1968 г. Декабрь *Том 96, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

НОВЫЕ ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

535.8:621.317.757.32

ИЗМЕРЕНИЕ СПЕКТРОВ ФУРЬЕ ДВУМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. С. Шестов, Е. О. Федорова, В. Ф. Захаренков, Н. А. Ставицкая

I. ВВЕДЕНИЕ

Решение многих теоретических и практических задач в оптике, радиотехнике, теории связи, теории обнаружения и других отраслях науки и техники основано на использовании методов фурье-анализа. Среди разнообразных применений этих методов можно выделить большую группу задач, связанных с необходимостью осуществления анализа двумерных функций.

В оптике с помощью двумерных преобразований Фурье дается теоретическое обоснование процессов образования изображения, его передачи и способов воздействия на изображение [1-3]. Формулы преобразований позволяют, например, представить в математической форме явления дифракции, с помощью которых строится теория изображения, а именно установить аналитическую связь между распределением амплитуд световых колебаний на зрачке и распределением амплитуд в изображении. Существование такой связи открывает широкие возможности для аподизации — воздействия на изображение путем изменения распределения амплитуд на зрачке [4].

Изучение аподизирующего действия различных ограничивающих зрачок диафрагм, фильтров с переменным пропусканием и других устройств сводится к нахождению распределения амплитуд в дифракционном изображении. Эта задача, равно как и обратная — определение формы аподизирующего фильтра по заданной дифракционной картине,— решается с помощью прямого и обратного преобразований Фурье. Аналогичные задачи решаются и в радиотехнике, когда по заданному распределению токов в раскрыве антенны вычисляется форма диаграммы направленности антенны или по заданной диаграмме — распределение токов [5].

Двумерные преобразования Фурье оказываются весьма полезными при рассмотрении процесса образования изображения протяженных объектов [3]. В этом случае используется свойство преобразований, согласно которому преобразование функции, описывающей распределение освещенности в изображении, равно произведению преобразований функций, характеризующих яркость объекта и пятно рассеяния оптической системы.

Широкое применение фурье-анализ находит при проектировании оптимальных оптических систем обнаружения [6,7]. В этом случае необходимо знание пространственно-частотных спектров Фурье объектов,

подлежащих обнаружению, и энергетических пространственно-частотных спектров случайных полей распределения яркости, на фоне которых ведется обнаружение. На основе данных о пространственно-частотных спектрах изображений знаков и фигур ведется разработка систем опознавания образов [8].

В телевидении для определения частотных и статистических характеристик телевизионных сигналов осуществляется спектральный анализ телевизионных изображений [9-11].

Наконец, в основе новых методов оценки фотографических систем лежит использование так называемых «частотно-контрастных характеристик», определяемых также с помощью преобразований Фурье [12].

Этот перечень можно было бы продолжить, однако и сказанного достаточно, чтобы был понятен наблюдающийся в последнее время значительный интерес к развитию аппаратурных способов осуществления двумерных преобразований Фурье.

Для осуществления двумерных преобразований Фурье в любой из перечисленных выше задач необходимо иметь возможность определить тем или иным способом значения двумерных интегралов вида

$$f(P, Q) = \iint\limits_{(S)} f(X, Y)\, e^{-j(PX+QY)}\, dX\, dY, \tag{1}$$

где $f(X, Y)$ — действительная функция координат X и Y, заданная на площади S. В случае, когда X и Y — пространственные координаты, функция $f(P, Q)$ называется *двумерным пространственно-частотным спектром Фурье функции* $f(X, Y)$, а P и Q являются пространственными волновыми числами, соответствующими осям X и Y. Функция $f(P, Q)$ — комплексная, так как содержит информацию о сдвигах фаз отдельных гармонических составляющих относительно точки внутри S, принятой за начало координат. Разлагая в (1) экспоненциальный множитель по формуле Эйлера, $f(P, Q)$ можно представить в виде показательной функции:

$$f(P, Q) = |f(P, Q)|\, e^{j\varphi(P, Q)}, \tag{2}$$

где модуль спектра

$$|f(P, Q)| = \sqrt{J^2_{\cos}(P, Q) + J^2_{\sin}(P, Q)}, \tag{3}$$

аргумент (фаза) спектра

$$\varphi(P, Q) = -\operatorname{arctg} \frac{J_{\sin}(P, Q)}{J_{\cos}(P, Q)}, \tag{4}$$

а, в свою очередь, косинусная компонента фурье-разложения

$$J_{\cos}(P, Q) = \iint\limits_{(S)} f(X, Y) \cos(PX + QY)\, dX\, dY \tag{5}$$

и синусная компонента

$$J_{\sin}(P, Q) = \iint\limits_{(S)} f(X, Y) \sin(PX + QY)\, dX\, dY. \tag{6}$$

В некоторых задачах необходимо вычислять квадрат спектра Фурье

$$[f(P, Q)]^2 = f(P, Q)\, f^*(P, Q) = |f(P, Q)|^2; \tag{7}$$

здесь $f^*(P, Q)$ означает сопряженную функцию по отношению к $f(P, Q)$. В этом случае информация о фазе теряется.

Вычислить аналитически двумерный спектр $f(P, Q)$ по заданной функции $f(X, Y)$ простыми средствами можно лишь в том случае, если

ее удается аппроксимировать произведением достаточно простых функций, зависящих от одной координаты; для функций произвольно сложного вида, и, тем более, когда $f(X, Y)$ отображает случайное поле, вычисление спектра $f(P, Q)$ даже с помощью электронных вычислительных машин представляет большие трудности или становится невозможным. В то же время эта задача сравнительно просто решается с помощью оптико-электронных устройств, анализирующих фотографические изображения двумерных функций. Оптические системы по своей природе обладают двумя степенями свободы (в этом их существенное преимущество перед электронными, у которых только одна степень свободы) и потому позволяют производить интегрирование одновременно по двум переменным, т. е. по площади.

Примером оптической системы, осуществляющей двумерное преобразование Фурье, может служить установка для наблюдения дифракции Фраунгофера [3,13], состоящая из источника когерентного света, коллиматора и объектива. Помещая анализируемое изображение между коллиматором и объективом, в фокальной плоскости объектива можно наблюдать дифракционную картину, распределение освещенности в которой пропорционально квадрату модуля спектра Фурье исследуемого изображения. Основной методический недостаток этого способа заключается в невозможности измерения фаз спектра. Практически же он мало удобен, так как требует очень больших экспозиций для фотографирования дифракционной картины [14] или высокочувствительных регистрирующих фотоэлектрических устройств, или, наконец, применения мощных световых излучателей — лазеров. Регистрация двумерных спектров Фурье возможна также голографическими методами [15,16], причем голограмма спектра содержит информацию о модулях и фазах гармонических составляющих, однако пока неизвестны способы раздельного извлечения этой информации из голограмм.

Другие методы основаны на прямом физическом осуществлении интегрирования по формуле (1). Суть их сводится к тому, что тем или иным оптическим устройством на анализируемом фотографическом изображении создается периодическое распределение освещенности и затем прошедший через изображение поток света, пропорциональный произведению распределения освещенности на распределение коэффициента пропускания по изображению, с помощью линзы собирается на фотоприемник (интегрируется). Очевидно, что в этом случае используется источник некогерентного излучения.

Первые образцы фотоэлектрических спектроанализаторов [17,19] были предназначены для анализа одномерных функций, однако уже в этих приборах исследуемая одномерная функция $f(x)$ представлялась по сути дела «двумерным» способом:

а) либо на фотопластинке (фотопленке) таким образом, что коэффициент пропускания $T_п$ в каждой точке вдоль оси x изменялся пропорционально значению функции одинаково для всех значений y, т. е.

$$T_п(x, y) = T_п(x) = c_1 f(x) \quad \text{при} \quad a < x < b, \quad 0 < y < c$$

(рис. 1, *а*);

б) либо в виде транспаранта из непрозрачного материала с вырезом соответствующим анализируемой функции; при этом

$$T_п(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < f(x), \\ 0, & y < 0, \ y > f(x) \end{cases}$$

(рис. 1, *б*).

Способы создания гармонического распределения освещенности были различны. Например, в одном из первых спектроанализаторов [17] использовалась длинная фотолента с набором изображений гармонических функций кратной частоты, изготовленных по способу а). В другом приборе [18] использовалась фотолента с изображением гармонической функции, частота которой плавно менялась вдоль ленты. Коэффициент пропускания фотоленты с учетом постоянной составляющей описывается выражением

$$T_{\text{г}}(x, y) = c_2 \cos(px + \theta) + c_3.$$

Поток света, собранный на фотоприемник, пропорционален двумерному интегралу от произведения $T_{\text{п}}(x, y)\, T_{\text{г}}(x, y)$:

$$F_\theta(p) = c_4 \int_0^c \int_a^b T_{\text{п}}(x, y)\, T_{\text{г}}(x, y)\, dx\, dy = c_1 c_2 c_4 \int_a^b f(x) \cos(px + \theta)\, dx + c_5.$$

Измеряя $F_\theta(p)$ при значениях $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, можно было исключить постоянные и найти синусную и косинусную составляющие фурье-преобразования функции $f(x)$. Очевидно, что такой же результат получится, если изображение функции $f(x)$ будет изготовлено по способу б). В этом случае

$$F_\theta(p) = c_4 \int_0^{f(x)} \int_a^b T_{\text{п}}(x, y)\, T_{\text{г}}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= c_4 \int_a^b \int_0^{f(x)} T_{\text{г}}(x, y)\, dx\, dy = c_2 c_4 \int_a^b f(x) \cos(px + \theta)\, dx + c_6.$$

Технически более совершенный способ создания гармонического распределения освещенности описан в работах [19] и [20], где использована оптическая система, состоящая из стеклянного диска с гармоническим растром, узкой щели и системы сферических и цилиндрических линз. Изменение периода распределения освещенности на образце осуществлялось поворотом диска, положение диска по отношению к оси вращения определялось значением θ. В [21,22] описаны способы создания гармонической освещенности с помощью двух наложенных друг на друга под некоторым углом периодических растров.

