

из истории физики

92:53

## ПАУЛЬ ЭРЕНФЕСТ — УЧЕНЫЙ И ЧЕЛОВЕК

В. Я. Френкель

## I. ВВЕДЕНИЕ

По классификации, предложенной В. Оствальдом в его книге «Великие люди», Пауль Эренфест (1880—1933) удивительно подходит под категорию ученых-классиков. Вся его научная деятельность концентрировалась вокруг двух коренных проблем: квантовой теории и статистической механики, и можно без труда проследить преемственность его работ. Другая особенность Эренфеста — это редко встречающийся дар научной критики, который в его случае выходит за обычные рамки и приобретает самостоятельное значение. Эту стимулирующую критику высоко ценили Эйнштейн<sup>1</sup> и Паули<sup>2</sup>, Бор и Ланжевен, о ней писали ученики Эренфеста — Гаудсмит, Юленбек и Дике<sup>3</sup>. «Его величие,— отмечал Эйнштейн,— заключалось в чрезвычайно хорошо развитой способности улавливать самое существо теоретического понятия и настолько освобождать теорию от ее математического наряда, чтобы лежащая в ее основе простая идея проявлялась со всей ясностью. Эта способность позволяла ему быть бесподобным учителем»<sup>1</sup>. Она же делала его незаменимым на конгрессах, где он был желанным участником и в тех случаях, когда не выступал там с докладом о своих собственных работах.

В годы, предшествовавшие построению квантовой механики, в мире существовало несколько особо притягательных точек для физиков. Это была Кавендишская лаборатория — сначала с Дж. Дж. Томсоном, а позднее — с Э. Резерфордом, это были Мюнхен с А. Зоммерфельдом, Копенгаген — с Н. Бором, Гётtingен — с Борном и Франком и, наконец, Лейден, где в течение 20 лет Эренфест представлял теоретическую физику, занимая кафедру, переданную ему Лоренцем.

Помимо большого вклада, внесенного Эренфестом в развитие физики нашего века собственными работами и упомянутым выше критическим дарованием, он очень много сделал для становления и укрепления физики не только в Голландии, но и в нашей стране как до, так и после революции, а также и в США. Тот печальный факт, что заслуги его недостаточно оценены, а имя сравнительно мало известно новому поколению физиков, является, как заметил И. Е. Тамм, ничем не оправданной несправедливостью.

## II. ДЕТСТВО. СТУДЕНЧЕСКИЕ ГОДЫ

Пауль Эренфест родился в Вене 18 января 1880 г. Он был последним (пятым) ребенком в семье Сигизмунда Эренфеста. Из четверых братьев наибольшее влияние на мальчика оказал самый старший — Артур (1862—1931), способный инженер. В венской квартире Эренфестов Артур уста-

новил (еще в 1883 г.) телефон, электрический звонок, наладил камеру-обскуру. Маленький Пауль узнал из его рассказов об устройстве этих по тогдашним временам технических новинок.

Мы располагаем очень скучным материалом о школьных годах Эренфеста. В 1912 г. в письме к Лоренцу он пишет о том, что глубокое влияние на него в тот периодоказал Герман Герглотц, впоследствии крупный математик, с которым они были погодками. Другим человеком из тех далеких лет, которого Эренфест вспомнил на страницах ЖРФХО в 1911 г., был его гимназический учитель С. Валентин. Но, очевидно, он был исключением: Эйнштейн, анализируя гипотрофированную требовательность к себе, характерную для Эренфеста, пишет о тягостных воспоминаниях, связанных у него с гимназией, и отмечает, что о них можно судить «по тому, что он отказался доверить какой-нибудь школе своих нежно любимых детей»<sup>1</sup>.

В 1899 г. Эренфест поступает на философский факультет Венского университета, где велось преподавание физико-математических дисциплин. Славу Венского университета тех лет олицетворял Людвиг Больцман, у которого Эренфест прослушал ряд курсов (сначала — электричества и магнетизма, теории теплоты, позднее — статистической механики).

Больцман был человеком, который оказал, пожалуй, наиболее зримое влияние на Эренфеста. Несомненно, он был кумиром молодого человека, и это чувство восхищения не притуплялось с годами. Сопоставляя образ Больцмана, каким он вырисовывается из воспоминаний современников, с обликом Эренфеста, удивляешься сходству характеров великого учителя и его талантливого ученика.

В 1900 г. Больцман на два года покидает Вену, и Университет теряет для Эренфеста свою притягательную силу. В октябре 1901 г. он переезжает в Гётtingен, чтобы продолжить там свое физическое и математическое образование. Такая склонность к перемене мест характерна для немецкого студенчества конца прошлого — начала нашего веков: об этом пишет, например, М. Борн<sup>4</sup>. По его словам, в начале 900-х годов Университет Георгия Августа в Гётtingене был «Меккой немецких математиков», и эту славу поддерживали три пророка: Феликс Клейн, Давид Гильберт и Герман Минковский. Все они были профессорами университета, и именно в их пору достигла своего апогея восходящая еще к Гауссу традиция приложения математики к развитию наук о природе. Они-то и привлекали в Гётtingен талантливую молодежь, которая стекалась в университет со всей Германии, да и не только из Германии.

В числе этих молодых людей был и Пауль Эренфест. Когда говорят об его учителях, то к имени Больцмана добавляют имена Клейна и Гильберта, имея в виду как раз годы, проведенные в Гётtingене.

В 1903 г. Эренфест совместно со своим товарищем Вальтером Ритцем (получившим позднее мировую известность своим «комбинационным принципом») некоторое время провел в Лейдене, где слушал лекции Лоренца и познакомился с ним самим. Как выяснилось позднее, Лоренц отметил и запомнил своего австрийского студента.

В том же 1903 г. в Вену возвратился Больцман; переезжает туда и Эренфест. Он становится постоянным и деятельным участником его семинаров, посещает семинары Ф. Хазенерля. Один из участников больцмановского семинара Франц Скопи рассказал, как во время своего доклада Эренфест на память процитировал довольно длинную выдержку из какой-то больцмановской работы. Слушавший Эренфеста Больцман уже с первой фразы цитаты начал улыбаться, а в конце расхохотался: «Если бы я сам хотя бы одну из своих работ знал так же хорошо!»(см. <sup>5</sup>).

В марте 1904 г. Эренфест заканчивает свою докторскую диссертацию («Движение твердых тел в жидкостях и механика Герца»). Следует отметить, что ее тема стоит в стороне от всего, чем Эренфест занимался позднее, а сама она до 1959 г. оставалась неопубликованной<sup>6</sup>. Оппонентом по диссертации выступил Больцман, который в своем предварительном



Пауль Эренфест. США, 1931 г.

отзыве от 13 мая 1904 г. отозвался о ней с большой похвалой и выразил уверенность в том, что «господин кандидат может быть допущен к строгой защите»<sup>7</sup>.

В июне того же года, успешно защитив диссертацию, Эренфест стал доктором философии Венского университета.

Конец 1904 г. был ознаменован для Эренфеста еще одним важным событием — женитьбой на Татьяне Алексеевне Афанасьевой (1876—1964). В 1900 г. Т. А. Афанасьева окончила с золотой медалью математическое отделение физико-математического факультета Высших Бестужевских курсов в Петербурге и стала работать там в качестве ассистента на кафедре математики. В ее обязанности входило ведение практических занятий с курсистками. Осенью 1902 г. она была командирована в Гётtingенский университет для усовершенствования в математике и физике.

Там на лекциях Клейна она и познакомилась с Эренфестом, который стал бывать в доме Афанасьевых (Татьяна Алексеевна жила в Гётtingене с близкой родственницей). Чувство взаимной симпатии, возникшее между молодыми людьми, довольно быстро сменилось более глубоким и сильным.

Решив зарегистрировать свой брак на родине Эренфеста, в Вене, Эренфесты оказались, однако, перед лицом неожиданно возникших трудностей: существовавшие в Австрии законы запрещали брак, в равной степени церковный и гражданский, между христианами и нехристианами (а Эренфест по национальности был евреем). Впрочем, имелась одна возможность обойти этот средневековый закон с помощью поправки к нему, выдержанной в духе тенденций нового времени. Дело в том, что в Австрии (как и в дореволюционной России) в паспортах ее подданных фиксировалась не национальность, а вероисповедание. Люди, не придерживавшиеся каких-либо религиозных взглядов, могли при желании в соответствующей графе паспорта поставить «Konfessionslos», что означало «не придерживающийся никакого вероисповедания». Гражданский брак между двумя Konfessionslos был разрешен законом, и Пауль Эренфест и Татьяна Афанасьева, официально перейдя в «неверие», смогли оформить свои отношения в Венском муниципалитете. Последующие два года супруги жили в Вене и Гётtingене, а в 1907 г. выехали в Россию. Первое свидетельство того, что переход на положение Konfessionslos чреват определенными практическими трудностями, Эренфест получил вскоре по прибытии в Россию. В. В. Дойникова рассказала с его слов, что чиновник из полицейского управления долго не мог смириться с тем, что он должен вписать в графу о вероисповедании — случай для его практики был беспрецедентным. Никакие доводы его не устраивали, и он в конце концов с отчаянием спросил Эренфеста: «А на каком же кладбище мы Вас будем хоронить, если Вы здесь умрете?!» Двадцатисемилетний Эренфест рассмеялся и заявил, что смерть не входит в его планы.

### III. В РОССИИ (1907—1912)

Решая переехать в Россию, Эренфесты руководствовались, вероятно, как чисто эмоциональными мотивами (Татьяна Алексеевна несколько лет провела за границей, а Эренфесту хотелось ближе познакомиться с родиной жены), так и рациональными соображениями: им казалось, что в Петербурге, где было много учебных заведений и мало физиков, обоим будет нетрудно устроиться на работу.

Павел Сигизмундович — так стали называть Эренфеста в России — благодаря общению с друзьями и коллегами жены быстро сумел разобраться в обстановке с физикой и математикой, которая имела место в Петербурге. Известно, что со временем П. Л. Чебышёва при Петербургском университете сложилась блестящая математическая школа, традиции и слава которой в начале XX века поддерживались трудами А. А. Маркова, А. Н. Коркина, В. А. Стеклова и их учеников. Из русских математиков наибольшее влияние на Эренфеста (о чем он писал позднее Лоренцу) оказал В. А. Стеклов. Другим ученым, которого, по свидетельству Т. П. Кравца, Эренфест высоко ценил, был А. Н. Крылов. С физиками дело обстояло иначе. Трудности, встававшие на пути молодого человека, желавшего заниматься физикой в стенах Петербургского университета, определялись не только бедностью оборудования и скучестью выделяемых средств. «Трагедией петербургской физики» назвал А. Ф. Иоффе<sup>8</sup> те ненормальные отношения, которые сложились в университете между математиками и физиками.

Математики предъявляли чрезмерно суровые требования к магистерским экзаменам по их предмету, которым подвергались физики, желавшие посвятить себя преподавательской деятельности. Создавалось парадоксальное и действительно трагическое положение: люди, имевшие достаточно широкую известность, опубликовавшие серьезные исследования, которых хватило бы не на одну докторскую диссертацию (не говоря уж о магистерской), не могли получить права на защиту.

Для Павла Сигизмундовича получение докторской степени в русском Университете увеличивало, вообще говоря, вероятность устройства на работу в высшем учебном заведении России. Несмотря на указанные трудности, он решил не только пройти через горнило магистерских экзаменов, но и включиться в борьбу с «математическим произволом», борьбу, в которой принимали участие А. Ф. Иоффе, Д. А. Рожанский и Д. С. Рождественский.

В архиве Б. П. Вейнберга сохранилось письмо к нему от В. К. Лебединского, датированное 10 марта 1910 г. В. К. Лебединский пишет: «У нас теперь здоровая контроверсия \*) о магистерских экзаменах: Эренфест узнал по печатному уставу, что для физиков не нужен экзамен по теории вероятностей, и заявил, что не будет [его] держать. В факультете поднят вопрос; Хвольсон написал громовую критику всей экзаменационной системы. И, кажется, теорию вероятности выхерят. Д. С. Рождественский успешно выдержал половину экзаменов; с него, очевидно, и начнутся петербургские магистранты без теории вероятностей»<sup>9</sup>.

Все магистерские экзамены Эренфест успешно сдал; это, к сожалению, не помогло ему получить постоянную преподавательскую работу. За все 5 лет пребывания в России он только в течение двух семестров 1909/10 учебного года читал «временный курс» по некоторым вопросам математической физики для студентов старших курсов и преподавателей Политехнического института. По воспоминаниям А. Ф. Иоффе<sup>8</sup> лекции П. С. Эренфеста были исключительными как по глубине, так и по блестящему изложению.

Тем большее впечатление должно на нас произвести то, что Эренфест оказал столь большое влияние на развитие физики в Петербурге тех лет. Для талантливой молодежи, учившейся в стенах Университета, приезд Эренфеста, о котором в тесном кругу физиков сразу же стало известно, сыграл огромную роль. Прежде всего, он был по существу первым физиком-теоретиком в России. Он приехал, далее, из Западной Европы, где в первые годы нового века Планком и Эйнштейном были выполнены основополагающие работы по квантовой теории и теории относительности. Именно вокруг него поэтому и стала концентрироваться физическая молодежь.

