1968 г. Март Том 94, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

50

НЕПОСТИЖИМАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ*)

Е. Вигнер

И совсем не исключено, что здесь еще кроется какая-то тайна, которую нам предстоит раскрыть.

К. Пейрс

Рассказывают историю о двух бывших однокурсниках, обсуждавших свою деятельность. Один занимается статистикой и обрабатывает данные о населении. Он показывает приятелю оттиск своей работы, которая начинается, как водится, с гауссова распределения. Статистик поясняет, какие символы обозначают наблюдаемые величины, какие — средние и т. д. Но его другу, который был отчасти скептиком, показалось, что его разыгрывают. «Как ты только все это выучил? — спросил он статистика. — Кстати, что это такое?» — «Ах, это? — отвечал статистик. — Это π». —«А что это значит?» —«Это отношение длины окружности к ее диаметру». —«Ну, знаешь, брось эти шутки, — ответил скептик, — к чему-к чему, но к окружности данные о населении не имеют никакого отношения».

Мы, естественно, склонны улыбаться, видя такую непосредственность. Но когда я слушал эту историю, мною, признаться, овладело чувство ужаса. В самом деле: ведь реакция молодого человека была проявлением обычного здравого смысла. Такое же чувство я испытал с еще большей силой несколько позже, когда ко мне зашел студент, выразивший свое удивление ограниченным выбором фактов, на основе которых мы устанавливаем справедливость своих теорий, так: «Откуда известно, что нельзя — если обратить внимание на явления, которыми мы пренебрегали, и игнорировать те явления, которые сейчас являются для нас определяющими, — построить другую теорию, мало похожую на существующую, но объясняющую столько же явлений, сколько объясняет современная теория?» **). Следует признать очевидным, что никто не может доказать невозможность такой теории.

Эти две истории подчеркивают две главные идеи, которым посвящена статья. Первая идея: математические представления могут оказаться в совершенно неожиданной связи. Более того, они часто приводят к неожиданно удачному и точному описанию явлений в этой связи. Вторая идея:

*) E. Wigner, The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Comm. Pure and Appl. Math. 131, 1 (1960). Лекция в честь Рихарда Куранта, прочитанная 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете. Перевод В. А. Белокопя и В. А. Угарова.

**) Высказано Ф. Вернером в студенческие годы (Принстонский ун-т).

именно благодаря упомянутой широте применения математических представлений и тому факту, что мы не понимаем причин такой широты, мы ниоткуда не может узнать, единственна ли теория, сформулированная на языке наших математических представлений. Мы похожи на человека со связкой ключей, который, пытаясь открывать одну дверь за другой, всегда находит правильный ключ с первой или второй попытки. Это заставляет его сомневаться относительно взаимно-однозначного соответствия между ключами и замками.

Бóльшая часть того, что здесь будет сказано по этому поводу, отнюдь не ново. Сходные мысли в том или ином виде, вероятно, приходили в голову многим ученым. Моя главная цель — осветить этот вопрос с нескольких сторон. С одной стороны, невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет. С другой стороны, именно эта непостижимая эффективность математики в естественных науках выдвигает вопрос о единственности физических теорий. Для того чтобы обосновать утверждение о невероятно важной роли математики в физике, полезно для начала сказать кое-что по поводу того, что такое математика, затем выяснить, что такое физика. После этого следует рассмотреть роль математики в физической теории и, наконец, понять, почему успехи математики в физике оказываются столь потрясающими. Совсем кратко мы остановимся на вопросе о единственности теорий в физике. Исчерпывающий ответ на этот вопрос потребовал бы тщательной экспериментальной и теоретической работы, которая к настоящему времени еще не проделана.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Кто-то сказал однажды, что философия — это просто злоупотребление терминологией, придуманной как раз для этой цели *). В этом же духе я бы сказал, что математика является наукой изощренного манипулирования понятиями и правилами, придуманными как раз для этой цели. Главное ударение стоит именно на изобретении понятий. Математики очень скоро исчерпали бы все нетривиальные теоремы, если бы их теоремы всегда формулировались на языке понятий, уже содержавшихся в аксиомах. Далее, хотя нет сомнений в том, что понятия элементарной математики, в особенности элементарной геометрии, были сформулированы для описания предметов окружающего мира, такое утверждение уже явно несправедливо для более абстрактных понятий, в частности понятий, играющих столь важную роль в физике. Таким же образом, правила операций с парами чисел, очевидно, построены так, что приводят к тем же результатам, что и операции с дробями, причем правила для дробей мы учим без ссылок на «пары чисел». Правила обращения с последовательностями, например с иррациональными числами, все еще принадлежат к категории правил, установленных по аналогии с правилами действия над величинами, которые уже были нам известны. Гораздо более абстрактные математические понятия, такие, как комплексные числа, алгебры, линейные операторы, борелевы множества (подобный список можно продолжить почти до бесконечности), были построены как объекты, на которых математик мог проявить свое остроумие и чувство формальной красоты. Фактически именно определение этих понятий вместе с установлением того, что к ним можно применить интересные и остроумные соображения, является первым признаком изобретательности математика, определивше-

*) Из книги: W. D u b i s l a v, Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, Berlin, 1932.

