим спектральное разложение матричного элемента $\langle 0 | [j^\mu(x), \Phi(y)] | 0 \rangle$:

$$\langle 0 | [j^\mu(x), \Phi(y)] | 0 \rangle = \int \rho_\mu(p) e^{ip(x-y)} d^4p, \tag{5,3}$$

$$\rho_\mu(p) = \sum_g [\delta^4(p - p_g) \langle 0 | j_\mu(0) | g \rangle \langle g | \Phi(0) | 0 \rangle -$$
$$- \delta^4(p - p_g) \langle 0 | \Phi(0) | g \rangle \langle g | j_\mu(0) | 0 \rangle] \, \theta(p_g^0) \, \theta(p_g^2)^{*)}; \tag{5,3'}$$

здесь $|g\rangle$ — промежуточные состояния, образующие полную систему. Для $\rho = 0$ промежуточные состояния не являются состояниями $(p_g^\mu) = 0$ (состояния с $p_0 = 0$ и $p_j = 0$ иногда называют «вакуумоподобными» или шпурионами). Докажем, что $|g\rangle$ — состояния с нулевой массой $p_g^2 = 0$.

Из соображений релятивистской инвариантности имеем

$$\rho_\mu(p) = p_\mu g(p^2) + p_\mu \varepsilon(p_0) \, \theta(p^2) \, h(p^2),$$

где $\varepsilon(p_0) = 1$, если $p_0 > 0$, и $\varepsilon(p_0) = -1$, если $p_0 < 0$. С другой стороны, из сохранения тока (5,1) $p_\mu \rho_\mu(p) = 0$, откуда $\rho_\mu(p) = p_\mu \delta(p^2)[C\varepsilon(p_0) + D]$, где C и D — некоторые постоянные. Наличие $\delta(p^2)$ в случае C и D, не равных нулю, и есть то, что требовалось доказать. Действительно, (5,3) не равно нулю лишь за счет промежуточных состояний с нулевой массой. Но легко убедиться, что постоянная C не равна нулю в случае неинвариантного вакуума, так как

$$\langle 0 | [Q, \Phi(y)] | 0 \rangle = (2\pi)^3 \int \rho_0(p^2) |_{\mathbf{p}=0} \, dp_0 = C$$

и не равно нулю в силу (5,2). $D = 0$ в силу локальности.

Группа преобразований, симметрия относительно которой спонтанно нарушена согласно (5,1) и (5,2), не обязательно должна быть абелевой (коммутативной). Возможность рассмотрения неабелевых групп весьма важна, поскольку, если в случае абелевой группы теорема может лишь относиться к нарушению закона сохранения гиперзаряда (странности) в теории элементарных частиц, в случае неабелевых групп теорема применима и для случаев изотопической группы $SU(2)$ и группы $SU(3)$ [60, 65, 66], а также к случаю спонтанного нарушения симметрии относительно группы Лоренца и группы вращений [67–69]. В случае неабелевой группы требуется уже не один, а несколько векторных (аксиально-векторных) токов. Например, для группы $SU(2)$ потребуется три, а для группы $SU(3)$ — восемь таких токов j_μ^α (α — внутренний индекс). Постоянная C для случая неабелевой группы должна быть снабжена дополнительными индексами

$$C_a^\alpha = \langle 0 | [Q^\alpha \Phi_a(x)] | 0 \rangle;$$
$$Q^\alpha = \int j_0^\alpha(\mathbf{x}, t) \, d^3x \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m; \; a = 1, 2, \ldots, n). \tag{5,4}$$

---

*) Здесь $\theta(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p > 0, \\ 0, & \text{если } p < 0. \end{cases}$

Например, если $\Phi_a(x)$ — операторы бесспиновых полей, то под действием группы преобразований они изменяются:

$$\Phi_a \to \Phi_a + \delta_\alpha\Phi_a, \quad \text{где} \quad \delta_\alpha\Phi_a = \varepsilon T^\alpha_{ab}\Phi_b \quad (a, b = 1, 2, \ldots, n),$$

а T^α_{ab} — матричные элементы генераторов T^α $(\alpha = 1, \ldots, m)$. В этом случае

$$C^\alpha_a = T^\alpha_{ab}\langle 0 | \Phi_b | 0\rangle. \tag{5,5}$$

Следует подчеркнуть, что в случае неабелевой группы частицы с массой нуль всегда оказываются связанными не с полями с квантовыми числами Φ_b, для которых $\langle 0 \mid \Phi_b \mid 0\rangle \neq 0$, а с полями, относительно которых, вообще говоря, можно не предполагать аномальных свойств типа $\langle 0 \mid \Phi_a \mid 0\rangle \neq 0$ (в (5,4) в коммутаторе стоит поле Φ_a, а $C^\alpha_a \neq 0$ за счет $\langle 0 \mid \Phi_b \mid 0\rangle \neq 0$ в (5,5)).

Поясним, что означает свойство $\langle 0 \mid \Phi_b \mid 0\rangle \neq 0$ и в чем состоит его аномальность. В представлении Фока для операторов поля $\langle 0 \mid \Phi(x) \mid 0\rangle = \langle 0 \mid (\Phi^+(x) + \Phi^-(x)) \mid 0\rangle = 0$, где $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ — положительно и отрицательно частотные части оператора поля. Поэтому неинвариантность вакуума для частного случая, когда $\Phi(x)$ — оператор поля, означает рассмотрение нефоковского представления поля $\Phi(x)$. Переход от поля $\Phi'(x)$, для которого $\langle 0 \mid \Phi'(x) \mid 0\rangle = 0$, к полю $\Phi(x)$ с $\langle 0 \mid \Phi(x) \mid 0\rangle \neq 0$ может быть легко осуществлен с помощью добавления к полю константы (обязательно константы, так как в силу трансляционной инвариантности вакуума $\langle 0 \mid \Phi(x) \mid 0\rangle$ не зависит от координат). В физических приложениях $\langle 0 \mid \Phi(x) \mid 0\rangle \neq 0$, где Φ — оператор поля, встречается, например, в релятивистской теории K^0-мезонов Салама и Уорда [70] при переходе от сильных взаимодействий к слабым, когда полагается $\langle 0 \mid K^0(x) \mid 0\rangle \neq 0$. При этом спонтанно нарушается симметрия относительно группы гиперзаряда и изотопической группы $SU(2)$. Возникающее аномальное вакуумное среднее отождествляется с константой слабого взаимодействия. В силу неабелевости изотопической группы отмеченное выше обстоятельство приводит к тому, что условие $\langle 0 \mid K^0(x) \mid 0\rangle \neq 0$ в предположении изотопических свойств K-мезонов (K-мезоны преобразуются как изоспиноры) означает наличие частиц с массой нуль и квантовыми числами K^+- и K^--мезонов. Тогда появление массы у этих частиц, если отождествлять их с реальными K-мезонами, должно объясняться уже за счет иного, неспонтанного нарушения симметрии (см. видоизмененную формулировку теоремы Голдстоуна при неспонтанном нарушении симметрии в следующей главе).

