

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ
И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ I

А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов

СОДЕРЖАНИЕ

I Энергетические спектры. Тепловые и магнитные свойства ферромагнетиков и антиферромагнетиков	534
§ 1. Спировые волны в ферромагнетиках	534
§ 2. Феноменологическая теория спиновых волн	537
§ 3. Квантование спиновых волн	544
§ 4. Высокочастотные свойства ферромагнетиков и ферромагнитный резонанс	549
§ 5. Поверхностный импеданс ферромагнетиков	555
§ 6. Связанные магнитоупругие волны. Ферроакустический резонанс	559
§ 7. Энергетический спектр антиферромагнетиков	566
§ 8. Тепловые и магнитные свойства ферромагнетиков	572
§ 9. Тепловые и магнитные свойства антиферромагнетиков	575
II. Взаимодействие спиновых волн друг с другом и с колебаниями решетки. Релаксационные и кинетические процессы.	
§ 10. Слияние и расщепление спиновых волн. Рассеяние спиновых волн спиновыми волнами. § 11. Взаимодействие спиновых волн с фононами.	
§ 12. Релаксация магнитного момента в ферродизэлектриках. § 13. Дисперсия магнитной восприимчивости ферромагнитных диэлектриков. § 14. Теплопроводность ферродизэлектриков.	

Энергетический спектр макроскопического тела определяет все его термодинамические и кинетические свойства. Например, фоновый спектр звуковых колебаний определяет теплоемкость, а также теплопроводность простейших диэлектрических кристаллов, электронный спектр металлов определяет их электрические, магнитные и тепловые свойства. Поэтому нахождение энергетического спектра является важнейшей задачей микроскопической теории макроскопических тел. Эта задача, однако, связана с большими математическими трудностями и решение ее известно только для некоторых простейших систем. Помимо упомянутого выше фонового спектра, присущего любому твердому телу, теоретически исследованы энергетический спектр ферромагнетиков вблизи насыщения, спектр гелия II, а также энергетический спектр сверхпроводников.

В настоящем обзоре мы рассмотрим основные свойства ферромагнитного энергетического спектра вблизи магнитного насыщения. Этот спектр определяет при низких температурах зависимость намагничивания ферромагнетика от температуры и внешнего магнитного поля, тепловые свойства ферромагнетика, релаксацию магнитного момента, а также поведение ферромагнетика в переменных электромагнитных и звуковых полях.

Ферромагнитный энергетический спектр возникает в кристаллах, в которых существенную роль играет обменное взаимодействие между атомами. В этих условиях отклонение магнитного момента какого-либо атома от преобладающего направления не локализуется в определенном месте кристаллической решетки, а распространяется в виде волны с определенной зависимостью частоты от волнового вектора.

Если умножить частоту этой волны, которая называется спиновой волной *), на квантовую постоянную $\hbar$, то мы получим энергию элементарного возбуждения, связанного со спиновой волной. Вблизи максимального значения магнитного момента магнитная часть энергии ферромагнетика представляет собой сумму энергий таких элементарных возбуждений.

Макроскопическое тело может, вообще говоря, обладать рядом энергетических спектров, которые можно рассматривать как различные ветви единого энергетического спектра тела. Каждая такая ветвь характеризуется своим законом дисперсии, т. е. зависимостью энергии от волнового вектора. Фундаментальным является то обстоятельство, что слабовозбужденные энергетические состояния макроскопических тел можно рассматривать как совокупность газов элементарных возбуждений или квазичастиц **).

Свойства этих газов, помимо закона дисперсии, определяются статистикой, которой подчиняются квазичастицы, а также характером взаимодействия квазичастиц между собой.

При достаточно низких температурах взаимодействие между квазичастицами является слабым. Если пренебречь им, т. е. исходить из представления об идеальном газе квазичастиц, то, зная закон дисперсии и статистику квазичастиц, можно получить все термодинамические свойства тела. Для исследования кинетических свойств тела модели идеального газа недостаточно, так как эти свойства существенно определяются взаимодействием между квазичастицами.

Излагаемые ниже вопросы теории ферромагнетизма объединены общей идеей спиновых волн. При этом мы главным образом рассматриваем свойства ферродиелектриков, т. е. тел, обладающих спонтанным магнитным моментом и не обладающих проводимостью. К таким телам близки по своим свойствам ферриты при низких температурах.

1 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ, ТЕПЛОВЫЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНЕТИКОВ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

§ 1. Спиновые волны в ферромагнетиках

Введение спиновых волн может быть произведено двумя способами: исходя из микроскопической модели ферромагнетика и феноменологическим путем. Начнем с изложения микроскопической теории спиновых волн^{1,3}.

В простейшей модели ферромагнетика предполагается, что в основном состоянии спины всех атомов ориентированы в одном направлении. Зависимость энергии системы от ориентации спинов определяется не магнитным взаимодействием атомов, которое является очень слабым, а представляет собой чисто квантовый эффект, связанный с неразличимостью частиц. В силу этого эффекта, а также принципа Паули, различным значениям полного спина системы соответствуют пространственные волновые

*) Спиновые волны были впервые введены и исследованы Ф. Блохом¹.

**) Это утверждение является не вполне строгим для систем с ферми-спекром (см.²).

функции, обладающие различной симметрией, которым, в свою очередь, соответствуют различные значения энергии. Таким образом, можно говорить о некотором своеобразном взаимодействии частиц, приводящем к зависимости энергии от полного спина системы. Это взаимодействие называется обменным (см., например, ⁴).

Гамильтониан обменного взаимодействия двух частиц можно представить в виде:

$$\mathcal{H} = -J(r_{12}) s_1 s_2, \quad (1,1)$$

где s_1, s_2 — спины частиц и $J(r_{12})$ — некоторая функция расстояния между частицами r_{12} ; $J(r_{12})$ называется обменным интегралом. Легко проверить, что $s_1 s_2 = -\frac{3}{4}$ для синглетного состояния (суммарный спин $S=0$) и $s_1 s_2 = \frac{1}{4}$ для триплетного состояния ($S=1$); поэтому при положительном $J(r_{12})$ триплетному состоянию соответствует меньшая энергия.

Так как взаимодействие между частицами носит в основном электростатический характер, то обменный интеграл имеет порядок величины электростатической энергии взаимодействия атомов.

При обменной модели ферромагнетика*) исходят из гамильтониана, являющегося обобщением гамильтониана (1,1),

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l,m} J(r_{lm}) s_l s_m, \quad (1,2)$$

где s_l — спин l -го атома, $J(r_{lm})$ — обменный интеграл между l - и m -м атомами, $r_{lm} = |\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_m|$, $\mathbf{r}_m$ — радиус-вектор m -го атома; суммирование производится по всем атомам кристалла. Величина $J(r_{lm})$ предполагается положительной, благодаря чему в основном состоянии все спины атомов имеют одинаковую ориентацию. Эта ориентация, однако, никак не выделена, так как функция $J(r_{lm})$ является скаляром.

При наличии внешнего магнитного поля H_0 , направленного вдоль оси z , к гамильтониану (1,2) должна быть добавлена энергия спинов во внешнем поле, равная $-2\mu_0 \sum_i s_i^z H_0$, где μ_0 — магнетон Бора.

Таким образом, оператор Гамильтона при наличии внешнего магнитного поля имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l,m} J(r_{lm}) s_l s_m - 2\mu_0 H_0 \sum_l s_l^z. \quad (1,3)$$

Наша задача заключается в нахождении собственных значений гамильтониана (1,3) в том случае, когда магнитный момент близок к насыщению. С этой целью удобно ввести циркулярные проекции спинов

$$s_l^+ = s_l^x + i s_l^y, \quad s_l^- = s_l^x - i s_l^y,$$

удовлетворяющие условиям коммутации

$$s_l^+ s_{l'} - s_{l'}^- s_l^+ = 2 s_l^z \delta_{ll'},$$

и перейти далее к операторам a_l, a_l^+ , связанным с операторами s_l^+, s_l^-, s_l^z

*) Обменная модель ферромагнетика была предложена Н. И. Френкелем, Я. Г. Дорфманом⁵ и В. Гейзенбергом⁶

следующими соотношениями *):

$$\left. \begin{aligned} s_l^+ &= (2s)^{1/2} a_l^+ \left(1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s} \right)^{1/2}, \\ s_l^- &= (2s)^{1/2} \left(1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s} \right)^{1/2} a_l, \\ s_l^z &= s - a_l^+ a_l. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Легко убедиться, что операторы a_l , a_l^+ удовлетворяют соотношениям коммутации

$$a_l a_m^+ - a_m^+ a_l = \delta_{lm}. \quad (1.5)$$

Из этих соотношений следует, что собственные значения оператора $\mathfrak{M}_l = a_l^+ a_l$ представляют собой целые положительные числа. Величина $\mathfrak{M}_l$ определяет, очевидно, отклонение z -й проекции спина l -го атома от ее максимального значения.

Заметим, что согласно правилам коммутации (1,5) $\mathfrak{M}_l$ пробегает все значения от нуля до бесконечности, в то время как согласно формулам (1,4) не может превосходить $2s$. Это противоречие, однако, несущественно, так как нас в дальнейшем будут интересовать только состояния, близкие к основному, когда главную роль играют малые отклонения спинов $\mathfrak{M}_l$ **). Заменяя в этом случае в (1,4) квадратный корень единицей:

$$\left. \begin{aligned} s_l^+ &\approx (2s)^{1/2} a_l^+, \\ s_l^- &\approx (2s)^{1/2} a_l, \\ s_l^z &= s - a_l^+ a_l, \end{aligned} \right\} \quad (1.4')$$

и подставляя эти формулы в (1,3), получим следующее приближенное выражение для гамильтониана ферромагнетика:

$$\mathcal{H} = -2s \sum_{l,m} J(r_{lm}) (a_l^+ a_m - a_l^+ a_l) + 2\mu_0 H_0 \sum_l a_l^+ a_l + C. \quad (1.6)$$

где

$$C = - \sum_{l,m} J(r_{lm}) s^2 - 2\mu_0 s N H_0$$

и N — полное число атомов тела. Величина C представляет собой энергию основного состояния системы, когда все спины ориентированы вдоль оси z .

Чтобы найти собственные значения гамильтониана (1,6), перейдем от операторов a_l и a_l^+ к их преобразованиям Фурье a_k , a_k^+ :

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{V^N} \sum_l e^{-ikr_l} a_l, & a_k^+ &= \frac{1}{V^N} \sum_l e^{ikr_l} a_l^+, \\ a_l &= \frac{1}{V^N} \sum_k e^{ikr_l} a_k, & a_l^+ &= \frac{1}{V^N} \sum_k e^{-ikr_l} a_k^+. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Легко убедиться, что операторы a_k и a_k^+ удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и a_l , a_l^+ :

$$a_k a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k = \delta_{kk'}. \quad (1.8)$$

*) Мы следуем здесь работе Голстейна и Примакова³.

**) Строго этот вопрос был исследован Дайсоном⁷.

Подставляя (1,7) в (1,6), получим:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + C, \quad (1,9)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sum_h 2sJ(r_h) (1 - e^{i\mathbf{k}r_h}) + 2\mu_0 H_0. \quad (1,9')$$

Из формулы (1,8) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{H}$ равны

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + C, \quad (1,10)$$

где $n_{\mathbf{k}} = 0, 1, 2, \dots$

Мы видим, таким образом, что энергия слабо возбужденных состояний ферромагнетика может быть представлена в виде суммы энергий отдельных частиц — элементарных возбуждений. Энергия каждого возбуждения равна $\varepsilon_{\mathbf{k}}$. Эти возбуждения называются спиновыми волнами.

В представлении, в котором диагонален оператор Гамильтона (1,9), отличные от нуля матричные элементы операторов $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (n_{\mathbf{k}} - 1 | a_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}}) &= \sqrt{n_{\mathbf{k}}} e^{-i \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} t}{\hbar}}, \\ (n_{\mathbf{k}} | a_{\mathbf{k}}^{\dagger} | n_{\mathbf{k}} - 1) &= \sqrt{n_{\mathbf{k}}} e^{i \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} t}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (1,11)$$

Поэтому операторы $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ и $a_{\mathbf{k}}$ можно интерпретировать как операторы рождения и поглощения спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}$.

В случае слабовозбужденных состояний величины $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ должны быть малыми по сравнению с обменным интегралом для соседних атомов. Поэтому, как это видно из формулы (1,9'), мы должны ограничиться в рассматриваемой теории только длинноволновыми колебаниями, когда $ak \ll 1$, где a — постоянная решетки. В этом случае легко определить зависимость $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ от $\mathbf{k}$. Действительно, разлагая экспоненту в (1,9') в ряд по $\mathbf{k}$ и учитывая быстрое спадание обменного интеграла с расстоянием, получим:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = 2sJ(ak)^2 + 2\mu_0 H_0, \quad (1,12)$$

где J — обменный интеграл для соседних атомов (предполагается для простоты, что кристалл обладает симметрией простой кубической решетки).

Обменный интеграл J по порядку величины совпадает с температурой Кюри T_C .

В гамильтониане (1,2) мы не учитываем магнитного взаимодействия между спинами атомов и спин-орбитального взаимодействия. Хотя эти взаимодействия имеют релятивистский характер и являются поэтому слабыми по сравнению с обменным взаимодействием, их учет необходим при исследовании кинетических и релаксационных процессов, а также при расчете термодинамических величин ферромагнетиков в области очень низких температур. Релятивистские взаимодействия проще всего учесть в рамках феноменологической теории спиновых волн, к изложению которой мы теперь перейдем.

§ 2. Феноменологическая теория спиновых волн

Мы покажем, что спиновые волны могут быть введены чисто феноменологически, как колебания магнитного момента ферромагнетика *).

*) Такое рассмотрение принадлежит Е. Лифшицу⁸; см. также работу Херринга и Киттеля⁹.