го их. Вся глубина мысли, которая заложена в формулировку математических понятий, впоследствии раскрывается тем умением, с которым эти понятия используются. Выдающийся математик до предела, почти что не щадя ничего, использует всю область возможных рассуждений и даже скользит по самому краю возможного. То, что такая смелость не приводит математика в болото противоречий, уже само по себе чудо: в самом деле, трудно поверить, что могущество нашего ума доведено дарвиновским естественным отбором до такого совершенства, которым наш ум, судя по всему, обладает. Однако не это интересует нас здесь. Главным пунктом, который мы еще подчеркнем далее, является то, что математик может сформулировать лишь ограниченное число теорем, не определяя никаких понятий, кроме тех, которые входят в математические аксиомы. Не входящие в аксиоматику понятия определены в математике лишь постольку, поскольку эти определения допускают остроумные логические операции, апеллирующие к нашему чувству прекрасного и приводящие к результатам большой общности и простоты *).

Особенно ярким примером высказанного утверждения являются комплексные числа. Конечно, ничто в нашем повседневном опыте не вынуждает нас вводить такие числа. С другой стороны, если у математика попросить объяснить его интерес к комплексным числам, то он не без негодования укажет вам на прекрасные теоремы, касающиеся алгебраических уравнений, степенных рядов и вообще аналитических функций, доказательство которых стало возможным только благодаря введению комплексных чисел. Математиков никогда не перестанет интересовать это прекрасное достижение их гения **).

ЧТО ТАКОЕ ФИЗИКА?

Физик интересуется законами неживой природы. Но для понимания такого утверждения следует проанализировать понятие «законы природы».

Окружающий нас мир ужасающе сложен, и наиболее очевидным фактом является наша неспособность предсказывать будущее. Хотя в анекдотах уверенность в неопределенности будущего приписывают только оптимистам, оптимисты в данном случае и в самом деле правы: будущее непредсказуемо. По замечанию Шрёдингера [1], чудом является уже то, что, несмотря на всю сложность мира, можно все-таки открывать определенные закономерности событий. Одна из таких закономерностей, открытая Галилеем, заключается в том, что два камня, брошенные одновременно с одной и той же высоты, одновременно достигают земли. Законы природы относятся именно к таким закономерностям. Закономерность, открытая Галилеем, является прототипом обширного класса закономерностей. И эта закономерность удивительна по трем причинам.

Во-первых, эта закономерность удивительна тем, что она оказывается справедливой не только в Пизе и не только во времена Галилея; она справедлива повсюду на Земле, она всегда была и будет справедливой. Другими словами, была осознана инвариантность такой закономерности, и я уже имел случай отметить [2], что без принципа инвариантности, подобного

---

*) «Все эти трудности — только следствия нашего нежелания увидеть, что нельзя дать определение математики, не признав ее самой очевидной особенности — того, что она интересна» (M. P o l a n y i, Personal Knowledge, Univ. Chicago Press, 1958).

**) Ср. высказывание Гильберта об интуиционизме, который «старается развалить и изуродовать математику» (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 157 (1922) или Gesammelte Werke, Springer, Berlin, 1935, стр. 188).

принципу, примененному при обобщении наблюдении Галилея, физика была бы просто невозможна. Вторая удивительная особенность заключается в том, что обсуждаемая нами закономерность независима от многих условий, которые могли бы влиять на нее. Она справедлива несмотря на погоду, независимо от того, проводится ли опыт в комнате или с падающей пизанской башни и является ли экспериментатор, бросающий камни, мужчиной или женщиной. Она справедлива, даже если два камня одновременно бросают (с той же высоты) два разных человека. Существует, очевидно, бесчисленное множество других условий, которыми можно пренебречь, оставляя справедливой закономерность, открытую Галилеем. Безразличие ко многим обстоятельствам, которые *могли бы* играть роль в наблюдаемом явлении, также должно называться инвариантностью [2]. Эта инвариантность, однако, имеет характер, отличный от уже упомянутой инвариантности, поскольку ее нельзя сформулировать в виде общего принципа. Выяснение того, какие условия влияют на данное явление, а какие — нет, составляет существенную часть любого предварительного экспериментального исследования. Выбирать явления, которые зависят от относительно небольшого числа легко реализуемых и воспроизводимых условий, — дело искусства и изобретательности экспериментатора *). В этом смысле тот факт, что Галилей ограничил свои наблюдения относительно тяжелыми телами, было наиболее важным ограничением. Опять-таки справедливо то, что, если бы не было явлений, зависящих только от небольшого контролируемого набора условий, физика была бы невозможна.