Эренфести поселились на Лопухинской улице (ныне улица академика Павлова); деревянный дом, на 2-м этаже которого была их квартира, сохранился. Здесь петербургские физики (А. Ф. Иоффе, Д. С. Рождественский, Л. Д. Исаков, К. К. Баумгарт) и математики собирались на семинары раз в две недели, а иногда и еженедельно.

Студенческая молодежь была представлена Ю. А. Крутковым, В. Р. Бурсианом, Г. Г. Вейхардтом, В. М. Чулановским, В. Г. Хлопиным, В. В. Дойниковой. Среди математиков, посещавших семинар Эренфеста, назовем А. А. Фридмана и Я. Д. Тамаркина, а также С. Н. Бернштейна, бывавшего там реже. Эти семинары явились превосходной школой не только для перечисленных молодых людей. Занимаясь с ними, сам Эренфест вырос в прекрасного лектора и руководителя. Всякий желавший мог

\*) Т. е. контроверса — разногласие, спор.

обратиться к нему и получить тему для разработки. Единственным требованием была искренность и не поверхностная заинтересованность предметом. Пришедшего к нему на квартиру молодого человека Павел Сигизмундович неизменно и сразу же спрашивал: «Ну, какие у вас возникли вопросы?». При этом под вопросом (поясняет В. В. Дойникова) он понимал главным образом не ясности, встречавшиеся в процессе штудирования той или иной книги или статьи, а идеи, связанные с дальнейшим развитием соответствующей проблемы. Обсуждение подобных вопросов начиналось в кабинете и продолжалось за обеденным столом — дом Эренфестов был хлебосольным и открытым.

Итак, свою выдающуюся роль организатора петербургской физики (о которой пишет, например, Т. П. Кравец<sup>10)</sup>), Павел Сигизмундович выполнял — разумеется безотчетно — в стенах своей собственной квартиры. Немаловажное значение имело и его участие в деятельности Русского физико-химического общества, членом которого он стал почти сразу же по приезде в Петербург (его кандидатуру в сентябре 1907 г. рекомендовали И. И. Боргман, О. Д. Хвольсон и К. К. Баумгарт). Он принимал активное участие во всех заседаниях общества, выступая с многочисленными докладами — реферативными или оригиналными — либо в прениях по таким докладам. С 1909 г. он начинает непосредственно сотрудничать в «Журнале Общества» (ЖРФХО)\*).

К концу 1911 г. стало ясно, что надежд на получение постоянной преподавательской работы в России у Эренфеста практически нет. В начале 1912 г. Эренфест выезжает за границу, чтобы выяснить возможность устройства в одном из университетов Центральной или Западной Европы. Во Львове Эренфест повидался со Смолуховским, в Лейпциге — с Герглотцем; в Вене состоялось его знакомство с молодым Э. Шрёдингером (разговор с Шрёдингером в одном из венских кафе имел исключительное влияние на судьбу будущего автора знаменитого уравнения<sup>11)</sup>). В Берлине Эренфест видится с Планком. Но кульмиационным пунктом поездки была Прага, где как раз с начала 1911 г. жил Эйнштейн. Об их встрече мы расскажем несколько позднее. Непосредственных результатов поездка не дала. Эренфест выяснил, что шансов на преподавание в каком-либо университете в Германии у него практически нет. Оставалась надежда на Швейцарию, в которой помочь устроить Эренфеста обещал Эйнштейну Вейсс.

Но вот весной 1912 г., уже по возвращении Эренфеста домой в Петербург, поступает чрезвычайно лестное и неожиданное предложение от Лоренца. Лоренц писал (13 мая 1912 г.): «В течение этого года я собираюсь перейти на положение экстраординарного профессора, так что на мое место необходим ординарный профессор теоретической физики. Для заполнения этой вакансии я могу остановить свой выбор не только на голландце, но и на иностранном коллеге. А так как я очень ценю Ваши работы за ту основательность, ясность и остроумие, с которыми они написаны, то я подумал также и о Вас».

Лоренц добавлял, что его предложение носит сугубо предварительный характер, что он хочет узнать принципиальное к нему отношение Эренфеста, поскольку не исключена возможность того, что факультет подыщет все-же кого-нибудь из молодых голландских физиков. Не приходится сомневаться, каково было отношение Эренфеста к такой возможности. 19 мая 1912 г. он пишет Лоренцу: «Глубокоуважаемый господин профессор! Я хочу прежде всего признаться, что Ваше письмо было для меня столь же неожиданным, сколь и радостным сюрпризом!»

\* ) В ЖРФХО Эренфестом опубликовано 20 статей и 19 рецензий и рефератов.

Выбор Лоренца определялся знакомством с работами Эренфеста, как он об этом и написал в первом и последующих письмах («Публиковали ли вы свои работы где-либо, кроме «Annalen der Physik», «Wiener Sitzungsberichte» и «Physikalische Zeitschrift»? — они мне хорошо известны, как и Ваша энциклопедическая статья», — читаем мы в письме от 30 мая 1912 г.) Сам строй этих статей и манера изложения ясно указывали на незаурядные педагогические способности автора: для Эренфеста очень характерны непосредственно по ходу дела сформулированные вопросы, словно исходящие от вдумчивого слушателя на лекции или самого читателя статьи,



Участники семинара Эренфеста в Петербурге, 1911 г. Сидят слева направо: П. С. Эренфест, А. Ф. Иоффе, Д. С. Рождественский, Т. А. Афанасьева-Эренфест. Стоят слева направо: В. М. Чулановский, Г. Г. Вейхардт, Л. Д. Исаков, Г. Перлиц, В. Р. Бурсиан, Я. Р. Шмидт.

и четкие на них ответы. Иногда такой вопрос выносился им в заглавие статьи. Из писем Лоренца мы узнаем, что об Эренфесте ему писал Зоммерфельд. Очень вероятно, что и Эйнштейн делился с ним своим впечатлением о талантливом и неустроенным коллеге (а с Лоренцем Эйнштейна к тому времени связывала не только многолетняя переписка, но и личное знакомство). И, наконец, представляется несомненным, что Эренфест, сам того не подозревая, подсказал Лоренцу правильность его выбора своими предельно искренними, располагающими к себе письмами 1912 г. 16 сентября 1912 г. Лоренц телеграфно известил Эренфеста об утверждении его в звании профессора Лейденского университета. Вскоре пришло его подробное поздравительное письмо, а вслед за ним еще одно — на этот раз от Эйнштейна.

«Дорогой господин Эренфест, — писал Эйнштейн 20 июня 1912 г., — сердечно поздравляю Вас с извещением Лоренца! Исключая Вас, никто не будет так радоваться, как я, Вашему приглашению в Голландию!

Вы принадлежите к той наименьшей части теоретиков, которые не потеряли рассудка от эпидемии математизации».

Несомненно, что основным итогом пятилетней научной деятельности Эренфеста в России была серия его работ по статистической механике, завершенных и объединенных в фундаментальную энциклопедическую статью (⁶, ст. 25).

#### IV. СТАТЬЯ ЭРЕНФЕСТОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ

Известно, что Больцман, изучая механические уравнения движения атомов, пришел к построению функции состояния системы (газа), которая в ходе установления статистического равновесия убывала с течением времени. Значение этой функции, равное

$$H = \int f(v) \ln f(v) dv$$

(здесь  $f(v)$  — функция распределения молекул по скоростям  $v$ ), он сопоставил со взятой с обратным знаком энтропией, введенной в термодинамику, помимо гипотезы об атомно-молекулярном строении вещества, чисто феноменологически. Свою  $H$ -функцию Больцман позднее связал с (термодинамической) вероятностью состояния физической системы. Вывод об убывании функции  $H$  получил название « $H$ -теоремы Больцмана».

Эти работы Больцмана вызвали ряд возражений. Первое из них принадлежало его старшему коллеге по Венскому университету, И. Лошмидту, который обратил внимание (в 1876 г.) на очень простой факт. В уравнения движения частиц газа время входит квадратично; это значит, что при обращении знака времени система пройдет в обратном порядке положения, занимавшиеся составляющими ее молекулами, в то время как энтропия системы, являясь функцией состояния, будет теперь убывать ( $H$  — возрастать) — в противоречии с ее ходом, предсказываемым  $H$ -теоремой Больцмана. Это замечание Лошмидта получило название «парадокса обратимости» (Umkehrereinwand). Более того, вообще не представлялось возможным, чтобы рассмотрение, основанное на законах механики, полностью обратимых во времени, можно было бы совместить с установленной на опыте необратимостью в ходе процесса.

Другое возражение против  $H$ -теоремы принадлежало ученику Макса Планка, Е. Цермело. Оно получило название «парадокса повторимости» (Wiederkehrsreinwand) и было выдвинуто в 1896 г. Парадокс повторимости связан с теоремой, установленной (в 1890 г.) А. Пуанкаре. Согласно этой теореме механическая система, не подвергающаяся воздействиям извне и состоящая из конечного числа частиц, скорости и положения которых заключены в соответствующие конечные интервалы значений, совершает периодическое движение, возвращаясь к первоначальному состоянию или же бесконечно близко к нему приближаясь. Сам Пуанкаре, как отмечает Цермело в своей первой статье, не обратил внимания на противоречие, к которому приводит применение его теоремы к процессам статистической механики. Выведенную им теорему он приложил к обсуждению вопроса о стабильности солнечной системы. Из теоремы Пуанкаре следует, таким образом, что и функция  $H$  должна периодически изменяться, а не монотонно убывать.

Ответы Больцмана на эти критические замечания не убедили ни Цермело, ни ряд других крупных авторитетов (среди них — А. Пуанкаре и М. Бриллюэна).

Первая публикация П. С. и Т. А. Эренфестов (⁶, ст. 11) датирована октябрьем 1906 г. Она была, таким образом, послана в печать всего через

месяц после смерти Больцмана; можно полагать, что развитые в ней соображения Эренфест излагал Больцману во время одного из своих последних наездов в Вену. Именно эта и последующая (<sup>6</sup>, ст. 15) статьи Эренфестов, по-видимому, произвели столь благоприятное впечатление на Феликса Клейна, что он заказал Эренфесту обширный обзор для «Математической энциклопедии». Укажем, что к участию в ее изданиях привлекались Больцман, Лоренц, Каммерлинг-Оннес и др.: оказаться в их числе было большой честью для молодого ученого.

Статья Эренфестов сыграла выдающуюся роль в развитии статистической механики и по праву считается классической. В предисловии к ее американскому изданию, появившемуся почти полвека спустя \*), в 1959 г. <sup>12</sup>, ученик Эренфеста Г. Юленбек и известный американский математик М. Кац пишут, что «никто из серьезно изучающих статистическую механику не может обойтись без этой замечательной работы». Эта работа очень интересна и в методологическом отношении. Введенная Эренфестами модель «плоского газа», т. е. газа двух измерений, состоящего из двух типов молекул, взаимодействующих друг с другом по закону упругого удара, позволила исключительно простыми средствами получить большинство соотношения  $\delta H \leq 0$ . Однако в рамках этой модели возражения Цермело и Лоцмидта сохранили свою силу. Здесь надо, впрочем, заметить, что еще сам Больцман — под влиянием критики  $H$ -теоремы — более четко сформулировал ее, указав, что возрастание  $H$  не невозможно, а только маловероятно.

Вторая модель, фигурирующая в рассматриваемой статье, по праву считается «одной из наиболее поучительных моделей во всей физике» <sup>13</sup>. Остановимся несколько подробнее на ее рассмотрении. Ее называют «моделью урн», «лотерейной моделью» или просто «моделью Эренфестов». В указанную модель входят две урны,  $A$  и  $B$ ,  $N$  пронумерованных шаров и, наконец, лотерея: некий ящик, в который помещены  $N$  «лотерейных билетов», номер каждого из которых соответствует номеру одного из  $N$  шаров. Модель работает следующим образом. В начальный момент времени все  $N$  шаров помещают в урну  $A$ . Затем начинает разыгрываться лотерея: вытаскивается наугад какой-либо билет, шар с соответствующим номером перекладывается из урны  $A$  в урну  $B$ , а билет вновь помещается в ящик (и тщательно перемешивается с остальными). Первый шаг в игре закончен. После этого вновь вытаскивается лотерейный билет, и шар с номером, соответствующим вытащенному билету, вновь перекладывается из урны в урну, а билет опять отправляется в ящик. Эта процедура может продолжаться сколько угодно долго. Очевидно, по прошествии достаточно долгого времени, когда в игре будет пройдено много шагов, в каждой урне окажется примерно поровну (по  $N/2$ ) шаров. Но так же очевидно, что относительно этого равновесия будут происходить флуктуации. На рис. 1 представлены значения  $\Delta$  разности числа шаров в урнах  $A$  и  $B$ , в зависимости от числа  $s$  пройденных шагов.