Напишем прежде всего выражение для классического гамильтониана ферромагнетика (см.¹⁰). Классический аналог гамильтониана обменного взаимодействия может быть получен в случае длинноволновых колебаний, когда магнитный момент является медленно меняющейся функцией координат, из выражения (1,2).

Замечая, что обменный интеграл быстро (экспоненциально) спадает с расстоянием между атомами, можно в гамильтониане $\mathcal{H}^0 = -\frac{1}{2} \times \sum_{l,h} J(r_h) \mathbf{s}_l \mathbf{s}_{l+h}$ суммирование по h производить только по ближайшим соседям, а суммирование по l заменить интегрированием по объему. Переходя от $\mathbf{s}$ к магнитному моменту единицы объема $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{s}/a^3$ и раскладывая $\mathbf{s}_{l+h}$ по степеням h , получим, опуская несущественные для дальнейшего члены, пропорциональные s^2 , следующее выражение для гамильтониана обменного взаимодействия:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int \alpha_{ik} \frac{\partial^2 M_l}{\partial x_i \partial x_k} M_l dv,$$

где величина α_{ik} пропорциональна J (члены, пропорциональные $\frac{\partial}{\partial x_k} M_l$, очевидно, исчезают, если кристалл обладает центром инверсии).

Интегрируя последнее выражение по частям, найдем окончательно:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \alpha_{ik} \frac{\partial M_l}{\partial x_i} \frac{\partial M_l}{\partial x_k} dv. \quad (2,1)$$

Это выражение можно рассматривать как разложение энергии обменного взаимодействия по степеням градиентов магнитного момента. Заметим, что, вообще говоря, это разложение мы должны были бы записать в виде:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \alpha_{iklm} \frac{\partial M_l}{\partial x_i} \frac{\partial M_m}{\partial x_k} dv,$$

где α_{iklm} — некоторый тензор 4-го ранга. Так как, однако, обменное взаимодействие инвариантно относительно преобразования вращения спинов, то тензор α_{iklm} должен иметь вид $\alpha_{ik} \delta_{lm}$, и мы приходим к выражению (2,1).

В случае кубического кристалла $\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik}$ и

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \alpha \left(\frac{\partial M_l}{\partial x_i} \right)^2 dv. \quad (2,2)$$

Величину α мы запишем в виде:

$$\alpha = \frac{\theta_c}{\mu_0 M_0} a^2, \quad (2,2')$$

где θ_c по порядку величины совпадает с температурой Кюри, и M_0 — магнитный момент насыщения.

Помимо обменной энергии, гамильтониан ферромагнетика должен содержать часть, зависящую не от производных магнитного момента, а непосредственно от его компонент. Эта часть гамильтониана, называемая энергией анизотропии, обусловлена релятивистскими спин-спинновыми и спин-орбитальными взаимодействиями. Энергия анизотропии, которую мы обозначим через $\beta(\mathbf{M})$, зависит от ориентации магнитного момента относительно кристаллографических осей. В случае одноосного кристалла $\beta(\mathbf{M})$ имеет вид¹⁰:

$$\beta(\mathbf{M}) = -\frac{1}{2} \beta(\mathbf{Mn})^2.$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении оси легчайшего намагничивания и β — величина, не зависящая от $\mathbf{n}$. В кубических кристаллах¹⁰

$$\beta(\mathbf{M}) = \frac{\beta}{2M_0^2} (M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2)$$

(оси x, y, z направлены вдоль кристаллографических осей).

Наконец, гамильтониан ферромагнетика должен содержать еще энергию электромагнитного поля, плотность которой равна $\frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}\mathbf{D})$, где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — напряженности магнитного и электрического полей, $\mathbf{D}$ — электрическая индукция.

Таким образом, классический гамильтониан ферромагнетика имеет вид:

$$\mathcal{H} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_i}{\partial x_i} \frac{\partial M_i}{\partial x_k} + \beta(\mathbf{M}) + \frac{\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}\mathbf{D}}{8\pi} \right\} dv. \quad (2,3)$$

Помимо гамильтониана (2,3) нам необходимо знать уравнение «движения» магнитного момента, т. е. закон изменения магнитного момента со временем. Если пренебречь диссипативными процессами, то это изменение определяется уравнением*)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = g[\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}], \quad (2,4)$$

где $\mathbf{H}^{(e)}$ — эффективное поле, действующее на магнитный момент и g — гиромагнитное отношение, рассматриваемое здесь как некоторая экспериментально определяемая константа. Это уравнение соответствует предположению о «жесткости» магнитного момента, т. е. о неизменности его абсолютной величины.

Эффективное поле $\mathbf{H}^{(e)}$ может быть определено как взятая с обратным знаком функциональная производная от гамильтониана $\mathcal{H}$ по магнитному моменту $\mathbf{M}$ при заданной индукции $\mathbf{B}$. Так как при этом вариации поля и магнитного момента связаны между собой соотношением

$$\delta\mathbf{H} = -4\pi\delta\mathbf{M},$$

то

$$\mathbf{H}^{(e)} = - \left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{M}} \right)_{\mathbf{B}} = \mathbf{H} - \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{M}} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (2,5)$$

В случае одноосного кристалла

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{H} + \beta\mathbf{n}(\mathbf{M}\mathbf{n}) + \alpha_{ik} \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Присоединив к (2,5) уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\varrho, \end{aligned} \right\} \quad (2,6)$$

где $\mathbf{j}$ и ϱ — плотности тока и заряда, $\mathbf{n}$ задавая связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, мы получим полную систему уравнений для определения всех интересующих нас величин.

*) Это уравнение вместе с выражением (2,5) для $\mathbf{H}^{(e)}$ было установлено Л. Ландау и Е. Лифшицем¹¹.

Выражение для $\mathbf{H}^{(e)}$ можно получить также, вычислив полную производную от $\mathcal{H}$ по времени¹². Используя (2,5) и (2,6), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \int_V \left\{ \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_k \partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right\} dv = \\ &= \int_V \left\{ - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \left(\alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k} + \mathbf{H} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} \right) - \mathbf{jE} \right\} dv - \\ &\quad - \int_S \left\{ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_k - \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right\} ds_k, \end{aligned}$$

где ds — элемент поверхности S , окружающей объем ферромагнетика. В пренебрежении диссипативными процессами объемный интеграл должен, очевидно, исчезать, т. е.

$$- \int_V g[\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]_l \left(\alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{M}_l}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}_l} + \mathbf{H}_l \right) dv = 0.$$

Это равенство гождественно удовлетворяется, если положить, что

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{H} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Таким образом, мы снова приходим к выражению (2,5) для эффективного поля $\mathbf{H}^{(e)}$.

Итак,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \int_V \mathbf{jE} dv - \int_S \left\{ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_k - \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right\} ds_k. \quad (2,7)$$

Мы видим, что плотность потока энергии в ферромагнетике имеет вид¹²:

$$\Pi_k = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_k - \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}_l}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_l}{\partial t}. \quad (2,8)$$

К обычному вектору Пойнтинга здесь добавляется вектор $-\alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}_l}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_l}{\partial t}$, который соответствует потоку энергии, переносимому спиновыми волнами.

В квазистатическом случае ($\text{rot } \mathbf{H} = 0$) вектор Пойнтинга $\frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]$ переходит, как легко убедиться, в $\frac{1}{4\pi} \Phi \dot{\mathbf{B}}$, где Φ — потенциал магнитного поля, $\mathbf{H} = -\nabla \Phi$; поэтому в этом случае плотность потока энергии имеет вид:

$$\Pi_k = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \dot{B}_k \Phi - \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} M_l \frac{\partial}{\partial t} M_l. \quad (2,8')$$

Перейдем теперь к рассмотрению классическим путем малых колебаний магнитного момента около равновесного значения $\mathbf{M}_0$, соответствующего основному состоянию ферромагнетика. Будем предполагать, что внутри ферромагнетика действует постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Если внешнее магнитное поле направлено вдоль оси легчайшего намагничивания, то вдоль этой же оси направлен и $\mathbf{M}_0$. В противном случае направление вектора $\mathbf{M}_0$ определяется из условия

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = g[\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}] = 0,$$

т. е.

$$\mathbf{H}_0 - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} + v\mathbf{M} = 0, \quad (2,9)$$

где v — параметр, который находится из условия неизменности квадрата магнитного момента. В случае одноосного кристалла мы получим, таким образом, следующее соотношение, связывающее направление магнитного момента с направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$:

$$H_0 \sin(\varphi - \psi) - \frac{1}{2} \beta M_0 \sin 2\psi = 0, \quad (2,9')$$

где φ — угол между $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{n}$, а ψ — угол между $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль оси легчайшего намагничения); вектор $\mathbf{M}_0$ лежит в плоскости $\mathbf{n}$, $\mathbf{H}_0$.

Положим $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{h}$ — малые добавки к $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{H}_0$, и напишем линеаризованное уравнение движения магнитного момента и уравнения Максвелла. Если ферромагнетик, который мы будем считать диэлектриком, является одноосным и магнитное поле $\mathbf{H}_0$ направлено вдоль оси легчайшего намагничения, то эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} &= g M_0 \left[\mathbf{n}, \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{M_0} (H_0 + \beta M_0) \mathbf{m} + \mathbf{h} \right], \\ \text{rot } \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (2,10)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}$.

Рассмотрим сперва низкочастотные колебания. В этом случае можно пренебречь током смещения и положить $\text{rot } \mathbf{h} = 0$. Решение этих уравнений в виде плоских волн ($e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$) дает

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{m} &= -g M_0 \left[\mathbf{n}, \alpha_{ik} k_i k_k \mathbf{m} + \frac{1}{M_0} (H_0 + \beta M_0) \mathbf{m} - \mathbf{h} \right], \\ \mathbf{h} &= -4\pi \frac{1}{k^2} \mathbf{k} (\mathbf{m} \mathbf{k}), \end{aligned}$$

откуда *)

$$\hbar \omega_{\mathbf{k}} = V \sqrt{A_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^2}, \quad (2,11)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}} &= \mu M_0 \left(\alpha_{ij} k_i k_j + \beta + \frac{H_0}{M_0} + 2\pi \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} \right), \quad \mu = g\hbar, \\ B_{\mathbf{k}} &= 2\pi \mu M_0 \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} e^{2i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (2,11')$$

и $\theta_{\mathbf{k}}$ и $\varphi_{\mathbf{k}}$ — полярные углы вектора $\mathbf{k}$.

Величина $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar \omega_{\mathbf{k}}$ представляет собой энергию спиновой волны.

Если в формуле (2,11) пренебречь константой анизотропии β и величиной $2\pi \sin^2 \theta_{\mathbf{k}}$, связанной с учетом магнитного поля, которое возникает в результате колебаний магнитного момента, то мы получим выведенную ранее формулу (1,12) для энергии спиновой волны.

В общем случае, когда направление магнитного поля $\mathbf{H}_0$ не совпадает с направлением легчайшего намагничения, частота колебаний магнитного момента определяется формулой (2,11), где¹³

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}} &= \mu M_0 \left[\alpha_{ik} k_i k_k + \beta \cos^2 \psi + \frac{H_0}{M_0} \cos(\varphi - \psi) - \frac{1}{2} \beta \sin^2 \psi + 2\pi \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} \right], \\ B_{\mathbf{k}} &= \mu M_0 \left(2\pi \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} e^{2i\varphi_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{2} \beta \sin^2 \psi \right). \end{aligned} \quad (2,11'')$$

*) Структура этой формулы установлена в работе³

Заметим что в случае, когда¹ внешнее поле направлено по оси легчайшего намагничивания, энергию анизотропии можно описывать с помощью эффективного магнитного поля анизотропии, равного

$$\mathbf{H}_0 = \beta \mathbf{M}_0.$$

До сих пор мы не учитывали процессов, приводящих к затуханию спиновых волн. Такие процессы связаны с наличием проводимости среды и релаксацией магнитного момента. Учет этих процессов дает возможность выяснить условия существования спиновых волн¹².

Релаксацию магнитного момента можно учесть, если прибавить в правой части уравнения движения магнитного момента к вращающей силе диссипативную силу, учитывающую изменение угла между магнитным моментом и эффективным магнитным полем.

Простейшим выражением такого типа силы является выражение $-\lambda/M^2 [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]$, где λ — некоторая константа, которую можно назвать «релаксационной константой». Поэтому мы будем исходить из следующего уравнения движения магнитного момента¹¹:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = g [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}] - \frac{\lambda}{M^2} [\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]]. \quad (2,12)$$

Оценка величины λ будет дана в § 12, исходя из микроскопической теории процесса релаксации.

Определим теперь затухание спиновых волн, предполагая его достаточно малым. В этом случае коэффициент затухания можно определить как

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{1}{\overline{\mathcal{H}}} \frac{d\overline{\mathcal{H}}}{dt}, \quad (2,13)$$

где $\frac{d\overline{\mathcal{H}}}{dt}$ — среднее значение потерь энергии в единицу времени, а $\overline{\mathcal{H}}$ — среднее значение энергии системы в отсутствие поглощения. Величину $\frac{d\overline{\mathcal{H}}}{dt}$ можно найти из гамильтониана (2,3) с помощью уравнений Максвелла и уравнения движения¹² магнитного момента (2,12)

$$\frac{d\overline{\mathcal{H}}}{dt} = - \int_V \frac{\lambda}{M^2} [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]^2 dv - \int_V \sigma^{(e)} \mathbf{E}^2 dv. \quad (2,14)$$

Здесь первое слагаемое определяет потери, связанные с релаксацией магнитного момента, а второе — с джоулевым теплом; величина $\sigma^{(e)}$ — представляет собой эффективную проводимость среды. Так как мы интересуемся низкими температурами, то следует, вообще говоря, учитывать тот факт, что длина свободного пробега электрона проводимости может быть порядка или даже значительно больше длины волны колебаний магнитного момента. В предельных случаях больших и малых длин свободного пробега величина $\sigma^{(e)}$ определяется следующими формулами:

$$\sigma^{(e)}(k) \approx \begin{cases} \sigma_0, & l \ll \delta, \\ \frac{\sigma_0}{kl}, & l \gg \delta, \end{cases} \quad (2,15)$$

где σ_0 — статическая электропроводность, δ — глубина скин-слоя, равная $\delta = \left(\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma_0} \right)^{1/2}$ (заметим, что величина $\sigma^{(e)}(k)$ связывает компоненты Фурье тока и поля).