Хотя два обстоятельства, которые мы упомянули, весьма существенны с точки зрения философа, более всего удивили Галилея совсем не они, и не они составляют существо открытого им закона природы. Этот закон состоит в утверждении, что длительность падения тяжелого объекта с данной высоты не зависит от размера, материала и формы падающего тела. С точки зрения второго закона Ньютона это сводится к утверждению, что сила тяготения, действующая на падающее тело, пропорциональна массе тела, но не зависит от его размера, состава и формы.

Все, о чем говорилось до сих пор, должно было прежде всего напомнить о том, что вовсе не очевидно, что «законы природы» должны существовать; возможность их существования куда менее очевидна, чем способность человека обнаруживать такие законы **). Автор уже имел случай [3] привлечь внимание к так называемой последовательности слоев «законов природы», причем каждый слой состоит из более общих и всеобъемлющих законов, нежели предыдущий; открытие каждого следующего слоя означает более глубокое проникновение в структуру Вселенной. Однако наиболее значительным утверждением в этой связи является то, что все эти законы природы даже в самых далеко идущих следствиях содержат лишь небольшую долю того, что содержит в себе неживая природа. Все законы природы являются лишь условными утверждениями, позволяющими предсказывать некоторые будущие события на основе знания состояния природы в данный момент, исключая некоторые аспекты этого состояния, пренебрежимые с точки зрения этого предсказания (хотя практически при этом игнорируется подавляющее большинство характеристик подлинного состояния природы). Упомянутое пренебрежение подра-

---

*) Ср. графические наброски М. Дойча в «Daedalus» 87, 86 (1958). А. Симони обратил мое внимание на нечто подобное у Пейрса (C. S. *Peirce*, Essays in the Philosophy of Science, 1957, стр. 237).

**) Шрёдингер в книге «Что такое жизнь с точки зрения физики?» говорит, что сущность этой способности человека вообще лежит, возможно, за пределами человепонимания (стр. 50 перевода, М., ИЛ, 1947).

зумевается в смысле второго пункта обсуждения теоремы Галилея *).

Что же касается объяснения современного состояния природы, т. е. самого существования Земли, на которой мы живем и на которой были проведены опыты Галилея, а также существования Солнца и всего того, что нас окружает, то в этом случае законы природы безмолвствуют. Это их «молчание» согласуется, во-первых, с тем, что законы природы можно использовать для предсказания будущего только в исключительных обстоятельствах — когда известны все существенные характеристики современного состояния мира. Также согласуется с этим «молчанием» и тот факт, что устройства, действие которых мы можем предвидеть, — это самое блестящее достижение физики. В этих устройствах физик создает условия, где все существенные координаты известны. Именно поэтому поведение устройства можно предсказывать. Таковы, например, радары и ядерные реакторы.

Главная цель этих рассуждений — подчеркнуть, что все законы природы — это весьма условные утверждения, имеющие поэтому отношение лишь к весьма малой части того, из чего состоит природа. Так, классическая механика — наиболее известный образец физической теории — позволяет определить вторые производные от координат всех тел (ускорения), если известны положения (координаты) и импульсы этих тел. Классическая механика не дает никакой информации о существовании этих тел, их расположении и скоростях в начальный момент. Строго говоря, следовало бы упомянуть о сделанном около тридцати лет назад открытии **), что даже эти условные (упомянутые выше) утверждения не могут быть абсолютно точными: условные утверждения являются лишь вероятностными законами, которые позволяют нам заключать лишь мысленные пари относительно будущих свойств неживой природы на основе знания «начального» состояния. Эти законы запрещают не только категорические утверждения о будущем, но даже и категорические утверждения о начальных условиях, т. е. о современном состоянии мира. И даже машины проявляют свойства, обусловленные вероятностной природой законов природы; это особенно легко показать в случае ядерного реактора, работающего в режиме очень малой мощности. Впрочем, дополнительные ограничения, налагаемые на законы природы (см., например, [1]) их вероятностной природой, не играют никакой роли в нашей дальнейшей дискуссии.

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

Освежив в памяти сущность математики и физики, нам уже легче выяснить роль математики в физике.