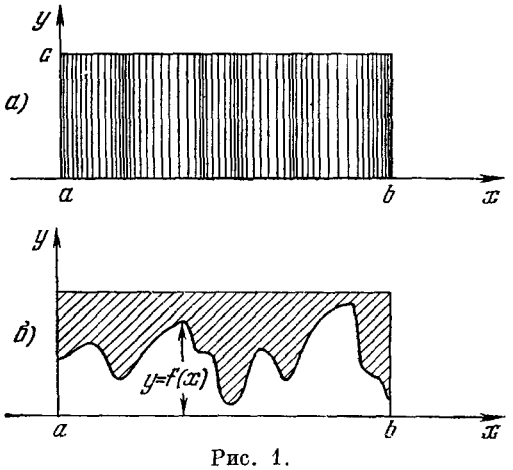

Рис. 1.

Как уже отмечалось, в последние годы, в основном в связи с развитием методов статистического анализа случайных полей, возникла необходимость в аппаратуре, осуществляющей анализ Фурье двумерных функций.

Двумерная функция также может быть задана в виде фотографического изображения, изготовленного по способу а), но в этом случае коэффициент пропускания $T(x, y)$ является функцией двух координат:

$$T(x, y) = cf(x, y),$$

и ее спектр есть соответственно функция двух координат (p и q). В «двумерных» спектроанализаторах, так же как и в «одномерных», создается периодическое распределение освещенности на анализируемом образце; различные значения волновых чисел p и q получаются изменением длины волны этого распределения и вращением образца относительно направления его пространственной ориентации. По сути дела принципиальное отличие «двумерных» спектроанализаторов от «одномерных» и состоит в том, что в них предусмотрена возможность вращения образцов. Описанные в литературе двумерные спектроанализаторы, как и прежде, различаются способами создания периодического распределения освещенности. Так, помимо схем с гармоническими растровыми осветителями [23], в последние годы разработаны приборы с более совершенными, хотя и более сложными осветителями. Например, в некоторых из них в качестве осветителя используется интерферометр Майкельсона [24-26]. Постоянство контраста в картине распределения интерференционных полос при изменении частоты полос и возможность без дополнительной перестройки оборудования перекрыть большую полосу частот — их основные преимущества. Однако достаются они дорогой ценой: в приборе необходимо применять квазимонохроматические источники света, что неизбежно обусловливает малые потоки света на выходе интерферометра и, как следствие, необходимость применения высокочувствительных регистрирующих элементов; подобные приборы весьма чувствительны к температурным и механическим колебаниям, сложны в настройке и юстировке.

В [27,28] описаны приборы с поляризационным осветителем. Он состоит из источника квазимонохроматического света, двух призм Волластона, размещенных между анализатором и поляризатором, и двух полуволновых пластин. Призмы укрепляются во вращающихся в противоположные стороны оправах. Периодическая картина темных и светлых полос образуется за счет интерференции составляющих обыкновенного и необыкновенного лучей, выделенных вторым поляризатором (анализатором); пространственная частота полос изменяется при изменении угла взаимного разворота оптических осей призм Волластона. Как и в предыдущем случае, потоки света на выходе поляризационного осветителя не могут быть большими и, кроме того, с помощью призм Волластона невозможно создать интерференционную картину больших размеров. Подобные осветители наиболее пригодны для анализа мелкоструктурных распределений, например для исследования спектра зернистости фотоэмульсий.

В [23] описана схема устройства, в котором пространственно-частотный спектр измеряется с помощью развертки изображения длинной узкой щелью и последующего анализа сигнала с выхода фотоэлемента электронным анализатором. Оптико-механические детали подобной установки мало отличаются от растровой, но при этом требуется более сложное электронное устройство для выделения сигнала.

Названными статьями по сути дела исчерпывается библиография по двумерным спектроанализаторам. Несмотря на то, что опубликованы различные схемы спектроанализаторов, действующая аппаратура, как можно судить по этим материалам, имеется, по-видимому, лишь в виде единичных экземпляров макетов приборов, устройство которых и результаты измерений, выполненных с их помощью, мало известны. Кроме того, как правило, статьи посвящены описанию приборов, предназначенных для решения какой-либо одной интересующей авторов задачи; поэтому они не дают представления о широких возможностях использования двумерных спектроанализаторов в самых различных физико-технических исследованиях.

Указанные обстоятельства послужили причиной того, что в настоящем обзоре мы сочли необходимым дать подробное описание осуществленного нами двумерного спектроанализатора с растровым осветителем и результатов измерений, иллюстрирующих возможные применения подобных приборов. На примере растрового спектроанализатора удается наиболее просто и наглядно показать принципиальные основы оптико-электронных способов осуществления двумерных преобразований Фурье, не загромождая изложение рассмотрением особенностей схем осветителей, основанных подчас на весьма тонких оптических явлениях.

II. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ РАСТРОВОГО ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА

Как уже отмечалось, в оптико-электронных спектроанализаторах подвергаются обработке фотографические изображения двумерных функций распределения яркости, распределения токов и т. п. Однако это не ограничивает их возможности, поскольку, выполняя ряд условий, от получаемых с помощью спектроанализаторов спектров изображений можно перейти к спектрам самих функций. Для этого прежде всего необходимо, чтобы линейные размеры в координатах X и Y отличались только масштабом (γ) от размеров на изображении в координатах x и y соответственно, т. е. должны выполняться условия

$$x=\gamma X \quad \text{и} \quad y=\gamma Y.$$

Далее, зависимость между величинами функций $f(X, Y)$ в точке (X, Y) и $f(x, y)$ в соответствующей точке (x, y) должна быть линейной, т. е. если $f(x, y)$ есть фотография на пластинке, то коэффициент пропускания $T(x, y)$ фотографии и функция $f(X, Y)$ должны быть связаны соотношением

$$T(x, y)=\alpha f(X, Y)+\beta, \tag{8}$$

причем β должно быть мало. В дальнейшем будем считать $\beta=0$. При этих условиях спектр исходной функции

$$f(P, Q)=\frac{1}{\alpha\gamma^2} f(p, q), \tag{9}$$

где $f(p, q)$ — двумерный пространственно-частотный спектр изображения, p и q — пространственные волновые числа, соответствующие осям x и y, причем

$$p=\frac{P}{\gamma} \quad \text{и} \quad q=\frac{Q}{\gamma},$$

α — постоянная.

Не обсуждая в настоящем обзоре способы линейной регистрации функций $f(X, Y)$ на фотографических пластинках, перейдем к рассмотрению принципа действия растрового спектроанализатора.

Наиболее простое конструктивное оформление имеет спектроанализатор, предназначенный для измерений модуля (или квадрата модуля) пространственно-частотного спектра Фурье изображений детерминированных функций, когда интерес представляет спектр функции в целом, и ее среднего значения и переменной части. К этому случаю, в частности, относятся дифракционные задачи в оптике и радиотехнике, проблемы аподизации с помощью фильтров, не вносящих фазовых сдвигов, и др.

Рассмотрим действие оптической схемы спектроанализатора, изображенной на рис. 2 *). Свет от источника *1* с помощью осветителя, состоящего из конденсора *2* и узкой длинной щели *3*, проходит через растр *4* с периодическим распределением прозрачности и в виде системы чередующихся светлых и темных полос попадает на анализируемый образец *5*. Образец укреплен во вращающейся вокруг оптической оси кадровой

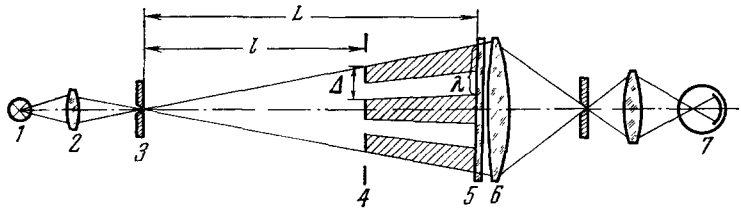

Рис. 2.

рамке. Прошедший через образец световой поток собирается конденсором *6* на фотоэлемент *7*. Конденсор устанавливается в такое положение, при котором на катод фотоэлемента переносится изображение щели осветителя: в этом случае при любых положениях образца и растра не будет происходить смещение изображения по фотокатоду. Для уменьшения влияния на результат измерения аберраций конденсора и неоднородности распределения чувствительности по фотокатоду иногда используется еще промежуточная диафрагма и дополнительный конденсор, как это показано на рис. 2.