В общем случае оператор $\Phi(x)$ (или $\Phi_a(x)$ в (5,2)) не является оператором основного поля, как в приведенном выше примере. Он может быть некоторой комбинацией (билинейной или более сложной) других полей, рассматриваемых в одной точке (конечной области) пространства-времени. Например, в разбираемой ниже (гл. 7) модели Намбу и Иона-Ласинио [71,72] $\Phi(x) = \overline{\Psi}(x)\Psi(x)$, где Ψ — спинорное поле массы нуль. При этом $\langle 0 \mid \Phi \mid 0\rangle = \langle 0 \mid \overline{\Psi}\Psi \mid 0\rangle \neq 0$ означает спонтанное нарушение γ_5-инвариантности. В модели спонтанного нарушения CP-инвариантности и странности в K^0-распаде [16] полагается не $\langle 0 \mid K^0(x) \mid 0\rangle \neq 0$, а $\langle 0 \mid K^0(x) \times K^0(x) \mid 0\rangle \neq 0$, т. е. $\Phi = K^0(x) K^0(x)$ и т. д. В этих примерах появление аномальных средних связано с тем, что поля не описываются фоковским представлением и переход от голого вакуума к физическому уже не может быть осуществлен добавлением к полю константы, а получается боголюбовским преобразованием (гл. 8). Доказанная нами теорема Голдстоуна относится и к этим случаям.

Наконец, отметим, что при доказательстве теоремы мы использовали такие понятия, как сохраняющийся ток и заряд, представляющий собой интеграл по пространству от плотности нулевой компоненты тока. Однако в случае неинвариантного вакуума (см. введение и гл.4) заряду нельзя придать смысл оператора в гильбертовом пространстве, что делает наше рассуждение нестрогим. Но дело в том, что в доказательстве теоремы Голдстоуна существование заряда как оператора в гильбертовом пространстве и не требуется: достаточно лишь знать его коммутационные свойства с полем ($[Q, \Phi]$) — другими словами, достаточно его существование как «оператора над операторами $\Phi(x)$» (так называемый автоморфизм). Строгое доказательство теоремы Голдстоуна с определением всех используемых математических понятий дается в аксиоматической квантовой теории поля [66, 73, 74].

6. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ ГОЛДСТОУНА В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Теорема Голдстоуна существенна для определения типа нарушения симметрии, т. е. является ли это нарушение спонтанным или нет. Нам известны только две частицы с массой нуль — фотон и нейтрино. Однако этих частиц, по-видимому, недостаточно, если считать нарушение симметрий, таких, как $SU(2)$ и $SU(3)$, спонтанным [65, 75]. Более того, не существует ни одного физического примера спонтанного нарушения симметрии с нейтрино (как и вообще с фермионом) в качестве голдстоуновской частицы. Возражением против голдстоуновского нейтрино является то обстоятельство, что уже простейшее условие нарушения симметрии $\langle 0 \mid \Psi \mid 0 \rangle \neq 0$, где Ψ — спинор, противоречит как лоренц-инвариантности, так и принципу Паули. Среди различных попыток в направлении голдстоуновской интерпретации нейтрино укажем на работы [76, 77], пытающиеся обойти возникающие в теории трудности с помощью введения индефинитной метрики в пространстве состояний. Интерпретация фотона как голдстоуновской частицы в теории с $\langle 0 \mid A_\mu(x) \mid 0 \rangle = b_\mu \neq 0$ также приводит к противоречию с релятивистской инвариантностью (вакуум не может быть релятивистски инвариантным состоянием, если $b_\mu \neq 0$). Тем не менее, ниже мы увидим, что существует модель [67, 68] с фотоном (а также с гравитоном [78, 79]) как с голдстоуновской частицей, в которой указанное нарушение релятивистской инвариантности не проявляет себя физически.

Трудности, связанные с попыткой непосредственного истолкования голдстоуновской частицы как физической частицы с массой нуль, привели к появлению тенденции рассматривать теорему Голдстоуна как аргумент против рассмотрения самой возможности спонтанного нарушения симметрии в физике элементарных частиц. Роль теоремы Голдстоуна с этой точки зрения сводится к некоторому тривиальному суждению о свойствах полей с массой нуль. Действительно, пусть имеется свободное скалярное поле массы нуль [81] с уравнением движения $\Box \varphi(x) = 0$. Это уравнение можно понимать как закон сохранения «локального тока» $\partial_\mu j_\mu(x) = 0$ с $j_\mu(x) = \partial_\mu \varphi(x)$. Соответствующая абелева группа (инвариантность лагранжиана относительно которой приводит к сохранению тока) порождается генератором $Q = \int \partial_0 \varphi(x)\, d^3x$ и приводит к преобразованию

$$U(\eta)\varphi(x)U^{-1}(\eta) = \varphi(x) + \eta, \quad U = \exp(i\eta Q), \tag{6,1}$$

что следует из перестановочных соотношений

$$[\partial_0\varphi(x), \varphi(x')]\,\delta(x^0 - x^{01}) = -i\delta(x - x'),$$

Уравнение $\Box\varphi = 0$, очевидно, инвариантно относительно (6,1) при $\eta = \mathrm{const}$. Однако (6,1) означает переход к полям $\varphi'(x) = \varphi(x) + \eta$, для которых $\langle 0 \mid \varphi'(x) \mid 0\rangle = \eta \neq 0$, т. е. появляется ненулевое аномальное среднее. Теорема Голдстоуна в рассматриваемом случае сводится к тривиальному замечанию о том, что поле φ — есть поле с массой нуль, что очевидно уже из уравнения поля $\Box\varphi = 0$. Аналогичное рассмотрение, иллюстрирующее теорему Голдстоуна для свободного поля массы нуль, может быть проведено и в случае полей с ненулевым спином [80].

Однако целый ряд аргументов указывает на то, что ситуация с теоремой Голдстоуна в физике элементарных частиц является не столь простой. Эта аргументация сводится к следующему.

1. Из доказательства теоремы Голдстоуна не следует, что голдстоуновские состояния должны существовать как свободные асимптотические поля. Соответствующие частицы могут быть чисто виртуальными. Типичный пример такой ситуации дает электродинамика. В калибровке Лоренца $\partial_\mu A_\mu(x) = 0$ уравнения поля $\Box A_\mu = e_0 j_\mu(x)$, где $\partial_\mu j_\mu = 0$, инвариантны относительно градиентного преобразования

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \eta_\mu, \tag{6,2}$$

где η_μ — постоянный 4-вектор. Генератор преобразования (6,2), в силу коммутационных соотношений, между полями есть

$$L(\eta) = \int d^3x \eta_\mu (\partial_0 A_\mu - e_0 x^\mu j_0),$$

так что уравнения поля можно понимать как «сохранение тока»: $\partial_\nu J^{\nu\mu} = 0$, где $J^{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - e_0 x^\mu j_\nu$. Теорема Голдстоуна в данном случае будет просто утверждать о необходимости существования в теории частиц с массой нуль при условии $\langle 0 \mid A'_\mu \mid 0\rangle \neq 0$, где $\mid 0\rangle$ — вакуум. Но случаи $\langle 0 \mid A_\mu \mid 0\rangle = 0$ и $\langle 0 \mid A'_\mu \mid 0\rangle \neq 0$ различаются лишь преобразованием (6,2), не затрагивающим физических фотонов, поэтому голдстоуновские бозоны здесь не являются физическими частицами и сводятся к нефизическим продольным и временны́м фотонам, число которых меняется при калибровочных преобразованиях [30].