Вполне естественно, что мы пользуемся математикой в «повседневной» физике для количественной оценки эффектов, обусловленных законами природы: математика позволяет применять эти условные утверждения к данным конкретным условиям, которые оказались определяющими или просто заинтересовали нас. Сама возможность таких оценок подразумевает, что законы природы должны быть уже сформулированы на математическом языке. Впрочем, наиболее важная роль математики в физике состоит не в оценке следствий уже установленных теорий. Математика, точнее, прикладная математика, в этой роли совсем не определяет физическую ситуацию: здесь она выступает лишь в роли инструмента.

*) Автор убежден, что нет необходимости специально упоминать о том, что теорема Галилея, сформулированная в тексте, не исчерпывает сути его открытия законов падения тел.

**) Квантовой механики. (*Прим. перев.*)

Но математика может занимать в физике куда более определяющее положение. Уже в наших замечаниях о роли прикладной математики подразумевалось, что законы природы должны быть уже сформулированы на математическом языке, иначе они не были бы вообще объектами прикладной математики. Утверждение, что законы природы пишутся на языке математики, было ясно сформулировано уже лет триста назад, — по-видимому, Галилеем *). Теперь это еще более справедливо, чем когда-либо раньше. Для того чтобы продемонстрировать важность математических понятий для построения законов физики, напомним в качестве примера аксиомы квантовой механики, явно сформулированные великим математиком фон Нейманном и неявно великим физиком Дираком [4, 5]. Два понятия в квантовой механике являются основными: состояния и наблюдаемые. Состояния представляются векторами в гильбертовом пространстве, а наблюдаемые — самосопряженными операторами, действующими на эти векторы. Возможные значения наблюдаемых — это собственные значения операторов: но нам лучше здесь остановиться: мы рискуем углубиться в перечисление математических понятий теории линейных операторов.

Конечно, физикам приходится отбирать определенные математические понятия для формулировки законов природы, ибо в физике может быть использована лишь часть известных математических понятий. Верно также, что эти понятия не отбирались физиками произвольно из понятий, введенных математиками: во многих случаях, если не в большинстве из них, эти понятия были разработаны физиками независимо, и лишь впоследствии оказывалось, что математики уже давно ввели эти понятия. Однако совсем неверно — хотя это часто и утверждают, — что это случается из-за того, что математики всегда используют наиболее простые возможные представления, которые неизбежно появляются в любом формальном описании. Как мы уже замечали, свои понятия математики выбирают не из-за их простоты — даже последовательности пар чисел далеки от того, чтобы быть простейшими, — а из-за удобства манипулирования с ними, четкости и ясности аргументации на языке этих понятий. Не стоит забывать, что гильбертово пространство квантовой механики является комплексным гильбертовым пространством, скалярное произведение в котором эрмитово. Неискушенному уму комплексные числа не покажутся естественными или простыми, а результаты физических наблюдений сами по себе не могут содержать комплексные числа. Более того, использование комплексных чисел в квантовой механике не является вычислительным трюком прикладной математики; они входят в самую суть формулировки основных законов квантовой механики. Наконец, в последнее время стало ясно, что не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено играть решающую роль в формулировке квантовой теории. Я имею в виду быстро развивающуюся теорию дисперсионных соотношений.

Трудно отделаться от впечатления, что чудо **), представшее перед нами, не менее поразительно, чем то, что разум человека смог связать воедино и без противоречий тысячи аргументов. Это чудо можно сравнить еще с двумя чудесами: существованием законов природы и способностью

---

*) Еще Пифагор утверждал, что природа устроена по математическим законам: «Все вещи суть числа» (ср. В. Гейзенберг, Физика и философия, М., ИЛ., 1963, стр. 48—50 и др.; Философский словарь (перевод с немецкого), М., ИЛ, 1961, стр. 448—449; Б. Рассел, История западной философии, гл. III). (*Прим. перев.*)

**) «В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм, причем определенные аспекты реальности как будто бы в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм» (Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, М., «Мир», 1965). (*Прим. перев.*)

человеческого мышления раскрывать их. Наиболее правдоподобным объяснением независимого формирования математических понятий в физике, как мне кажется, служит утверждение Эйнштейна, что единственным критерием для принятия физических теорий должна быть их красота *). Математические понятия, которые стимулируют мысль бесспорно, обладают красотой. Однако высказывание Эйнштейна в лучшем случае относится к характеру теорий, в которые мы хотим верить, но не имеет отношения к точности, присущей той или иной теории. Поэтому мы займемся именно последним вопросом.

ТАК ЛИ УЖ УДИВИТЕЛЕН УСПЕХ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ?