Зависимость  $\Delta$  от  $s$  имеет вид ступенчатой кривой. Каждое перекладывание шара изменяет  $\Delta$  на 2. Величина  $\Delta = N - 2n$ . Рисунок заимствован нами из статьи Э. Шредингера и К. Колльрауша <sup>14</sup> и соответствует  $s = 200$  и  $N = 100$  (интересно отметить, что статья Шредингера опубликована в том же году, когда им было сформулировано его знаменитое уравнение!) \*\*).

\*) В 1913 г. Э. Борелем был издан французский перевод этой работы.

\*\*) В экспериментах на современной быстродействующей счетной машине прохождение 200 000 шагов с «перекладыванием» 16 384 шаров (из  $A$  в  $B$ ) заняло всего 2 минуты.  $\Delta$ -кривая и в этом случае отражала флуктуационный характер процесса.

Если начать игру в лотерею Эренфестов с равного числа шаров в обеих урнах, то вероятность того, что последующие шаги приведут к такому распределению, когда в одной из урн окажутся все  $N$  шаров,

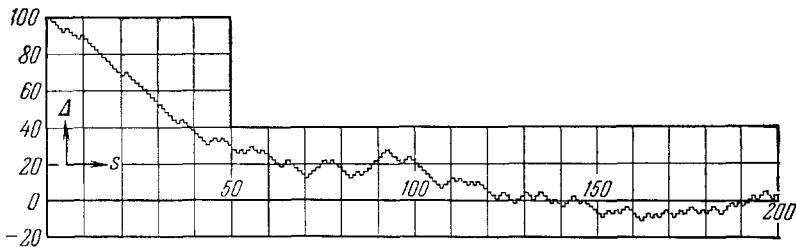


Рис. 1. Ступенчатая  $\Delta$ -кривая ( $N = 100$ ,  $s = 200$ ,  $\Delta = N - 2n$ )<sup>14</sup>.

а в другой — ни одного, хотя и очень мала, но все же не равна нулю. Нужно просто очень долго ждать осуществления этого распределения (по поводу аналогичных ситуаций Больцман говорил, что их малая вероятность практически совпадает с невозможностью). Таким образом, опровергается возражение Цермело.

На рис. 2 изображены три прямые  $\Delta + 2$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta - 2$ , и на них помещены четыре возможных типа окружения ступеньки (расположенной на высоте  $\Delta$ ) ее соседями. Легко под-

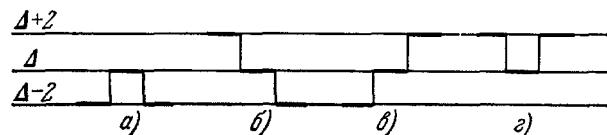


Рис. 2. Четыре типа исходов однократного розыгрыша лотереи Эренфестов ( $n$  шаров в урне  $A$ ,  $N - n$  — в урне  $B$ ).

считать число ступенек с каждым из этих типов окружения. Поделив полученное число на общее число ступенек на высоте  $\Delta$ ,  $Z_\Delta$ , мы получим вероятность того, что наугад выбранная ступенька  $\Delta$ -кривой на высоте  $\Delta$  будет принадлежать к одному из четырех типов  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  и  $d)$ . В результате находим

$$\begin{aligned} \frac{Z_a}{Z_\Delta} &= \left( \frac{n}{N} \right)^2, \\ \frac{Z_b}{Z_\Delta} &= \frac{n(N-n)}{N^2} = \frac{Z_a}{Z_\Delta}, \\ \frac{Z_c}{Z_\Delta} &= \left[ \frac{N-n}{N} \right]^2. \end{aligned}$$

Вывод этих формул производился в предположении  $n > N/2$ . Таким образом, мы видим, что на любом уровне  $\Delta$  наиболее часто будут встречаться максимумы ( $a$ ), число подъемов ( $c$ ) совпадает с числом опусканий ( $b$ ) и, наконец, наиболее редко будут встречаться минимумы ( $d$ ). Это значит, что кривая  $\Delta$  всегда будет преимущественно опускаться — в соответствии с наиболее вероятным ходом  $H$ -кривой.

Предположим теперь, что мы начали следить за ходом кривой, начиная с какого-то шага  $s_n$ , и движемся по оси времени (оси шагов) вспять, т. е. справа налево. При этом подъемы ( $c$ ), наблюдавшиеся при прямом движении, обратятся в опускания ( $b$ ) и наоборот. Их вероятности (и соответственно числа) равны друг другу. Однако минимумы ( $d$ ) останутся минимумами, а максимумы ( $a$ ) — максимумами и при попятном движении. Поэтому в каком бы направлении мы ни двигались, кривая будет

преимущественно опускаться. Так на примере  $\Delta$ -кривой опровергается возражение Лопшидта.

Роль энциклопедической работы Эренфестов в установлении принципиальных, логических основ статистической механики, конечно, отнюдь не исчерпывается моделями плоского газа и урн. Авторами была установлена возможность трактовки  $H$ -кривой (а не  $\Delta$ -кривой) в виде ступенчатой функции, а именно для таких ступенчатых функций справедливы выводы о преимущественном убывании кривых. П. С. Эренфест на нескольких примерах показал, что Больцманом при выводе некоторых соотношений были введены определенные гипотезы, тогда как сам Больцман полагал, что соответствующее рассмотрение было свободно от гипотез. Эренфесты первыми привели аргументы о невозможности существования эргодических систем (доказательство этой невозможности было получено в 1913 г.) и заменили ее «квазиэргодической» гипотезой, согласно которой изображающая точка с течением времени может как угодно близко подойти к данной точке поверхности энергии. Для «квазиэргодических» систем, существование которых также было доказано позднее, остаются в силе все выводы статистической механики.

## V. В ГОЛЛАНДИИ

Маленькая страна, образ которой воплощается в нашем сознании в картине каналов, плотин и тюльпанов, Голландия была в XIX — начале XX веков страной замечательных физиков. Достаточно сказать, что ко времени приезда туда Эренфеста в ней работали Лоренц, Зеeman, Каммерлинг-Оннес.

Лоренц в одном из своих писем подробно описал Эренфесту освященную традициями процедуру вступления в профессорское звание. Она была весьма красочной и совершилась только в первую среду каждого месяца. Будущий профессор перед лицом Совета попечителей Университета и его Сената (т. е. Ученого совета) должен был принести присягу верности королеве и торжественно пообещать уважать законы. Текст присяги заканчивался словами: «И да поможет мне в этом всемогущий бог!» — и в этот момент присягающему следовало поднять правую руку с двумя разжатыми пальцами. («Я должен добавить,— писал Лоренц 29 сентября 1912 г.,— что в нашей стране от служащих не требуется каких-либо пояснений, касающихся их личных убеждений, скажем, их отношения к религии» — пункт, который был особенно важен для Эренфеста.)

Еще до присяги Эренфесту предстояло произнести вступительную речь на любую угодную ему тему. Он решил говорить о теории относительности, взяв за основу принесшее ему большой успех выступление на II Менделеевском съезде в Петербурге — в декабре 1911 г. Эта речь Эренфеста («Кризис в гипотезе о световом эфире»), произнесенная 4 декабря 1912 г., была опубликована в ЖРФХО<sup>15</sup>. Заканчивая свою речь и обращаясь к присутствовавшим в зале студентам, Эренфест сказал: «Я прошу вас видеть во мне старшего товарища по учебе, а не человека, который стоит на другой ступени на пути к познанию. Я и сам не могу себя чувствовать иначе вблизи нашего великого общего учителя — г-на Лоренца» (⁶, ст. 27).

Лоренц жил в Гарлеме, в получасе езды от Лейдена, куда он приезжал не реже раза в неделю, чтобы прочесть традиционную лекцию. На этих лекциях бывали все крупнейшие физики мира, в частности Эйнштейн. Таким образом, Эренфест виделся с Лоренцем еженедельно; кроме того, они находились в теснейшей научной переписке — сохранилось много

десятков их писем, адресованных друг другу; с обеих сторон переписка велась на родном языке Лоренца.

Итак, Эренфесты начали обживаться в Голландии. Незадолго до начала первой мировой войны они построили двухэтажный дом необычной для Голландии «русской архитектуры» — с многочисленными верандами — уютное и красивое жилище, расположенное на берегу канала, на улице с поэтическим названием «Аллея Белых Роз». В этом доме и поселилась семья Эренфеста.

В Лейдене практически сразу по приезде Эренфеста начинает собираться его семинар по теоретической физике. Появляются первые голландские ученики Эренфеста — Крамерс, Бюргерс, Казимир. К ним вскоре (уже после войны) присоединяются ученики из разных стран. Назовем, например, Энрико Ферми: известно, что именно пребывание в Лейдене благотворно сказалось на всей его дальнейшей блестящей карьере<sup>16</sup>. Более года в Лейдене в начале 20-х годов работал Г. Брейт.

В Голландии Эренфест выполнил ряд замечательных работ; первая в их ряду — по времени и, вероятно, по значимости — это работа по адиабатическим инвариантам в квантовой теории.

## VI. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ЭРЕНФЕСТА

Хорошо известно, что квантовая теория атома Бора постулировала существование стационарных состояний атома, характеризуемых тем, что при движении вокруг ядра электрон не излучает энергии. Подобно уровням планковского осциллятора, энергия боровского атома (ротора) также квантовалась. Это заключение подтверждалось согласием нарисованной картины с огромным экспериментальным материалом, подготовленным в предшествовавшие годы «зоологическими» (по словам Эйнштейна) спектроскопическими исследованиями и теоретическим определением постоянной Ридберга. Естественно, возникал ряд вопросов: Чем определяются те величины, характеризующие мир атома, которые квантуются? Чем они выделяются среди других величин? Для каких процессов использование классической механики не ведет к противоречию с опытом и тем самым является допустимым? Для ответа на эти и подобные им вопросы исключительно большое значение имели исследования Эренфеста. Он был подготовлен к ним практически всем ходом своей предшествовавшей 10-летней научной деятельности. В статье, посвященной планковской теории излучения и опубликованной в 1911 г. (6, ст. 24), он дал четкий анализ квантовой гипотезы Планка, сопоставив ее с квантовой теорией фотонов Эйнштейна. Исходным для Эренфеста был прежде всего закон смещения Вина, которым устанавливался вид плотности излучения  $\rho$ :  $\rho(v, T) = \alpha v^3 f(\beta v/T)$ , и экспериментальные факты, относящиеся к характеру спада кривой плотности излучения со стороны низких и высоких частот. В области низких частот этот спад нашел свое отражение в формуле Рэлея — Джинса  $\rho = (8\pi k/c^3) v^2 T$ ; поведение  $\rho$  при высоких частотах описывалось формулой Вина  $\rho = \alpha v^3 \exp(-\beta v/T)$ , которая не имела под собой четких теоретических обоснований. Известно, что Планк объединил обе эти формулы в свою знаменитую формулу (1900 г.), истолковав ее несколько позднее с помощью вероятностной концепции в духе Больцмана, из которой с необходимостью следовал переход к дискретным порциям энергии.

Именно указанные выше экспериментальные факты накладывали определенные ограничения на вид виновской функции  $f$ :  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} [\sigma f(\sigma)] = 0$  («красное» требование) и  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} [\sigma^4 f(\sigma)] = 0$  («фиолетовое» требование); здесь

$\sigma = \beta v/T$ . Но нельзя ли подойти к квантам энергии (в существовании которых Эренфест не сомневался) иначе, чем это сделал Планк, не постулируя их существование в рамках Больцмановских представлений (о связи энтропии с вероятностью), а каким-либо иным путем, за счет иного постулата? Эренфест сосредоточил свое внимание на Больцмановском же допущении о том, что все области фазового пространства (газа) имеют равный вес. Это представление, отметил Эренфест, является только самым простым, а не обязательным,— да и сама квантовая природа осциллятора Планка показывает, что в фазовом пространстве существуют выделенные области, разделенные друг от друга запрещенными промежутками. К каким выводам можно прийти, если отказаться от постоянства статистического веса, приняв, что он является функцией энергии осциллятора и его частоты? Тщательный математический анализ проблемы привел, во-первых, к тому, что наличие выделенных (разрешенных) значений в спектре частот осциллятора (в частности, и точки  $v = 0$ ), разделенных промежутками, в которых статистический вес по Планку постулировался равным нулю, оказалось следствием закона Вина, «красного» и «фиолетового» требований (и некоторых других вполне «классических» постулатов, например о постоянстве энтропии при адиабатическом сжатии излучения). Что касается вида статистического веса, то он оказался функцией не  $v$  и  $E$  в отдельности, а (с точностью до несущественного при вычислении распределения множителя) их отношения  $E/v$  в какой-то мере по аналогии с тем, что анализ Вина показал для функции  $f$  (зависимость которой от частоты  $v$  и  $T$  выступала в форме  $v/T$ , где  $T$  — температура).