2. Можно построить модель электродинамики без фотонов [67, 68], представляющую собой теорию, в которой первоначальный лагранжиан содержит только взаимодействующее электрон-позитронное поле. Фотоны в этой теории возникают как голдстоуновские бозоны вследствие спонтанного нарушения симметрии. Примером такой теории является модель Бьёркена [67]. Первоначальный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(x)(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) - \frac{1}{8}G[\overline{\Psi}(x), \gamma_\mu\Psi(x)][\overline{\Psi}(x), \gamma_\mu\Psi(x)], \tag{6,3}$$

где $\Psi(x)$ — спинорное поле массы m, G — константа связи. В этой теории предполагается, что вакуум $\mid 0\rangle$ не является лоренц-инвариантным и CPT-инвариантным состоянием, так что

$$\langle 0 \mid [\overline{\Psi}(x), \gamma_\mu\Psi(x)] \mid 0\rangle = \langle 0 \mid j_\mu(x) \mid 0\rangle = F\eta_\mu \neq 0. \tag{6,4}$$

Тем самым мы имеем теорию с лоренц-инвариантным и CPT-инвариантным лагранжианом, но с неинвариантным вакуумом. Свойство (6,4) предполагает наличие ненулевой плотности заряда вакуума, так что вакуум не является зарядово-инвариантным состоянием. Трансляционная инвариантность вакуума приводит к тому, что F есть некоторая постоянная, а η_μ — единичный вектор, предполагаемый в [67] времениподобным. Затем рассматриваются фейнмановские диаграммы в теории возмущений с лагранжианом (6,3) и аномальными средними (6,4) и показывается эквивалентность определенного класса диаграмм диаграммам обычной квантовой электродинамики с промежуточными фотонными линиями. Возникающая функция Грина фотона (в лангранжиане поля фотонов не было) содержит наряду с частью, совпадающей с обычным фотонным пропагатором, часть, зависящую от неинвариантных аномальных средних. Однако вклад этой части в соответствующие диаграммы (так же как и вклад от ряда новых диаграмм, отличающихся от диаграмм стандартной электродинамики [67]) оказывается обратно пропорциональным $G\Lambda^2$, где G — константа связи из (6,3), а Λ — некоторое эффективное обрезание, необходимое для получения условия существования отличных от нуля аномальных средних. Таким образом, рассматриваемая теория оказывается эквивалентной (что доказывается на диаграммах теории возмущений [67]) обычной квантовой электродинамике в пределе $G \to \infty$ или $\Lambda \to \infty$. Для более подробного ознакомления с этой теорией мы отсылаем читателя к оригинальным работам [67,68].

Рассмотренная выше модель является теорией, в которой спонтанное нарушение лоренц-инвариантности ненаблюдамое, а голдстоуновские бозоны (их появление в моделях [67,68] существенно связано с несимметричностью вакуума) оказываются физическими частицами — фотонами.

3. Частицы массы нуль могут не появляться в теории со спонтанным нарушением симметрии, если сам локальный оператор тока не может быть определен как оператор в гильбертовом пространстве, поскольку он может содержать сингулярности при совпадении аргументов в операторах, через которые выражается этот ток. Некоторые авторы [82] предполагают, что в такой теории имеется «локальное спонтанное нарушение симметрии». Эта ситуация (в отличие от «глобального» нарушения симметрии в случае применимости теоремы Голдстоуна) возможна в теориях с взаимодействием, сильно сингулярным на световом конусе. Примером такой теории является электродинамика частиц с массой нуль, в которой при спонтанном нарушении γ_5-инвариантности фермионы приобретают массу [82,83]. В этой теории можно переопределить оператор аксиально-векторного тока (с учетом поляризации вакуума), но новый ток уже не будет сохраняющимся [83].

4. Голдстоуновские частицы могут не возникнуть, если в исходном лагранжиане имелись некоторые поля с массой нуль. Из нерелятивистского примера теории сверхпроводимости известно, что голдстоуновские возбуждения в этой теории приобретут массу за счет наличия кулоновского дальнодействия [43,44,84], проявляя себя как плазмонные колебания. Поэтому и в релятивистской теории имеются попытки построить аналогичные примеры спонтанного нарушения симметрии без возникновения частиц с массой нуль (при этом исходные векторные поля нулевой массы приобретают конечную массу, так что физических частиц с нулевой массой вообще нет в теории) [85,86]. Указанная роль дальнодействия в исходном лагранжиане, приводящая к несправедливости теоремы Голдстоуна в нерелятивистской области (см. гл. 1), возможна в релятивистской теории в силу нарушения условия локальности, о значении которого для теоремы Голдстоуна мы упоминали в предыдущей главе. Действительно, особенностью квантовой теории векторных полей с нулевой массой является возможность использования кулоновской (радиационной) калибровки. Преимуществом этой калибровки является отсутствие индефинитной метрики в пространстве состояний, что, однако, покупается ценой отказа от явной лоренц-ковариантности (тем не менее, физически эта нековариантность не проявляется) и локальности [87]. Отсутствие локальности приводит к отсутствию теоремы Голдстоуна, и спонтанное нарушение симметрии оказывается возможным без частиц с массой нуль. Так

как теория является градиентно-инвариантной, окончательные выводы не должны зависеть от калибровки, поэтому можно утверждать, что в лоренц-инвариантной калибровке (здесь уже нужна индефинитная метрика) эти частицы появятся, но будут нефизическими из-за индефинитности метрики.

Одна из моделей такого сорта была предложена Кибблом [87]: это модель типа Янга — Миллса [88], описывающая взаимодействие комплексных скалярных (псевдоскалярных) полей с массой и векторных полей с массой нуль. Модель обладает свойством локальной калибровочной инвариантности [88]. Автор показывает, что условие неинвариантности вакуума относительно группы $SU(2)$ внутренних преобразований приводит к появлению массы у векторных полей, голдстоуновские же частицы с массой нуль не возникают.

В заключение отметим, что голдстоуновские частицы приобретают ненулевую массу, если на спонтанное нарушение симметрии накладывается дополнительное неспонтанное. Под этим понимается, что полный лагранжиан можно разбить на две части — инвариантную и неинвариантную. Вакуумное состояние инвариантной части лагранжиана предполагается неинвариантным, т. е. имеется спонтанное нарушение симметрии для этой части лагранжиана. Согласно теореме Голдстоуна при этом имеются частицы с массой нуль. Неинвариантная часть полного лагранжиана может быть учтена по теории возмущений и приводит к появлению массы у голдстоуновских частиц. Эффект появления массы при поэтапном нарушении симметрии может быть сформулирован как модифицированная теорема Голдстоуна [17]:

Теорема. *В локальной теории поля с частично сохраняющимся током и неинвариантным вакуумом должны присутствовать голдстоуновские бозоны с конечной массой.*

Для доказательства теоремы рассмотрим [17] лагранжиан с плотностью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \varepsilon_i \Phi_i$, где $\mathcal{L}_0$ инвариантен относительно некоторой, вообще говоря, неабелевой группы G, ε_i — постоянные, а Φ_i — локальные поля, образующие базис определенного представления группы G. Токи J_μ^a, сохраняющиеся при $\varepsilon_i = 0$, в случае $\varepsilon_i \neq 0$ удовлетворяют условию «частичного сохранения» и коммутационным соотношениям, связанным с преобразованием полей Φ_i по представлению группы:

$$\partial_\mu J_\mu^a = \varepsilon_i T_{ij}^a \Phi_j, \tag{6,5}$$

$$\left[\int J_0^a(\mathbf{x}, t)\, d^3x,\ \Phi_i(\mathbf{y}, t) \right] = T_{ij}^a \Phi_j(\mathbf{y}, t), \tag{6,6}$$