Возможное объяснение того факта, что физики используют математику для формулировки законов природы, состоит в том, что физики — довольно безответственные люди. Именно поэтому, когда физик обнаруживает взаимосвязь между двумя физическими величинами, которая напоминает связь, хорошо известную из математики, он немедленно приходит к заключению, что найденная им связь тождественна связи, рассмотренной в математике, просто потому, что он не знает никакой другой. Цель приведенного рассуждения состоит отнюдь не в том, чтобы опровергнуть обвинение физиков в известной безответственности. Не исключено, что это обвинение и справедливо. Тем не менее важно подчеркнуть, что математическая формулировка результатов наблюдений физика, часто довольно грубых, приводит в неправдоподобно многочисленных случаях к удивительно точному описанию большого класса явлений. Это обстоятельство показывает, что математический язык следует рассматривать как нечто большее, чем просто язык, на котором мы должны говорить; оно показывает, что математика на самом деле является правильным (подходящим) языком. Рассмотрим несколько примеров.

Первый из них — это часто приводимый случай движения планет. Законы движения падающих тел были довольно хорошо подтверждены опытами, выполненными главным образом в Италии. Эти опыты были в современном понимании не очень точными: частично из-за влияния сопротивления воздуха, частично из-за невозможности измерять в ту эпоху достаточно малые интервалы времени. Тем не менее не вызывает никакого удивления тот факт, что в результате этих исследований итальянский естествоиспытатель выяснил, как движутся тела в атмосфере. И только Ньютон связал закон свободного падения объектов на Земле с движением Луны, заметив, что параболическая траектория камня, брошенного на Земле, и круговая орбита Луны на небе — частные случаи одного и того же математического образа — эллипса. На основе одиночного численного совпадения, установленного в то время весьма приближенно, Ньютон постулировал закон всемирного тяготения. С философской точки зрения закон тяготения, как он был сформулирован Ньютоном, не соответствовал ни тому времени, ни самому Ньютону. С эмпирической точки зрения этот закон был основан на очень ненадежных результатах наблюдения. Математический язык, при помощи которого закон был сформулирован, содержал понятие второй производной. Но те из нас, кто пытался хоть раз в жизни построить соприкасающуюся окружность к некоторой кривой, хорошо знают, что вторая производная — отнюдь не примитивное понятие. Закон тяготения, очень ненадежно установленный Ньютоном (он мог быть проверен Ньютоном на опыте с точностью

*) Ср. с мнением П. А. М. Дирака в его статье «Эволюция физической картины мира», опубликованной в майском номере «Scientific American», 1960 (сокращенный перевод см. в сб. «Над чем думают физики», вып. 3, М., «Наука», 1965). (*Прим. перев.*)

около 4%), оказался правильным с погрешностью менее одной десятитысячной процента и почти что воплотил в себе идею абсолютной точности, так что лишь в самое последнее время физики пытаются новыми средствами выяснить границы применимости этого закона *). Безусловно, пример с законом Ньютона, на который не перестают ссылаться, должен стоять первым в списке фундаментальных законов, сформулированных с точки зрения математика наиболее просто и оказавшихся по своей точности превосходящими всякие разумные ожидания. Повторим наше утверждение в связи с этим примером. Во-первых, этот закон — поскольку в нем появляется *вторая производная — прост лишь для математика, но не для* здравого смысла и даже не для первокурсника, у которого нет математического склада мышления; во-вторых, он представляет собою условный закон с очень ограниченной областью применимости. В нем не содержится никакого объяснения притяжения камней к Земле, которое наблюдал Галилей, ни причин того, что орбита Луны круговая, а не иная, ни причин, по которым Солнце имеет планеты. Объяснение этих начальных условий оставлено геологам и астрономам, у которых осталось, над чем поломать голову.

Вторым примером является обычная, элементарная квантовая механика. Начало ей положил Макс Борн, заметив, что некоторые вычислительные приемы Гейзенберга формально совпадают с правилами матричного исчисления, давно известными математикам. Тогда Борн, Йордан и Гейзенберг предложили заменить значения координат и импульсов классической механики матрицами [6]. Пользуясь правилами матричной механики, они решили несколько в высшей степени идеализированных задач, и их результаты оказались вполне удовлетворительными. Однако в то время нельзя было привести никаких разумных аргументов в пользу того, что разработанная ими матричная механика может оказаться корректной и в более реалистических условиях. Они писали в то время так: «Если бы предложенная здесь механика оказалась правильной в своих существенных чертах, то...» Фактически первым применением их механики к реальной задаче — атому водорода была, спустя несколько месяцев, работа Паули. И это приложение дало результат, согласующийся с опытом. Это было неплохо, но все это еще можно было понять, поскольку правила вычисления Гейзенберга были непосредственным обобщением правил старой теории водородного атома. Чудо произошло лишь тогда, когда матричная механика или математически эквивалентная ей теория (Шрёдингера) была применена к задачам, для которых вычислительные правила Гейзенберга не имели смысла. Правила Гейзенберга предполагали существование решений классических уравнений движения, обладающих определенными свойствами периодичности; однако эти уравнения движения для двух электронов в атоме гелия и тем более для большего числа электронов в более тяжелых атомах попросту не обладают такими свойствами, и правила Гейзенберга к этим случаям не применимы. Тем не менее расчет низшего (основного) уровня гелия, выполненный несколько месяцев спустя Киношитой и Бейсли, согласовался с экспериментальными данными в пределах погрешности наблюдений, которая составляет менее одной десятимиллионной. В этом случае мы воистину «извлекли из этих уравнений нечто такое», чего мы в них «не закладывали».