Первая работа, в которой Эренфест попытался сформулировать ответ на отмеченные выше противоречия, относится к 1913 г. Она была завершена осенью этого года и тогда же вышла в «Известиях Голландской Академии наук» (по представлению Лоренца) (6, ст. 30), а несколько позднее, уже в 1914 г., был опубликован и ее русский перевод на страницах ЖРФХО<sup>17</sup>. Эренфест с особой силой подчеркивает парадоксальность сложившейся в теории излучения ситуации. Закон смещения Вина получен чисто классически, и вместе с тем именно он является незыблевой основой сугубо «антимеханической» (если воспользоваться словами самого Эренфеста) квантовой гипотезы Планка. В чем специфика закона Вина? Нельзя ли, поняв ее, попытаться найти более общую основу, на которой можно было бы понять и природу самого квантования, расширить «спектр» квантующихся величин и вместе с тем ту область, в которой оказывается действенной классическая механика?

Согласно Планку, энергия  $E$  гармонического осциллятора квантуется:  $E = nhv$ , где  $n$  — целое число. При адиабатическом сжатии излучения, заключенного в полость, происходит такое перераспределение в его спектре, что выполняется соотношение  $E/v = \text{const}$ , — таков результат классической теории; следовательно, сохраняется и значение  $n$ . Специфично ли постоянство отношения  $E/v$  для чисто гармонических колебаний? Эренфест напоминает, что соотношение  $\delta(E/v) = 0$  является частным случаем общей теоремы Больцмана. Согласно этой теореме, представляющей собой обобщение экстремального условия для действия, при адиабатическом переходе системы из одного состояния в другое, занимающем время  $\tau = t_k - t_n$  ( $t_n$  — начало процесса перехода,  $t_k$  — его конец), количество тепла  $\Delta Q$ , сообщаемого системе, совершающей периодическое движение с периодом  $\tau$ , следующим образом связано с ее кинетической энергией  $T$ :

$$\Delta Q = \frac{1}{\tau} 2\delta(\bar{T}\tau), \quad (1)$$

где  $\bar{T}$  — среднее за период значение кинетической энергии. При адиабатическом переходе  $\Delta Q = 0$  (изменение внутренней энергии происходит целиком за счет действия внешних сил); отсюда следует, что  $\bar{T}\tau = \text{const}$ . Для систем, не обладающих потенциальной энергией, или для тех из них, в которых отношение средних за период значений  $T$  и потенциальной энергии постоянно (равно 1 в случае чисто гармонических колебаний), отсюда получается ( $\tau = 1/v$ )  $E/v = \text{const}$ . Величина, сохраняющая неизменное свое значение при адиабатическом переходе, была названа Эренфестом «адиабатическим инвариантом»<sup>18</sup>. Таким образом, у Планка квантуется адиабатический инвариант — та самая величина, которая сохраняется постоянной при изменении длины маятника Рэлея — Эйнштейна (маятника с переменной длиной) и является аргументом функции Вина. В более общем случае периодического движения адиабатическим инвариантом будет отношение  $\bar{T}/v$ . В своей статье Эренфест рассмотрел процесс адиабатического перехода от гармонических колебаний к вращательному движению в случае диполя, колеблющегося в плоскости, перпендикулярной нити, на которой он подведен. В плоскости имеется некоторое электрическое поле; вокруг его направления совершаются гармонические колебания такого осциллятора. Их энергию, по Планку, следует квантовать. Начнем адиабатически уменьшать внешний параметр (напряженность электрического поля); амплитуда колебаний диполя будет постепенно увеличиваться, пока он не «опрокинется» и не начнет равномерно вращаться вокруг оси. Записывая выражение для периода такого колебания  $\tau = 2\pi/q$  ( $q$  — постоянная угловая скорость вращения), учитывая, что кинетическая энергия равна  $T = pq/2$  ( $p$  — импульс, канонически-сопряженный угловой координате  $q$  и равный в данном случае моменту количества движения), и приравнивая, наконец,  $\bar{T}/v$  гармонически колеблющегося диполя ( $= 0, h, 2h, \dots$ ), т. е. адиабатический инвариант рассматриваемой системы, его величине для ротора, получаем, что  $p$  оказывается проквантованным:

$$p = 0, \quad \pm \frac{\hbar}{2\pi}, \quad \pm 2 \frac{\hbar}{2\pi}, \dots \quad (2)$$

Обращая движение (т. е. адиабатически медленно включая нарастающее поле), приходим к квантовой формуле Планка.

Работа Эренфеста<sup>(6, ст. 30)</sup> была доложена им 29 ноября 1913 г. в Голландии. В марте 1914 г. Эйнштейн посетил эту страну и они виделись с Эренфестом в Дордрехте (мы узнаем об этом из совместного маленького письма Ю. А. Круткову<sup>19</sup>). А 24 июля 1914 г. на заседании Немецкого физического общества в Берлине с докладом «К квантовой теории» выступил Эйнштейн. Именно в этом докладе (и последовавшей в том же году публикации<sup>(20, ст. 36)</sup>) впервые в физической литературе появляется термин «адиабатическая гипотеза Эренфеста». В своей работе в параграфе, посвященном энтропии в квантовой теории и теореме Нернста, Эйнштейн рассматривает систему, состояние которой (в термодинамическом смысле) определяется не только температурой, но и некоторым параметром  $\lambda^*$ ). Энтропия такой системыдается формулой Больцмана  $S = k \ln Z$  ( $Z$  — число состояний, соответствующих данному значению энергии). Спрашивается: сохранится ли эта формула при адиабатическом изменении упомянутого параметра? «На него,— пишет Эйнштейн,— нельзя ответить без новых гипотез. Наиболее вероятная гипотеза, которая здесь напра-

<sup>18</sup>) Для простоты мы ограничиваемся в дальнейшем одним параметром; число их, разумеется, может быть и большим.

шивается,— это адиабатическая гипотеза Эренфеста, которую можно сформулировать следующим образом. При обратимом адиабатическом изменении параметра  $\lambda$  всякое возможное состояние переходит в состояние того же типа» (т. е. в возможное с точки зрения квантовой теории) \*).

Более четкое определение адиабатической гипотезы имеется в следующей публикации Эренфеста на ту же тему (6, ст. 37). Он вводит понятие об адиабатически-сопряженных периодических движениях некоторой системы. Пусть система совершает некоторое движение в неизменных внешних условиях (постоянство  $\lambda$ ). Начнем теперь адиабатически изменять  $\lambda$ . По прошествии какого-то времени прекратим дальнейшее изменение. Система к этому моменту совершает другое движение, которое и называется адиабатически-сопряженным исходному.

Квантовая теория из всех возможных с точки зрения классической механики движений выделяет ряд допустимых, которые система может совершать при данном значении  $\lambda$ . Адиабатическая гипотеза Эренфеста в его собственной формулировке утверждает, что некоторому новому значению параметра  $\lambda$  соответствует также допустимое с точки зрения квантовой теории движение — в том случае, если это последнее адиабатически-сопряжено с исходным.

Величины, которые для двух адиабатически-сопряженных движений сохраняют свою величину, называются адиабатическими инвариантами \*\*). Если допустимому движению (с данным значением параметра) соответствует дискретный спектр значений некоторого адиабатического инварианта, то этот же дискретный спектр будет характеризовать и адиабатически-сопряженное движение. Для объяснения дискретного спектра ротора не нужно делать новых гипотез — наличие этого спектра является следствием адиабатической гипотезы Эренфеста. Еще до опубликования работ Эренфеста Дебай постулировал дискретность спектра ангармонического осциллятора; это была новая гипотеза, высказанная (в 1914 г.) по аналогии с оправдавшей себя гипотезой Планка. И в этом случае имеет место аналогичная картина. Эренфест записывает уравнение движения ангармонического осциллятора

$$\ddot{q} = -(v_0^2 q + \lambda_1 q^2 + \lambda_2 q^3 + \dots) \quad (3)$$

и полагает  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и т. д. параметрами его движения. Начнем адиабатически их уменьшать. Приходим к осциллятору Планка с дискретным спектром. Отсюда ясно, что и спектр осциллятора Дебая квантован. То же самое справедливо и для зоммерфельдовской гипотезы (1916 г.) о квантовании эллиптических орбит атомных электронов: два условия квантования в этом случае являются следствием адиабатической гипотезы Эренфеста и соответствуют существованию для этого типа движения двух адиабатических инвариантов.

Наконец, отметим, что в своей статье 1916 г. Эренфест вновь возвращается к проблеме статистического веса, обсуждавшейся им как в 1911 г. (6, ст. 24), так и в работе 1913 г. (6, ст. 30), но делает это теперь с позиций четко сформулированной им адиабатической гипотезы. Для случая системы с одной степенью свободы, совершающей периодическое движение,

\* ) Далее Эйнштейн в качестве следствия гипотезы Эренфеста (или, лучше сказать, иной ее формулировки) пишет о том, что при адиабатических процессах не изменяется число  $Z$ , а значит, сохраняет свою силу соотношение Больцмана. Отсюда он легко доказывает, что теорема Нернста (третье начало термодинамики) справедлива для химически чистых веществ, а не для кристаллических смесей.

\*\*) Их стали называть «адиабатическими инвариантами Эренфеста» (см., например, 21).

результат формулируется так: «Для ансамбля таких молекул (резонаторов) соотношение Больцмана между энтропией и вероятностью будет справедливо тогда и только тогда, когда установившееся движение характеризуется следующим условием:

$$\frac{2\bar{T}}{v} = \int \int dq dp = \text{постоянные числа } \Omega_1, \Omega_2, \dots, \quad (4)$$

причем это условие инвариантно по отношению к адиабатическому изменению» (т. е. величина  $2\bar{T}/v$  является адиабатическим инвариантом). Эренфест подчеркивает, однако, что при этом остается открытым вопрос, поднятый Эйнштейном при обсуждении с Эренфестом его статьи 1911 г.: являются ли два адиабатически-сопряженных состояния (которые характеризуются адиабатически-сопряженными движениями составляющих систему элементов) состояниями равновесными, т. е. следует ли из максимальности энтропии одного такое же условие для другого?

Свою статью<sup>17</sup> Эренфест заключает словами, непосредственно перекликающимися с первыми строками ранней публикации<sup>6</sup>, ст. 24): именно закон смещения Вина показывает, независимо от трудностей, которые стоят на пути дальнейшего обобщения адиабатической гипотезы, что «адиабатически-обратимые процессы занимают совершенно специальное место в квантовой теории» (Эйнштейн, говоря о гипотезе Эренфеста, непосредственно указывает на то, что она «по смыслу является обобщением закона Вина»<sup>20</sup>, ст. 36), который, кстати сказать, мгновенно получается, если воспользоваться формулой Больцмана (1) (стр. 549 настоящей статьи).)

Заметим, что из адиабатической инвариантности отношения  $E/v$  для планковского осциллятора, т. е. из сохраняющегося в процессе адиабатического перехода соотношения  $E = nhv$ , сразу же следует, что при адиабатическом изменении внешних параметров (например, при адиабатическом включении внешнего магнитного поля) квантовое число  $n$  сохраняется неизменным. Отсюда становится понятен тот факт, что при помещении атомов в медленно возрастающее магнитное поле не имеют места переходы, сопровождаемые излучением света. Это обстоятельство, т. е. сохранение квантового числа  $n$  при изменении уровня энергии (т. е. величины  $E_n$ ) получило название *адиабатической теоремы* Эренфеста, и в такой формулировке она фигурирует наиболее часто.

Адиабатическая гипотеза и теорема Эренфеста получили, как упоминалось в самом начале, высокую оценку со стороны Эйнштейна, Борна и особенно Бора (см. стр. 558 настоящей статьи). В последнем случае это связано с тем, что принцип соответствия Бора во многом основывается на адиабатической гипотезе. Практически во всех статьях Бора в начале 20-х годов (и лекциях, читавшихся им в этот период) он специально отмечает роль идей Эренфеста в установлении принципа соответствия. «Значение адиабатической гипотезы,— пишет Бор,— в квантовой теории исключительно велико, поскольку она ведет к разъяснению и развитию формальных принципов определения стационарных состояний»<sup>22</sup>. Столь же высокую оценку работ Эренфеста мы находим и у Борна: «Эренфест имеет огромную заслугу перед развитием квантовой теории, установив постулат, позволяющий дать чисто теоретическое определение квантовым величинам»<sup>23</sup>. Отголоски квантовой гипотезы и теории Эренфеста имеются и в современной квантовой механике — в приближенных методах решения возникающих в ней нестационарных задач. Исходной для развития этих методов работой была статья М. Борна и В. А. Фока<sup>24</sup> (см. также<sup>25</sup>).