Пренебрегая током смещения и, используя формулу (2,13), получим в предположении, что $\sigma^{(e)} \ll \frac{c^2 k^2}{\omega} \sim \frac{c^2 \hbar}{\theta_C}$, следующее значение Γ :

$$\Gamma = 8\pi^2 \frac{\sigma^{(e)} g M_0}{\hbar (ck)^2} (A_k + |B_k| + (A_k - |B_k|) \cos^2 \theta_k) + \frac{\lambda}{\mu M_0} (A_k - |B_k| + 2\pi \mu M_0 \sin^2 \theta_k). \quad (2,16)$$

Поглощение спиновых волн будет малым, если

$$\lambda \ll g M_0, \quad \sigma^{(e)} \ll \frac{(ck)^2}{g M_0}. \quad (2,17)$$

Эти неравенства и являются условиями существования спиновых волн.

Первое условие выполняется в широкой температурной области (это следует из факта существования ферромагнитного резонанса, так как частота ферромагнитного резонанса порядка $g M_0$, а ширина линии порядка λ). Из второго условия (2,17) следует, что для существования спиновой волны ее волновой вектор должен быть больше некоторого предельного значения k_0 , равного

$$k_0 = \begin{cases} \frac{1}{\delta_0}, & l \ll \delta_0 \\ (\delta_0^2 l)^{-1/3}, & l \gg \delta_0. \end{cases} \quad (2,17')$$

$$\text{где } \delta_0 = \left(\frac{c^2}{2\pi \sigma_0 g M_0} \right)^{1/2}.$$

Если $k \ll k_0$, то формулы (2,11), (2,11') и (2,11'') становятся несправедливыми и характер энергетического спектра резко меняется. Это соответствует случаю больших $\sigma^{(e)}$, когда выполняется неравенство $\sigma^{(e)} \gg \frac{c^2 k^2}{\omega_k}$. Поэтому следует специально рассматривать предельный случай $\sigma^{(e)} = \infty$. В этом случае, как и при $\sigma^{(e)} = 0$, диссипация энергии, связанная с джоулевым теплом, отсутствует. Электрическое поле равно нулю и $\mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m} = 0$. Из уравнения движения магнитного момента следует, что энергия элементарного возбуждения равна¹²

$$\epsilon_k = \hbar \omega_k = \mu M_0 \left(\alpha k^2 + \beta + \frac{B_0}{M_0} \right), \quad B_0 = H_0 + 4\pi M_0. \quad (2,18)$$

Этим спектром нужно пользоваться при $k \ll k_0$, что соответствует температурам $T \ll T_0$, $T_0 = \mu B_0 \left(\frac{\alpha^2 \sigma_0 \theta_C}{\hbar c^2} \right)^{1/2}$. С другой стороны, при $k \rightarrow 0$ энергия спиновой волны (2,18) стремится к конечному пределу $\epsilon_0 = \mu (B_0 + \beta M_0)$. Наличие этой активационной энергии приводит при очень низких температурах к экспоненциальной зависимости типа $e^{-\epsilon_0/T}$ для всех термодинамических величин, определяемых спектром спиновых волн. Поэтому их вклад в этой области температур в теплоемкость тела ничтожно мал.

При выводе формул для энергии спиновой волны мы не учитывали подвижности носителей спинов. Учет ее не приводит¹⁴ к изменению основной дисперсионной зависимости (2,11).

В рассмотренном феноменологическом методе введения спиновых волн мы понимали под M_0 магнитный момент насыщения ферромагнетика, соответствующий абсолютному нулю температуры. Однако, как ясно из вывода, аналогичным образом можно рассматривать малые колебания магнитного момента ферромагнетика при любой температуре, понимая под M_0 равновесное значение момента при данной температуре T . Мы получим таким образом магнитные волны, дисперсионные

свойства которых при $\sigma^{(e)} = 0$ не будут отличаться от дисперсионных свойств спиновых волн (2,11).

Эти магнитные волны соответствуют пренебрежению в линеаризованных уравнениях (2,10) током смещения. Если током смещения не пренебрегать, то мы получим электромагнитные волны сложного характера, дисперсионное уравнение которых имеет вид ¹²:

$$\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2 - \xi^2}\right) \left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2 - \xi^2} \cos^2 \theta_k\right) - x^2 = 0, \quad (2,19)$$

где

$$x = u \frac{\omega}{4\pi g M_0}, \quad u = \frac{4\pi \mu M_0}{A_k - |B_k| + 4\pi \mu M_0}, \quad \xi^2 = \frac{u^2}{\varepsilon} \left(\frac{ck}{4\pi g M_0}\right)^2,$$

θ_k — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{M}_0$ и ε — диэлектрическая постоянная.

Если $\xi^2 \gg 1$, это уравнение имеет решения:

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon} \left(1 \pm \frac{4\pi g M_0}{\omega} \cos \theta_k\right), \quad (2,20)$$

$$\hbar \omega = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2}.$$

Первое из них определяет частоту электромагнитных волн, распространяющихся в среде с гиротропной магнитной проницаемостью, равной для двух типов волн, соответствующих правой и левой круговым поляризациям:

$$\mu^+(\omega) = 1 - \frac{4\pi g M_0}{\omega} \cos \theta_k, \quad (2,20')$$

$$\mu^-(\omega) = 1 + \frac{4\pi g M_0}{\omega} \cos \theta_k.$$

Второе решение дает чисто магнитную волну, дисперсионные свойства которой совпадают с дисперсионными свойствами спиновых волн (2,11), (2,11').

При $\xi^2 \ll 1$ уравнение (2,19) дает:

$$\omega = ck \sqrt{\frac{1-u}{\varepsilon}}, \quad \omega = ck \sqrt{\frac{1-u \cos^2 \theta_k}{\varepsilon}}, \quad (2,21)$$

$$\omega = \frac{4\pi g M_0}{u} = g(B_0 + \beta M_0 + \alpha k^2 M_0). \quad (2,21')$$

Здесь формулы (2,21) определяют частоты электромагнитных волн, а формула (2,21') — частоту магнитных волн.

§ 3. Квантование спиновых волн

Покажем теперь, как, исходя из феноменологического гамильтониана ферромагнетика (2,3), построить квантовую теорию спиновых волн ¹³. Такая теория будет отличаться от теории спиновых волн, соответствующей простейшему обменному гамильтониану ферромагнетика (1,2) (см. § 1), в том отношении, что в ней будут учтены магнитное взаимодействие между спинами и энергия анизотропии, которые не учитывались (в 1,2).

Чтобы провести квантование спиновых волн, основываясь на гамильтониане (2,3), нужно, очевидно, связать компоненты магнитного момента ферромагнетика с операторами рождения и поглощения спиновых волн.

Компоненты полного магнитного момента тела $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ удовлетворяют, как известно, следующим условиям коммутации:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_y - \mathfrak{M}_y \mathfrak{M}_x &= -i\mu \mathfrak{M}_z, \\ \mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_z &= -i\mu \mathfrak{M}_y, \\ \mathfrak{M}_y \mathfrak{M}_z - \mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_y &= -i\mu \mathfrak{M}_x, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где $\mu = gh$ и g — гиромагнитное отношение. Переходя к компонентам плотности магнитного момента $M(\mathbf{r}, t)$, мы получим отсюда условия коммутации:

$$\left. \begin{aligned} M_x(\mathbf{r}, t) M_y(\mathbf{r}', t) - M_y(\mathbf{r}', t) M_x(\mathbf{r}, t) &= -i\mu M_z(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ M_z(\mathbf{r}, t) M_x(\mathbf{r}', t) - M_x(\mathbf{r}', t) M_z(\mathbf{r}, t) &= -i\mu M_y(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ M_y(\mathbf{r}, t) M_z(\mathbf{r}', t) - M_z(\mathbf{r}', t) M_y(\mathbf{r}, t) &= -i\mu M_x(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Для циркулярных проекций $M^\pm = M_x \pm iM_y$ эти соотношения имеют вид:

$$M^-(\mathbf{r}, t) M^+(\mathbf{r}', t) - M^+(\mathbf{r}', t) M^-(\mathbf{r}, t) = \mu M_z(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.3)$$

Введем теперь операторы $a(\mathbf{r}, t)$ и $a^+(\mathbf{r}, t)$, аналогичные операторам a и $a^\dagger$ (см. § 1) и связанные с M^+ , M^- и M_z соотношениями

$$\left. \begin{aligned} M^+ &= \sqrt{2\mu M_0} a^+ \left(1 - \frac{\mu a^+ a}{2M_0} \right)^{1/2}, \\ M^- &= \sqrt{2\mu M_0} \left(1 - \frac{\mu a^+ a}{2M_0} \right)^{1/2} a, \\ M_z &= M_0 - \mu a^+ a. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Операторы a^+ и a удовлетворяют условиям коммутации

$$a(\mathbf{r}, t) a^+(\mathbf{r}', t) - a^+(\mathbf{r}', t) a(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.5)$$

Если рассматривать состояния, близкие к насыщению, то средние значения величины $\frac{\mu}{2M_0} a^+ a$ будут малы по сравнению с единицей. Поэтому для таких состояний можно разложить радикал по степеням $\frac{\mu}{2M_0} a^+ a$. Учитывая только первые два члена в этом разложении, которые нам только и понадобятся в дальнейшем, перепишем (3.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} M^+ &\equiv m^+ = \sqrt{2\mu M_0} \left(a^+ - \frac{\mu}{4M_0} a^+ a^+ a \right), \\ M^- &\equiv m^- = \sqrt{2\mu M_0} \left(a - \frac{\mu}{4M_0} a^+ a a \right), \\ m_z &\equiv M_z - M_0 = -\mu a^+ a. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Перейдем к компонентам Фурье величин a, a^+, m :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad a^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ m(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Легко видеть, что операторы $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^+$ удовлетворяют условиям коммутации

$$a_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}'}^+(t) - a_{\mathbf{k}'}^+(t) a_{\mathbf{k}}(t) = \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.8)$$

где

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} = 0 \\ 0, & \mathbf{k} \neq 0. \end{cases}$$

Используя (3,6), найдем:

$$\left. \begin{aligned} m_{\mathbf{k}}^+ &= \sqrt{2\mu M_0} \left(a_{-\mathbf{k}}^+ - \frac{\mu}{4M_0V} \sum_{123} a_1^+ a_2^+ a_3 \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right), \\ m_{\mathbf{k}}^- &= \sqrt{2\mu M_0} \left(a_{\mathbf{k}} - \frac{\mu}{4M_0V} \sum_{123} a_1^+ a_2 a_3 \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right), \\ m_{\mathbf{k}}^z &= -\frac{\mu}{V\sqrt{V}} \sum_{12} a_1^+ a_2 \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

где $a_i = a_{\mathbf{k}_i}$ и суммирование производится по соответствующим волновым векторам.

Вернемся теперь к классическому гамильтониану ферромагнетика (2,3), который будем обозначать через $\mathcal{H}_s$:

$$\mathcal{H}_s = \int_V \left(\frac{1}{2} \alpha_{ih} \frac{\partial M_l}{\partial x_l} \frac{\partial M_l}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \beta (\mathbf{Mn})^2 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) dv,$$

и рассмотрим состояния, близкие к равновесному. Раскладывая гамильтониан по малым отклонениям магнитного момента и поля $\mathbf{m} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$ и $\mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$, получим, учитывая члены четвертого порядка малости, следующее выражение для $\mathcal{H}_s$:

$$\mathcal{H}_s = \int_V \left(\frac{1}{2} \alpha_{ih} \frac{\partial m_l}{\partial x_l} \frac{\partial m_l}{\partial x_h} - (\beta M_0 + H_0) m_z + \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} - \frac{1}{2} \beta m_z^2 \right) dv \quad (3,10)$$

(заметим, что m_x и m_y являются величинами первого порядка малости, а величина m_z — второго порядка, так как $(\mathbf{M}_0 + \mathbf{m})^2 = M_0^2$).

Рассматривая так же, как и ранее, только низкочастотные колебания и переходя к компонентам Фурье, перепишем $\mathcal{H}_s$ в виде

$$\mathcal{H}_s = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{ih} k_i k_h \mathbf{m}_{\mathbf{k}} \mathbf{m}_{-\mathbf{k}} - V^{1/2} (\beta M_0 + H_0) m_{\mathbf{k}}^z \Delta(\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + 2\pi \frac{(\mathbf{k} \mathbf{m}_{\mathbf{k}})(\mathbf{k} \mathbf{m}_{-\mathbf{k}})}{k^2} - \frac{1}{2} \beta m_{\mathbf{k}}^z m_{-\mathbf{k}}^z \right\} \quad (3,11)$$

(мы воспользовались соотношением $\mathbf{h}_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}_{\mathbf{k}} \mathbf{k})$).