где T_{ij}^a — вещественная антисимметричная матрица генератора T^a. Определим одно- и двухточечные функции

$$\lambda_i \equiv \langle 0 | \Phi_i | 0 \rangle, \tag{6,7}$$

$$\Delta_{ij}(p^2) \equiv i \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T\{\Phi_i(x), \Phi_j(0)\} | 0 \rangle. \tag{6,8}$$

Предположим, что в силу неинвариантности вакуума некоторые $\lambda_i \neq 0$. Из (6,5) и (6,6) легко получить

$$\varepsilon_i T_{ij}^a \lambda_j = 0, \tag{6,9}$$

$$\Delta_{ij}^{-1}(0) \lambda_j^a = \varepsilon_i^a, \tag{6,10}$$

где $\lambda_j^a = T_{jk}^a \lambda_k$, $\varepsilon_i^a \equiv T_{ik}^a \varepsilon_k$. Равенство (6,10) и есть то, что нам нужно. Действительно, если бы было $\varepsilon_i \equiv 0$, а $\lambda_i \neq 0$, то мы бы имели случай обычной теоремы Голдстоуна, поскольку $\Delta_{ij}^{-1}(0) = 0$ означало бы наличие особенности у $\Delta_{ij}(p^2)$ при $p^2 = 0$. Если же $\varepsilon_i \neq 0$ (т. е. при наличии нарушения симметрии в лагранжиане), то частицы с массой нуль не появляются. Более того, можно привести некоторые аргументы [17] в пользу линейной зависимости $\Delta_{ij}^{-1}(p^2)$ от p^2, так что $\Delta(p^2) = Z_T^{1/2}(p^2 + \mu^2)^{-1}Z^{1/2}$, где $Z^{1/2}$ — положительная матрица перенормировки волновой функции, а μ^2 — массовая матрица. Из (6,10) тогда видно, что $\mu^2 \to 0$ при $\varepsilon_i \to 0$. Отметим, что Φ_i в приведенном доказательстве, как и выше в теореме Голдстоуна, не обязательно должно быть основным полем; Φ_i может быть сложным объектом, составленным из других полей. Скалярность Φ_i связана с лоренц-инвариантностью лагранжиана $\mathcal{L}$. Модифицированная теорема Голдстоуна позволяет делать утверждения о появлении массы у частиц даже в случае, когда в исходном лагранжиане имеются лишь безмассовые поля. Известно [18, 19], что в теории сильно взаимодействующих частиц (адронов) в случае безмассовых частиц имеется более высокая симметрия $SU(3) \otimes SU(3)$ (хиральная симметрия). Нарушение хиральной симметрии в лагранжиане позволяет с помощью модифицированной теоремы Голдстоуна сделать вывод о появлении массы у голдстоуновских бозонов и получить ряд проверяемых в эксперименте соотношений между этими массами [17,89,90] (первоначальное же спонтанное нарушение симметрии за счет неинвариантности вакуума позволяет, как мы увидим в следующей главе, получить ненулевую массу у полей, входящих в аксиальные токи). Модифицированная теорема Голдстоуна естественно связана с высказанной Гелл-Манном и Леви [91] гипотезой частичного сохранения аксиального векторного тока (PCAC), согласно которой аксиально векторный ток $j_{\mu A}^i$ удовлетворяет соотношению

$$\partial_\mu j_{\mu A}^i = \frac{m_\pi^2}{\sqrt{2}} b_\pi \Phi^i(x), \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3 & \text{для } SU(2), \\ i = 1, \ldots, 8 & \text{для } SU(3), \end{cases} \tag{6,11}$$

где m_π — масса π-мезона, Φ^i — гейзенберговский оператор взаимодействующего пионного поля, b_π — некоторый формфактор $(b_\pi(m_\pi^2) = 0{,}96\ m_\pi)$. Из (6,11) видно, что $\partial_\mu j_{\mu A}^i = 0$, если $m_\pi^2 = 0$.

Таким образом, с точки зрения модифицированной теоремы Голдстоуна голдстоуновскими частицами могут быть π-мезоны в случае группы $SU(2)$ и октет мезонов в случае $SU(3)$.

7. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ

В настоящей главе мы приведем несколько типичных моделей спонтанного нарушения симметрии в релятивистской теории поля. Особенностью рассматриваемых моделей является отказ от обычной теории возмущений, так как получаемые выражения неаналитичны по константе связи. Спонтанное нарушение симметрии тесно связано с переходом к физическому вакууму — переходом, который, согласно уже упоминавшейся нами теореме Хаага [11, 58], не может рассматриваться как преобразование в гильбертовом пространстве голых частиц. С этой точки зрения модели спонтанного нарушения симметрии являются примерами ситуаций, когда свойства симметрии физических частиц отличаются от свойств симметрии голых частиц. Поэтому некоторые авторы [92–94] предпочитают говорить не столько о спонтанном нарушении симметрии, сколько об изменении симметрии при переходе от математического вакуума к физическому вакууму. В частности, существует модель спонтанного (динамического) возникновения симметрии [95], когда симметрия физических полей оказывается более высокой, чем симметрия голых частиц.

Здесь мы подробно рассмотрим две типичные модели спонтанного нарушения симметрии, ограничиваясь в остальных случаях только ссылками на оригинальные работы.

1. Первой попыткой применения идеи неинвариантного вакуума для получения физических частиц с конечной массой из частиц с нулевой массой по аналогии с появлением щели в теории сверхпроводимости явились работы Намбу и Иона-Ласинио [71, 72] и Вакса и Ларкина [96, 97]. Прежде всего отметим, почему так интересны модели, в которых масса физических частиц оказывается отличной от нуля при нулевой массе затравочных полей.

Во-первых, нулевая затравочная масса приводит в случае ферми-полей к наличию особой симметрии голых полей (так называемой γ_5-инвариантности), которая нарушается при появлении массы у физических полей. Однако «след» от этой первоначальной симметрии останется: первоначальная точная симметрия проявится физически как нарушенная симметрия, а. как мы знаем из теории сильных взаимодействий, существование нарушенной симметрии оказывается достаточным для предсказывания проверяемых в эксперименте фактов. Так, в последнее время появился ряд работ [18, 19], предлагающих использовать в качестве нарушенной симметрии сильных взаимодействий не просто SU (3), но так называемую хиральную группу SU (3) $\otimes$ SU (3), являющуюся точной, если массы частиц равны нулю.

Во-вторых, в этих моделях ненулевая масса частиц оказывается функцией других параметров теории, таких, как константа связи. Это, возможно, подсказывает путь, на котором можно найти ответ на вопрос, почему частицы обладают определенными массами. Обычно масса считается внешним параметром теории и вопрос о ее появлении не ставится.

Исходным лагранжианом работ [71, 72] является γ_5-инвариантный лагранжиан, описывающий четырехфермионное взаимодействие некоторых фермионов с нулевой затравочной массой. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ равна

$$\mathcal{L} = -\overline{\Psi}\gamma_\mu\partial_\mu\Psi + g_0\,[(\overline{\Psi}\Psi)^2 - (\overline{\Psi}\gamma_5\Psi)^2], \tag{7,1}$$

где g_0 — некоторая константа связи, которая предполагается положительной. γ_5-инвариантность означает инвариантность относительно преобразований

$$\Psi \longrightarrow e^{i\tau\gamma_5}\Psi, \quad \overline{\Psi} \longrightarrow \overline{\Psi}e^{i\tau\gamma_5}, \tag{7,2}$$

приводящих к сохранению спиральности $\chi = \int \overline{\Psi}\gamma_0\gamma_5\Psi\, d^3x$.