Найдем выражение для потока, направленного конденсором на фотоэлемент. Для этого введем в плоскости образца две системы координат: неподвижную $\xi O\eta$, связанную с неподвижным основанием прибора, и подвижную xOy, связанную с кадровой рамкой, в которой укрепляется образец. Подвижная система координат может (вместе с рамкой) вращаться относительно неподвижной вокруг общего центра, совпадающего с оптической осью (рис. 3).

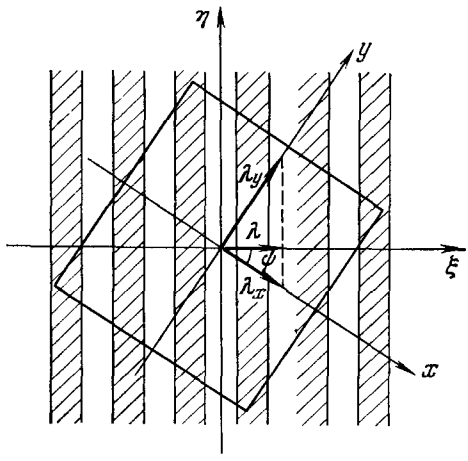

Рис. 3.

Растр, изготовленный в виде периодической решетки, состоящей из системы прозрачных и непрозрачных полос, расположенных параллельно щели осветителя, может перемещаться вдоль оптической оси между щелью и кадровой рамкой. В зависимости от шага штриховки растра Δ (рис. 2) и его положения, определяемого расстояниями от щели до растра l и до образца L, на образце получится система темных и светлых полос определенной ширины. Закон распределения освещенности в этой периодической системе полос будет выражаться сложной функцией, вид которой, помимо указанных геометрических факторов, зависит от влияния полутеней (из-за конечной ширины щели), дифракции света на штрихах растра, ошибок нанесения штрихов и др. Представим эту функцию

*) Эта схема была разработана Н. С. Шестовым в 1961 г. независимо от Юберойя в США, опубликовавшего аналогичную схему в 1962 г. [23].

рядом Фурье в неподвижной системе координат, учтя, что штрихи параллельны оси η:

$$E(\xi, \eta) = E_0 + E_1 \cos(k\xi) + \ldots + E_i \cos(ik\xi) + \ldots \tag{10}$$

Здесь $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — пространственное волновое число, E_0 — среднее значение освещенности, E_i — амплитуда i-й гармоники.

Введем теперь движение растра в направлении, перпендикулярном оптической оси (и полосам растра) с постоянной скоростью $v_р$. Тогда для движущегося по образцу распределения освещенности получим выражение

$$E(\xi, \eta, t) = E_0 + E_1 \cos(k\xi + \omega t) + E_2 \cos 2(k\xi + \omega t) + \ldots, \tag{11}$$

где ω — круговая временна́я частота.

Для получения двумерных пространственно-частотных спектров предусматривается возможность поворачивать образец (с помощью вращающейся рамки) относительно направления освещающих полос. Вместе с образцом поворачивается подвижная система координат. Координаты x и y подвижной и ξ неподвижной систем связаны преобразованием

$$\xi = x \cos\psi + y \sin\psi,$$

где ψ — угол разворота подвижных осей относительно неподвижных (см. рис. 3).

Распределение освещенности в подвижных осях

$$E(x, y, t) = E_0 + E_1 \cos(px + qy + \omega t) + \ldots, \tag{12}$$

где обозначено

$$k \cos\psi = p, \quad k \sin\psi = q.$$

Подставляя значение k и вводя обозначения

$$\frac{\lambda}{\cos\psi} = \lambda_x \text{ и } \frac{\lambda}{\sin\psi} = \lambda_y,$$

получим

$$p = \frac{2\pi}{\lambda_x} \text{ и } q = \frac{2\pi}{\lambda_y}.$$

Из рис. 3 следует, что λ_x и λ_y — проекции длины волны λ распределения освещенности на оси x и y и, следовательно, p и q имеют смысл пространственных волновых чисел, соответствующих осям x и y.

Собранный конденсором (проинтегрированный) световой поток пропорционален произведению распределения освещенности $E(x, y, t)$ на распределение коэффициента пропускания $T(x, y)$ по образцу:

$$F(p, q, t) = \iint\limits_{(S)} E(x, y, t)\, T(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= E_0 \iint\limits_{(S)} T(x, y)\, dx\, dy + E_1 \iint\limits_{(S)} T(x, y) \cos(px + qy + \omega t)\, dx\, dy + \ldots, \tag{13}$$

где S — площадь анализируемого образца. Первый член ряда представляет среднее значение потока. В подынтегральном выражении второго члена разложим косинус суммы на составляющие и получим

$$F_1(p, q, t) = E_1 \Big[\cos\omega t \iint\limits_{(S)} T(x, y) \cos(px + qy)\, dx\, dy -$$

$$- \sin\omega t \iint\limits_{(S)} T(x, y) \sin(px + qy)\, dx\, dy\Big]. \tag{14}$$

С учетом обозначений, принятых в (2)—(6), выражение (14) примет вид

$$F_1(p, q, t) = E_1 [J_{\cos}(p, q) \cos \omega t - J_{\sin}(p, q) \sin \omega t] = \\ = E_1 | f(p, q) | \cos [\omega t - \varphi(p, q)]. \quad (15)$$

Здесь $|f(p, q)|$ — искомый модуль пространственно-частотного спектра Фурье, $\varphi(p, q)$ — фаза спектра.

Сигнал на выходе фотоэлемента, имеющего чувствительность ε, равен

$$U = \varepsilon F(p, q, t).$$

Он содержит постоянную составляющую и переменные составляющие с частотами ω, 2ω, 3ω... Заметим, что амплитуда второй гармоники сигнала пропорциональна модулю спектра Фурье для второй пространственной гармоники распределения освещенности, амплитуда третьей гармоники сигнала — модулю спектра для третьей пространственной гармоники и т. д. Если после фотоэлемента применить узкополосный усилитель, настроенный на частоту $f = \omega/2\pi$ с коэффициентом усиления K, то сигнал на выходе такого усилителя будет

$$U_1(t) = K\varepsilon F_1(p, q, t) = K\varepsilon E_1 | f(p, q) | \cos(\omega t - \varphi), \quad (16)$$

так как постоянная составляющая и все гармоники, кроме первой, не будут пропущены фильтром.

Таким образом, при движении растра сигнал на выходе резонансного усилителя будет изменяться по гармоническому закону, причем амплитуда колебания пропорциональна модулю спектра Фурье исследуемого образца, закрепленного в кадровой рамке.

Нетрудно показать очень важное свойство растровой схемы, заключающееся в том, что частота первой гармоники сигнала на выходе приемника не зависит от положения растра. Если λ — длина волны распределения освещенности в плоскости образца, а T — период колебаний освещенности в данной точке изображения во времени, то, рассматривая скорость перемещения v картины освещенности по образцу как скорость перемещения линии постоянной фазы, получим

$$| v | = \frac{\lambda}{T}.$$

Из рис. 2 находим

$$\lambda = \Delta \frac{L}{l} \quad \text{и} \quad v = v_{\text{р}} \frac{L}{l},$$

откуда

$$T = \frac{\Delta}{| v_{\text{р}} |} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{| v_{\text{р}} |}{\Delta}.$$

При условии постоянства скорости $v_{\text{р}}$ движения растра $\omega = \text{const}$. Благодаря этому свойству растровой схемы можно воспользоваться преимуществами узкополосного усиления переменного тока и, что особенно важно, применять растры с любым (не обязательно гармоническим) периодическим распределением прозрачности.

Двумерный спектр в общем случае является поверхностью сложной формы. Представление о виде этой поверхности в зависимости от сложности ее можно получить по большему или меньшему числу значений спектра в дискретных точках (дискретных значениях p и q) или по набору радиальных (угол поворота ψ фиксируется, растр перемещается вдоль оптической оси) или круговых (фиксируется положение растра, образец

вращается вокруг оптической оси) сечений спектра (рис. 4). Заметим, что вращение образца достаточно осуществлять в интервале от 0 до 180°, так как двумерный спектр Фурье есть функция симметричная относительно начала координат:

$$f(p, q) = f^*(-p, -q) \quad \text{и} \quad f(p, -q) = f^*(-p, q),$$

откуда следует

$$|f(p, q)| = |f(-p, -q)|, \qquad |f(p, -q)| = |f(-p, q)|$$

и

$$\varphi(p, q) = -\varphi(-p, -q), \qquad \varphi(p, -q) = -\varphi(-p, q).$$

Для проведения абсолютных измерений прибор предварительно калибруется по образцам с известными спектрами.