Для того чтобы получить из классического гамильтониана (3,11) квантовый гамильтониан, мы будем считать в формуле (3,11) $m_{\mathbf{k}}^x$, $m_{\mathbf{k}}^y$ и $m_{\mathbf{k}}^z$ операторами, связанными с операторами $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^+$ соотношениями (3,9). В переменных $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^+$ гамильтониан $\mathcal{H}_s$ имеет вид:

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s^{(0)} + \mathcal{H}_s^{(3)} + \mathcal{H}_s^{(4)}, \quad (3,12)$$

где

$$\mathcal{H}_s^{(0)} = \sum_{\mathbf{k}} \left(A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} B_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + \frac{1}{2} B_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+ \right), \quad (3,13)$$

$$\mathcal{H}_s^{(3)} = \sum_{123} \Phi_{12;3} a_1^+ a_2^+ a_3 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \text{сопр.}, \quad (3,14)$$

$$\mathcal{H}_s^{(4)} = \sum_{1234} \Phi_{12;34} a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + \\ + \sum_{1234} \Phi_{1;234} a_1^+ a_2 a_3 a_4 \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + \text{сопр.}, \quad (3,15)$$

$$\Phi_{12;3} = -\frac{\pi\mu}{2\sqrt{V}} \sqrt{2\mu M_0} (\sin 2\theta_1 e^{-i\varphi_1} + \sin 2\theta_2 e^{-i\varphi_2}), \quad (3,14')$$

$$\Phi_{12;34} = -\frac{\mu^2}{8V} \left(\alpha(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_4) + 2\beta + \pi(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_4) - \right. \\ \left. - 2\pi \left[\frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4)_z^2}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4)^2} + \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)_z^2}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2} + \frac{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4)_z^2}{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4)^2} + \frac{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)_z^2}{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)^2} \right] \right), \quad (3,15')$$

$$\Phi_{1,234} = -\frac{\pi\mu^2}{6V} (\sin^2\theta_2 e^{2i\varphi_2} + \sin^2\theta_3 e^{2i\varphi_3} + \sin^2\theta_4 e^{2i\varphi_4}) \quad (3,15'')$$

(первое слагаемое в (3,15') связано с обменным взаимодействием, а остальные слагаемые — с энергией анизотропии и дипольным магнитным взаимодействием).

Квадратичный относительно $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^*$ оператор $\mathcal{H}_s^{(0)}$ представляет собой основной гамильтониан свободных спиновых волн. Операторы $\mathcal{H}_s^{(3)}$ и $\mathcal{H}_s^{(4)}$ описывают взаимодействие между спиновыми волнами и детальнее будут рассмотрены в § 9. Собственные значения оператора $\mathcal{H}_s^{(0)}$ представляют собой возможные значения энергии ферромагнетика.

Выражение (3,13) отличается от гамильтониана обменного взаимодействия (1,9) тем, что в него входят добавочные члены, пропорциональные $B_{\mathbf{k}}$ и содержащие произведения операторов $a_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^*a_{-\mathbf{k}}^*$. Эти члены, связанные с дипольным взаимодействием спинов, не коммутируют с $a_{\mathbf{k}}^*a_{\mathbf{k}}$ и поэтому для диагонализации гамильтониана $\mathcal{H}_s^{(0)}$ нужно предварительно произвести некоторое каноническое преобразование переменных $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^*$.

Введем вместо $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^*$ новые переменные $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^*$:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^*c_{-\mathbf{k}}^*, \\ a_{\mathbf{k}}^* &= u_{\mathbf{k}}^*c_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3,16)$$

где $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ — некоторые c -числа. Для того чтобы операторы $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^*$ удовлетворяли условиям коммутации

$$c_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}'}^* - c_{\mathbf{k}}^*c_{\mathbf{k}} = \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

необходимо подчинить величины $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ единственному условию

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1.$$

Подберем теперь $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ таким образом, чтобы в переменных $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^*$ гамильтониан $\mathcal{H}_s^{(0)}$ был диагональным. Воспользуемся для этого уравнением движения

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_s^{(0)}, a_{\mathbf{k}}] = -\frac{i}{\hbar} A_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\hbar} B_{\mathbf{k}}^*a_{-\mathbf{k}}^*.$$

Подставляя сюда (3,16), получим:

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\hbar} (A_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^*v_{-\mathbf{k}})c_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\hbar} (A_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}^* + B_{\mathbf{k}}^*u_{-\mathbf{k}}^*)c_{-\mathbf{k}}^*. \quad (3,17)$$

С другой стороны,

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\dot{c}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^*\dot{c}_{-\mathbf{k}}^*. \quad (3,17')$$

Так как мы хотим, чтобы в переменных $c_{\mathbf{k}}$ гамильтониан $\mathcal{H}_s^{(0)}$ был диагональным, то операторы $c_{\mathbf{k}}$ должны изменяться со временем по

*) Мы следуем ниже методу, развитому Н. Н. Боголюбовым и С. В. Тябликом 15.

закону $e^{-i \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} t}{\hbar}}$. Поэтому формула (3,17') может быть переписана в виде

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\hbar} u_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\hbar} v_{\mathbf{k}}^* \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^+$$

(здесь предполагается, что $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{-\mathbf{k}}$; в дальнейшем это оправдывается). Сравнивая это выражение с (3,17), получим:

$$(A_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^* v_{-\mathbf{k}} = 0,$$

$$B_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + (A_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} = 0,$$

откуда ¹³

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}} &= \sqrt{A_{\mathbf{k}}^2 - |B_{\mathbf{k}}|^2}, \\ u_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{A_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}}, \quad v_{\mathbf{k}} = -\frac{B_{\mathbf{k}}}{|B_{\mathbf{k}}|} \sqrt{\frac{A_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}} \end{aligned} \quad (3,18)$$

(произвольный фазовый множитель в $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ выбран равным единице).

Полученное выражение для $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ совпадает с найденной ранее формулой для энергии спиновой волны.

Гамильтониан (3,13) в переменных $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^+$ имеет вид:

$$\mathcal{H}_s^{(0)} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}}; \quad (3,13')$$

Отсюда видно, что его собственные значения равны

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \quad (3,19)$$

где $n_{\mathbf{k}}$ произвольные положительные целые числа. Величина $n_{\mathbf{k}}$ представляет собой число спиновых волн с волновым вектором $\mathbf{k}$.

Отличные от нуля матричные элементы $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^+$ равны в представлении, где оператор $\mathcal{H}_s^{(0)}$ диагонален,

$$\begin{aligned} (n_{\mathbf{k}} - 1 | c_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}}) &= \sqrt{n_{\mathbf{k}}} e^{-i \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} t}{\hbar}}, \\ (n_{\mathbf{k}} | c_{\mathbf{k}}^+ | n_{\mathbf{k}} - 1) &= \sqrt{n_{\mathbf{k}}} e^{i \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} t}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (3,20)$$

Поэтому $c_{\mathbf{k}}^+$ можно интерпретировать как оператор рождения, а $c_{\mathbf{k}}$ — как оператор поглощения спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}$.

Отметим, что именно операторы $c_{\mathbf{k}}^+$ и $c_{\mathbf{k}}$, а не $a_{\mathbf{k}}^+$, $a_{\mathbf{k}}$ являются операторами рождения и поглощения спиновых волн.

Отличие $c_{\mathbf{k}}$ от $a_{\mathbf{k}}$ обусловлено магнитным взаимодействием, а также энергией анизотропии, которые не учитываются в гамильтониане (1,9).

Выразим через переменные $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^+$ операторы проекций полного магнитного момента ферромагнетика $\mathfrak{M}^z$ и $\mathfrak{M}^{\pm}$ (ось z направлена вдоль равновесного направления магнитного момента). Согласно (3,6)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}^z &= \int_V M_z dv = M_0 V - \mu \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} = M_0 V - \mu \sum_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 - \\ &- \mu \sum_{\mathbf{k}} (|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} - \mu \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+), \\ \mathfrak{M}^+ &= \int_V M^+ dv = \sqrt{2\mu M_0 V} (u_0^* c_0^+ + v_0 c_0), \\ \mathfrak{M}^- &= \int_V M^- dv = \sqrt{2\mu M_0 V} (u_0 c_0 + v_0^* c_0^+), \end{aligned} \right\} \quad (3,21)$$

где c_0 и c_0^+ — значения $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^+$ при $\mathbf{k} = 0$.

В состоянии с определенным значением энергии средние квантово-механические значения операторов $\mathfrak{M}_z$ и $\mathfrak{M}^\pm$ равны

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{M}_z \rangle &= MV - \sum_{\mathbf{k}} \mu_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \\ \langle \mathfrak{M}^\pm \rangle &= 0,\end{aligned}\quad (3,22)$$

где $n_{\mathbf{k}}$ — число спиновых волн с волновым вектором $\mathbf{k}$ и

$$\begin{aligned}M &= M_0 - \frac{\mu}{V} \sum_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 = M_0 - \frac{\mu}{2(2\pi)^3} \int \frac{A_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} d\mathbf{k}, \\ \mu_{\mathbf{k}} &= -\mu(|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) = -\frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}}{\partial H_0}.\end{aligned}\quad (3,23)$$

Выражение для $\mathfrak{M}_z$ показывает, что величину $\mu_{\mathbf{k}}$ можно интерпретировать как среднее значение проекции на ось z магнитного момента спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}$. Эта величина отличается от μ , причем отличие вызывается, очевидно, дипольным взаимодействием спинов и энергией анизотропии. Благодаря этим же взаимодействиям среднее значение проекции магнитного момента ферромагнетика на ось z отличается от величины M_0 даже в отсутствие спиновых волн, т. е. при абсолютном нуле³.

§ 4. Высокочастотные свойства ферромагнетиков и ферромагнитный резонанс

До сих пор мы изучали свойства спиновых волн в неограниченном ферромагнетике. Ряд эффектов обусловлен, однако, конечными размерами тела. Эти эффекты в первую очередь проявляются в высокочастотных свойствах ферромагнетиков. Мы перейдем теперь к их изучению.

Высокочастотные свойства ферромагнетика описываются системой уравнений Максвелла (2,6) и уравнением движения магнитного момента (2,12). Последнее уравнение определяет связь между магнитным моментом и магнитным полем. В случае плоских монохроматических волн это уравнение может быть решено в линейном приближении относительно магнитного момента:

$$m_i = \chi_{ih} h_h, \quad (4,1)$$

где

$$\chi_{ih} = \frac{g M_0 \Omega}{\Omega^2 - \left(\omega - i\Omega \frac{\lambda}{g M_0} \right)^2} \begin{pmatrix} 1 - i \frac{\lambda}{g M_0} \frac{\omega}{\Omega} + \left(\frac{\lambda}{g M_0} \right)^2, & i \frac{\omega}{\Omega}, & 0 \\ -i \frac{\omega}{\Omega}, & 1 - i \frac{\lambda}{g M_0} \frac{\omega}{\Omega} + \left(\frac{\lambda}{g M_0} \right)^2, & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4,2)$$

и

$$\Omega = g M_0 \left(\alpha k^2 + \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right) \quad (4,3)$$

(постоянное магнитное поле $H_0^{(i)}$ внутри тела предполагается направленным вдоль оси легчайшего намагничивания).

В общем случае при $\lambda \neq 0$ тензор χ_{ih} не является эрмитовым, причем его антиэрмитова часть $\chi_{ih} - \chi_{hi}^*$ определяет, как известно¹⁶, мощность потерь магнитной энергии в теле. При $\lambda = 0$, т. е. в пренебрежении диссипативными процессами, тензор χ_{ih} будет эрмитовым, $\chi_{ih} = \chi_{hi}^*$. Гиротропия, т. е. наличие мнимых недиагональных компонент $\chi_{xy} = -\chi_{yx}$,

обусловлена вращением магнитного момента вокруг эффективного магнитного поля.

Тензор χ_{ik} зависит не только от частоты ω , но и от волнового вектора $\mathbf{k}$. Это свойство носит название пространственной дисперсии. Она обусловлена обменным взаимодействием между атомами.

В то время как при рассмотрении тепловых и магнитных свойств ферромагнетика зависимость частоты спиновой волны от волнового вектора играет определяющую роль, в его высокочастотных свойствах пространственная дисперсия проявляется очень редко. Это связано с тем, что слагаемое ak^2 практически всегда пренебрежимо мало, так как $ak^2 = \frac{\theta_C}{\mu M_0} (ak)^2 \ll 1$, если длина волны, равная $\frac{2\pi}{k}$, значительно больше сотни атомных расстояний. Пренебрежение пространственной дисперсией

возможно, когда частота не слишком близка к частоте $\omega_0 = gM_0 \left(\beta + \frac{H_0^{(i)}}{M} \right)$.

При $\omega \approx \omega_0$ членом $gM_0 ak^2$ нельзя пренебрегать. Можно думать, что учет пространственной дисперсии будет приводить к тем же особенностям в распространении электромагнитных волн, которые имеют место в диэлектриках вблизи линии экситонного поглощения^{17, 18}.

При $\lambda = 0$ компоненты тензора χ_{ik} могут обращаться в бесконечность (при частоте $\omega = \omega_0$), что указывает на возможность резонансного поглощения энергии магнитного поля ферромагнетиком. В действительности резонансное поглощение наблюдается не на частоте ω_0 , а на частотах собственных колебаний магнитного момента ферромагнетика конечных размеров. Отличие этих частот от ω_0 связано с учетом граничных условий на поверхности тела (эффект формы).

Полная система уравнений, описывающая собственные колебания магнитного момента, имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{внутри тела} \quad & \text{rot } \mathbf{h} = 0, \\ & \text{div } (\mathbf{h} + 4\pi\hat{\chi}\mathbf{h}) = 0 \end{aligned} \quad (4,4)$$

и вне тела

$$\begin{aligned} & \text{rot } \mathbf{h} = 0, \\ & \text{div } \mathbf{h} = 0, \end{aligned} \quad (4,5)$$

где тензор χ_{ik} определяется выражением (4,2), в котором следует положить $\lambda = 0$, а также опустить слагаемое $gM_0 ak^2$:

$$\chi_{ik} = \frac{gM_0\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\omega}{\omega_0} & 0 \\ -i\frac{\omega}{\omega_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4,6)$$

Пренебрежение пространственной дисперсией допустимо при не слишком коротких волнах и не слишком малых размерах тела, когда выполняются неравенства $L, \lambda \gg \left(\frac{\theta_C}{\mu M_0} \right)^{1/2} a$, где L — размеры тела.