## VII. ЭНШТЕЙН, БОР, ЭРЕНФЕСТ

В 1907 г. Эренфест выступил на страницах «Annalen der Physik» с небольшой заметкой<sup>(6)</sup>, ст. 14), в которой обсуждал проблему движения деформируемого электрона, обладающего (в соответствующей системе координат) несимметричной формой. Возможно ли для такого электрона — в отсутствие внешних сил — равномерное и прямолинейное движение в любом направлении? Подобный вопрос был связан с тем, что направление электромагнитного импульса электрона не совпадает с направлением его скорости. Отсюда следует, что при движении должен возникнуть вращающий момент; поэтому для того, чтобы равномерное и прямолинейное движение могло осуществиться, необходимо существование внешней пары сил, которая бы компенсировала указанный момент. Итак, если подобное движение невозможно для какого-либо направления, замечает Эренфест, то мы получаем в руки «инструмент» для определения состояния абсолютного покоя. Если же подобное движение возможно, то отсюда следует необходимость привлечения новых аксиом — в рамках теории относительности Эйнштейна, чтобы понять причину возникновения вращающего момента. Вывод из этого противоречия, полагал Эренфест, может быть получен посредством дедукции из теории относительности, являющейся, по его словам, «замкнутой системой».

Эйнштейн откликнулся на эту заметку в том же выпуске журнала<sup>(26)</sup>. В этой рецензии имеется очень интересная оценка содержания его собственной теории. («Принцип относительности,— пишет он,— или, точнее, принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света, следует понимать не как «замкнутую систему» и не как систему вообще, а только как некоторый эвристический принцип, сам по себе содержащий лишь высказывания о твердых телах, часах и световых сигналах. Все остальное теория относительности дает только потому, что она требует существования связей между явлениями, которые раньше казались независимыми». Эйнштейн пишет далее, что для решения вопроса, поставленного Эренфестом, необходимо, чтобы была «достаточно известна динамика абсолютно твердого тела» (в рамках теории относительности).)

Другие небольшие публикации Эренфеста, связанные с теорией относительности, как раз и касались понятия абсолютно твердого тела в рамках этой теории. В «Теории поля» Ландау и Лифшица параграф, посвященный элементарным частицам<sup>(27)</sup>, § 8), начинается с известного вывода о невозможности существования абсолютно твердого тела в теории относительности. Мало кто знает, однако, что излагается при этом вопрос, получивший в литературе 10—20-х годов название «парадокса Эренфеста» (именно так называется заметка Эйнштейна<sup>(26)</sup>, ст. 16), являющаяся откликом на дискуссию, развернувшуюся вокруг работ по абсолютно твердому телу).

Эренфест показал, что абсолютно твердый цилиндр не может быть приведен в состояние равномерного вращения. Выход из этого противоречия четко сформулировал в 1911 г. Лауз (который, кстати, разрешил и проблему, поставленную Эренфестом в его заметке 1909 г.): понятие абсолютно твердого тела несовместимо с принципами теории относительности; возникающие в процессе движения цилиндра (диска) деформации автоматически обеспечивают постоянство отношения длины окружности к ее радиусу.

Именно в связи с «парадоксом Эренфеста», вероятно, и возникла в 1911 г. переписка между обоими учеными (первое письмо Эйнштейна к Эренфесту, хранящееся в фонде Альберта Эйнштейна в США, датировано 12 апреля 1911 г.). Личное же их знакомство состоялось в январе

1912 г. \*), когда, после II Менделеевского съезда в Петербурге, Эренфест посетил Германию и Австрию. Эйнштейн вспоминает, что во время этой первой встречи (в Праге) они говорили в основном о науке: о планковской теории, о теории относительности. Из статьи Эренфеста, опубликованной им совместно с Г. Брейтом в 1921 г. (\*, ст. 43), следует, что тогда же (во всяком случае, в 1912 г.) \*\*) обсуждался вопрос и об адиабатических инвариантах и переходе диполя от гармонического колебательного движения к равномерному вращению. Теорию относительности Эренфест, по словам Эйнштейна, воспринимал «хотя и несколько скептически, но отдавая ей должное со свойственной ему способностью критического суждения»<sup>1</sup>. Весь первый день в Праге прошел в разговорах, начавшихся в кафе, продолженных в доме у Эйнштейна — с музыкальным антрактом, во время которого Эренфест и Эйнштейн играли сонаты для скрипки и фортепиано Брамса. М. Клейн<sup>11</sup> указывает, что в записной книжке Эренфеста тех дней появилась запись: «Да, мы станем друзьями — я страшно счастлив!». Как далекое эхо, пришедшее спустя 20 с лишним лет, звучит признание Эйнштейна в мемориальной статье: «За несколько часов мы стали настоящими друзьями, будто наши чаяния и мечты были одинаковыми. Нас соединила тесная дружба, продолжавшаяся до его смерти»<sup>(1)</sup>, стр. 59).

Начиная с 1912 г. переписка между обоими учеными приняла систематический характер. Эйнштейн держит Эренфеста в курсе своих новых работ на подступах к общей теории относительности; в письмах они обсуждают вопросы специальной теории относительности в связи с замечаниями Эренфеста. И не раз в письмах Эйнштейна появляются такие строки: «Я убедился в Вашей правоте» (как писал он ему, например, 28 мая 1913 г. из Цюриха). Эйнштейн начинает бывать в Голландии. Империалистическая война не прерывает их переписки, и в Лейден, который Эйнштейн называл «благополучным уголком этой ужасной планеты», регулярно приходят его письма.

В начале декабря 1914 г. Эйнштейн пишет: «Международная катастрофа легла на меня, как интернационалиста, тяжким бременем. Живя в эту «великую эпоху», трудно примириться с тем, что ты принадлежишь к идиотскому, отвратительному виду, который хвастается своей «свободой воли». Как я хотел бы, чтобы где-нибудь существовал остров для тех, кто мудр и доброжелателен! В таком месте даже я был бы пылким патриотом!»<sup>29</sup>. Надо заметить, что Эйнштейн, как и другие учены (в частности, и Лоренц), потратил немало тщетных усилий, призывая правительства воюющих держав прекратить кровопролитие.

В октябре 1919 г. Эйнштейн после длительного перерыва оказывается в Лейдене, откуда пишет матери: «Вчера я присутствовал на сессии Академии — с Эренфестом и Лоренцем. Лоренц говорил об общей теории относительности и исследованиях Британской экспедиции — чтобы доставить мне удовольствие, разумеется. Окончательные результаты находятся теперь в исключительно точном соответствии с теорией»<sup>29</sup>.

В литературе, посвященной Эйнштейну, упоминается, что присуждение ему Нобелевской премии наталкивалось на трудности. Преодолеть эти трудности помогли Комитету голландские коллеги и друзья Эйнштейна: Лоренц, Каммерлинг-Оннес и Эренфест<sup>29</sup>. Их хлопоты диктовались прежде всего тяжелым финансовым положением, в котором Эйнштейн

\*) К. Зелиг<sup>28</sup> ошибочно относит его ко времени пребывания Эйнштейна в Берне (т. е. до 1909 г.).

\*\*) Поздней осенью 1912 г. Эренфест встретился в Эйнштейном в Берлине, по дороге в Лейден.

от 8 марта 25-го года 1924 год  
сама подписка должна быть подписана  
Ниже Каллиграфия

15. IV - 22. IV *St. Joffel*  
1924

R. A. Millikan

6/6/1923 - 4.

F. Hertz 7. 6. 1924

Louis De Broglie 21. 6. 1924

Max Planck 9-11. 6. 24

Einstein 7-23. X 24 VK

N. Градус 11-23 X 24

A. Струве 11-12. XI. 24

E. Бора 15-11. 24

K. Томсон 1. XII. 24

J. Hertz 21. 1. 25

A. Einstein 8-13. III. 25 S(1/2 + A(3))

R. Tolstoy 16-21. III. 25

D. Coster 27-3-25

J. Franck 4. 4. 25

new P. Kapitza 2-5/7. 1925

W. Heisenberg 26-7. 25.

*St. Joffel* 2. 8. VI. 25

J. Timmerman 20. 21. JULY 25  
3 IX 25

N. Bohr

13-15 IX 25

Margretha Bohr

J. Franck 4. 3. X 25

H. Döbereiner 1. 12. 25

J. Joffel 2. 8. X. 25

J. Kuntz 7-11. 25

H. Arensfield 11. 11. 25

P. A. M. Dirac 23. VI - 7. VII 25

S. O. Schrödinger 8-14. 7. 1927

R. C. Tolman

Ruth Saramon Tolman

20-26. VIII - 1926

D. Coster 5-10. 9. 25

A. Born October 1927

Heidi Born Utrecht 1928

Erwin Schrödinger Wien 1927

Max M. Planck 1927

H. A. Kramers XI 1928

Anna Storaia-Peterson

W. Luytenmann - 8. 12. 28

St. Joffel 25-29. I. 1928

A. Einstein 8-12. III 28. *St. Joffel*

N. Bohr 10-12. 1928

O. Klein 4-3-1928

E. Schrödinger 21-3-1928

Amund Schrödinger 21. 3. 1928

P. A. M. Dirac - V 1928

A. Eichenwald V, 1928

E. J. Dijksterhuis 10 July 1928

J. Marquet 26 July 1928

2. 8. 1928

29. 11. 1928

W. Pauli

25. IX. 1928

R. A. Hansen

20. 10. 1928

Из галереи подписей на стенах гостевой комнаты дома Эрэнфестов в Лейдене.

оказался в условиях Германии, охваченной инфляцией. Эренфест, как наиболее близкий Эйнштейну человек, взял на себя и переговоры о приглашении Эйнштейна в Голландию — тем более своевременные и закономерные, что уже вскоре после триумфа новой теории ее творец начал подвергаться систематической травле со стороны маxовых реакционеров в Германии, как за свои политические убеждения, так и за чисто научную сторону своей работы. «Ты будешь иметь здесь,— пишет Эренфест 2 сентября 1919 г.,— непосредственный контакт с Лоренцем, де Ситтером, со мной, Кюненом, Дросте, де Гаазом и его женой, Фоккером, Бюргерсом, Юлиусом и Зееманом (или находиться поблизости от всех нас), а также и с другими очень интеллигентными и приятными по своим человеческим качествам молодыми людьми... При всех условиях отвесь мне прямо: «Да, твое предложение не так уж безумно!». Дорогой Эйнштейн, мне необходимо только это и ничто больше, чтобы дать ход делу. И вот что: не отвечай мне отказом сразу. Даже если ты и не сможешь решиться, для развития физики здесь будет очень важно, что целый ряд людей прилагал организованные усилия со специальной целью — устроить твой переезд сюда. Помни, Эйнштейн, что ты здесь окажешься среди людей, которые тебя любят не только за твои «мозги» и за то, что можно из них выжать... Обидно,— заключает Эренфест это письмо,— что приходится долго рассуждать с тобой по такому поводу, в отношении которого нам совершенно очевидна наша правота».

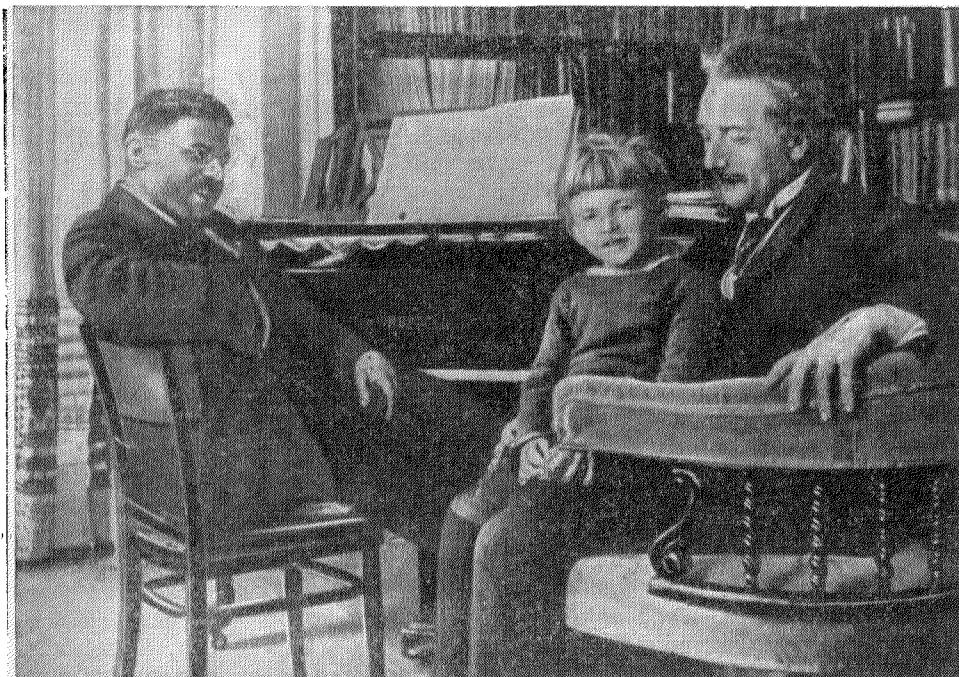
На это письмо Эйнштейн ответил 12 сентября 1919 г.: «Дорогой Эренфест, твое предложение просто сказочно, а те слова, в которые оно воплощено, столь сердечны, что ты едва ли сможешь себе представить, в какое душевное смятение привело меня твое письмо. Ты ведь знаешь, в каком восторге я от Лейдена и как я всех вас люблю! Но дело обстоит не так просто, и для того, чтобы поступать правильно, я не могу следовать только за велениями моего сердца. Я пересылаю тебе письмо, которое получил в Цюрихе от Планка. Я обещал ему в ответ на него не покидать Берлина до тех пор, пока ситуация там не станет такой, что этот шаг будет представляться мне единственным и правильным. Ты едва ли имеешь представление, на какие жертвы здесь (в Берлине,— В. Ф.) приходится идти — при общем тяжелом финансовом положении, чтобы обеспечить мое пребывание и сделать возможным содержание моей живущей в Цюрихе семьи. Было бы вдвойне неблаговидно с моей стороны, если бы я в этот момент осуществления моих политических надежд и, может быть, даже частично во имя внешних выгод без необходимости отвернулся бы от людей, которые окружали меня любовью и дружбой и для которых разлука со мной в это время кажущегося унижения оказалась бы еще более болезненной».