Основной причиной, ограничивающей технические возможности растрового спектроанализатора, является обусловленное дифракцией света на штрихах растра изменение контраста в распределении освещенности, а следовательно, и амплитуды первой гармоники сигнала, в зависимости от положения растра на оптической оси. Влияние дифракции можно оценить, используя выражение для отношения полуширины центрального дифракционного максимума $r_д$ прозрачной полосы к длине волны λ:

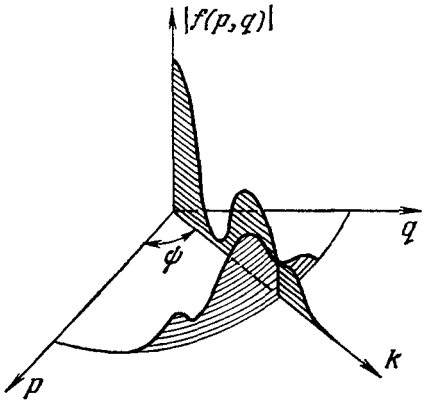

Рис. 4.

$$\frac{r_д}{\lambda} = 2\frac{(L-l)\,l}{L}\frac{\lambda_{св}}{\Delta^2}.$$

Задание допустимого относительного уширения $(r_д/\lambda)$ и шага растра Δ определяет максимальный размер L, а следовательно, и область пространственных частот, которую можно перекрыть в данном приборе. Очевидно, для уменьшения влияния дифракции выгодно использовать источники света с интенсивным коротковолновым излучением $\lambda_{св}$ и растры с большим шагом. При проведении особо точных измерений можно, анализируя образец с известным спектром, найти для всех значений l поправочные коэффициенты и учесть их при обработке записей спектров. Следует заметить, что от этого ограничения свободны интерференционные методы создания периодического распределения освещенности.

III. ОПИСАНИЕ СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Изложенный принцип действия был положен в основу осуществленного нами растрового спектроанализатора. Общий вид прибора показан на фотографии рис. 5. Конструктивное оформление прибора давало возможность осуществлять анализ изображений, полученных на фотографических пластинках и пленках размером 60 × 60 *мм*². Образцы укреплялись в кадровую рамку, которая могла поворачиваться вокруг оптической оси в пределах 180°. Стеклянный растр с прямоугольным профилем штрихов с периодом $\Delta = 0{,}4$ *мм* плавно перемещался вдоль оптической оси между щелью осветителя (ширина щели 0,05 *мм*) и кадровой рамкой в пре-

делах от 10 до 180 *мм*, что соответствовало диапазону изменения пространственной длины волны λ от 0,6 до 11,2 *мм* или волновых чисел k — от 10,8 до 0,56 *рад/мм*.

Перемещение растра в направлении, перпендикулярном оптической оси, осуществлялось с помощью кулачка с профилем в виде двухсторонней спирали Архимеда. Такой кулачок обеспечивает постоянную скорость движения растра при малых затратах времени на изменение направления движения. Скорость движения растра $v_р$ равнялась $\sim$100 *мм/сек*.

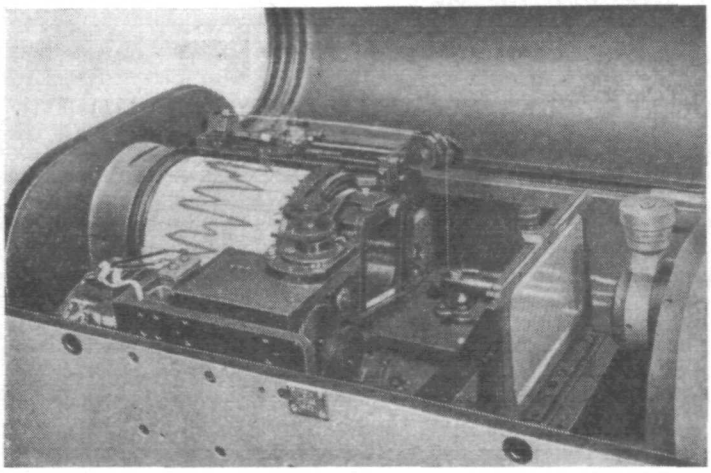

Рис. 5.

Спектры регистрировались на бумажных бланках специального встроенного в прибор самописца. Вращение барабана самописца по желанию могло осуществляться синхронно либо с вращением кадровой рамки (круговые сечения), либо с перемещением растра вдоль оптической оси (радиальные сечения). В первом случае спектр регистрировался в зависимости от угла поворота ψ в масштабе 0,85 *мм/град*, во втором случае спектр был функцией волнового числа k *рад/мм*; масштаб записи составлял 31,9 *мм/(рад/мм)*.

Применение линейного и квадратичного детекторов, а также логарифмического усилителя обеспечило возможность регистрации модулей спектров в линейной, квадратичной и логарифмической шкалах. Относительная погрешность измерений на этом макете составляла 1—2%.

Для иллюстрации работы спектроанализатора рассмотрим записи спектров простейших детерминированных функций, представляющих собой диафрагмы (зрачки) различной формы с постоянным значением пропускания $T(x, y)$ в пределах отверстия диафрагмы.

Возвращаясь к формуле (14), найдем выражение для спектра таких детерминированных функций, имея в виду постоянство T ($T(x, y) = \overline{T} = \text{const}$):

$$F_1(p, q, t) = E_1\overline{T}\left[\cos\omega t \iint\limits_{(S)} \cos(px+qy)\,dx\,dy - \right.$$

$$\left. - \sin\omega t \cdot \iint\limits_{(S)} \sin(px+qy)\,dx\,dy\right] = E_1\,|f(p, q)|\cos(\omega t - \varphi),$$

т. е. вид спектра $|f(p, q)|$ в этом случае будет определяться только формой контура, ограничивающего площадь S, по которой ведется интегрирование. Если S симметрична относительно осей x и y, то, учитывая, что интегралы от нечетных функций в симметричных пределах равны нулю, получим

$$f(p, q) = \overline{T} \iint\limits_{(S)} \cos(px + qy)\, dx\, dy. \tag{17}$$

Решение этого уравнения, например, для случая, когда контур есть окружность диаметром D_1, дает

$$|f(k)|^2 = S\left[\frac{2J_1(z_1)}{z_1}\right]^2, \tag{18}$$

где S — площадь круга, $J_1(z_1)$ — функция Бесселя первого рода,

$$z_1 = k\frac{D_1}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{D_1}{2},$$

k — пространственное волновое число. В то же время известно, что освещенность $E(\psi)$ в фокальной плоскости объектива, создаваемая пучком лучей, дифрагировавших под углом ψ, на круглом отверстии диаметром D_2, описывается выражением

$$E(\psi) = E_0\left[\frac{2J_1(z_2)}{z_2}\right]^2, \tag{18'}$$

где E_0 — освещенность в центре дифракционной картины,

$$z_2 = k_{\text{св}}\frac{D_2}{2}\sin\psi \cong \frac{2\pi}{\lambda_{\text{св}}}\frac{D_2}{2}\frac{r}{F},$$

$\lambda_{\text{св}}$ — длина световой волны, r — расстояние от центрального максимума, F — фокусное расстояние объектива. Из сравнения (18′) с (18) видно, что $|f(k)|^2$ с точностью до постоянного множителя описывает распределение освещенности в дифракционной картине, наблюдаемой от отверстия круглой формы. Приравняв z_1 и z_2, можно найти масштабный множитель γ:

$$k\frac{D_1}{2} = k_{\text{св}}\frac{D_2}{2}\frac{r}{F},$$

откуда

$$\gamma = \frac{k_{\text{св}}}{k} = \frac{D_2}{D_1}\frac{r}{F}. \tag{19}$$

Можно показать [4], что такое же соотношение между аргументами функций, описывающих спектры и вид дифракционной картины, будет справедливо и для зрачков любых других форм. Таким образом, записи спектров изображений зрачков дают возможность однозначно судить о виде дифракционной картины от таких зрачков.

На рис. 6 представлены записи радиальных сечений спектров одного и двух прямоугольных зрачков (щелей) разных размеров. Записи сделаны в логарифмической шкале. Логарифм модуля спектра двух щелей одинаковой ширины $2x_0$, расположенных на расстоянии $2d$, удобно представить в виде

$$\lg|f(k)| = \lg c + \lg\left(\frac{1}{|k|}\right) + \lg|\sin kx_0| + \lg\left|\sin\left(kd + \frac{\pi}{2}\right)\right|. \tag{20}$$

Здесь постоянная c зависит от размера щелей и коэффициента усиления усилителя. Для удобства сопоставления спектры на одном графике записывались при одинаковых значениях c.

В выражении (19) член $\lg\left(\frac{1}{|k|}\right)$ не зависит от размера и числа щелей и всегда служит огибающей спектров. На графиках огибающая (пунктирная линия) построена по расчетным данным.