Мы пользуемся здесь уравнениями магнитостатики, так как предполагаем, что собственные частоты не слишком велики $\left(\frac{c}{\omega} \gg L \right)$, а также считаем, что ферромагнетик является диэлектриком, т. е. $j = 0$.

Кроме того, говорить о собственных колебаниях можно только тогда, когда затухание достаточно мало. Если δ — длина затухания, которую легко получить, используя формулы (2,16) и (2,17'), то должно иметь место также условие $\delta \gg L$.

К системе уравнений (4,4), (4,5) необходимо добавить граничные условия: непрерывность тангенциальных составляющих магнитного поля $\mathbf{h}$ и нормальных составляющих магнитной индукции $\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\hat{\chi}\mathbf{h}$ на поверхности тела, а также условие обращения в нуль магнитного поля вдали от тела.

Сформулированная задача может быть решена для ферромагнетиков эллипсоидальной формы (Л. Уокер¹⁹). Среди собственных колебаний эллипсоида существует колебание с однородным полем внутри эллипсоида. Частота такого колебания называется частотой однородного резонанса*). Определим эту частоту (Ч. Киттель²⁰).

Как известно¹⁶, однородное поле внутри эллипсоида $\mathbf{h}^{(1)}$ связано с полем на бесконечности $\mathbf{h}^{(0)}$ следующим соотношением:

$$h_i^{(1)} + 4\pi n_{ik} \chi_k h_s^{(1)} = h_i^{(0)}, \quad (4,7)$$

где n_{ik} — тензор размагничивающих факторов эллипсоида, который определяется отношениями между осями, но не зависит от размеров тела. Так как $\mathbf{h}^{(0)} = 0$, то условием существования отличного от нуля магнитного поля внутри эллипсоида является равенство нулю детерминанта

$$\det |\delta_{ik} + 4\pi n_{is} \chi_{sk}| = 0. \quad (4,8)$$

Отсюда, используя выражение (4,6), для χ_{ik} легко найти значение частоты однородного резонанса²⁰

$$\omega_r = g \sqrt{[H_0^{(e)} + 4\pi M_0 (n_1 - n_3)] [H_0^{(e)} + 4\pi M_0 (n_2 - n_3)]}, \quad (4,9)$$

где $H_0^{(e)} = H_0 + \beta M_0$, H_0 — постоянное поле вдали от эллипсоида, n_j — главные значения тензора n_{ik} , причем $\sum_j n_j = 1$.

При получении формулы (4,9) мы предполагали, что одна из осей эллипсоида (ось 3) совпадает с осью легчайшего намагничения и что внешнее постоянное поле также параллельно этой оси.

В случае сферы $n_1 = n_2 = n_3 = 1/3$ и

$$\omega_r = g H_0^{(e)}. \quad (4,10)$$

Для цилиндра, ось которого совпадает с осью легчайшего намагничения, $n_1 = n_2 = 1/2$; $n_3 = 0$ и

$$\omega_r = g (H_0^{(e)} + 2\pi M_0). \quad (4,11)$$

Для цилиндра, ось которого перпендикулярна оси легчайшего намагничения, $n_1 = 0$, $n_2 = n_3 = 1/2$ и

$$\omega_r = g \sqrt{H_0^{(e)} (H_0^{(e)} - 2\pi M_0)}. \quad (4,12)$$

Напомним, что для намагничения цилиндрического образца до насыщения в этом случае необходимо, чтобы внешнее постоянное магнитное поле было больше, чем $2\pi M_0$.

Для пластинки, поверхность которой параллельна оси легчайшего намагничения, $n_1 = n_3 = 0$, $n_2 = 1$ (ось 2 направлена вглубь тела) и

$$\omega_r = g \sqrt{H_0^{(e)} (H_0^{(e)} + 4\pi M_0)}. \quad (4,13)$$

*) Для наблюдения однородного резонанса ферромагнитный эллипсоид помещается в однородные постоянное и переменное магнитные поля и определяются потери энергии как функции постоянного внешнего магнитного поля при фиксированной частоте переменного поля. При совпадении собственной частоты с частотой переменного поля наблюдается резкое возрастание потерь энергии

Наконец, для пластинки, ось легчайшего намагничивания которой перпендикулярна поверхности, $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 1$ и

$$\omega_r = g(H_0^{(e)} - 4\pi M_0). \quad (4,14)$$

В этом случае пластинка намагничивается до насыщения, если $H_0^{(e)} > 4\pi M_0$.

Наблюдение однородного резонанса является важным методом определения ряда констант, характеризующих ферромагнетик, в первую очередь величины g , а также времени релаксации *).

Наряду с однородным колебанием существуют также собственные колебания, при которых магнитное поле внутри тела неоднородно.

Частоты этих колебаний носят название частот неоднородного резонанса **).

Вычисление частот неоднородного резонанса в случае эллипсоида весьма громоздко, и мы не будем его здесь производить (см. работы ^{19, 23}). Для того чтобы проиллюстрировать особенности спектра частот неоднородного резонанса, мы рассмотрим магнитные колебания пластинки, помещенной в постоянное поле, направленное перпендикулярно ее поверхности (ось легчайшего намагничивания совпадает с направлением магнитного поля). Согласно (4,14) частота

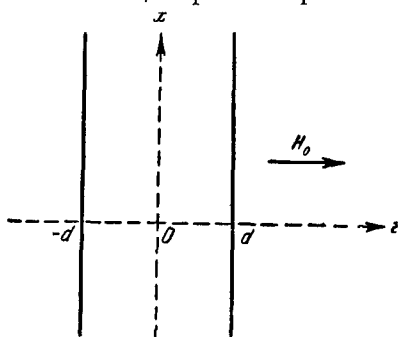


Рис. 1.

однородного резонанса в этом случае равна $\omega_r = gM_0 \left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta \right)$.

Если ввести потенциал ψ , связанный с магнитным полем h соотношением $h = -\nabla\psi$, и предположить, что зависимость поля от координат в плоскости пластинки имеет вид $e^{i\kappa\mathbf{q}}$, где $\mathbf{q}$ — плоский вектор с компонентами x , y , а κ — волновой вектор, лежащий в плоскости (x, y) (см. рис. 1), то уравнения (4,4), (4,5) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \kappa_{(i)}^2 \psi = 0, \quad |z| < d, \quad (4,15)$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \kappa^2 \psi = 0, \quad |z| > d, \quad (4,15')$$

где

$$\kappa_{(i)}^2 = -\kappa^2 \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (4,16)$$

а

$$\omega_1^2 = g^2 (H_0^{(i)} + \beta M_0) (H_0^{(i)} + 4\pi M_0 + \beta M_0). \quad (4,17)$$

Граничные условия в этом случае сводятся к непрерывности функции ψ и ее производной по z на границе пластинки, т. е. при $z = \pm d$, а также к равенству нулю ψ при $z \rightarrow \pm \infty$.

В силу симметрии задачи решения разделяются на два класса: симметричные и антисимметричные. Из уравнения (4,15') и граничных

*) Эффект формы, т. е. зависимость резонансной частоты от размагничивающих факторов, был впервые обнаружен Гриффитсом ²¹ на пластинке в постоянном поле, параллельном ее поверхности.

**) Резонансное поглощение энергии на этих частотах было обнаружено экспериментально ²². Для наблюдения неоднородного резонанса ферромагнитный эллипсоид помещается в неоднородное квазистатическое магнитное поле.

условий на бесконечности видно, что вне пластинки поле экспоненциально затухает с ростом $|z|$. Внутри пластинки симметричное решение имеет вид:

$$\psi_s^{(i)} = A \cos \kappa_i z,$$

а антисимметричное —

$$\psi_a^{(i)} = B \sin \kappa_i z.$$

Условия на границах пластинки приводят к дисперсионному уравнению, т. е. к связи между частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Для симметричного решения дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\operatorname{ctg} v = \frac{v}{u}, \quad (4,18)$$

а для антисимметричного —

$$\operatorname{tg} v = -\frac{v}{u}, \quad (4,19)$$

где $u = \kappa d$, а $v = \kappa_i d$.

Так как $u > 0$, то решения дисперсионных уравнений (4,18) и (4,19) существуют только при $\kappa_i^2 > 0$, т. е. все частоты неоднородного резонанса лежат между ω_0 и ω_1 (см. (4,16)).

Согласно (4,16) резонансная частота может быть представлена в виде

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 v^2 + \omega_1^2 u^2}{u^2 + v^2}, \quad (4,20)$$

где u и v связаны соотношением (4,18) для симметричного решения и соотношением (4,19) для антисимметричного решения.

Уравнения (4,18), (4,19) имеют бесчисленное множество решений, каждое из которых является непрерывной функцией волнового вектора $\mathbf{k}$. Поэтому частоты неоднородного резонанса мы будем обозначать через $\omega_n^s(\mathbf{k})$ и $\omega_n^a(\mathbf{k})$, где n — номер решения и индексы s и a относятся соответственно к симметричному и антисимметричному решениям.

Рассмотрим некоторые свойства частот неоднородного резонанса. Из формул (4,18), (4,19) и (4,20) видно, что

$$\omega_n^{(s, a)}(\mathbf{k}) \approx \begin{cases} \omega_0, & \kappa d \ll \pi, \\ \omega_1, & \kappa d \gg \pi, \end{cases}$$

т. е. с возрастанием номера решения и при фиксированном $\mathbf{k}$ частоты приближаются к величине ω_0 , а с возрастанием $\mathbf{k}$ при фиксированном n — к ω_1 . При малых $\mathbf{k}$ разложение по степеням $\mathbf{k}$ начинается для $\omega_1^s(\mathbf{k})$ с линейного члена, а для остальных частот неоднородного резонанса — с квадратичного члена по $\mathbf{k}$.

Спектр собственных частот ограниченного тела, например, эллипсоида, является дискретным¹⁹, и каждая его частота характеризуется тремя дискретными индексами. Для того, чтобы получить представление о характере спектра в случае ограниченного тела, рассмотрим колебания пластинки, наложив на них условие периодичности вдоль осей x и y , т. е. считая компоненты волнового вектора κ_x и κ_y равными

$$\kappa_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad \kappa_y = \frac{2\pi}{L} n_y,$$

где n_x и n_y — целые числа, а L — длина периода. Используя эти значения κ_x и κ_y , можно представить резонансную частоту пластинки в виде

$$\omega = \omega_n^{(s, a)} \left(2\pi \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \frac{d}{L} \right).$$

Мы видим, что при увеличении размеров пластинки ($L, d \rightarrow \infty$) дискретность спектра сохраняется, если только отношение $\frac{d}{L}$ остается конечным.

Рассмотренные здесь на примере пластинки свойства спектра частот неоднородного резонанса — наличие двух точек сгущения $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_1$, а также тот факт, что частоты зависят от отношения размеров, имеют место также и для эллипсоида¹⁹.

Отметим, что собственные частоты неоднородного резонанса в случае пластинки представляя собой частоты спиновых волн при $k \rightarrow 0$. Действительно, пренебрегая в формуле (2,11 — 11') для частоты спиновой волны величиной αk^2 по сравнению с $\frac{H_0^{(e)}}{M_0}$ [и заменяя $\sin^2 \theta_k$ на $\frac{k^2}{k^2 + k_i^2}$], мы получим формулу (4,20). Таким образом, учет граничных условий сводится к нахождению величины $\sin^2 \theta_k$ при $k \rightarrow 0$.

При вычислении частот неоднородного резонанса мы не учитывали пространственной дисперсии, что законно до тех пор, пока $\alpha k^2 = \alpha(k^2 + k_i^2) \ll 1$. Это условие можно переписать следующим образом:

$$k^2 + n^2 \frac{\pi^2}{d^2} \ll \frac{\mu M_0}{\theta_C} \frac{1}{a^2}.$$

Последнее неравенство нарушается при $n \neq 0$, если пластинка достаточно тонкая; в этом случае необходим учет пространственной дисперсии.

Вычислим собственные частоты пластинки с учетом пространственной дисперсии²⁴. Будем по-прежнему считать, что ось легчайшего намагничивания и внешнее постоянное магнитное поле перпендикулярны поверхности пластинки. Кроме того, для простоты будем предполагать, что в плоскости пластинки поле и магнитный момент однородны, т. е. все величины зависят только от координаты z . Так как проекция момента m_z равна нулю, то $\text{div } \mathbf{m}$ в этом случае равна нулю. Поэтому магнитное поле $\mathbf{h}$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{div } \mathbf{h} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{h} = 0 \quad (4,21)$$

во всем пространстве. Эти уравнения, вместе с граничными условиями $\mathbf{h} = 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, имеют, очевидно, только тривиальное решение $\mathbf{h} = 0$. Отсюда следует, что нетривиальное решение для магнитного момента, связанного с магнитным полем $\mathbf{h}$ соотношением

$$\mathbf{m} = \hat{\chi} \mathbf{h} \quad \text{или} \quad \mathbf{h} = \hat{\chi}^{-1} \mathbf{m},$$

будет существовать только при тех частотах, при которых обращается в нуль детерминант

$$\det |\chi_{ik}^{-1}| = 0,$$

т. е. при тех частотах, при которых детерминант χ_{ik} обращается в бесконечность. Используя формулу (4,2) для χ_{ik} и полагая $\lambda = 0$, получим следующее выражение для собственной частоты пластинки:

$$\omega = \Omega = \omega_0 + \frac{\theta_C}{\hbar} \left(\frac{a}{d} \right)^2 v^2, \quad v = k_z d. \quad (4,22)$$

Это выражение для ω , естественно, совпадает с частотой спиновой волны (2,11 — 11') при $\theta_k = 0$.