Предположим, что физические частицы имеют массу, не равную нулю (что означает нарушение γ_5-инвариантности). В этом случае стандартная теория возмущений, в которой $\mathcal{L}_0 = -\overline{\Psi}\gamma_\mu\partial_\mu\Psi$ и $\mathcal{L}_{\text{int}} = g_0\,[(\overline{\Psi}\Psi)^2 - (\overline{\Psi}\gamma_5\Psi)^2]$ γ_5-инвариантны, неприменима. Основная идея работ [71, 72] состоит в том, что лагранжиан свободных полей $\mathcal{L}_0'$ выбирается имеющим симметрию физических полей вида

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) + (\mathcal{L}_{\text{int}} - \mathcal{L}_S) = \mathcal{L}_0' + \mathcal{L}_{\text{int}}', \tag{7,3}$$

где $\mathcal{L}_S = -m\overline{\Psi}\Psi$, после чего $\mathcal{L}_{\text{int}}'$ может быть учтен по теории возмущений. Такой выбор $\mathcal{L}_0'$ связан с предположением о γ_5-неинвариантности физического вакуума. По теореме Коулмена (гл. 4) вакуум $|\Phi(m)\rangle$ для $\mathcal{L}_0'$ также γ_5-неинвариантен. Переход к «другому» вакууму, отраженный в переходе от $\mathcal{L}_0$ к $\mathcal{L}_0'$, означает рассмотрение другого унитарно-неэквивалентного представления канонических антикоммутационных соотношений. Действительно, пусть

$$\gamma_\mu\partial_\mu\Psi^{(0)}(x) = 0, \quad (\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,\Psi^{(m)}(x) = 0.$$

Будем считать, что начальные условия для обоих полей одинаковы:

$$\Psi^{(0)}(x) = \Psi^{(m)}(x) \tag{7,4}$$

при $x^0 = 0$. Здесь

$$\Psi_\alpha^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\substack{\mathbf{p},\,\sigma \\ p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \lambda^2}} \{u_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\, a_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\, e^{ipx} + v_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\, b_{(\lambda)}^{+}(\mathbf{p}, \sigma)\, e^{-ipx}\}, \tag{7,5}$$

где $\lambda = 0$ или m, $u_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)$ — нормализованные спинорные собственные функции для частиц и античастиц с импульсом $\mathbf{p}$ и проекцией спина на направление импульса σ. Операторы $a_{(\lambda)}$, $a_{(\lambda)}^{+}$, $b_{(\lambda)}$, $b_{(\lambda)}^{+}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{a_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma),\ a_{(\lambda)}^{+}(\mathbf{p}', \sigma)\}_{+} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\sigma\sigma'},$$
$$\{b_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma),\ b_{(\lambda)}^{+}(\mathbf{p}', \sigma)\}_{+} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\sigma\sigma'}.$$

Из (7,4) следует, что операторы частиц с массой связаны с операторами для безмассовых частиц боголюбовским преобразованием (хотя и несколько более сложным, чем в теории сверхпроводимости, из-за присутствия античастиц):

$$\left.\begin{aligned} &a_{(m)}(\mathbf{p}, \sigma) = \xi_{\mathbf{p}} a_{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) + \eta_{\mathbf{p}} b_{(0)}^{+}(-\mathbf{p}, \sigma), \\ &b_{(m)}(\mathbf{p}, \sigma) = \xi_{\mathbf{p}} b_{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) - \eta_{\mathbf{p}} a_{(0)}^{+}(-\mathbf{p}, \sigma), \\ &|\xi_{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\right), \quad |\eta_{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

Связь вакуумов $|\Phi(0)\rangle$ и $|\Phi(m)\rangle$, определяемых равенствами

$$a_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\,|\Phi(\lambda)\rangle = b_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\,|\Phi(\lambda)\rangle = 0 \tag{7,7}$$
$$(\lambda = 0 \text{ или } m),$$

может быть получена из (7,6) и (7,7) и имеет вид

$$|\Phi(m)\rangle = \prod_{\mathbf{p},\,\sigma} \{\xi_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}} a_{(0)}^{+}(\mathbf{p}, \sigma)\, b_{(0)}^{+}(-\mathbf{p}, \sigma)\}\,|\Phi(0)\rangle. \tag{7,8}$$

Скалярное произведение

$$\langle\Phi(0)\,|\,\Phi(m)\rangle = \exp\left(\sum_{\mathbf{p}} \ln \xi_{\mathbf{p}}\right) = \prod_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} \tag{7,9}$$

стремится к нулю, когда объем нормировки Ω стремится к бесконечности ($|\xi_{\mathbf{p}}| < 1$), так что $|\Phi(0)\rangle$ и $|\Phi(m)\rangle$ в трансляционно-инвариантной теории ортогональны друг другу. Выражение (7,8) для $|\Phi(m)\rangle$ имеет, конечно, лишь формальный смысл (в более строгой аксиоматической теории понятие неинвариантного вакуума формулируется без использования разложений вида (7,8)), однако оно позволяет увидеть такую особенность, как γ_5-неинвариантность $|\Phi(m)\rangle$, приводящую к бесконечному вырождению вакуума. Действительно, при преобразовании (7,2)

$$|\Phi(m)\rangle \longrightarrow |\Phi(m)\rangle_\tau = e^{-i\tau\chi}\,|\Phi(m)\rangle =$$
$$= \prod_{\mathbf{p},\,\pm} \{\xi_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}} e^{\pm 2i\tau} a_{(0)}^{+}(\mathbf{p}, \pm)\, b_{(0)}^{+}(-\mathbf{p}, \pm)\}\,|\Phi(0)\rangle, \tag{7,10}$$

причем ${}_\tau\langle\Phi(m)\,|\,\Phi(m)\rangle_{\tau'} = 0$ $(\tau' \neq \tau \pmod{2\pi})$. Таким образом, имеется бесконечное множество вакуумов $|\Phi(m)\rangle_\tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi)$. Однако все эти вакуумы приводят, по существу, к эквивалентному физически описанию системы, так что настоящее различие имеется лишь между $|\Phi(0)\rangle$ и $|\Phi(m)\rangle$, поскольку γ_5-неинвариантность $|\Phi(m)\rangle$, учитываемая боголюбовским преобразованием (7,6), проявляется в существовании аномального среднего $\langle\Phi(m)\,|\,\overline{\Psi}\Psi\,|\,\Phi(m)\rangle$, отождествляемого с массой.

Представив $\mathscr{L}$ в виде (7,3), Намбу и Иона-Ласинио вычисляют далее собственно энергетическую часть $\Sigma(p, m, g_0, \Lambda)$, где Λ — некоторое обрезание, так что физическая частица удовлетворяет уравнению

$$[i\gamma p+\Sigma(p, m, g_0, \Lambda)]\,\Psi=0,$$

если $(i\gamma p+m)\Psi=0$, т. е.

$$m=\Sigma(p, m, g_0, \Lambda)\,|_{(i\gamma p+m)\Psi=0}. \tag{7,11}$$

Из (7,11), вычисляя Σ в первом порядке по теории возмущений и используя для пропагаторов выражение S_F^m [30], получим необходимое условие существования нетривиального решения $(m\neq 0)$

$$1=-\frac{ig_0}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{p^2+m^2-i\varepsilon}F(p, \Lambda), \tag{7,12}$$

где $F(p, \Lambda)$ — формфактор обрезания. Из (7,12) можно найти связь между m, g_0 и Λ. При лоренц-инвариантном обрезании при $p^2=\Lambda^2$ получим соотношение

$$\frac{2\pi^2}{g_0\Lambda^2}=1-\frac{m^2}{\Lambda^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}+1\right), \tag{7,13}$$

откуда видно, что нетривиальное решение существует только при

$$0<\frac{2\pi^2}{g_0\Lambda^2}<1. \tag{7,14}$$

Из (7,13) и (7,14) видно, что полученная теория неаналитична при $g_0=0$: m нельзя разложить в ряд по степеням g_0.