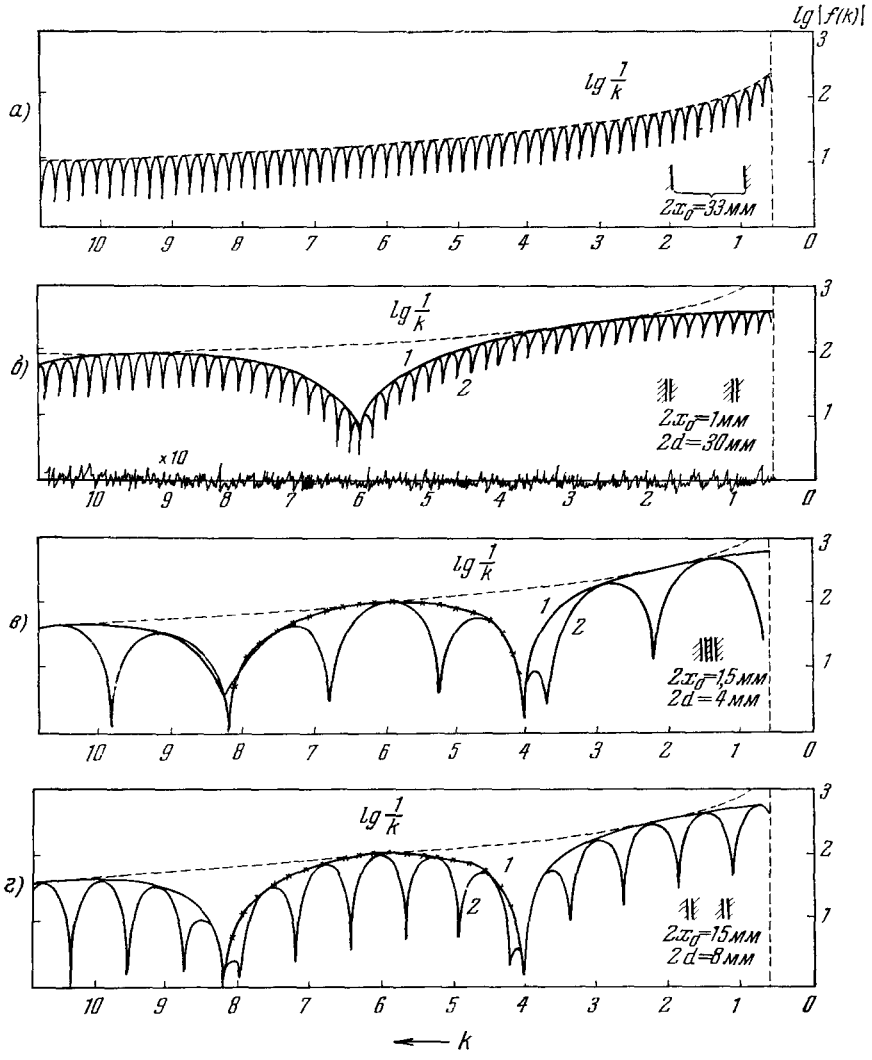

Рис. 6.

Добавляя к огибающей следующий член, мы получим вид спектра одной щели (кривые *1*) и, учтя последний член, получим спектр двух щелей (кривые *2*). На втором сверху графике, кроме того, приведена запись шума аппаратуры при десятикратном увеличении усиления.

Аналогичные спектры одного круглого отверстия (кривая *1*) и двух таких отверстий (кривая *2*) показаны на рис. 7. В этом случае огибающая следует закону $\lg\left(\frac{1}{\sqrt{|k|^3}}\right)$.

В первом варианте спектроанализатора конструктивные особенности определили минимальное значение $k = 0{,}56$ *рад/мм* ($\lambda = 11{,}2$ *мм*) при

периоде растра $\Delta = 0{,}4$ *мм*, вследствие чего при больших размерах диафрагм часть спектра вблизи центрального максимума может быть не зарегистрирована, но при этом будут хорошо представлены высокие порядки спектра (смотри, например, рис. 6, *а*). Подвергая анализу диафрагмы той же формы, но меньшей ширины, можно записать более подробно область спектра вблизи центрального максимума (рис. 6, *б*, кривая *1*);

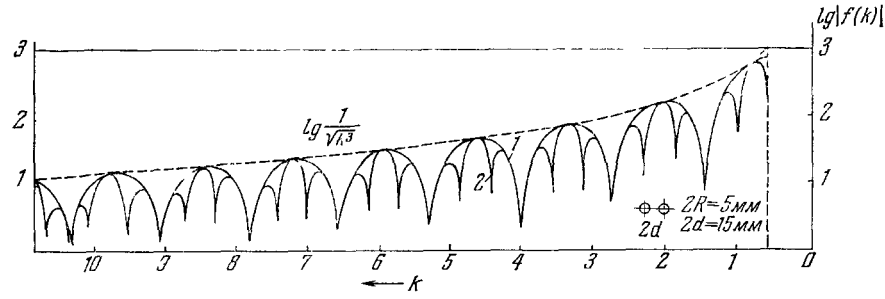

Рис. 7.

принципиально начало записи может быть сколь угодно близко к центру дифракционной картины.

Рис. 8 иллюстрирует вид круговых (для двух значений k) сечений спектров радиальной миры, состоящей из 36 пар прозрачных и непрозрачных секторов.

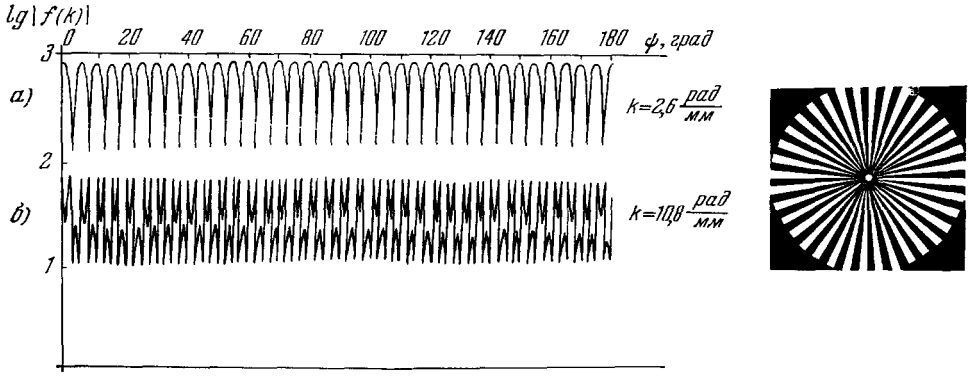

Рис. 8.

На рис. 9 изображен участок двумерного спектра диафрагмы, состоящей из регулярно расположенных круглых отверстий. Специально для наглядности записи осуществлялись со сдвигом нулевых уровней. Естественно, что форма отверстий и их расположение совершенно несущественны для процесса анализа.

Приведенный иллюстративный материал, по-видимому, достаточно убедительно позволяет судить о больших возможностях оптико-электронных спектроанализаторов в отношении изучения явлений дифракции. При помощи этих приборов одинаково просто могут быть исследованы дифракционные картины как от одного отверстия любой произвольной формы и любого размера, так и от совокупности разных по форме и размерам отверстий, любым образом ориентированных на плоскости.

Спектроанализатор очень удобен для исследования и подбора аподизирующих диафрагм. В [29] рассчитана форма диафрагмы, предназначенной для увеличения разрешающей способности объективов за счет перераспределения энергии в дифракционных порядках, при котором должен исчезать первый побочный максимум. Нами была изготовлена такая

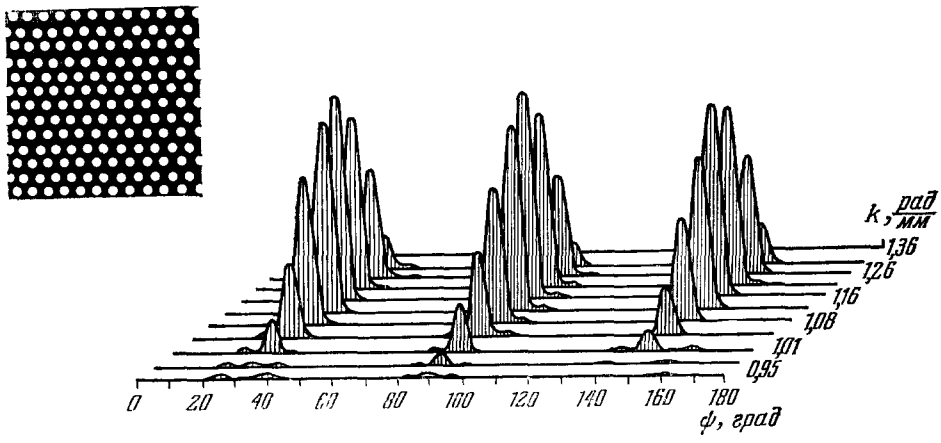

Рис. 9.

диафрагма и снят ее спектр (рис. 10, кривая *1*). Для сравнения там же приведен спектр диафрагмы в форме квадрата такой же площади (кривая *2*). Кривые хорошо согласуются с рассчитанными в работе [29]; наличие слабого максимума в первом порядке объясняется недостаточно аккуратным изготовлением диафрагмы.

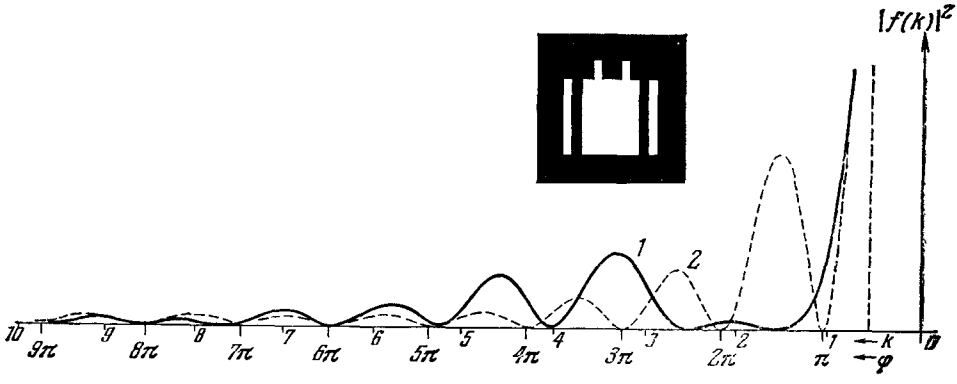

Рис. 10.