Допустимые значения волнового вектора k_z должны быть определены из граничных условий. Кроме обычных граничных условий для $\mathbf{h}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}$, которые при $\mathbf{h} = 0$, $m_z = 0$ выполняются автомати-

чески, следует учесть еще граничные условия для магнитного момента $\mathbf{m}$, так как при наличии пространственной дисперсии уравнение движения магнитного момента (2,4) содержит производные по координатам.

Для вывода граничных условий необходимо рассмотреть движение магнитного момента вблизи поверхности ферромагнетика. Так как уравнения движения магнитного момента содержат пространственные производные второго порядка, то граничные условия заключаются в равенстве нулю линейной комбинации из момента и его производной по нормали к поверхности. Если основную роль играют обменные силы, то граничные условия имеют вид ²⁵:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_n} \right|_s = 0; \quad (4,23)$$

если на поверхности имеется большая дополнительная энергия анизотропии ²⁴, то

$$\mathbf{m}|_s = 0. \quad (4,24)$$

В силу симметрии задачи решения распадаются на два класса: симметричные ($\sim \cos k_z d$) и антисимметричные ($\sim \sin k_z d$).

Допустимые значения k_z , от которых зависит частота ω , определяются из граничных условий (4,23) и (4,24).

Если имеет место условие (4,23), то для симметричного решения

$$\sin v = 0, \quad (4,25)$$

откуда $v = n\pi$; для антисимметричного решения

$$\cos v = 0, \quad (4,26)$$

откуда $v = (n + 1/2)\pi$.

Если имеет место условие (4,24), то для симметричного решения

$$\cos v = 0, \quad (4,27)$$

откуда $v = (n + 1/2)\pi$, а для антисимметричного решения

$$\sin v = 0, \quad (4,28)$$

откуда $v = n\pi$.

Таким образом, собственные частоты колебаний магнитного момента в ферромагнитной пластинке с учетом пространственной дисперсии определяются выражением (4,22), в котором v представляет собой решение уравнений (4,25) — (4,28). Эти частоты представляют собой, очевидно, частоты стоячих спиновых волн. Резонанс на них естественно назвать резонансом на стоячих спиновых волнах.

Как видно из формулы (4,22), расстояние между соседними частотами по порядку величины равно $\frac{\theta_C}{h} \left(\frac{a}{d} \right)^2 \pi \hbar$. Поэтому для наблюдения резонанса на стоячих спиновых волнах используют тонкие пленки ²⁶ ($d \sim 5600 \text{ \AA}$). Измерение расстояния между резонансными частотами позволяет экспериментально определить константу обменного взаимодействия. Полученное в работе ²⁶ значение для константы обменного взаимодействия $A = \theta_C a^2 \frac{M_0}{\mu}$ в пермаллое (80 — 20%) равно $\sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/см.}$

§ 5. Поверхностный импеданс ферромагнетиков

В предыдущем параграфе мы рассмотрели собственные колебания магнитного момента в ограниченных образцах. При этом характерные размеры тела L предполагались значительно меньше длины затухания δ . В массивном ферромагнитном металле это условие благодаря скин-

эффекту не выполняется, а имеет место противоположный предельный случай, к рассмотрению которого мы и переходим. Если скин-глубина проникновения не только значительно меньше размеров тела, но и длины волны в вакууме $\delta \ll \frac{c}{\omega}$, то высокочастотные свойства тела удобно описывать тензором поверхностного сопротивления (импедансом) ζ_{ik} , определяемым следующим образом¹⁶:

$$\mathbf{E}_t = \hat{\zeta} [\mathbf{H}_t, \mathbf{n}], \quad (5,1)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к телу, а $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$ — тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на поверхности тела.

Заметим, что благодаря условию $\delta \ll \frac{c}{\omega}$ импеданс практически не зависит от угла падения электромагнитной волны²⁷, что позволяет производить расчет импеданса в простейшем случае нормального падения волны на поверхность металла.

Высокочастотные свойства ферромагнитного металла описываются уравнениями Максвелла, в которых переменная часть индукции $\mathbf{b}$ связана с переменным полем $\mathbf{h}$ соотношением

$$b_i = \mu_{ik} h_k, \quad (5,2)$$

а плотность тока j_i равна

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \quad (5,3)$$

Так как ферромагнетик обладает свойством гиротропии, то тензор магнитной восприимчивости и тензор электропроводности имеют вид:

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad (5,4)$$

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & i\sigma_2 & 0 \\ -i\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (5,5)$$

Значение величин μ_1 , μ_2 и μ_3 легко получить, используя выражение (4,6) для χ_{ik} :

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\Omega \left(\Omega + 4\pi g M_0 \right) - \left(\omega - i\Omega \frac{\lambda}{g M_0} \right)^2 - 4\pi i \omega \lambda}{\Omega^2 - \left(\omega - i\Omega \frac{\lambda}{g M_0} \right)^2}, \\ \mu_2 &= \frac{4\pi g M_0 \omega}{\Omega^2 - \left(\omega - i\Omega \frac{\lambda}{g M_0} \right)^2}, \\ \mu_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5,4')$$

Заметим, что «косые» компоненты тензора σ_{ik} ($\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$) описывают эффект Холла¹⁶.

Определим поверхностное сопротивление в том случае, когда постоянное магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси легчайшего намагничивания, параллельно поверхности металла, который занимает полупространство $y > 0$ (см. рис. 2). Уравнения Максвелла в этом случае

записываются следующим образом:

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + i \frac{\omega}{c} \left(\mu_1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1} \right) \right] H_x = 0, \quad (5,6)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} + 4\pi \frac{\sigma_3}{c} E_z = 0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - i \frac{\omega}{c} \mu_3 H_z = 0, \quad (5,7)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{4\pi}{c} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \right) E_x = 0.$$

Мы предполагаем, что все величины зависят только от координаты y и меняются со временем по закону $e^{i\omega t}$. Найдя решения уравнений (5,6)

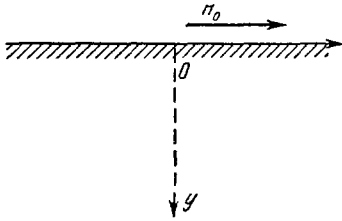


Рис. 2.

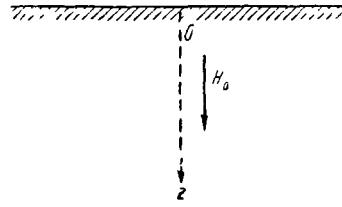


Рис. 3.

и (5,7), обращающиеся в нуль при $y \rightarrow \infty$, и используя определение (5,1), получим

$$\zeta_{xx} = \left(\frac{i\omega\mu_3}{4\pi\sigma} \right)^{1/2}, \quad \zeta_{zz} = \left(\frac{i\omega\tilde{\mu}}{4\pi\sigma_3} \right)^{1/2}, \quad (5,8)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1}. \quad (5,9)$$

Так как $\mu_3 = 1$, то специфические высокочастотные свойства ферромагнетика проявляются только в компоненте ζ_{zz} . Это связано с тем, что электромагнитная волна, в которой магнитное поле поляризовано вдоль $\mathbf{M}_0$, не вызывает вращения магнитного момента (напомним, что ζ_{zz} связывает E_z и H_x).

Формулы (5,8), (5,4') показывают, что зависимость поверхностного сопротивления от частоты (или от внешнего магнитного поля) имеет резонансный характер. При отсутствии диссипации ($\lambda = 0$) при $\omega = g \sqrt{H_0^{(e)} B_0^{(e)}}$ импеданс ζ_{zz} обращается в бесконечность, а при $\omega = g B_0^{(e)}$ — в нуль. При $\lambda \neq 0$ действительная часть импеданса ζ_{zz} имеет максимум при $\omega = g \sqrt{H_0^{(e)} B_0^{(e)}}$, а при $\omega = g B_0^{(e)}$ — минимум.

Вычислим теперь поверхностное сопротивление ферромагнетика в том случае, когда постоянное магнитное поле, параллельное оси легчайшего намагничивания, перпендикулярно поверхности металла (см. рис. 3). Если ввести величины $E^\pm = E_x \pm iE_y$, $h^\pm = h_x \pm ih_y$, а также $\mu^\pm = \mu_1 \mp i\mu_2$, $\sigma^\pm = \sigma_1 \mp i\sigma_2$, то уравнения Максвелла приобретают вид:

$$\pm i \frac{\partial h^\pm}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} \sigma^\pm E^\pm, \quad (5,10)$$

$$\pm i \frac{\partial E^\pm}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} \mu^\pm h^\pm.$$

Отсюда

$$\zeta^\pm = \pm \frac{E^\pm}{h^\pm} = - \sqrt{\frac{i\omega\mu^\pm}{4\pi\sigma^\pm}}, \quad (5,11)$$

где

$$\mu^{\pm} = \mu_1 \pm \mu_2, \quad \sigma^{\pm} = \sigma_1 \pm \sigma_2. \quad (5,12)$$

Мы видим, что только величина ξ^- может в отсутствие диссипации обращаться в нуль и в бесконечность. Учет диссипации приводит к тому, что при $\omega = gH_0^{(e)}$ действительная часть импеданса имеет максимум, а при $\omega = g\sqrt{H_0^{(e)}B_0^{(e)}}$ — минимум. Наличие резкого максимума у импеданса, ширина которого тем меньше, чем меньше релаксационная постоянная λ , так же как и возбуждение собственных колебаний в телах ограниченных размеров, носит название ферромагнитного резонанса.

Отметим, что ширина линии ферромагнитного резонанса в рассмотренных случаях определяется только релаксационной постоянной λ и не зависит от электропроводности σ_{ik} . Это, как мы увидим, связано с пренебрежением пространственной дисперсией магнитной восприимчивости и электропроводности, которая не была учтена при получении формул (5,8) и (5,14). Пространственная дисперсия магнитной восприимчивости, как указывалось в предыдущем параграфе, связана с обменным взаимодействием между атомами. Магнитная проницаемость с учетом пространственной дисперсии определяется формулой (4,2).

Пространственная дисперсия электропроводности проявляется тогда, когда длина свободного пробега электронов проводимости l порядка или значительно больше глубины скин-слоя δ . Скин-эффект в этих условиях ($l \gtrsim \delta$) называется аномальным²⁸.

Мы приведем сначала результаты для поверхностного сопротивления ферромагнетика в том случае, когда учитывается пространственная дисперсия μ_{ik} (Амент, Радо²⁵, Гуревич³⁰).

Если постоянное магнитное поле и ось легчайшего намагничивания параллельны поверхности металла, то импеданс определяется формулой²⁵

$$\xi_{zz} = \left(\frac{i\omega\tilde{\mu}}{4\pi\sigma_3} \right)^{1/2}. \quad (5,13)$$

При $H_0^{(e)} \ll 4\pi M_0$, $\omega_1 \ll 4\pi gM_0$, $\lambda \ll gM_0$

$$\frac{\theta_C}{\hbar} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \ll \left(\frac{H_0^{(e)}}{4\pi M_0} \right)^{1/2} \lambda, \quad \text{где } \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad \omega_1 = g(H_0^{(e)}4\pi M_0)^{1/2};$$

вблизи резонанса $\tilde{\mu}$ определяется формулой*)

$$\tilde{\mu} = \frac{(4\pi gM_0)^2 \left[\omega_1^2 - \omega^2 + 4\pi i\omega\lambda + 2(4\pi gM_0)^2 \left(\frac{\theta_C}{4\pi\mu M_0} \right)^{1/2} \frac{a}{\delta} (1+i) \right]}{\left[\omega_1^2 - \omega^2 + 4\pi i\omega\lambda + (4\pi gM_0)^2 \left(\frac{\theta_C}{4\pi\mu M_0} \right)^{1/2} \frac{a}{\delta} (1+i) \right]^2}. \quad (5,14)$$

Если постоянное магнитное поле перпендикулярно поверхности образца, то при тех же условиях имеем²⁹

$$\xi^- = \left(\frac{i\omega\tilde{\mu}^-}{4\pi\sigma^-} \right)^{1/2}, \quad (5,15)$$

$$\tilde{\mu}^- = \frac{4\pi gM_0 \left[gH_0 \left(1+i \frac{\lambda}{gM_0} \right) - \omega + 8\pi gM_0 (1+i) \left(\frac{\theta_C}{4\pi\mu M_0} \right)^{1/2} \frac{a}{\delta} \right]}{\left[gH_0 \left(1+i \frac{\lambda}{gM_0} \right) - \omega + 4\pi gM_0 (1+i) \left(\frac{\theta_C}{4\pi\mu M_0} \right)^{1/2} \frac{a}{\delta} \right]^2}. \quad (5,16)$$

*) Выражение для $\tilde{\mu}$ в том случае, когда приведенные здесь условия не выполняются, т. е. при произвольных полях и частотах, очень громоздко. Оно содержится в работе²⁵.

Мы приводим выражения для ζ_{zz} в первом случае и для ζ^- во втором случае, так как они содержат резонансную зависимость от частоты.

Как видно из формул (5,14) и (5,16), пространственная дисперсия приводит к дополнительному уширению линии ферромагнитного резонанса порядка $4\pi g M_0 \left(\frac{\theta_C}{4\pi \mu M_0} \right)^{1/2} \frac{a}{\delta}$ и к небольшому сдвигу резонансной частоты.

При учете пространственной дисперсии μ_{ik} , как указывалось в предыдущем параграфе, кроме обычных электродинамических условий, необходимо использовать граничные условия для магнитного момента. Формулы (5,14) и (5,16) получены в предположении, что $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_n} = 0$ на границе металла.

Как мы уже говорили, пространственная дисперсия проводимости приводит к аномальному характеру скин-эффекта. Приведем формулу для поверхностного сопротивления в предельном случае аномального скин-эффекта ($\delta \ll l$), если роль пространственной дисперсии магнитной восприимчивости не существенна^{29, 30}:

$$\zeta = \frac{4}{9} \left(\frac{\sqrt{3} \tilde{\mu}^2 \omega^2 l}{c\sigma} \right)^{1/2}, \quad (5,17)$$

где $\tilde{\mu}$ определяется формулой (5,9), если постоянное магнитное поле направлено параллельно поверхности металла, и формулой (5,12), если перпендикулярно. В первом случае через ζ обозначено ζ_{zz} , а во втором — ζ^- .