20 октября 1919 г. Эйнштейн приезжает в Лейден и останавливается у Эренфестов.

По возвращении в Берлин он пишет: «Дорогой Эренфест, да, время, которое мы провели вместе, было действительно чудесным и безмятежным... Таких радостных дней мне не доводилось проводить ни в одном доме: и всем этим я обязан двум независимым и цельным натурям, которые бескомпромиссно связали свои судьбы \*). Я теперь приучился смотреть на вас обоих как на частицу самого себя и вместе с тем чувствовать себя так, словно я — частица вас. Так давайте же отныне сохранять эти глубоко человеческие узы. Я знаю, что это благотворно скажется на нас обоих и что каждый из нас благодаря другому не будет отныне чувствовать себя таким чужим в этом мире».

\*) Эйнштейн имеет в виду Эренфеста и его жену.

Эйнштейн не переехал в Голландию, но в конце 1919 г. стал «почетным профессором» Лейденского университета. 5 мая 1920 г. на соответствующей церемонии в Лейдене он прочел доклад примерно на ту же тему, что и Эренфест (восемью годами ранее): «Эфир и теория относительности» (26, ст. 57). Визиты Эйнштейна в Голландию стали все более частыми. Останавливался он непременно у Эренфестов и подолгу жил у них. В их доме была выделена специальная комната для гостей и по чьему-то почину возникла традиция: перед отъездом гость расписывался на стене. Эта галерея автографов включает весь цвет теоретической физики XX века: Эйнштейн, Бор, Планк, Борн, Гейзенберг, Паули, Дирак, Шрёдингер, Ферми, Дебай... Подписям Эйнштейна часто сопутствуют те или иные



Эренфест и Эйнштейн в кабинете Эренфеста на Витте Розенстраат, 57. На коленях у Эйнштейна — Павлик Эренфест (приблизительно 1921 г.).

формулы, символизирующие, очевидно, тот факт, что именно они и связанные с ними теории наиболее интенсивно обсуждались на этот раз под крышей дома Эренфестов. Здесь же и знакомые подписи советских ученых А. Ф. Иоффе, П. С. Александрова, П. Л. Капицы, И. Е. Тамма, А. Н. Фрумкина, А. И. Шальникова.

В кабинете Эренфеста стоял рояль, подаренный Эйнштейном, висела скрипка, на которой он играл, приезжая в Лейден, иногда пьесы для скрипки соло, а иногда концерты для скрипки и фортепиано, место за которым в таких случаях занимал Эренфест. Чаще всего играли Баха, Брамса, Корелли. П. Л. Капица рассказал, что, когда он в первой половине 20-х годов был у Эренфеста в Лейдене, ожидался приезд туда Эйнштейна. Как всегда, имелась в виду и музыкальная программа. Эренфест предупредил Капицу: «Имейте в виду, Эйнштейн не виртуоз, однако критиковать его промахи в скрипичной игре лучше не надо — критикуйте его физические работы: тут он бесконечно терпим».

Столь же тесная дружба связывала Эренфеста и с Нильсом Бором. В данном случае можно говорить и о дружбе между обеими семьями: сохранились письма к Павлу Сигизмундовичу и (более редкие) к Татьяне Алексеевне от жены Бора, г-жи Маргерет Бор, и его брата, известного математика Харальда Бора, а также и ответные письма всем им от самого Эренфеста. Как и в случае Эйнштейна, здесь личные отношения и физика переплелись в тесный клубок.

Первая встреча Бора и Эренфеста состоялась в Лейдене на защите докторской диссертации ученика Эренфеста Крамерса в 1919 г. С этого времени между обоими учеными завязалась интенсивная переписка. 28 апреля г-жа Бор писала Эренфесту, что ее муж «с признательностью вспоминает об исключительной дружественности, с которой он был встречен Вами и Вашей супругой, и о чудесных днях, проведенных в Вашем доме». Другое письмо г-жи Бор от 18 ноября 1921 г.: «Вы не можете себе представить, как мы оба рады Вашему и Таниному (старшей дочери Эренфеста.—*В. Ф.*) приезду... Мой муж всем сердцем радуется, предвкушая эту встречу и возможность поговорить с Вами... У меня к Вам есть несколько просьб: 1) чтобы Вы ни в коей мере не думали, что Ваш приезд связан с хлопотами или утомит нас — он только доставит нам удовольствие; 2) чтобы Вы приехали как можно скорее. У нас здесь все очень просто — и еда, и комнаты, и обслуживание, но я очень надеюсь, что здесь Вы будете чувствовать себя как дома». В третьем письме, адресованном г-жой Бор Татьяне Алексеевне, читаем: «Мой муж очень полюбил Вашего супруга... Он так благодарен ему за оказанную помощь и немецкий перевод его последней работы и только сожалеет, что злоупотреблял его временем. Все здесь находятся под впечатлением от таких вдохновенных и чудесных докладов, которые сделал Ваш муж в Копенгагене. А у нас дома он так замечательно играл и рассказывал о музыке».

Сам Бор 19 мая 1922 г. писал Эренфесту: «...Я очень огорчен, что не смог заехать к Вам по дороге в Англию... Дни, проведенные в Англии, были великолепными. Резерфорд был еще более чудесным, чем всегда. То же можно сказать и о Ричардсоне, которого я очень люблю,— я получил много радости, общаясь с ним». Бор пишет о том, что занятость мешала его работе,— особенно в той ее части, которая касается «писания» и обработки материалов, а их накопилось очень много. «Эти материалы,— продолжает он,— в основном относятся к общим принципам квантовой теории, и Вы увидите, сколь многому я научился в результате наших дискуссий. Вы знаете, как много значит для меня изложение, и я не мог бы лучше описать состояние дел, чем сказать, что благодаря всему этому я почувствовал себя вынужденным вернуться к принципу адиабатических инвариантов. Более того, я настолько капитулировал, что стал говорить лишь о статистическом весе и выступил против употребления априорной вероятности, вступая по этому поводу в борьбу с разными людьми (буквально: «словесно фехтуясь».—*В. Ф.*). Что касается Вашей самой последней работы о «проклятых проблемах» (*Galgenproblemen*), то я имел случай разобраться в ней и надеюсь, что сейчас возможно очень простым и естественным образом преодолеть указанный там Вами парадокс\*). Это письмо служит хорошим дополнением к приведенным выше оценкам Бора работ Эренфеста по адиабатическим инвариантам.

К сожалению, недостаток места не позволяет здесь с должной полнотой остановиться на взаимоотношениях Бора и Эренфеста, какими они

\*.) Имеется в виду, очевидно, упомянутая выше совместная с Г. Брэйтом работа Эренфеста (⁶, ст. 43), являющаяся в какой-то мере развитием работы последнего (⁶, ст. 30). Указанный в письме Бора парадокс касается проблемы равновесия системы вращающихся диполей.

рисуются из их переписки. На Эренфеста поездки в Копенгаген произвели глубочайшее впечатление, он возвращался из Дании с запасом энергии и сил, столь необходимых ему особенно в последние годы жизни.

В цитированном выше письме Эйнштейна к Эренфесту (от 9 ноября 1919 г.) имеются интересные свидетельства отношения Эйнштейна к работам Бора и видна роль Эренфеста в привлечении внимания Эйнштейна к проблемам, связанным с принципом соответствия в квантовой теории. Эйнштейн пишет: «...Я проштудировал с большой радостью лоренцевские лекции. Кроме того, я углубился в Бора, к которому ты вызвал у меня



Конференция в Копенгагене, 1930 г.

В первом ряду слева направо: Н. Бор, П. Дирак, В. Гейзенберг, П. Эренфест,?, Л. Мейтнер. Во втором ряду, за Гейзенбергом — В. Гитлер.

большой и горячий интерес. Ты показал мне, что это человек, глубоко всматривающийся в суть вещей и вдыхающий жизнь в обнаруженные там внутренние связи».

Интересную страницу в истории научных контактов Бора и Эренфеста и, шире, копенгагенской и лейденских школ составляет открытие спина электрона — эти события также находят отражение в переписке (см. также<sup>16</sup> и<sup>30</sup>). Эренфесту Бор обязан своими блестящими ассистентами — Крамерсом и Казимиром — в той же мере, в какой голландская физика обязана Бору за ту превосходную школу, которую они прошли под его руководством. Также хорошо известна роль Эренфеста в организации знаменитой дискуссии между Эйнштейном и Бором по вопросам квантовой механики. В заключение краткого обзора отношений Эренфеста с двумя великими физиками нашего века приведем выдержку из его письма, написанного 12 сентября 1931 г. и адресованного им обоим:

«...Ты, милый Эйнштейн, во время моего посещения виллы Капут, дал мне надежду на то, что заедешь сюда по дороге в Америку. Разумеется, мне бы очень, очень хотелось видеть тебя здесь, когда тут будет Бор. Я не могу передать вам, как важно для меня послушать вас обоих

спокойно беседующими друг с другом о нынешнем состоянии физики. Я уже признавался вам, что чувствуя себя подобно бузинному шарику, колеблющемуся между обкладками конденсатора, когда перекожу от одного из вас к другому. Мне особенно приятно видеть, что Бор может совершенно отчетливо убедиться, в какой степени ты, Эйнштейн, знаешь и понимаешь его идеи и стремления и вместе с тем считаешь правильным дальнейшие его исследования...

Я очень хорошо знаю, Эйнштейн, что такого рода пропаганда не оставляет никаких следов в твоей душе и что ты в еще меньшей степени нуждаешься в побуждении для подобной дискуссии. Для меня же исключительно важно иметь возможность точно установить те пределы, в которых вы оба вынуждены думать согласно и начиная с какого момента ваши точки зрения расходятся и приводят вас на разные пути.

Я обещаю ни в коем случае не мешать вам, но надеюсь, что, может быть, при случае смогу и немножко помочь. Ведь я же довольно хорошо знаком со специфической для каждого из вас манерой излагать свои мысли и, в частности, с ужасающими облаками боровской вежливости, являющимися таким колossalным препятствием для общения, если их не рассеивать время от времени! Поэтому я прошу тебя, Эйнштейн, сообщить мне по возможности сразу, когда мы сможем тебя увидеть в Лейдене».

### VIII. ЭРЕНФЕСТ И СОВЕТСКАЯ ФИЗИКА

В письме к В. А. Кравцевой, жене А. Ф. Иоффе по первому браку, Эренфест называл Абрама Федоровича своим «самым старым и самым близким другом». Знакомство их состоялось в Мюнхене в 1905 г. в кафе «Луц», где каждое воскресенье собирались молодые физики города. Одним из инициаторов этих встреч был Иоффе, работавший в то время у Рентгена (а среди участников можно назвать Зоммерфельда, Дебая и Лауэ). Эренфест и Иоффе были одногодками, в то время совсем молодыми. Один — ученик Рентгена, тонкий экспериментатор, интересовавшийся теорией, другой — ученик Больцмана — первоклассный теоретик, внимательно следивший за экспериментальными работами, оба люди высоконтелегентные, они не могли не понравиться друг другу. И все же в Мюнхене их встречи были мимолетными, а знакомство оставалось довольно поверхностным. Иоффе не подозревал, что Эренфест женат на русской, а Эренфест, угадавший в Иоффе иностранца, решил, как вспоминала много лет спустя Т. А. Афанасьева-Эренфест, что он голландец.

Но уже в первые месяцы в России наметившаяся в Мюнхене взаимная симpatия вылилась в теплую дружбу. Иоффе и Эренфест часто виделись: «Два раза в неделю мы обсуждали интересовавшие нас вопросы физики, обычно у него на квартире, иногда при участии других физиков. А в промежутке между встречами он ежедневно посыпал мне письма в 6—12 страниц с изложением своих мыслей и вычислений», — писал А. Ф. Иоффе<sup>31</sup> (многие из этих писем сохранились в его архиве).