Выполняя обратное преобразование Фурье, т. е. находя вид функции по заданному спектру (представляющему собой кривую, которая определяет желательную форму спектра), можно определить форму соответствующей аподизирующей диафрагмы. Чтобы проиллюстрировать возможность использования прибора для решения подобных задач, нами было осуществлено прямое и обратное преобразования Фурье простейшей функции, имеющей вид треугольника.

Для этого сначала был записан спектр диафрагмы, имеющей форму равнобедренного треугольника (прямое преобразование). Напомним, что

спектр треугольника описывается функцией

$$f(k) = c\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2.$$

По этой записи была изготовлена диафрагма (рис. 11), контур которой представлял собой центральный и два боковых лепестка спектра треугольника. Затем был записан спектр этой диафрагмы, т. е. произведена операция обратного преобразования, дающая исходную функцию. Полученный спектр изображен на рис. 11 сплошной линией. Кривая достаточно точно соответствует одной ветви треугольника; плавные переходы к нулевой линии и к оси треугольника объясняются тем, что при изготовлении диафрагмы не были учтены максимумы спектра более высоких порядков.

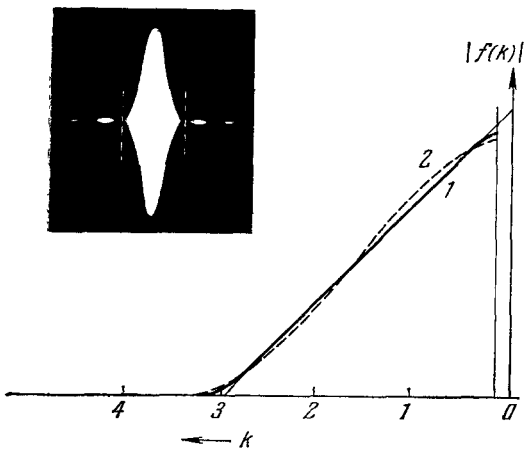

Рис. 11.

Пунктирной линией на рис. 11 показан вид функции, спектр которой имеет только один центральный максимум без вторичных дифракционных максимумов. Эта функция есть результат преобразования той же диафрагмы, но с закрытыми боковыми лепестками. Следует заметить, что кривые рис. 11 были получены после некоторого усовершенствования прибора, позволившего начинать записи с $k = 0{,}14$.

Совершенно очевидна применимость спектроанализатора для исследования более сложных случаев аподизации, когда не только подбирается форма диафрагмы, но и изменяется коэффициент пропускания по отверстию кадровой рамки, т. е. применяются амплитудные фильтры или одновременно те и другие.

Возможность осуществления обратного преобразования Фурье функций любой заданной формы весьма перспективна для подбора аподизирующих фильтров. Однако простейший спектроанализатор позволяет решить эту задачу только для случая, когда анализу подвергаются функции, не имеющие отрицательных значений. Принципиально эту трудность можно обойти, если в схему прибора ввести приспособление, позволяющее разделить спектры положительной и отрицательной частей исследуемой функции. Одним из таких способов может быть применение «двуцветных» изображений функции. В этом случае части диафрагмы, соответствующие положительной и отрицательной частям функции, должны пропускать пучки света разного спектрального состава. После конденсора эти пучки света разделяются и направляются на два фотоприемника. Разделение пучков можно осуществить с помощью светоделительной пластинки или бипризмы с двумя соответствующими светофильтрами. Разность сигналов фотоприемников, пропорциональная разности спектров положительной и отрицательной частей исследуемой функции, регистрируется самописцем прибора.

Для многих задач достаточно знать модуль спектра Фурье, однако возможны случаи, когда необходимо измерить еще и фазы спектра. Способ измерения фазы $\varphi(p, q)$ вытекает из формулы (16): в приборе необходимо

образовать сигнал с фазой ωt и найти разность фаз сигналов

$$|(\omega t - \varphi) - \omega t| = \varphi.$$

Для этого можно, например, над кадровым окном в плоскости образца строго над оптической осью укрепить узкую щель, длинная сторона

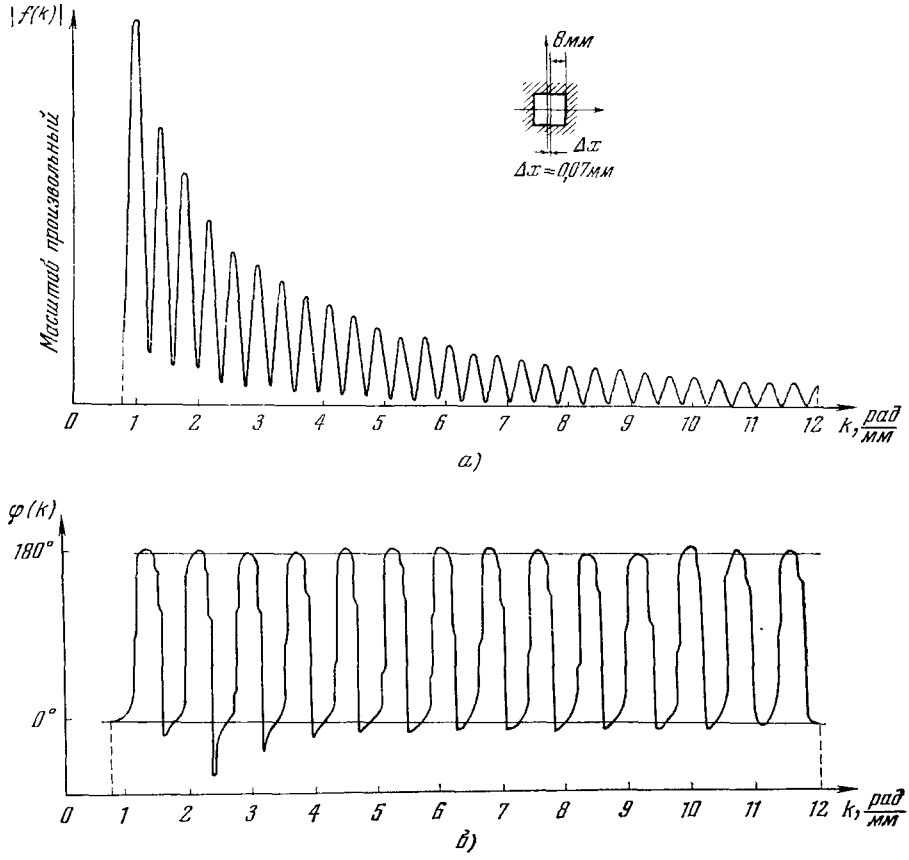

Рис. 12.

которой должна быть параллельна штрихам растра. Поток света, прошедший через растр и щель, собирается конденсором на отдельный фотоприемник. Учитывая, что в неподвижных координатах щель располагается симметрично относительно прямой $\xi = 0$, получаем выражение для потока, прошедшего через щель,

$$F_{щ}(0, \eta, t) = E(0, \eta, t) S_{щ} = E_0 S_{щ} + E_1 S_{щ} \cos \omega t + \ldots, \tag{21}$$

где $S_{щ}$ — площадь щели.

Применив после фотоприемника резонансный усилитель, настроенный на частоту $f = \omega/2\pi$, получим на его выходе сигнал с фазой ωt при любом положении растра на оптической оси. Разность фаз сигналов с выходов резонансных усилителей каналов с образцом и со щелью можно измерить с помощью обычного электронного фазометра, сигнал на выходе которого не зависит от амплитуд сигналов, подаваемых на его входы, но пропорционален разности фаз этих сигналов. В формулах (16) и (21) необходимо еще учесть начальные фазы, определяемые положением изображения

растра относительно центра образца и средней линии щели в момент начала движения растра. Однако если щель достаточно узкая и установлена точно над центром образца, совпадающим с оптической осью, начальные фазы будут одинаковыми и при вычитании в фазометре уничтожатся. Проверить равенство фаз можно по сигналу от щели и сигналу от контрольного образца в виде такой же щели, расположенной в центре кадровой рамки.

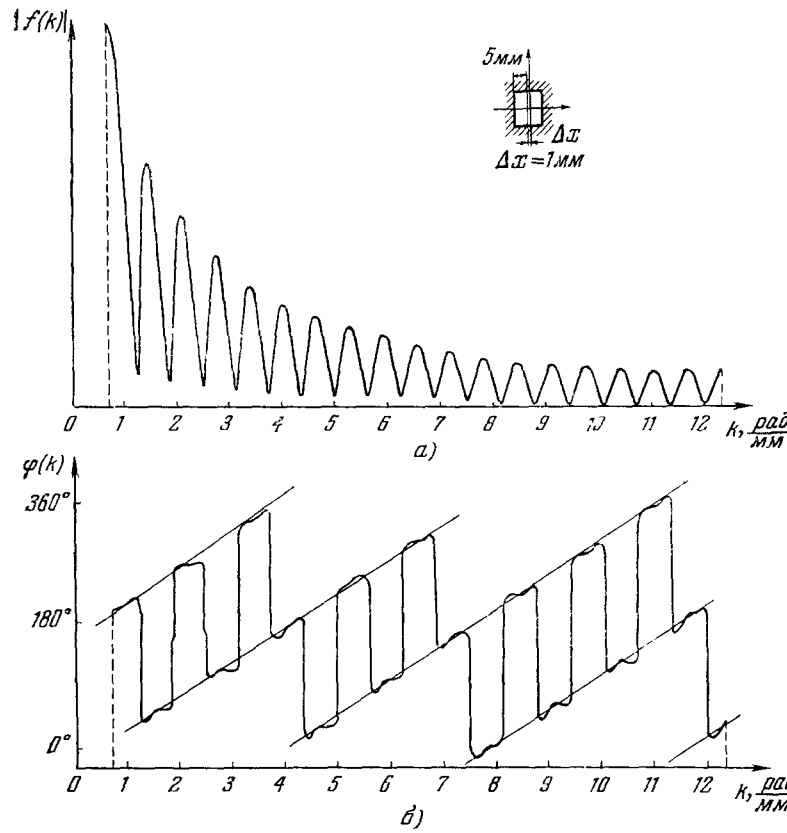

Рис. 13.