Отметим, наконец, что в формулах (5,13)—(5,17) для поверхности сопротивления не учитывается гиротропия электропроводности металла, что, по-видимому, законно, если радиус орбиты электрона в эффективном магнитном поле *) значительно больше длины свободного пробега.

§ 6. Связанные магнитоупругие волны. Ферроакустический резонанс

В упруго деформированном ферромагнетике благодаря магнитоупругости и пондеромоторному действию, обусловленному спонтанным намагничиванием, должна существовать связь магнитных волн с упругими волнами. При большой проводимости среды возникающие таким образом связанные магнитоупругие волны аналогичны магнитоупругим волнам, могущим распространяться в металлах при наличии внешнего магнитного поля, и магнитогазродинамическим волнам в жидких проводниках. Связь между магнитными и упругими волнами дает возможность возбуждать магнитные волны при помощи звука, причем такое возбуждение должно быть особенно интенсивным в том случае, когда частоты и волновые векторы магнитной и звуковой волн совпадают.

Взаимодействие между магнитными и упругими волнами приводит к зависимости скорости звука в ферромагнетике от внешнего магнитного поля и спонтанного намагничивания. Кроме того, это взаимодействие должно приводить к дополнительному поглощению звука в ферромагнетиках, зависящему от электропроводности среды и релаксационных процессов (А. Ахизер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский¹², Ч. Киттель³²).

Чтобы исследовать связанные магнитоупругие волны, необходимо учитывать в гамилтониане ферромагнетика как упругую, так и

*) Вопрос об эффективном магнитном поле, действующем на электроны проводимости, до настоящего времени не решен. Оно, очевидно, не равно индукции B_0 , на что указывают эксперименты по Холл-эффекту в ферромагнетиках³¹.

магнитострикционную энергию. С учетом этих энергий гамильтониан ферромагнетика имеет вид:

$$\mathcal{H} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_l}{\partial x_i} \frac{\partial M_l}{\partial x_k} + \beta(\mathbf{M}) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}\mathbf{D}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} + \gamma_{ik}(\mathbf{M}) u_{ik} \right\} dv, \quad (6,1)$$

где ρ — плотность вещества, $\mathbf{u}$ — вектор упругого смещения, $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ — тензор деформации, λ_{iklm} — тензор упругих констант и $\gamma_{ik}(\mathbf{M})$ — тензор магнитострикции; член, пропорциональный λ_{iklm} , представляет собой упругую энергию, а член, содержащий $\gamma_{ik}(\mathbf{M})$, — энергию магнитострикции.

Мы должны написать теперь уравнение движения магнитного момента, уравнения упругости и уравнения Максвелла. Что касается уравнений Максвелла (см. (2,6)), то в них под плотностью тока нужно понимать теперь

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{B}] \right).$$

Уравнение движения магнитного момента и уравнения упругости имеют обычную структуру:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{M} \dot{u}_k) = g [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}] - \frac{\lambda}{M^2} [\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]], \\ \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (6,2)$$

где $\mathbf{f}$ — сила, действующая на единицу объема среды, и $\mathbf{H}^{(e)}$ — эффективное магнитное поле (второе слагаемое в левой части уравнения для $\mathbf{M}$ описывает изменение $\mathbf{M}$, обусловленное изменением плотности вещества). Однако эффективное поле $\mathbf{H}^{(e)}$ и сила $\mathbf{f}$ отличаются от своих обычных значений. Проще всего найти модифицированные значения $\mathbf{H}^{(e)}$ и $\mathbf{f}$, вычислив производную по времени от полной энергии ферромагнетика:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_V \left\{ - \left(g [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}] - \frac{\lambda}{M^2} [\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]] \right) \times \right. \\ \times \left(\mathbf{H} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k} - u_{lm} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mathbf{M}} \right) - \frac{1}{\sigma} j^2 + \\ \left. + \dot{u}_i \left[f_i - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_i - \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{H} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k} - u_{lm} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mathbf{M}} \right) \right] \right\} dv + \\ + \int_S \left\{ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{H}, \mathbf{E}]_k + \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \right. \\ \left. + \dot{u}_i \left[\sigma_{ik} + \delta_{ik} \left(\mathbf{H} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} + \alpha_{lm} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_l \partial x_m} - u_{lm} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mathbf{M}} \right) \mathbf{M} \right] \right\} ds_k, \quad (6,3)$$

где

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} + \gamma_{ik}(\mathbf{M}).$$

При $\lambda = \sigma = 0$ объемный интеграл должен обращаться в нуль. Отсюда легко заключить, что эффективное магнитное поле $\mathbf{H}^{(e)}$ и объемная сила $\mathbf{f}$ должны определяться следующими формулами:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{H} - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{M}} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k} - u_{lm} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mathbf{M}}, \\ f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_i + \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{H}^{(e)}. \quad (6,4)$$

Мы видим, что эффективное поле $\mathbf{H}^{(e)}$ отличается от (2,5) наличием члена $u_{lm} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mathbf{M}}$, пропорционального тензору деформации. В выражение для объемной силы f_i , помимо обычной упругой силы $\lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} u_{lm}$, входят члены $\frac{\partial}{\partial x_k} \gamma_{ik}(\mathbf{M}) + \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{H}^{(e)} + \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_i$. Здесь третье слагаемое связано с током проводимости, а первые два обусловлены существованием спонтанного магнитного момента.

Используя выражения (6,4) для $\mathbf{H}^{(e)}$ и $\mathbf{f}$, мы получим из (6,3) следующее выражение для $d\mathcal{H}/dt$ при отличных от нуля (но достаточно малых) λ и σ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} = & - \int_V \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 dv - \int_V \frac{\lambda}{M^2} [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]^2 dv + \\ & + \int_S \left\{ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{H}, \mathbf{E}]_k + \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \dot{u}_i (\sigma_{ik} + \delta_{ik} \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{M}) \right\} dS_k. \end{aligned} \quad (6,5)$$

В этом выражении первые два интеграла берутся по объему тела и представляют собой диссипацию энергии, обусловленную проводимостью среды и релаксационными процессами (диссипация энергии, обусловленная теплопроводностью и внутренней вязкостью, здесь не содержится, так как в уравнениях упругости мы опустили соответствующие члены). Три последние слагаемые в (6,5) представляют собой поток энергии в упругом ферромагнетике.

Перейдем теперь к рассмотрению магнитоупругих волн. Рассмотрим прежде всего случай $\lambda = 0$, $\sigma = 0$, причем будем для простоты предполагать, что среда является изотропной по отношению к упругим и магнитострикционным свойствам. Тогда

$$\gamma_{ik}(\mathbf{M}) = \gamma_0 M^2 \delta_{ik} + \gamma M_i M_k,$$

где γ_0 и γ — константы магнитострикции.

Положим $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, где $\mathbf{M}_0$ — равновесное значение магнитного момента при данной температуре, $\mathbf{H}_0$ — постоянное поле в теле и $\mathbf{m}$ и $\mathbf{h}$ — малые добавки к $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{H}_0$; $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{H}_0$ предполагаются направленными вдоль оси легчайшего намагничивания $\mathbf{n}$. Линеаризованные уравнения для $\mathbf{m}$ и $\mathbf{u}$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \mathbf{M}_0 \operatorname{div} \mathbf{u} &= g[\mathbf{M}_0, \mathbf{H}^{(e)}], \\ \ddot{\mathbf{u}} = s_l^2 \Delta \mathbf{u} + (s_l^2 - s_t^2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\gamma_0 \nabla (\mathbf{M}_0 \mathbf{m}) + \\ &+ \frac{\gamma}{\varrho} (\mathbf{M}_0 \operatorname{div} \mathbf{m} + (\mathbf{M}_0, \nabla) \mathbf{m}) + \frac{1}{c\varrho} [\mathbf{j}, \mathbf{B}_0] + \frac{1}{\varrho} \nabla (\mathbf{M}_0, \mathbf{H}^{(e)}), \end{aligned} \right\} \quad (6,6)$$

где

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{h} - \beta \mathbf{m}_{\perp} - \mathbf{m} \frac{H_0}{M_0} - \delta \frac{\mathbf{M}_0 (\mathbf{m} \mathbf{M}_0)}{M_0^2} + \alpha \Delta \mathbf{m} -$$

$$- 2\gamma_0 \mathbf{M}_0 \operatorname{div} \mathbf{u} - \gamma [(\mathbf{M}_0 \nabla) \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{M}_0 \mathbf{u})], \quad \mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{n},$$

$\delta = 4M_0^2 \beta''(M_0^2)$, s_l и s_t — скорости продольных и поперечных звуковых колебаний, определяемые тензором упругих констант. Считая, что все величины изменяются, как $e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$, получим дисперсионное уравнение

$$(v^2 - s_l^2)^2 (v^2 - s_t^2) \left(v^2 - \frac{\Omega_1}{k^2} \right) - \zeta (v^2 - s_l^2) f_1 - \zeta^2 f_2 = 0, \quad (6,7)$$

где

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad \zeta = \frac{M_0^2}{Q} \gamma^2, \quad s_l'^2 = s_l^2 + \frac{M_0^2}{Q} \left[4(\gamma - \pi) \cos^2 \theta + 4\gamma_0 - \delta - \frac{H_0}{M_0} - \alpha k^2 \right],$$

$$f_1 = \frac{gM_0\Omega_1}{k^2} \left\{ v^2 - s_l^2 + (s_l^2 - s_l'^2) \cos^2 2\theta + \frac{\Omega}{\Omega_1} (v^2 - s_l'^2) \cos^2 \theta + \right. \\ \left. + \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\gamma}{\pi} \right) (v^2 - s_l'^2) \sin^2 2\theta \right\},$$

$$\Omega = gM_0 \left(\alpha k^2 + \beta + \frac{H_0}{M_0} + 4\pi \sin^2 \theta \right),$$

$$\Omega_1 = gM_0 \left(\alpha k^2 + \beta + \frac{H_0}{M_0} \right),$$

θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{M}_0$.

В уравнении (6,7) параметром связи между упругими и магнитными колебаниями является величина ζ . Если положить $\zeta = 0$, то корнями уравнения (6,7) будут

$$v_1 = s_l, \quad v_{2,3} = s_l, \quad v_4 = \frac{V\Omega\Omega_1}{k};$$

последний корень соответствует магнитной волне. В первом приближении по параметру связи скорости звуковых волн определяются формулами:

$$v_1^2 = s_l'^2 \left\{ 1 + \frac{gM_0^3}{Qs_l^2} (\gamma - 2\pi)^2 \frac{\Omega_1}{\omega^2 - \Omega\Omega_1} \sin^2 2\theta \right\}, \\ v_{2,3}^2 = s_l^2 \left\{ 1 + \frac{gM_0^3}{2Qs_l^2} \frac{\gamma^2}{\omega^2 - \Omega\Omega_1} \times \right. \\ \left. \times [\Omega_1 \cos^2 2\theta + \Omega \cos^2 \theta \pm \sqrt{(\Omega_1 \cos^2 2\theta - \Omega \cos^2 \theta)^2 + 4\omega^2 \cos^2 \theta \cos^2 2\theta}] \right\}. \quad (6,8)$$

Эти формулы определяют скорости продольных (первая из формул) и поперечных звуковых волн, модифицированных слабой связью с магнитными волнами. Они справедливы, если ω не слишком близко к $V\Omega\Omega_1$.

Если $\omega \sim V\Omega\Omega_1$, то происходит «перепутывание» магнитной и звуковых ветвей колебаний³³, которое мы проследим при $\theta = 0$. В этом случае

$$v = \begin{cases} s_l, \\ s_l - \frac{1}{2} \frac{\zeta}{s_l} \frac{gM_0}{s_l k + \Omega_1} \\ \frac{1}{2} \left(s_l + \frac{\Omega_1}{k} - \frac{1}{2} \frac{\zeta}{s_l} \frac{gM_0}{s_l k + \Omega_1} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(s_l - \frac{\Omega_1}{k} \right)^2 + \zeta \frac{gM_0}{s_l k} \frac{3ks_l + \Omega_1}{ks_l + \Omega_1} \right]^{1/2}, \\ \frac{1}{2} \left(s_l + \frac{\Omega_1}{k} - \frac{1}{2} \frac{\zeta}{s_l} \frac{gM_0}{s_l k + \Omega_1} \right) - \frac{1}{2} \left[\left(s_l - \frac{\Omega_1}{k} \right)^2 + \zeta \frac{gM_0}{s_l k} \frac{3ks_l + \Omega_1}{ks_l + \Omega_1} \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (6,9)$$

При $ks_l < \Omega_1$ третий корень определяет фазовую скорость магнитной волны, а четвертый — поперечной звуковой волны; если же $ks_l > \Omega_1$, то третий корень определяет фазовую скорость поперечной звуковой волны, а четвертый — магнитной волны.

Можно показать, что поперечные волны эллиптически поляризованы и отношение полуосей эллипса равно

$$\frac{a}{b} = \frac{\Omega_1 \cos 2\theta}{\omega \cos \theta} \left\{ 1 + \frac{2 \cos^2 \theta}{\Omega_1^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega^2 - \Omega \Omega_1}{\cos^2 2\theta + \frac{\Omega}{\Omega_1} \cos^2 \theta \pm \left[\left(\cos^2 2\theta - \frac{\Omega}{\Omega_1} \cos^2 \theta \right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{\Omega_1^2} \cos^2 \theta \cos^2 2\theta \right]^{1/2}} \right\} \quad (6,10)$$

(полуось a лежит в плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ и направлена перпендикулярно $\mathbf{k}$).