Это же оказалось справедливым для качественных характеристик «сложных спектров», т. е. спектров более тяжелых атомов. Мне вспоминается разговор с Йорданом, сказавшим мне в то время, когда эти каче-

*) См., например: R. H. Dicke, American Scientist 25 (1959).

ственные характеристики спектров были получены, что отличие правил, полученных из квантовой теории, от эмпирических было бы последним шансом внести изменения в структуру матричной механики. Иными словами, Йордан чувствовал, что, если бы мы неожиданно получили несогласие теории атома гелия с опытом, мы оказались бы по крайней мере на время совершенно бессильными. Теория атома гелия была в то время разработана Келлнером и Хиллераасом. Математический аппарат их теории был достаточно четким и не подлежал изменению; поэтому, не произойди упомянутое чудо с гелием, физика оказалась бы перед лицом кризиса. Разумеется, тем или иным путем физика преодолела бы этот кризис. С другой стороны, ясно, что физика, как она предстает перед нами сегодня, была бы невозможна без непрерывного повторения чудес, подобных чуду с гелием — наиболее поразительному чуду в истории развития элементарной квантовой механики, но, бесспорно, не единственному. Список таких чудес при желании можно было бы продолжить, но нам нужно двигаться дальше. Заметим, впрочем, что квантовая механика не раз достигала почти столь же поразительного триумфа, и это убедило нас в том, что она. как принято говорить, корректна.

В качестве последнего примера напомним квантовую электродинамику — теорию лэмбовского сдвига. В то время как ньютоновская теория тяготения еще имела очевидную связь с опытом, при формулировке матричной квантовой механики опыт был использован лишь в «очищенной», или сублимированной, форме рецептов Гейзенберга. Квантовая теория лэмбовского сдвига, придуманная Бете и разработанная Швингером, была чисто математической теорией, и единственным вкладом эксперимента была проверка существования измеримого эффекта. Согласие с расчетом оказалось лучше одной тысячной.

Предыдущие три примера, число которых можно было бы продолжать почти до бесконечности, должны были продемонстрировать эффективность и точность математической формулировки законов природы на языке таких понятий, с которыми удобно проводить различные манипуляции; при этом законы природы, как оказывается, обладают почти фантастической точностью, хотя и в узко ограниченном диапазоне условий. Я предлагаю называть закономерность, которую иллюстрируют эти примеры, эмпирическим законом эпистемологии (т. е. науки об основах теории познания). Этот закон вместе с принципами инвариантности представляет собой неотъемлемую часть теоретической физики. Без законов инвариантности утверждения теоретической физики не могли бы служить основой для объяснения явлений; но если бы не был верен закон эмпирической эпистемологии, то у нас просто не хватило бы духу совершать открытия, т. е. не было бы достаточных эмоциональных стимулов для успешного изучения законов природы. Д-р. Р. Г. Сакс, с которым я обсуждал эмпирический закон эпистемологии, назвал этот закон догматом веры физиков-теоретиков. Это так и есть на самом деле *). Этот догмат веры, однако, хорошо подкрепляется примерами из практики, куда более многочисленными, чем те три примера, о которых шла речь выше.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТЕОРИЙ В ФИЗИКЕ

Эмпирическая природа предыдущих заключений представляется мне очевидной. Они, несомненно, не являются «логически неизбежными», и нет никакой необходимости для доказательства этого ссылаться

*) В этом месте идеи Вигнера в особенности перекликаются с идеями Эддингтона (A. Eddington. Philosophy of Physical Sciences, Cambridge, Univ. Press, 1939 или Ann. Arbor, 1959).

на их применимость только к весьма незначительной части нашего знания неживого мира. Но было бы абсурдным верить в очевидность того, что существует математически простое выражение для второй производной от координаты, поскольку не существует простых выражений для самой координаты и скорости. Тем более удивительна готовность верить в чудесный дар, содержащийся в эмпирическом законе эпистемологии. Ведь способность человеческого разума «нанизывать» одно за другим 1000 умозаключений и не запутываться в противоречиях, о чем я говорил выше, — столь же чудесный дар.