Для получения опорного сигнала с фазой ωt можно использовать и отдельный фотоэлектрический канал со своим источником света и приемником. Оптическая ось этого канала должна располагаться строго параллельно оптической оси канала с образцом. Растр для обоих каналов должен быть общий. Расстояние между оптическими осями каналов должно быть равно целому числу периодов растра — в этом случае не образуется начальной разности фаз сигналов. Примеры записей фазы спектра Фурье одновременно с модулем спектра показаны на рис. 12 и 13. На рис. 12 показан спектр прямоугольного отверстия шириной 16 *мм*, расположенного почти симметрично относительно оптической оси измерительного канала (сдвиг не превышал 0,1 *мм*). На верхней кривой приведено сечение модуля спектра, имеющего вид $|\sin z/z|$, на нижней — сечение фазы, которая для этой функции на интервалах, лежащих между нулями модуля, принимает попеременно значения 0 и 180°. На рис. 13 показан спектр прямоугольного отверстия шириной 10 *мм*, сдвинутого относи-

тельно оптической оси на 0,9 *мм*. В этом случае в соответствии с теоремой сдвига фаза спектра будет содержать линейно возрастающее с частотой слагаемое. Коэффициент пропорциональности равен величине сдвига, что хорошо подтверждается приведенной записью.

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

До сих пор обсуждался вопрос об измерении спектров детерминированных двумерных функций. Рассмотрим теперь возможность применения спектроанализатора для исследования спектров изображений случайных двумерных функций, описывающих, например, распределение яркости по поверхности Солнца, Земли, слоя облаков или водной поверхности, распределение коэффициента пропускания по плоскости равномерно экспонированного фотоматериала или коэффициента отражения от матовой поверхности, распределения коэффициента пропускания турбулентного слоя жидкости или газа и т. п.

Одной из наиболее употребимых характеристик случайных функций являются пространственно-частотные энергетические спектры или спектры мощности. Обычно в технических приложениях интерес представляет спектр мощности флуктуаций случайных процессов, т. е. усредненный по площади энергетический спектр локальных случайных колебаний значений функции относительно среднего уровня — постоянной составляющей процесса.

Пусть участок площадью S_0 случайного поля, которое будем считать стационарным и эргодическим, описывается функцией

$$f^0_{S_0}(X, Y) = (\bar{f}_{S_0}) + f_{S_0}(X, Y); \tag{22}$$

здесь $\bar{f}_{S_0}$ — постоянная составляющая, $f_{S_0}(X, Y)$ — флуктуирующая составляющая. Тогда спектр мощности флуктуаций случайного поля определится соотношением

$$G(P, Q) = \lim_{S_0 \to \infty} \frac{\overline{|f_{S_0}(P, Q)|^2}}{S_0}. \tag{23}$$

Практически анализу подвергаются реализации участков поля, имеющих конечные размеры S_0. При осреднении большого числа ($N \gg 1$) спектров различных участков поля получается оценка спектра мощности всего поля в виде

$$\frac{1}{NS_0} \sum_{i=1}^{N} |f_{S_{0i}}(P, Q)|^2. \tag{24}$$

Функция пропускания анализируемой фотографии участка случайного поля в соответствии с (22) будет иметь вид

$$T_0(x, y) = \bar{T} + T(x, y).$$

В этом случае вместо (14) получим следующее выражение для потока, собираемого конденсором на фотоприемник:

$$F_1(p, q, t) = E_1 \bar{T} \iint\limits_{(S_0)} \cos(px + qy + \omega t)\, dx\, dy + \\ + E_1 \iint\limits_{(S_0)} T(x, y) \cos(px + qy + \omega t)\, dx\, dy.$$

При симметричной форме кадровой рамки будем иметь

$$F_1(p, q, t) = E_1\overline{T}\cos\omega t \iint\limits_{(S_0)} \cos(px+qy)\,dx\,dy +$$
$$+ E_1\cos[\omega t - \varphi_{S_0}(p, q)]\,|f_{S_0}(p, q)| = F_{\text{п}} + F_{\text{м}}, \qquad (25)$$

где $|f_{S_0}(p, q)|$ и $\varphi_{S_0}(p, q)$ — модуль и аргумент (фаза) спектра флуктуаций прозрачности.

Как следует из (23) и (24), в результате измерений необходимо получить неискаженное значение величины $|f_{S_0}(p, q)|$. Первый член $F_{\text{п}}$ в (25) описывает спектр постоянной составляющей, и его вид, как мы уже знаем (см. (17)), определяется формой кадровой рамки. В данном случае он будет искажать измеряемый спектр флуктуаций. Для уменьшения этих искажений могут быть применены аподизирующие фильтры как в виде диафрагм различной формы, так и амплитудные фильтры, представляющие в данном случае больший интерес, поскольку их применение не приводит к уменьшению исследуемой площади реализации. Действие аподизирующего амплитудного фильтра рассмотрим для случая, когда кадровая рамка имеет вид прямоугольника площадью $S_0 = 2x_0 \cdot 2y_0$. Без фильтра $F_{\text{п}}$ для прямоугольника определяется выражением

$$F_{\text{п}} = E_1\overline{T}S_0 \frac{\sin px_0}{px_0}\frac{\sin qy_0}{qy_0}\cos\omega t. \qquad (26)$$

На высоких частотах функция вида $\sin z/z$ стремится к нулю, и, следовательно, искажения, обусловленные $F_{\text{п}}$, будут малы. На низких частотах искажения могут быть весьма велики, особенно если учесть, что амплитуды отдельных гармоник спектра всегда малы по сравнению с $\overline{T}$.

Наложение на образец фильтра с заданной функцией пропускания $T_{\text{ф}}(x, y)$ даст вместо $F_{\text{п}}$

$$F_{\text{п.,ф}} = E_1\overline{T}\cos\omega t \iint\limits_{(S_0)} T_{\text{ф}}(x, y)\cos(px+qy)\,dx\,dy. \qquad (27)$$

Подбором $T_{\text{ф}}(x, y)$ можно получить при интегрировании функцию, которая будет спадать с ростом частоты много быстрее, чем $(\sin px_0/px_0) \times (\sin qy_0/qy_0)$. Очевидно, что $T_{\text{ф}}(x, y)$ должна иметь максимум в центре при $x = 0$ и $y = 0$ и монотонно спадать к краям кадровой рамки. При этих условиях наиболее сильно фильтр повлияет на величину постоянной составляющей и менее на «смысловое» содержание изображения, характеризуемое $T(x, y)$.

Применим фильтр с функцией пропускания простого вида

$$T_{\text{ф}}(x, y) = \cos\frac{\pi x}{2x_0}\cdot\cos\frac{\pi y}{2y_0}. \qquad (28)$$

Для него получим

$$F_{\text{п.,ф}} = E_1\overline{T}S_0\cos\omega t \cdot \frac{(-1)\cos px_0}{(2px_0)^2-\pi^2}\frac{(-1)\cos qy_0}{(2qy_0)^2-\pi^2}. \qquad (29)$$

На рис. 14 показаны функции пропускания кадрового окна с фильтрами и без фильтра, на рис. 15 — их рассчитанные спектры (в относительных единицах) для частного случая, когда $q = 0$, т. е. для пространственных гармоник, гребни волн которых параллельны оси y. Хорошо видно, что при наложении фильтра относительная величина побочных максимумов по сравнению с основным уменьшается; например, на часто-

те p', отмеченной на рис. 15, величина побочных максимумов при наличии фильтра вида (28) уменьшается в 10 раз. Наилучших результатов можно добиться с фильтрами, функции пропускания которых имеют форму,

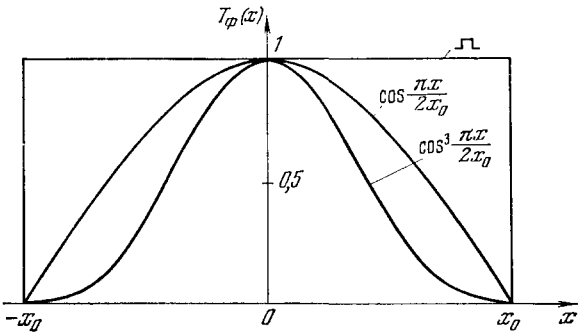

Рис. 14.

близкую к колоколообразной. Например, на той же частоте величина побочных максимумов для фильтров с

$$T_ф(x, y) = \cos^3\frac{\pi x}{2x_0}\cdot\cos^3\frac{\pi y}{2y_0} \tag{30}$$

уменьшается приблизительно в 200 раз (см. рис. 15).