В работах [71, 72] обсуждается далее вопрос о теореме Голдстоуна (гл. 5 и 6). Рассмотренная теория является теорией с γ_5-инвариантным лагранжианом, но неинвариантным вакуумом. В ней сохраняется аксиальный ток

$$\partial_\mu j_{\mu 5}=0, \quad j_{\mu 5}=i\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi. \tag{7,15}$$

Уравнение Дирака для частицы с массой не сохраняет такой ток, поскольку

$$\partial_\mu(\overline{\Psi}^{(m)}\gamma_\mu\gamma_5\Psi^{(m)})=2im\overline{\Psi}^{(m)}\gamma_5\Psi^{(m)}. \tag{7,16}$$

Спрашивается, как можно совместить (7,15) и (7,16)? Ответ, предлагаемый в [71, 72], состоит в том, что из-за поляризационных поправок ток $j_{\mu 5}$ должен быть переопределен. В частности, между однонуклонными состояниями он будет иметь вид

$$\langle p'\,|\,j_{\mu 5}\,|\,p\rangle=\bar{u}(p')\,X_\mu(p', p)\,U(p),$$

где

$$X_\mu(p', p)=F(q^2)\left(i\gamma_\mu\gamma_5+\frac{2m\gamma_5 q_\mu}{q^2}\right), \quad q=p-p'', \; p^2=p^2=m^2.$$

Тогда уравнения (7,15) и (7,16) можно совместить, если

$$X_\mu(p', p)=F(q^2)\left(i\gamma_\mu\gamma_5+\frac{2m\gamma_5 q_\mu}{q^2}\right),$$

что соответствует появлению полюса при $q^2\to 0$, т. е. появляется голдстоуновский бозон $(m=0)$ с квантовыми числами нуклон-антинуклонной пары (псевдоскалярный мезон с $m=0$).

Очевидным недостатком модели Намбу и Иона-Ласинио является явная зависимость от параметра обрезания Λ, физический смысл которого остается неясным.

2. В случае скалярных (псевдоскалярных) полей Голдстоуном [59] был предложен простой пример нетривиального нарушения симметрии с появлением бозонов с массой нуль.

Пусть имеется лагранжиан взаимодействующих заряженных скалярных полей

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \text{ и } \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$

вида

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - \mu_0^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda_0}{6}(\varphi^*\varphi)^2 = \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - V(\varphi^*\varphi), \qquad (7{,}17)$$

где $\mu_0^2 < 0$. Лагранжиан (7,17) инвариантен относительно преобразования $\varphi \to \varphi e^{i\alpha}$, $\varphi^* \to \varphi^* e^{-i\alpha}$ (или $R\varphi_1 = \varphi_2$). Функция $V(\varphi^*\varphi)$ имеет максимум при φ^*, $\varphi = 0$, и поэтому естественно считать вакуум $|0\rangle$, для которого $\langle 0|V|0\rangle = 0$, неустойчивым, так что состояния системы следует искать на вакууме $|0'\rangle$, таком, что $\langle 0'|V|0'\rangle \neq 0$. Этого можно добиться, положив $\langle 0'|\varphi|0'\rangle = \chi \neq 0$, где χ определяется из условия минимума полной энергии

$$\left\langle 0' \left| \frac{\partial V}{\partial \varphi^*} \right| 0' \right\rangle = \langle 0'|\varphi V'(\varphi^*\varphi)|0'\rangle = 0.$$

Проводя вычисления, получаем $|\chi|^2 = -3\mu_0^2/\lambda_0$. Отличие χ от нуля можно явно учесть, совершив каноническое преобразование

$$\varphi = \varphi' + \chi. \qquad (7{,}18)$$

Выбирая χ вещественным, подставив (7,18) в (7,17), получим

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1'\partial_\mu\varphi_1' + 2\mu_0^2\varphi_1'^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2'\partial_\mu\varphi_2' - \frac{\lambda_0}{6}\chi\varphi_1'(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \frac{\lambda_0}{24}(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^2, \qquad (7{,}19)$$

т. е. вместо двух полей с мнимой массой φ_1 и φ_2 (или φ и φ^*) получаем поле с вещественной массой $\sqrt{2}\,\mu_0$ и поле с массой нуль. Лагранжиан (7,19) уже неинвариантен относительно преобразования $R\varphi_1' = \varphi_2'$. Последнее, очевидно, связано с преобразованием (7,18), поскольку именно это преобразование явно внесло асимметрию между φ_1 и φ_2. В терминах φ_1 и φ_2 преобразование (7,18) при вещественном χ означает переход к φ_1' и φ_2' по формулам

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \sqrt{2}\,\chi, \quad \varphi_2 = \varphi_2'.$$

В (7,19) очевидно нарушена и симметрия относительно указанного выше калибровочного преобразования, что связано с неинвариантностью вакуума, проявляющейся в $\langle 0'|\varphi|0'\rangle = \chi \neq 0$.

Основными чертами модели являются:

а) исходные поля φ и φ^* (или φ_1 и φ_2) характеризовались отрицательной величиной квадрата массы (мнимой массой), физические же частицы приобретают вещественную массу и массу нуль соответственно;

б) поля φ_1' и φ_2' взаимодействуют друг с другом, так что голдстоуновские бозоны φ_1' играют роль физических частиц;

в) теория неаналитична по константе связи λ_0, что видно из приведенного выше выражения для χ.

Модели Намбу и Иона-Ласинио и Голдстоуна являются примерами нетривиальных релятивистских моделей спонтанного нарушения симметрии.

В заключение настоящей главы кратко перечислим некоторые другие модели спонтанного нарушения симметрии в теории элементарных частиц.

а) Нарушение $SU(3)$. Модель спонтанного нарушения $SU(3)$ типа разобранной нами выше модели Намбу и Иона-Ласинио была построена в работах [12, 98]. Вместо одного спинорного поля Ψ с нулевой массой в (7.1) в модели нарушения $SU(3)$ берется триплет спинорных полей. Нелинейное взаимодействие, имеющее вид самодействия (как и в (7,1)), инвариантно относительно $SU(3)$. Вакуум предполагается инвариантным лишь относительно группы изоспиновых вращений и гиперзаряда. Неинвариантность вакуума относительно полной группы симметрии лагранжиана приводит, как и в модели Намбу — Иона-Ласинио, к появлению ненулевых масс у частиц, причем между этими массами существуют соотношения, определяемые формулой Гелл-Манна — Окубо.

Модель спонтанного нарушения $SU(3)$ (а также группы внутренних вращений $RO_{(n)}$ [99]) может быть построена и по аналогии с моделью Голдстоуна: основные поля в этой модели являются уже не спинорными, а скалярными.

Открытым вопросом в этих моделях является вопрос о физическом смысле голдстоуновских бозонов.

Модель спонтанного нарушения $SU(3)$ без безмассовых частиц может быть построена по аналогии с моделью Киббла (см. гл. 6), к которой теорема Голдстоуна неприменима в связи с особенностями квантования векторных полей (см. соответствующую модель в работе [14]).