Уехав из России в 1912 г., Эренфест продолжал публиковать в ЖРФХО свои статьи и направлял туда для перевода работы голландских физиков. В зимнем семестре 1913/14 г. в Лейден приезжает Крутков — самый любимый из эренфестовских русских учеников; в Амстердаме у Дебая работает Г. Г. Вейхардт.

Известно, что Голландия удалось сохранить нейтралитет во время первой мировой войны. В. М. Чулановский вспоминает действенную помощь, которую оказывал Эренфест русским физикам, застигнутым войной в стенах германских университетов и оказавшихся в гражданском плена (в частности, самому Чулановскому и В. К. Фредериксу).

Многократно публиковались первые после длительного перерыва письма (1920 г.) Эренфеста к Иоффе<sup>31</sup> и Рождественскому<sup>32</sup>, в которых он выражал готовность помочь молодой советской физике и высказывал свое восхищение тем, что было сделано в России в условиях голода и блокады.

К хлопотам по обеспечению успеха миссии А. Ф. Иоффе, А. Н. Крылова, П. Л. Капицы, Д. С. Рождественского, В. М. Чулановского, командированных советским правительством за границу для восстановления научных связей, Эренфест привлекал и своих научных коллег, в частности



Тюбинген, 1929 г.

Слева направо: Д. С. Рождественский, П. С. Эренфест, В. М. Чулановский,  
Х. Фюхтбауэр.

Лоренца. Лоренц пользовался в то время самым большим авторитетом среди физиков во всем мире, его рекомендательные письма были, по словам В. М. Чулановского, «ключом ко всем замкам». Большую помощь оказали Лоренц и Эренфест в получении виз (в частности, голландских) для советских ученых. Эренфест организовал сбор оттисков, журналов и книг — целые ящики с научной литературой были безвозмездно переданы советским научным учреждениям — институтам Иоффе и Рождественского и Петроградскому университету.

Очное знакомство с советской физикой состоялось у Эренфеста в конце лета 1924 г., когда он посетил нашу страну, чтобы принять участие в IV Съезде русских физиков и провести ряд консультаций. А. Ф. Иоффе познакомил его со своим институтом, незадолго до этого переехавшим в новое здание, и со своими молодыми сотрудниками. Павел Сигизмундович, судя по сохранившимся протоколам заседаний Ученого совета Института, посещал в августе — сентябре все его заседания, выступая с докладами и участвуя в обсуждении представленных Совету работ сотрудников

института (так, он очень высоко оценил проводившиеся в институте работы по молекулярному пучку, которые возглавлял Н. Н. Семенов <sup>33</sup>).

15 сентября 1924 г. в помещении большой физической аудитории Ленинградского университета открылось первое заседание Съезда. Председателем Съезда был избран П. П. Лазарев, а одним из товарищей председателя — П. С. Эренфест. 16 сентября он принял участие в дискуссии по докладу А. Ф. Иоффе о связи научных исследований с задачами техники. Он сказал: «Я должен напомнить, как русских физиков сердечно принимали за границей после снятия блокады с Советской России. Мы знали, что вы очень усердно работали над восстановлением науки в России. Однако теперь я с некоторой тревогой смотрю на будущее русской науки. Меня тревожит главным образом стремление придать ей чисто практическое направление. По этому поводу я укажу на следующее: в бытность мою в Америке меня там спрашивали, каким образом в Германии и Голландии (где я работаю) так быстро и во многих случаях так гениально находят ответ на многие практические вопросы, какими бы неожиданными они ни являлись. На это я мог, конечно, только ответить, что это происходит в силу уважения к развитию в этих странах чисто теоретических знаний и в первую голову математики. Люди, овладевшие вполне теорией, могут давать разрешение возникающим вопросам. Поэтому позвольте мне надеяться, что и в Советской России пойдут по пути гармонического развития обоих направлений, чисто теоретического и практического» <sup>34</sup>.

На Съезде работала и небольшая теоретическая секция. Советская теоретическая физика была представлена докладами Ю. А. Круткова, И. Е. Тамма и Я. И. Френкеля. В судьбе всех этих людей Павел Сигизмундович принимал самое живое участие. По его рекомендации Ю. А. Крутков и Я. И. Френкель (а несколько позднее В. А. Фок и Д. В. Скобельцын) стали рокфеллеровскими стипендиатами, Тамм — стипендиатом Лоренцевского фонда (причем решение о выдаче ему соответствующей стипендии было принято еще при жизни Лоренца, участвовавшего в заседании комиссии Фонда).

Глубокое впечатление на Эренфеста произвело знакомство с Л. И. Мандельштамом. Характерную деталь рассказал И. Е. Тамм. Эренфест выступал перед большой аудиторией слушателей; после доклада он отвечал на вопросы. «А вот на этот вопрос,— сказал Павел Сигизмундович,— никто не ответит лучше крупнейшего в мире специалиста — профессора Мандельштама, который здесь присутствует». Эренфест начал искать глазами Мандельштама. «А Леонид Исаакович,— добавляет И. Е. Тамм,— с той, я бы сказал, болезненной скромностью, которая всегда его отличала, постарался спрятаться за мою спину!»

Имя Мандельштама не раз фигурирует в переписке Эренфеста и Иоффе. Так, 13 апреля 1928 г. он пишет из Лейдена: «Позволь мне теперь сделать критические замечания о твоем плане привлечения к работе у тебя Мандельштама и Тамма. Конечно, я прекрасно понимаю, как важно прежде всего создать этим двум превосходным физикам наиболее благоприятные условия для научной работы, ... тем более, что они не только прекрасные физики, но и замечательные люди... Но я должен тебе сказать, что такая ненормально высокая концентрация сопряжена и с некоторой опасностью (Эренфест имеет в виду концентрацию физиков-теоретиков, работавших в то время у Иоффе.— В. Ф.). Французская революция собрала все (в данном случае всю физику.— В. Ф.) в Париже: сравни теперь нынешнее положение там и в Германии». Свое письмо Эренфест заканчивает словами: «Извини меня за это поистине огромное письмо. Оно показывает, во всяком случае, как много места занимают твои планы в моих мыслях».

В другой раз (28 апреля 1928 г.) Эренфест, будучи к этому времени членом-корреспондентом нашей Академии наук, обращается с официальным письмом к двум советским академикам — П. П. Лазареву и А. Ф. Иоффе, в котором горячо рекомендует избрать на две открывшиеся академические вакансии Л. И. Мандельштама и Д. С. Рождественского. Он добавляет, что, поскольку «Мандельштам сравнительно редко публикуется, я должен особо отметить, сколь многому у него научился в процессе личных бесед». Роль Мандельштама, указывает Эренфест, стала ему понятной и на примере Тамма, его ученика. Влияние Мандельштама на развитие физики в СССР Эренфест сравнивает с аналогичным влиянием на французскую физику, оказываемым в те годы Полем Ланжевеном.

Чаще других пишет в конце 20-х годов Эренфест об И. Е. Тамме. 13 апреля 1928 г.: «Я не представлял бы себе лучшего чем Тамм преемника в Лейдене, когда наступит время ухода!». 2 июня 1928 г.: «Тамм и Дирак очень подружились. В середине июня они поедут в Лейпциг, где Дебай и Гейзенберг организовывают недельную дискуссию по квантовой механике».

В том же 1928 г. Эренфест получает приглашение на IV Съезд русских физиков; он не смог, однако, принять в нем участия. Из писем, относящихся к этому периоду, мы узнаем, что только болезнь помешала Эйнштейну принять такое же приглашение: как бы оправдывая Эйнштейна, Эренфест пишет Иоффе (2 июля 1928 г.) о том, что по той же причине Эйнштейн не смог выступить на заседании в Берлине, посвященном памяти Лоренца (вместо него с речью выступил Макс Планк<sup>35</sup>). В этом же письме к Иоффе есть такие проникновенные строчки: «Только рядом с тобой и Эйнштейном я чувствую себя защищенным от всей земной скверны».

Следующий приезд Эренфеста в Россию намечается на конец 1929 г. 31 октября этого года он пишет Иоффе: «Я очень надеюсь иметь возможность как следует поговорить с Френкелем и толковой молодежью, а также с Фоком и Таммом».

Примерно к этому времени относится начало тяжелого душевного разлада, который переживал Павел Сигизмундович Эренфест и который привел его к трагическому концу. Речь идет о мучившей его неуверенности в себе, чувстве, которое не обходило и других выдающихся физиков, включая и гигантов типа Людвига Больцмана, когда они достигали определенного возраста. Эти трагические мотивы звучат в письмах к Эйнштейну, Бору, Иоффе, усиливаясь с каждым годом. Так, обсуждая перспективу приезда в Россию в конце 1929 г., Эренфест пишет Иоффе 25 сентября 1929 г., т. е. ровно за 4 года до своей смерти: «Я чувствую себя очень усталым и старым. Не знаю, смогу ли быть вам действительно полезным. Во всяком случае, я хотел бы, чтобы не я что-либо рассказывал (разве что для совсем молодых студентов), но чтобы разные люди рассказывали мне, по возможности более четко формулируя свои мысли,— пока я все хорошо кумекаю (kapiere). Такое предложение звучит, быть может, комично, но я думаю, что именно в этом плане я могу быть полезен русским молодым физикам». Иногда, правда, эту свою неуверенность Эренфест облекает в полушутильную форму. «Чем ближе подходит время моего отъезда, тем с большим страхом думаю я обо всех молодых и ученых людях, которые работают у тебя в области теоретической физики. Я знаю так ужасающее мало, а это малое — так плохо!.. Я с нетерпением жду новой встречи с молодыми русскими физиками. Позабочься о том, чтобы они не смотрели на меня, задрав нос!.. Кроме молодых теоретиков я побаиваюсь: 1) морозов, 2) потери времени на ожидание — из-за вашего неумения точно договориться».

Эренфест приезжает в СССР в декабре 1929 г. и начинает свою поездку с остановки в Ленинграде. Здесь он читает лекции в Физико-техническом институте, выступает на диспутах в Политехническом (стенограмма сохранила нам полный текст выступления Павла Сигизмундовича на двух вечерах-диспутах между Я. И. Френкелем и В. Ф. Митковичем о природе электрического тока в декабре 1929 г. и январе 1930 г.<sup>36</sup>). Павел Сигизмундович приглашается на торжественное заседание, посвященное десятилетию со дня организации физико-механического факультета, которое проводится в Выборгском доме культуры. Выступая там, он говорит: «Эти годы чувствуется, что целый народ мобилизуется на культурную и научную работу, как в других странах народ мобилизуется на войну»<sup>36</sup>. В Москве Эренфест присутствует на докладах мандельштамовского семинара, затем едет в Харьков во вновь организованный Харьковский физико-технический институт. Во многом именно благодаря Эренфесту криогенная культура привилась на харьковской почве, его хлопотам и энтузиазму советская физика обязана той прекрасной школе, которую наши ученые получили в Лейдене в лаборатории Каммерлинг-Оннеса (особенно плодотворными были контакты с этой лабораторией Л. В. Шубникова, которого Эренфест высоко ценил как ученого и человека) и в самом Харькове: тамошний Физтех неоднократно посещали в конце 20-х — начале 30-х годов работники Лейденской лаборатории.

Здесь будет уместно дать хотя бы краткий обзор (скорее перечень) работ, которые были выполнены Эренфестом в 20-е годы и, в частности, в те годы, когда он считал, что не способен заниматься теоретической физикой.

#### IX. РАБОТЫ 20-Х ГОДОВ

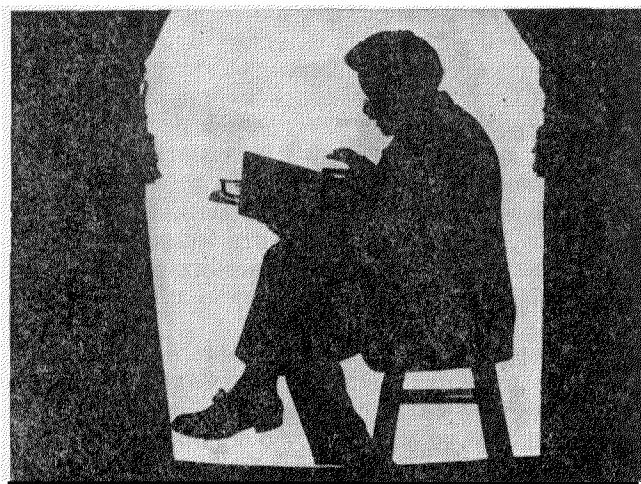
Не будет ошибочным утверждение, что из всех работ Эренфеста наиболее широкой известностью пользуется сейчас его работа, содержащая изложение «теоремы о средних значениях»<sup>6</sup>, ст. 65). Эта изящная теорема включена во многие современные курсы квантовой механики. Пользуясь минимальными математическими средствами, Эренфест продемонстрировал, что средние значения квантовомеханических величин — скорости и импульса, ускорения и силы — связаны между собой классическими «ньютоновскими» соотношениями. Своими ранними работами Эренфест показал, в каких пределах классическая физика может быть сохранена и использована в квантовой теории. «Георема о средних значениях» как бы достраивает мост, соединяющий классическую и квантовую механику, но уже со стороны «квантовомеханического берега» свидетельствуя о том, что в новой теории в качестве предельного случая содержится старая.