Различные типы аподизирующих фильтров рассмотрены в статьях, посвященных аподизации [4, 30].

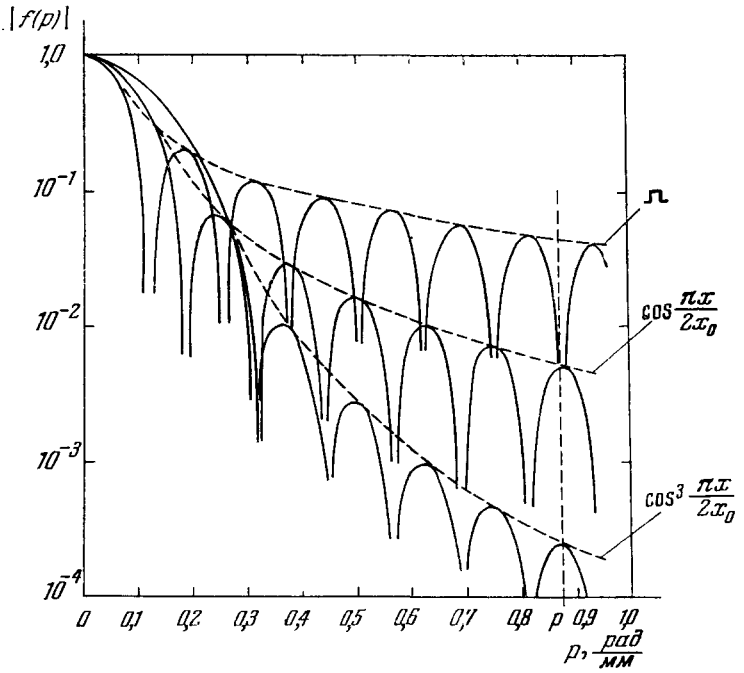

Рис. 15.

Необходимо отметить, что при наложении фильтров уменьшается не только величина побочных максимумов по сравнению с основным,

но и абсол тная величина основного максимума. Так , для фильтра (28) амплитуды всех гармоник спектра уменьшаются до величины 0,405, а для фильтра (30) до 0,18 от значения, которое имеет место, когда анализ производится без фильтра. Это приводит к необходимости применять более мощные источники света в осветителях и усилители с большим коэффициентом усиления.

Рассмотрим теперь, как повлияет применение фильтра на измеряемый спектр флуктуаций. При наложении фильтра вместо $F_{\text{м}}$ имеем

$$F_{\text{м.,ф}}(p,\ q,\ t)=E_1\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\,T_{\text{ф}}(x,\ y)\cos(px+qy+\omega t)\,dx\,dy, \qquad (31)$$

что, например, для фильтра (28) дает

$$\begin{aligned}
F_{\text{м.,ф}}(p,\ q,\ t)=&\\
=E_1\cos\omega t\cdot\frac{1}{4}\Bigg\{&\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\cos\left[\left(p+\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q+\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy+\\
&+\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\cos\left[\left(p+\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q-\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy+\\
&+\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\cos\left[\left(p-\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q+\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy+\\
&+\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\cos\left[\left(p-\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q-\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy\Bigg\}-\\
-E_1\sin\omega t\cdot\frac{1}{4}\Bigg\{&\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\sin\left[\left(p+\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q+\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy+\\
&+\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\sin\left[\left(p+\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q-\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy+\\
&+\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\sin\left[\left(p-\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q+\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy+\\
&+\iint\limits_{(S_0)} T(x,\ y)\sin\left[\left(p-\frac{\pi}{2x_0}\right)x+\left(q-\frac{\pi}{2y_0}\right)y\right]dx\,dy\Bigg\}\,. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{1}{4}\{J_{1\cos}+J_{2\cos}+J_{3\cos}+J_{4\cos}\}=\overline{J}_{\cos},$$

$$\frac{1}{4}\{J_{1\sin}+J_{2\sin}+J_{3\sin}+J_{4\sin}\}=\overline{J}_{\sin};$$

тогда (31) можно представить в виде

$$F_{\text{м.,ф}}(p,\ q,\ t)=E_1\,|\overline{f_{S_0}(p,\ q)}|\,[\cos[\omega t-\overline{\varphi_{S_0}(p,\ q)}]]. \qquad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что при использовании фильтра (28) значение спектра флуктуаций для волновых чисел $(p,\ q)$ получается как среднее арифметическое четырех значений спектра для $\left(p\pm\frac{\pi}{2x_0},\ q\pm\frac{\pi}{2y_0}\right)$ и что прибор регистрирует на выходе уже результат осреднения. Анало-

гично действие фильтров и с функцией пропускания, отличной от (28), но в зависимости от вида $T_ф(x, y)$ будет меняться число и положение волновых чисел в окрестности (p, q), для которых осредняются величины спектров, а также весовой множитель, с которым значение спектра в данной точке входит в суммарный результат.

Заметим, что осуществляемое прибором осреднение эквивалентно сглаживанию спектра данного образца или, иначе говоря, измерению спектра с худшей разрешающей способностью.

Наложение фильтра приводит, таким образом, к некоторому ухудшению разрешающей способности анализатора, но этот эффект при анализе случайных функций играет даже положительную роль, так как при этом увеличивается осреднение случайных колебаний в спектре одного изображения, а следовательно, нужно меньшее число спектров различных изображений для получения статистических оценок. Разрешающая способность двумерных спектроанализаторов характеризуется фигурой на плоскости pOq, размеры и форма которой определяются выбранным критерием разрешения, размерами и формой кадровой рамки, а при наличии аподизирующего фильтра еще и законом распределения прозрачности по фильтру. Любое сечение этой фигуры, проходящее через ее центр симметрии, есть линейное разрешение в данном направлении, определяемое так же, как и для одномерного случая. Вопрос о строгом определении критерия разрешения для двумерного случая в настоящее время выяснен еще недостаточно.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. P. M. Duffieux, L'integrale de Fourier et ses applications á l'optique, Universite de Besancon.
2. P. Elias, D. S. Gray, D. Z. Robinson, JOSA **42** (2), 127 (1952).
3. А. Марешаль, М. Франсон, Структура оптического изображения, М., «Мир», 1964.
4. P. Jaquinot, B. Roisen-Dossier, Progress in Optics, Apodisation, vol. 3, Amsterdam, 1964.
5. Е. Г. Зелкин, Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности, М.— Л., Госэнергоиздат, 1963.
6. Н. С. Шестов, Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех, М., «Сов. радио», 1967.
7. Дж. Э. Джемисон, Р. Х. Мак-Фи и др., Физика и техника инфракрасного излучения, М., «Сов. радио», 1965.
8. Z. P. Horwitz, G. L. Shelton, Proc. IRE **49** (1), 175 (1961).
9. P. Mertz, F. Gray, BST Journ. **13** (3), 464 (1934).
10. Е. Л. Орловский, А. М. Халфин и др., Теоретические основы электрической передачи изображений, М., «Сов. радио», 1962.
11. Сб. «Основы электронного телевидения», под ред. Ф. Шретера, М.— Л., «Энергия», 1965.
12. Ф. Перрен, УФН **78** (2), 307 (1962).
13. L. J. Cutrona et al., Trans. Inst. Radio Engrs. JT-6, **386** (1960) (см. перевод: Зарубежная радиоэлектроника, № 10, 3 (1962)).
14. F. S. Harris, Applied Optics, **3** (8), 909 (1964).
15. Дж. Строук, Введение в когерентную оптику и голографию, М., «Мир», 1967.
16. Л. М. Сороко, УФН **90** (1), 3 (1966).
17. H. C. Montgomery, BST Journ. **17**, 406 (1938).
18. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Приборы и техн. экспер., № 1, 50 (1960).
19. M. Born, R. Furth, R. W. Pringle, Nature **156**, (No. 3973), 756 (1945); (см. перевод, УМН **1** [3/4 (13/14)], 172 (1946).
20. В. А. Черепанов, Изв. вузов (Радиотехника) **5** (3), 409 (1962).
21. A. Lohmann, Optik **14**, 510 (1957).
22. В. А. Зверев, И. В. Мосалов, Е. Ф. Орлов, В. Л. Сибиряков, Приборы и техн. экспер., № **1**, 110 (1962).

23. M. S. Uberoi, Rev. Sci. Instr. **33**, 314 (1962) (см. перевод: Приборы для научных исследований, № 3, 49 (1962)).
24. J. C. Vienot, Optica Acta 5 (hors. ser.), 279 (1958); Proc. Phys. Soc. (London) **72**, 661 (1958).
25. Aebischer-Neoschill, Gaultier du Marache, P. M. Duffieux, J. C. Vienot, W. J. Obert, Материалы V конференции Международной комиссии по оптике, т. 2, Стокгольм, 1959, стр. 113.
26. J. S. Wilczynski, Proc. Phys. Soc. (London) 77 (493), 17 (1961).
27. R. Drougard, J. S. Wilczynski, Journ. JOSA 55, 1938 (1965).
28. P. Prat, Optica, Acta **13** (2), 73 (1966); Compt. Rend. **262**, SB-597 (1966).
29. Г. Г. Слюсарев, Н. И. Куликовская, Оптика и спектроскопия 4 (4), 486 (1958).
30. G. Lansraux, Rev. d'Optique **32** (8/9) 475 (1953).