б) Объяснение разности масс мюона и электрона. Этой проблеме посвящены работы [12, 13]. Мюон и электрон в этих работах наделяются изотопическими свойствами: лагранжиан затравочных полей с нулевой массой выбирается изотопически инвариантным. Вакуум предполагается изотопически неинвариантным состоянием, так что спонтанное нарушение симметрии приводит к появлению разности масс у частиц. Эта разность масс интерпретируется как разность масс физических мюона и электрона. В этих моделях возникают затруднения, связанные с физической интерпретацией голдстоуновских бозонов.

в) Спонтанное нарушение CP-инвариантности. Нарушение CP-инвариантности в распадах K^0-мезонов, согласно идее спонтанного нарушения CP, происходит не вследствие существования нового CP-неинвариантного взаимодействия, а вследствие CP-неинвариантности вакуума при инвариантном лагранжиане. В работах [15, 99] CP-неинвариантность вакуума проявляется в существовании CP-неинвариантного вакуумного среднего $\langle 0 \mid \varphi \mid 0 \rangle$ для некоторого поля, с которым взаимодействуют K^0-мезоны. Лагранжиан этого поля имеет вид лагранжиана в модели Голдстоуна. Нарушение CP есть тогда нарушение симметрии относительно R-отражения (см. выше модель Голдстоуна).

В работах [16, 100] спонтанное нарушение CP связывается не с существованием нового поля $\varphi(x)$, а со свойствами самих K^0-мезонов: при этом $\langle 0 \mid K^0 K^0 \mid 0 \rangle \neq 0$, т. е. $\varphi(x) = K^0(x)\, K^0(x)$.

Модели спонтанного нарушения CP феноменологически сводятся к модели сверхслабого взаимодействия Вольфенштейна [101].

Другими интересными моделями, использующими концепцию неинвариантного вакуума, являются уже упоминавшиеся нами выше модели нарушения $SU(3) \otimes SU(3)$ в теории сильных взаимодействий, а также вычисление угла Кабиббо, играющего существенную роль при определении токов в слабом взаимодействии [102–106].

8. СВОЙСТВА ВАКУУМА И КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Здесь рассматривается интересная особенность квантования полей в пространстве-времени с нестационарной метрикой. Теория квантованного поля в такой метрике (гравитационное поле при этом не квантуется) эквивалентна квантовой теории поля, взаимодействующего с внешним классическим полем. Как известно [107], в случае внешнего поля, зависящего от времени, необходимо учитывать рождение реальных частиц этим полем, что интерпретируется рядом авторов [22, 23, 108, 109] как образование вещества при расширении Вселенной. Вакуумное состояние, определяемое как состояние, инвариантное относительно группы симметрии лагранжиана, неинвариантно относительно трансляций во времени, так что каждому моменту времени соответствует свой вакуум. Изменение вакуума во времени сопровождается изменением некоторой классической величины, определяемой как плотность числа частиц в вакууме и интерпретируемой в работах [22, 23] как классическая плотность вещества аналогично тому, как это делается в приведенных нами в гл. 1 примерах из нерелятивистской физики, где изменение вакуума обязательно связано с изменением некоторой классической величины. Однако расчеты [23] для скалярного (псевдоскалярного) поля π-мезонов в квазиевклидовой модели Фридмана дали для настоящей стадии развития Вселенной величину этой плотности порядка $\approx \frac{mH^2}{16\,(2\pi)^3}\sin^2 m\eta \approx 10^{-46}$ *см*$^{-3}$, где η — играет роль времени, H — постоянная Хаббла, m — масса частицы. Малость этой величины говорит о несущественности эффекта образования вещества в настоящее время, однако на ранних стадиях эволюции Вселенной он мог играть важную роль. В частности, возможно, что все вещество во Вселенной возникло таким путем [109]. Для выяснения этого вопроса необходимо совместно рассматривать квантовую теорию поля и уравнения Эйнштейна.

Неисчезающая плотность вещества в вакууме может привести и к таким следствиям, как появление отличной от нуля космологической постоянной (см. обзор Я. Б. Зельдовича [110]). Интересным вопросом в теориях, связывающих свойства вакуума с макроскопическими характеристиками в космологии, является вопрос о макроскопических следствиях неинвариантности вакуума в теории элементарных частиц (теорема Коулмена) относительно таких преобразований, как пространственное и CP-отражение, и калибровочное преобразование странности (гиперзаряда). В частности CP-неинвариантность вакуума может привести к тому, что соответствующая макровеличина окажется отличной от нуля только для частиц. Если эту величину отождествить с плотностью вещества во Вселенной, то ее равенство нулю для антивещества проявится физически как отсутствие антигалактик.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Гугенгольц, Квантовая теория систем многих тел, М., «Мир», 1967.
2. И. Е. Сигал, Математические проблемы релятивистской физики, М., «Мир», 1968.
3. О. И. Завьялов, В. Н. Сушко, ТМФ **1**, 153 (1969).
4. A. S. Wightman, S. S. Schweber, Phys. Rev. **98**, 812 (1955).
5. R. Haag, D. Kastler, J. Math. Phys. **5**, 848 (1964).
6. H. Araki, Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie. I, II, Lecture notes, ETH, Zürich, 1961—1962.