Вместе с тем, оценивая адиабатическую гипотезу и теорему Эренфеста и его квантовомеханическую теорему, нельзя удержаться от мысли о некоторой несправедливости (характерной, впрочем, не только для случая с Эренфестом), когда в науке сохраняются работы того или иного ученого, имевшие в его творчестве скорее характер эпизода, и то время как более глубокие его исследования, выношенные годами упорного труда, оказываются достоянием только истории соответствующей науки, а потому и известны гораздо меньшему кругу людей.

Мы ограничимся здесь лишь упоминанием о целой серии работ Эренфеста по квантовой статистике, открывающейся в рассматриваемом периоде его жизни (20-е годы) совместной с Тркалом работой<sup>6</sup>, ст. 40), и появившихся уже после возникновения квантовой механики и статистики работах его и Юленбека<sup>6</sup>, ст. 60). Вся эта серия работ подробно освещена М. Клей-

ном<sup>37</sup>; там же приведены и высокие оценки влияния этих работ на развитие квантовой статистики, принадлежащие М. Планку и Ч. Дарвину.

Дважды Эренфест и Эйнштейн выступали с совместными публикациями. Первая из них<sup>(20)</sup>, посвященная анализу классического опыта Штерна — Герлаха, по своему характеру и строю больше эренфестовская, чем эйнштейновская. Вопрос о кинетике ориентации атомных магнитиков во внешнем магнитном поле (поставленный в характерной для Эренфеста манере двух исключающих друг друга альтернатив) рассматривается в ней с «адиабатических» позиций. Эта статья послужила



П. Эренфест. Теневая фотография. Пасадена, США, 1931 г.

стимулом для рассмотрения эффектов резонансного поглощения электромагнитных волн в ферромагнитных и параметромагнитных веществах (см.<sup>38</sup> и<sup>39</sup>). Другая работа<sup>(20)</sup>, ст. 55) — по тематике чисто эйнштейновская — касается дальнейшего развития его квантовой теории процессов вынужденного и спонтанного излучения\*).

Эренфест внес очень существенный вклад в открытие спина электрона (Гаудсмит и Юленбек, 1925 г.). Достаточно сказать, что С. Гаудсмит, говоря об истории возникновения своей и Юленбека работы, оструумно замечает, что его «история вертится больше вокруг Эренфеста, чем вокруг спина»<sup>16</sup>.

Другой, менее известный пример «закулисной» и стимулирующей роли Эренфеста в развитии целого направления исследований дает история возникновения спинорного анализа. Значение Эренфеста становится вполне очевидным из выдержки, взятой из книги Ю. Б. Румера<sup>40</sup>: «В начале 1929 г. ныне покойный П. С. Эренфест, умевший как никто другой остро ставить назревшие вопросы, обращается с письмом к Б. Л. Ван-дер-Вардену, в котором пишет: «Если мы назовем те новые величины, которые обнаружились в уравнениях Дирака, спинорами, то нельзя ли построить по образцу векторного и тензорного анализов спинорный анализ, который смог бы изучить каждый физик, работающий в этой области?» Отве-

\*). Она получена редакцией «Zeitschrift für Physik» 16 октября 1923 г., но, судя по формуле Паули (исходной для проведенного в статье рассмотрения), начертанной на стене гостевой комнаты в доме Эренфеста, и сопутствующей подписи Эйнштейна, обсуждалась и, видимо, была в основном закончена в Лейдене 25 сентября того же года.

том на письмо П. С. Эренфеста явилась небольшая работа Ван-дер-Вардена, принципиально разрешавшая проблему.

Последняя — по дате публикации (1933 г.) — работа Эренфеста о фазовых переходах (<sup>6</sup>, ст. 76) содержит четкую классификацию «порядка» этих переходов. Она способствовала привлечению внимания к исследованиям фазовых переходов II рода; с нее и сейчас обычно начинается изложение этой важной области современной физики (см., например, <sup>41, 42</sup>).

## X. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эренфест в начале 30-х годов, как и всегда, продолжал пользоваться глубочайшим уважением своих голландских коллег, его рады были бы видеть в своей стране советские физики — возможность переезда Павла Сигизмундовича в СССР неоднократно обсуждалась. И вместе с тем его не покидало чувство изнуряющей неуверенности в себе и в своих силах. Прекрасно знавшему историю физики и математики, ему было, конечно, известно, что наиболее плодотворными для ученых являются молодые годы. Об этом Эренфест неоднократно слышал, например, в Гёттингене на лекциях Ф. Клейна. Клейн утверждал это, ссылаясь на пример математиков и прежде всего Гаусса: в его юношеских тетрадях Клейн обнаружил многое из того, что было опубликовано сначала зрелым, а потом и пожилым ученым.

Перед каждым крупным ученым с годами возникает опасность оказаться не на уровне прежних своих достижений; переход от активной и бурной научной работы в более спокойное русло часто протекает крайне болезненно. Эйнштейн прямо упоминает о мучившем Эренфеста в последние годы его жизни чувстве несоответствия между творческими возможностями и занимаемой им должностью <sup>1</sup>. Можно думать, что это чувство подсознательно питалось тем, что Эренфест выбирал неоправданно высокие критерии для оценки своих достижений. На фоне Эйнштейна, Лоренца, Бора, Дирака, Борна, Паули — людей, с которыми он был тесно связан, не мудрено почувствовать неудовлетворенность своими результатами.

Духовные силы Эренфеста подтачивала мысль о неизлечимой болезни самого младшего сына. На эту личную трагедию накладывалось предчувствие трагедии, которую готовил миру поднявший голову германский фашизм. Мысль об уходе из жизни появилась у Эренфеста, вероятно, давно, но его жизнелюбие поначалу ее отгоняло. Этот вывод подтверждается письмами Эренфеста конца 20-х — начала 30-х годов. Написав о том тяжком бремени, каким стала для него жизнь, Павел Сигизмундович подсознательно или сознательно исключал возможность компромиссных решений и ставил себя перед необходимостью оборвать ее. Симптоматично, что писал он об этом не только своим самым близким друзьям — Эйнштейну, Иоффе, Бору, но и менее близким людям (П. Л. Капице, Я. И. Френкелью, супругам Шубниковым)...

24 сентября 1933 г. в Ленинграде открылась I Всесоюзная конференция по физике атомного ядра. 27 сентября во время утреннего заседания, проходившего в актовом зале Физико-технического института, была оглашена телеграмма из Голландии, извещавшая о самоубийстве Эренфеста. Собравшиеся минутой молчания почтили память замечательного ученого и человека, так много сделавшего для физики. Многие из участников конференции совсем недавно — в январе 1933 г. — видели Эренфеста во время его последнего (третьего по счету) визита в Советский Союз, и для большинства это известие было полной неожиданностью: Эренфест был веселым, щутил («Ты ведь знаешь, — писал он незадолго до поездки,

23 октября 1932 г., А. Ф. Иоффе, — какое стимулирующее влияние оказывает на меня контакт с русской молодежью!»).

Месяцем позднее память Эренфеста была почтена на открытии очередного Сольвеевского конгресса, конгресса, к участию в работе которого Павел Сигизмундович был своевременно приглашен. Во вступительной речи Поль Ланжевен сказал: «Пауль Эренфест должен был присутствовать здесь, и ничто не сравнимся с тем горем, которое потрясло нас, когда месяц тому назад мы узнали о трагическом решении, которое он счел нужным принять. Многие из присутствующих здесь были его учениками и все — его друзьями... Драма нашей физики воплотилась в нем в трагедии, которая погубила большой ум и большое сердце»<sup>43</sup>.

Этими темпераментными и проникновенными словами мы и закончим статью о Павле Сигизмундовиче Эренфесте — выдающемся физике и большом и заинтересованном друге советской науки \*).

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 4, М., «Наука», 1967, стр. 59.
2. W. Pauli, Naturwiss. 21, 841 (1933).
3. G. H. Dieke, S. A. Gaudsmith, G. F. Uhlenbeck, Science 78, 377 (1933).
4. M. Born, Bull. Atomic Sci., Sept. 1965, стр. 4.
5. E. Broda, Ludwig Boltzmann, Wien, 1955.
6. P. Ehrenfest, Collected Scientific Papers (Ed. by M. Klein), Amsterdam, 1959.
7. Архив Венского университета. Личное дело Пауля Эренфеста \*\*).
8. А. Ф. Иоффе, Встречи с физиками, М., Физматгиз, 1960.
9. Рукописный отдел Государственной публичной библиотеки им. Салтыкова-Щедрина, Фонд Б. П. Вайнберга (ф. 132), ед. хр. 117, л. 112.
10. Т. П. Кравец, От Ньютона до Вавилова, Л., «Наука», 1967, стр. 348.
11. M. Klein, Delta (Amsterdam) 5, 11 (1962).
12. Paul and Tatiana Ehrenfest, The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics, N.Y., 1959.
13. М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, М., «Мир», 1967, стр. 96.
14. E. Schrödinger, K. Kohlrausch, Phys. Zs. 27, 306 (1926).
15. П. С. Эренфест, ЖРФХО 45 (4Б), 151 (1913).
16. С. Гаудсмит, УФН 93 (1), 151 (1967); см. также: Лаура Ферми, Атомы у вас дома, М., ИЛ, 1958, стр. 106.
17. П. С. Эренфест, ЖРФХО 46 (2А), 58 (1914).
18. Ю. А. Крутков, Труды ГОИ 2 (12), 1 (1922).
19. Архив АН СССР, Лен. отделение, фонд Ю. А. Круткова (ф. 946), оп. 1.
20. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 3, М., «Наука», 1966, ст. 36.
21. Л. Бриллюэн, Атом Бора, Л.—М., ОНТИ, 1935, стр. 21.
22. N. Bohr, Zs. Phys. 13, 131 (1923).
23. М. Борн, Лекции по атомной механике, ГИТИ Украины. Харьков — Киев, 1934, стр. 56.
24. M. Born, V. Fock, Zs. Phys. 51, 165 (1928).
25. В. А. Фок, Адиабатическая гипотеза и теорема, «Физический словарь», т. 1, М.—Л., ОНТИ, 1936.
26. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, М., «Наука», 1965, ст. 6, стр. 51.
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

\*) В статье приведен ряд не публиковавшихся ранее писем Эренфеста, Эйнштейна, Лоренца, Бора и Иоффе. Они получены при любезном содействии Т. П. ван Аарденне-Эренфест и Г. П. ван Боммелль-Эренфест из Лейденского музея естественных наук и Фонда Альберта Эйнштейна в США. Выражаю искреннюю признательность А. Е. Энгберту и В. В. Иванову, отобравшим соответствующие материалы в Лейдене, а д-ру О. Наташу, г-же Э. Дюкас и проф. М. Клейну — из фонда Эйнштейна. Соответствующие материалы публикуются с разрешения дочерей Эренфеста, г-жи М. Бор и О. Наташа (душеприказчика А. Эйнштейна). В тексте статьи приведены имена советских физиков, поделившихся с автором своими воспоминаниями об Эренфесте. Автор искренне благодарен всем этим лицам.

\*\*) Выражаю признательность д-ру Ф. Галлю за предоставление этих материалов.

28. К. Зелиг, Альберт Эйнштейн, М., Атомиздат, 1966.
  29. О. Nathan, H. Norden, Einstein on Peace, N.Y., 1960.
  30. Сб. «Теоретическая физика 20 века», М., ИЛ, 1962.
  31. М. Соминский, Абрам Федорович Иоффе, М.—Л., «Наука», 1964.
  32. Д. Е. Славентант ор. На пороге атомного века, Л., Лениздат, 1966.
  33. Архив ФТИ им. А. Ф. Иоффе, АН СССР, дело № 14, л. 21.
  34. «Вечерняя Красная газета», Ленинград, 17 сентября 1924 г.
  35. М. Планк, Единство физической картины мира, М., «Наука», 1966, стр. 152.
  36. В. Я. Френкель, Яков Ильич Френкель, Л.—М., «Наука», 1966, стр. 368.
  37. M. Klein, Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen (Proceedings), Ser. B, 62, 1 (1959).
  38. Я. Г. Дорфман, Zs. Phys. 17 (2), 98 (1923).
  39. Я. Г. Дорфман, в сб. «Развитие физики в СССР», т. 1, М., «Наука», 1967, стр. 344.
  40. Ю. Б. Румер, Спинорный анализ, М.—Л., ОНТИ, 1935, стр. 3.
  41. К. П. Белов, Магнитные превращения, М., Физматгиз, 1959, стр. 11.
  42. Н. П. Гражданкина, УФН 96 (2), 291 (1968).
  43. P. Langewirth, Structure et propriétés des noyaux atomiques, Rapports et Discussions du Septième Conseil de Physique, Paris, 1934, стр. VII—VIII.
-