Каждый эмпирический закон обладает беспокоящим свойством неизвестности границ его применимости. Мы видели, что в окружающем нас мире существуют закономерности событий, которые можно с непостижимой точностью сформулировать на языке математических понятий. С другой стороны, существуют такие аспекты природы, относительно которых мы не допускаем существования строгих закономерностей. Мы называем эти аспекты начальными условиями. Но тогда возникает вопрос: не сольются ли эти различные закономерности, т. е. различные (в том числе и еще не открытые) законы природы, в нечто единое целое или по крайней мере асимптотически будут приближаться к такому слиянию? Альтернативной возможностью является то, что найдутся такие законы природы, которые не имеют ничего общего с другими. Сейчас это справедливо, например, применительно к взаимоотношению законов наследственности и законов физики. Более того, не исключено, что некоторые законы природы будут приводить к противоречивым утверждениям, хотя каждый из них будет вполне справедлив внутри своей ограниченной области применимости. Мы не можем примириться с таким положением дел; иначе наш интерес к разрешению конфликта между теориями может просто угаснуть. Мы можем тогда утратить интерес к «конечной истине», т. е. к картине, которая явилась бы гармоничным слиянием многочисленных картинок, отображающих различные аспекты природы, в нечто целое.

Быть может, полезно проиллюстрировать на примере эти возможности. Сейчас мы имеем в физике две теории поразительной мощи и захватывающего интереса: теорию квантовых явлений и теорию относительности. Эти теории уходят своими корнями в две группы явлений, не имеющих между собой никакой связи. Теория относительности применима к макроскопическим телам, например к звездам. Событие, состоящее в совпадении, т. е. в конечном счете — столкновение, является элементарным событием теории относительности: оно определяет точку в пространстве-времени, либо по крайней мере определяло бы такую точку, если бы сталкивающиеся частицы были бесконечно малыми. Квантовая теория вытекает из явлений микроскопического мира, и с ее точки зрения совпадение или столкновение, даже если оно происходит между частицами точечными, не является элементарным событием и не очень точно локализовано в пространстве-времени. Эти две теории оперируют с различными математическими понятиями — с четырехмерным римановым пространством и с бесконечномерным гильбертовым пространством соответственно. Пока эти две теории не удалось объединить, т. е. не существует такой математической формулировки теории, по отношению к которой обе эти теории являются приближенными. Все физики верят в принципиальную возможность объединения этих двух теорий и в то, что мы рано или поздно придем к этому. Тем не менее вполне возможно себе представить, что никакого объединения этих двух теорий найдено не будет. Приведенный пример иллюстрирует две возможности, о которых шла речь выше, — слияния и неразрешимого противоречия: мыслимы оба варианта. Чтобы получить хотя бы намек на то, какую из этих двух возможностей мы должны ожидать в конечном итоге, можно попробовать отказаться от некоторой небольшой части нынешних знаний и мысленно перенестись на более низкий уровень знания. Если мы обнаружим при этом слияние наших теорий на более низком уровне развития науки, то можно с некоторой уверенностью ожидать, что и на нашем реальном уровне знаний наступит также слияние физических теорий. Если же этот прием приведет нас к взаимно противоречивым теориям, то нельзя ручаться за невозможность устойчивого сохранения противоречивых теорий. Уровень знаний и степень нашего интеллектуального развития изменяются непрерывно, и едва ли относительно малая вариация этих непрерывных переменных может изменить возможную картину мира от несогласованной к гармоничной *).

Этим рассуждениям противоречит тот факт, что некоторые теории, ошибочность которых нам уже известна, дают удивительно точные предсказания. Знай мы немного меньше, множество явлений, которые объясняются этими «ложными» теориями, казалось бы нам достаточно большим для «подтверждения» таких теорий. Однако эти теории оказываются для нас «ложными» только потому, что окончательный анализ показывает их несовместимость с более всеобъемлющей (экспериментальной) картиной мира. К тому же, если существует достаточно много таких «ложных» теорий, то в конце концов должна быть обнаружена их взаимная противоречивость. Аналогично вполне возможно, что теории, которые мы считаем «доказанными» численными опытными проверками, достаточно многочисленными с нашей точки зрения, все-таки ложны, ибо противоречат более общей теории, которой пока еще у нас нет. Если бы это было верно, то мы должны были бы ожидать противоречия между нашими теориями, когда число их начинает превосходить определенный предел и когда они начинают захватывать достаточно обширный круг явлений. Совсем наперекор догмату веры физика-теоретика, о котором шла речь выше, это обстоятельство не может не вызывать у физика «бредовый кошмар».