7. Сб. «Нелинейная квантовая теория поля», М., ИЛ, 1959.
8. В. Гейзенберг, Введение в единую полевую теорию элементарных частиц, М., «Мир», 1968.
9. S. Coleman, J. Math. Phys. 7, 787 (1966).
10. E. Fabri, F. Picasso, F. Strocchi, Nuovo Cim. **48**, A376 (1967).
11. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., «Наука», 1969.
12. M. Baker, S. L. Glashow, Phys. Rev. **128**, 2462 (1962).
13. R. Arnowitt, S. Desser, Phys. Rev. **138**, B712 (1965).
14. Y. S. Kim, F. Landis Markley, Nuovo Cim. **63**, A60 (1969).
15. G. Marx, Phys. Rev. Lett. **14**, 334 (1965).
16. А. А. Гриб, Письма ЖЭТФ **11**, 14 (1965).
17. S. L. Glashow, S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **20**, 224 (1968).
18. M. Gell-Mann, R. Oakes, B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
19. R. Dashen, W. Weinstein, Phys. Rev. **183**, 1261 (1969).
20. И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, М., «Наука», 1964.
21. P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **139**, B684 (1965).
22. L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
23. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, ЯФ **10**, 1276 (1969).
24. G. Wakita, Prog. Theor. Phys. **23**, 32 (1960).
25. A. Komar, Phys. Rev. **133**, 542 (1964).
26. А. А. Гриб, Вестн. ЛГУ, № 16, 16 (1968).
27. G. C. Wick, A. S. Wightman, E. P. Wigner, Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
28. G. Emch, M. Guenin, J. Math. Phys. **7**, 915 (1966).
29. Р. Ф. Стритер, А. С. Уайтман, *PCT*, спин и статистика и все такое, М., «Наука», 1966.
30. С. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИЛ, 1963.
31. Н. Н. Боголюбов, Квазисредние в задачах статистической механики, ОИЯИ, Дубна, Д. 781, 1961; 2-е изд. Р. 511, 1963.
32. Н. Н. Боголюбов, Physica **26**, 1 (1960).
33. а) R. Haag, N. M. Hugenholtz, M. Winnink, Commun. Math. Phys. **5**, 215 (1967); б) N. M. Hugenholtz, J. D. Wieringa, ibidem **11**, 183 (1969); в) M. Winnink, An Application of *C*-algebras to Quantum Statistical Mechanics of Systems in Equilibrium, Thesis, Univ. of Groningen, 1968; г) J. D. Wieringa, Thermodinamic Limit and K. M. S. States in Quantum Statistical Mechanics, a *C*-algebraic Approach, Thesis, Univ. of Groningen, 1970.
34. W. Heisenberg, Zs. Phys. **49**, 619 (1928).
35. Д. Маттис, Теория магнетизма, М., «Мир», 1967.
36. R. F. Streater, Commun. Math. Phys. **6**, 233 (1967).
37. Р. Браут, Фазовые переходы, М., «Мир», 1967.
38. N. M. Hugenholtz, D. Pines, Phys. Rev. **116**, 489 (1959).
39. H. Wagner, Z. F. Phys. **195**, **273** (1966).
40. R. V. Lange, Phys. Rev. **146**, 301 (1966) (см. перевод в [1]).
41. L. Leplae, H. Umezawa, Nuovo Cim. **44**, B410 (1966).
42. а) A. Klein, B. W. Lee, Phys. Rev. Lett. **12**, 266 (1964); б) W. Gilbert, Phys. Rev. Lett. **12**, 713 (1966).
43. P. W. Anderson, Phys. Rev. **110**, 827 (1958) (см. перевод в [47], стр. 264).
44. P. W. Anderson, Phys. Rev. **112**, 1900 (1958) (см. перевод в [47], стр. 285).
45. P. W. Anderson, Phys. Rev. **130**, 439 (1963).
46. P. W. Anderson, Lectures on the Many—Body Problem, Vol. 2, Ed. E. R. Caianiello, 1964.
47. Сборник «Теория сверхпроводимости», М., ИЛ, 1960.
48. A. Coniglio, M. Marinaro, Nuovo Cim. 48, B249 (1967).
49. A. Coniglio, M. Marinaro, Nuovo Cim. 48, B267 (1967).
50. J. A. Swieca, Commun. Math. Phys. **4**, 1 (1967).
51. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, М., Изд-во АН СССР, 1958.
52. И. М. Халатников, Введение в теорию сверхтекучести, М., «Наука», 1965.
53. E. Fabri, L. E. Picasso, Phys. Rev. Lett. **16**, 408 (1966).
54. J. A. Swieca, Phys. Rev. Lett. **17**, 974 (1966).
55. G. F. Dell'Antonio, Nuovo Cim. **47**, A1 (1967).
56. B. Schroer, P. Stichel, Commun. Math. Phys. 3, 258 (1966).
57. P. Federbush, K. Johnson, Phys. Rev. **120**, 1926 (1960).
58. R. Haag, Kgl. Dan. Vid. Selsk, Mat.-fys. Medd. **29**, № 12 (1955).
59. J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
60. J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 962 (1962).
61. S. Bludman, A. Klein, Phys. Rev. **131**, 2363 (1963).

62. T. W. B. Kibble,[111] стр. 277.
63. G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, Advances in Particle Physics, Ed. R. L. Cool, R. E. Marshak, 1968, стр. 567.
64. J. T. Lopuszanski, Fort. der Phys. **15**, 684 (1967).
65. R. F. Streater, Phys. Rev. Lett. **15**, 475 (1965).
66. R. F. Streater, Proc. Roy. Soc. **287**, A510 (1965).
67. J. D. Bjorken, Ann. Phys. **24**, 174 (1963).
68. I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. **130**, 465 (1963).
69. а) G. S. Guralnik, Phys. Rev. **136**, B1404, B1417 (1964); б) G. S. Guralnik, C. R. Hagen, Phys. Rev. **171**, 1431 (1968).
70. A. Salam, J. C. Ward, Phys. Rev. Lett. **5**, 390 (1960).
71. Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
72. G. Jona-Lasinio, Y. Nambu, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
73. а) D. Kastler, D. W. Robinson, A. Swieca, Commun. Math. Phys. **2**, 108 (1966); б) D. Kastler,[111], стр. 305.
74. А. В. Булинский, Вестн. МГУ, № 2, 75 (1969).
75. R. F. Streater, Mathematical Theory of Elementary Particles, Ed. R. Goodman, I. E. Segal, MIT Press 1966, стр. 10.
76. J. A. Swieca, Nuovo Cim. **57**, A573 (1968).
77. H. Leutwyler, Helv. Phys. Acta **38**, 431 (1965).
78. H. J. Treder, Monatsher. Deutsh. Acad. Wiss. **9**, 427 (1967).
79. а) P. R. Phillips, Phys. Rev. **146**, 966 (1966); б) H. C. Ohanian, Phys. Rev. **184**, 1305 (1969).
80. G. S. Guralnik, C. R. Hagen, Nuovo Cim. **61**, A98 (1969).
81. G. S. Guralnik, G. R. Hagen, Nuovo Cim. **43**, A1 (1966).
82. Th. A. J. Maris, G. Jakob, B. Liberman, Nuovo Cim. **52**, A116 (1967).
83. K. Johnson, Phys. Lett. **5**, 253 (1963).
84. J. A. Cronin, Amer. J. Phys. **33**, 319 (1965).
85. А. А. Мигдал, А. М. Поляков, ЖЭТФ **51**, 135 (1966).
86. P. W. Higgs, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
87. T. W. B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).
88. Сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», М., «Мир», 1964.
89. S. Okubo, V. S. Mathur, Phys. Rev. Lett. **23**, 1412 (1969).
90. R. F. Dashen, Phys. Rev. **183**, 1245 (1969).
91. M. Gell-Mann, M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
92. Proc. of the Hungar. Conf. Acta Phys. Hung. **19**, f. 1—4 (1965).
93. а) L. Leplae, H. Umezawa, Nuovo Cim. **44**, B410 (1966); б) K. Nakagawa, Nuovo Cim. **50**, A37 (1967).
94. H. Umezawa, Nuovo Cim. **40**, A450 (1965).
95. S. A. Bludman, N. G. Despande, Nuovo Cim. **45**, A656 (1966).
96. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **40**, 282 (1961).
97. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, Proc. of the 1960 Rochester Conf. on High Energy Physics. (1960), p. 871.
98. H. Miyasawa, Recent Developments in Particle Physics, ser. Nuclear Physics, Vol. 2, 1966, p. 22.
99. G. Marx, Phys. Rev. **140**, 1068 (1966).
100. А. А. Гриб, Вестн. ЛГУ, № 22, 50 (1967).
101. Л. Б. Окунь, УФН **89**, 603 (1966).
102. R. Gatto, G. Sartori, M. Tonin, Phys. Lett. **28**, B128 (1968).
103. N. Cabibbo, L. Maiani, Phys. Lett. **28**, B131 (1968).
104. N. Cabibbo, «Hadrons and their Interactions», 1967 School of Physics E. Majorana. Ac. Press 1968, p. 381.
105. A. Pais, Phys. Rev. **173**, 1587 (1968).
106. A. I. Solomon, Y. Ne'eman, Nuovo Cim. **60**, A108 (1969).
107. Ю. Швингер, Теория квантованных полей, М., ИЛ, 1956.
108. L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
109. R. Sexl, H. Urbantke, Phys. Rev. **179**, 1247 (1969).
110. Я. Б. Зельдович, УФН **95**, 209 (1968).
111. Proc. of the 1967 Conference on Particles and Fields, Ed. C. R. Hagen et. al., 1968.