Рассмотрим несколько примеров «ложных» теорий, которые дают пугающе (в силу их ложности) точное описание некоторых групп явлений. Если не быть излишне строгим можно забыть некоторые экспериментальные частности, связанные с предлагаемыми примерами. Успех первой примитивной теории атома Бора был довольно ограничен; то же самое можно сказать и о птолемеевых эпициклах. Теперь мы находимся в лучшем положении и имеем возможность получить точное описание всех явлений, которые могли описываться уже этими примитивными теориями. Но это уже совсем несправедливо для так называемой теории свободных электронов, которая дает загадочно точное описание многих, если не большинства, свойств металлов, полупроводников и изоляторов. Она объясняет, в частности, тот факт (который никогда не удавалось понять на основе «настоящей теории»), что изоляторы обнаруживают удельное электрическое сопротивление, иногда в 10^{26} раз превосходящее сопротивление металлов. Фактически нельзя найти каких-либо опытных опровержений того, что сопротивление изоляторов в некоторых условиях бесконечно, как это предсказывается теорией свободных электронов. Тем не менее мы убеждены, что теория свободных электронов представляет собою лишь

---

*) Последний абзац был автором написан после больших колебаний. Автор убежден во всяком случае в том, что для дискуссии об эпистемологии он полезен; следует отказаться от идеализированного представления о том, что уровень развития человеческого разума особенно высок по абсолютной шкале. В некоторых случаях может оказаться даже полезным рассматривать достижения, которые оказались бы возможными на интеллектуальном уровне других видов животных. Однако автор понимает, что эти идеи лишь вскользь упомянуты, и поэтому их едва ли можно подвергать серьезному критическому обсуждению.

грубое приближение, которое рано или поздно будет заменено на более подходящий способ описания явлений в твердом теле.

Достигнутые нами успехи позволяют сказать, что положение с теорией свободных электронов тревожное, однако оно вряд ли свидетельствует о непреодолимых противоречиях современных представлений. И все же теория свободных электронов внушает нам сомнения относительно того, должны ли мы безоговорочно принимать численное согласие между теорией и экспериментом как доказательство корректности теории. Мы уже привыкли к таким сомнениям *).

Гораздо больше трудностей и сомнений возникло бы, если бы нам удалось в один прекрасный день разработать теорию сознания, или теоретическую биологию, с той же последовательностью и убедительностью, какой обладают наши теории неживой природы. Менделевские законы наследственности и развитие генетики могут оказаться предвестниками такой биологической теории. Более того, вполне возможно, что удастся найти достаточно абстрактный аргумент, который укажет на существование противоречия между такой теорией и известными принципами физики. Аргумент этот может оказаться столь абстрактным, что будет невозможно разрешить упомянутое противоречие в пользу той или иной теории — даже экспериментально. В такой ситуации наша вера в наши теории была бы сильно подорвана; возникло бы сомнение в реалистичности принимаемых нами понятий. Тогда мы испытали бы глубокое чувство крушения в наших попытках найти то, что я называю «конечной истиной». Довод в пользу принципиальной допустимости такой ситуации сводится к тому, что мы не знаем, почему так хорошо работают наши теории. Ибо их точность не может служить доказательством ни их истинности, ни взаимной согласованности. Автор данной статьи убежден в том, что ситуация, аналогичная этой, имеет место при сопоставлении современных законов наследственности и физики.

Позвольте мне все же закончить более оптимистически. Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны. Мы должны испытывать чувство благодарности за этот дар. Следует надеяться, что он не покинет нас и в будущих исследованиях и что он будет — хорошо это или плохо — развиваться к нашему большому удовлетворению, а быть может, и к нарастающему беспокойству, расширяя область познания окружающего нас мира.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Schrödinger, Über Indeterminismus in der Physik, J. A. Barth, Leipzig, 1932; W. Dubislav, Naturphilosophie, Junker und Dünnhaupt, Berlin, 1933, Teil 4.
2. E. P. Wigner, Invariance in Physical Theory, Proc. Amer. Philos. Soc. **93**, 521 (1949).
3. E. P. Wigner, The Limits of Science, Proc. Amer. Philos. Soc. **94**, 422 (1950); H. Margenau, The Nature of Physical Reality, McGraw-Hill, N.Y., 1950, Ch. 8.
4. П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., ИЛ, 1960 (пер. 4-го изд.).
5. Дж. Нейманн, Математические основы квантовой механики, М., «Наука», 1964.
6. M. Born, P. Jordan, Über der Quantum Mechanik, Zs. Phys. **34**, 858 (1925); M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, Über der Quantum Mechanik (Teil 2), Zs. Phys. **35**, 557 (1926) (см. особенно стр. 558).

*) Л. Д. Ландау однажды очень четко сказал: «По принципу Бора согласие теории с экспериментом само по себе ничего не означает». (*Прим. перев.*)