При $\theta = 0$ мы получаем две циркулярно-поляризованные волны, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ две линейно-поляризованные волны, для которых вектор $\mathbf{u}$ направлен по $\mathbf{M}_0$ и $[\mathbf{M}_0, \mathbf{k}]$.

Аналогичным образом можно рассмотреть связанные магнитоакустические колебания в предельном случае большой проводимости, $\sigma \gg \frac{\omega c^2}{s_l^2}$.

Мы приведем здесь только формулы для фазовых скоростей звуковых волн при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Если $\theta = 0$, то

$$v_1 = s_l \left\{ 1 - \frac{M_0^2}{2\Omega s_l^2} \left(4\gamma_0 + 4\gamma - \delta - 4\pi - \frac{H_0}{M_0} \right) \right\}, \\ v_2 = v_3 = s_t \left\{ 1 + \frac{M_0^2}{2\Omega s_l^2} \left[\frac{B_0^2}{4\pi M_0^2} - \frac{1}{2} \frac{gM_0}{\Omega_1 + 4\pi gM_0} \left(\gamma - \frac{B_0}{M_0} \right) \right] \right\}. \quad (6,11)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= s_l \left(1 - \frac{2M_0^2}{\Omega s_l^2} \left(\gamma - \frac{H_0}{8\pi M_0} \right)^2 \right), \\ v_2 &= s_t \left(1 - \frac{M_0^2}{8\Omega s_l^2} \frac{gM_0}{\Omega_1 + 4\pi gM_0} \right), \\ v_3 &= s_t. \end{aligned} \right\} \quad (6,12)$$

Отметим, что, положив в этих формулах $M_0 = 0$ и $\gamma_0 = \gamma = 0$, мы найдем скорости звуковых колебаний в металле с очень большой проводимостью, находящемся во внешнем магнитном поле H_0 . Если $H_0^2/8\pi\Omega s_l^2 \ll 1$, то эти формулы имеют следующий вид:

при $\theta = 0$

$$v_1 = s_l, \quad v_2 = v_3 = s_t \left(1 + \frac{H_0^2}{8\pi\Omega s_l^2} \right),$$

при $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$v_1 = s_l \left(1 + \frac{H_0^2}{8\pi\Omega s_l^2} \right), \quad v_2 = v_3 = s_t. \quad (6,13)$$

Экспериментально изменение скоростей продольного и поперечного звуков наблюдалось на олове и алюминии⁵⁶.

Перейдем теперь к определению коэффициента затухания магнитоакустических колебаний. Для этого следует, согласно (6,4) и (6,5), вычислить величины $\frac{\omega}{c}$ и $\frac{d\mathcal{R}}{dt}$ со значениями полей, соответствующих $\lambda = 0$ и $\sigma = 0, \infty$. Мы приведем здесь только окончательные формулы, определяющие поглощение звуковых колебаний.

При малых σ коэффициенты затухания продольной и поперечных волн равны

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(l)} &= \lambda \omega^2 \frac{M_0^2}{\varrho s_l^2} (2\pi - \gamma)^2 \frac{\omega^2 + \Omega_1^2}{(\omega^2 - \Omega\Omega_1)^2} \sin^2 \theta + \\ &+ \sigma \frac{M_0^2}{\varrho c^2} \left\{ \left[\frac{H_0}{M_0} + 8\pi (2\pi - \gamma) g M_0 \Omega_1 \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2 - \Omega\Omega_1} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[8\pi (2\pi - \gamma) \frac{g M_0 \omega_1}{\omega^2 - \Omega\Omega_1} \cos \theta \right]^2 \right\} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^{(t)} &= \lambda \omega^2 \frac{M_0^2}{\varrho s_t^2} \gamma^2 \frac{\eta^2 + \cos^2 2\theta}{\eta^2 + \cos^2 \theta} \frac{\cos^4 \theta}{(\omega\eta - \Omega_1 \cos 2\theta)^2} + \\ &+ \frac{\sigma B_0^2}{\varrho c^2} \frac{\cos^2 \theta}{\eta^2 + \cos^2 \theta} \left\{ \left[1 - \frac{4\pi M_0 \gamma}{B_0} \frac{g M_0 \cos^2 \theta}{\eta\omega - \Omega_1 \cos 2\theta} \right]^2 \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{4\pi M_0}{B_0} \frac{\gamma g M_0 \cos 2\theta}{\eta\omega - \Omega_1 \cos 2\theta} \right]^2 \cos^2 \theta \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6,14)$$

где $\eta = \frac{a}{b} \cos \theta$ (см. формулу (5.10)).

Мы видим, что затухание звука имеет резко анизотропный характер и что оно особенно велико при резонансе, когда совпадают частоты звуковых и магнитных колебаний.

Для определения коэффициента затухания звука вблизи резонанса нужно воспользоваться точным дисперсионным уравнением, учитывающим проводимость σ и релаксационную константу λ . Можно показать, что в этом случае коэффициент затухания определяется формулами (6,14), если заменить в них знаменатель $(\omega^2 - \Omega\Omega_1)^2$ на $(\omega^2 - \Omega\Omega_1)^2 + \Gamma^2 \Omega\Omega_1$, где Γ — коэффициент затухания магнитной волны, определяемый формулой (2,16). (Эта замена должна быть сделана также и для величины η .)

Мы приведем здесь только окончательную формулу для коэффициента затухания продольного звука при резонансе

$$\Gamma^{(l)} = \frac{M_0^2}{\varrho s_l^2} (2\pi - \gamma)^2 \frac{\omega_0^2}{\pi \lambda}, \quad \omega_0^2 = \Omega\Omega_1. \quad (6,15)$$

Сравним эту величину с коэффициентом затухания, обусловленным теплопроводностью,

$$\Gamma_{\kappa} = \frac{\omega_0^2}{c_v^2} \kappa \alpha_T^2 T,$$

где κ — коэффициент теплопроводности, T — температура в градусах, c_v — теплоемкость, отнесенная к единице объема, и α_T — коэффициент теплового расширения. Полагая

$$\alpha_T = 10^{-5} \text{ 1/град}, \quad c_v = 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{гм}^3 \text{град}}, \quad \kappa = 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см сек град}}, \quad T = 100^\circ \text{ К},$$

$$\varrho = 10 \text{ г/см}^3, \quad \frac{\lambda}{g M_0} = 10^{-1}, \quad \gamma = 1, \quad s_l = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad M_0 = 10^3 \text{ CGSM},$$

получим

$$\Gamma^{(l)} \approx \Gamma_{\kappa}.$$

Приведем, наконец, формулы, определяющие затухание звука в ферромагнетиках с большой проводимостью, $\sigma \gg \frac{c^2 \omega}{s_l^2}$.

При $\theta = 0$

$$\Gamma_{2,3}^{(t)} = \lambda \left(\gamma - \frac{B_0}{M_0} \right)^2 \frac{M_0}{Qs_l^2} \left(\frac{M_0}{B_0 + \beta M_0} \right)^2 \left(\frac{\omega}{gM_0} \right)^2 + \\ + \frac{\omega^2}{\sigma} \frac{M_0^2}{Qs_l^2} \frac{c^2}{s_l^2} \left[\frac{B_0}{4\pi M_0} + \frac{M_0}{B_0 + \beta M_0} \left(\gamma - \frac{B_0}{M_0} \right) \right]^2. \quad (6,16)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Gamma_3^{(t)} = \lambda \omega^2 \frac{M_0^2}{Qs_l^2} \frac{\gamma^2}{\Omega^2}, \\ \Gamma^{(l)} = \frac{\omega^2}{16\pi^2 \sigma} \frac{c^2}{s_l^2} \frac{H_0^2}{Qs_l^2}. \quad (6,16')$$

Коэффициенты затухания $\Gamma_{\theta=0}^{(l)}, \Gamma_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{(t)}$ в этом приближении равны нулю.

Мы видим, что затухание звука при больших σ не имеет резонансного характера.

В заключение рассмотрим еще вопрос о возбуждении магнитных волн внешним звуковым полем.

Пусть полупространство $z > 0$ заполнено ферромагнетиком, на внешней поверхности которого ($z = 0$) задано смещение $u = u_0 e^{-i\omega t}$ (u_0 предполагается постоянным). Требуется определить $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Как следует из формул (6,8), при $\theta = 0$ резонансным характером отличается только взаимодействие поперечного звука с магнитной волной. Поэтому мы будем предполагать, что $\mathbf{u}$ расположено в плоскости (x, y) , в которой лежит также вектор $\mathbf{M}_0$.

Основные уравнения (5,6) можно в рассматриваемом случае переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} &= gM_0 \left[\mathbf{n}, \mathbf{h}^{(s)} - \frac{\omega_0}{gM_0} \mathbf{m} \right] + \lambda \left(\frac{\omega_0}{gM_0} \mathbf{m} - \mathbf{h}^{(s)} \right), \\ \ddot{\mathbf{u}} - s_l^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - \gamma \frac{M_0}{Q} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6,17)$$

где

$$\mathbf{h}^{(s)} = -\gamma M_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \quad \omega_0 = gM_0 \left(\beta + \frac{H_0}{M_0} \right).$$

Из первого уравнения следует, что

$$\mathbf{m} = \hat{\chi} \mathbf{h}^{(s)}, \quad (6,18)$$

где тензор $\hat{\chi}$ имеет вид:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix} = - \frac{gM_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \left(\omega - i\omega_0 \frac{\lambda}{gM_0} \right)^2} \begin{pmatrix} 1 - i \frac{\lambda}{gM_0} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\lambda}{gM_0} \right)^2, & i \frac{\omega}{\omega_0} \\ -i \frac{\omega}{\omega_0}, & 1 - i \frac{\lambda}{gM_0} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\lambda}{gM_0} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

Считая, что $\mathbf{u}$ и $\mathbf{m}$ пропорциональны $e^{-i\omega t}$, получим

$$\omega^2 \mathbf{u} + (s_l^2 - \zeta \hat{\chi}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0, \quad (6,18')$$

откуда

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_1 e^{ik_1 z} + \mathbf{C}_2 e^{ik_2 z},$$

где $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ — постоянные интегрирования и

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{s_l^2 - \zeta (\chi_{xx} \mp \sqrt{\chi_{xy}\chi_{yx}})}.$$

Если задано $u_{z=0} = u_0$, то

$$C_{1x} = C_{2x} = iC_{1y} = -iC_{2y} = \frac{1}{2} u_0$$

(ось x выбрана вдоль u_0) и

$$u(z, t) = u_0 \cos(\omega t - kz),$$

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{\gamma \omega \omega_0 g M_0^2 u_0}{s_t \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \omega_0^2 \left(\frac{\lambda}{g M_0} \right)^2 \right]} \times \\ &\quad \times \left\{ (\omega^2 - \omega_0^2) \sin(\omega t - kz) - 2\omega \omega_0 \frac{\lambda}{g M_0} \cos(\omega t - kz) \right\}, \\ m_y &= \frac{\gamma \omega^2 g M_0^2 u_0}{s_t \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \omega_0^2 \left(\frac{\lambda}{g M_0} \right)^2 \right]} \times \\ &\quad \times \left\{ (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t - kz) + 2\omega \omega_0 \frac{\lambda}{g M_0} \sin(\omega t - kz) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6,19)$$

(мы положили здесь $k_1 \sim k_2 \sim k = \frac{\omega}{s_t}$).

При резонансе

$$\frac{m}{M_0} \approx 2\gamma (g M_0)^2 \frac{u_0}{\lambda s_t}. \quad (6,19')$$

Считая $\frac{\lambda}{g M_0} \sim 10^{-1}$, $\omega_0 \sim 10^7$, получим $\left(\frac{m}{M_0} \right)_{\text{рез}} \approx 10^{-2}$.

§ 7. Энергетический спектр антиферромагнетиков

Феноменологический метод, которым мы пользовались для нахождения энергетического спектра ферромагнетика, может быть использован также для получения энергетического спектра антиферромагнетиков.

Антиферромагнетики представляют собой тела, состоящие из нескольких намагниченных подрешеток с квазинезависимыми магнитными моментами, компенсирующими друг друга.

Необходимо иметь в виду, что микроскопическое описание антиферромагнетика, как тела, в котором спины соседних атомов ориентированы противоположно друг к другу, является незаконным, так как состояние с такой ориентацией спинов не представляет собой никакого собственного состояния гамильтониана, содержащего обменное взаимодействие, которое играет существенную роль в антиферромагнетиках, так же как и в ферромагнетиках. Действительно, так как гамильтониан не изменяется при перестановке соседних атомов, то собственные функции этого гамильтониана должны либо не меняться, либо изменять свой знак при такой перестановке, состояние же с чередующимися спинами не удовлетворяет этому условию: при перестановке соседних атомов нарушается шахматный порядок.

Возможно, однако, макроскопическое описание антиферромагнетика как совокупности намагниченных подрешеток, каждая из которых характеризуется в каждой точке пространства своим моментом. Такое описание приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментальными данными по магнитным и тепловым свойствам, а также по нейтронографии антиферромагнетиков.

В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать антиферромагнетик, состоящий из двух зеркальных подрешеток с магнитными моментами $M_1(\mathbf{r}, t)$ и $M_2(\mathbf{r}, t)$, равновесные значения которых при отсутствии внеш-

него магнитного поля равны по величине и противоположны по направлению. Такую магнитную структуру имеет, например, MnF_2 .

Гамильтониан антиферромагнетика в случае двух зеркальных подрешеток может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{H} = \int dv \left\{ \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} \right) + \alpha_{12} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \delta \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 - \frac{1}{2} \beta [(\mathbf{n} \mathbf{M}_1)^2 + (\mathbf{n} \mathbf{M}_2)^2] - (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \mathbf{H}) - \frac{H^2}{8\pi} \right\}. \quad (7,1)$$

Здесь первые два члена являются аналогом энергии неоднородного взаимодействия в гамильтониане (2,3), а слагаемое $\delta \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ связано с обменным взаимодействием однородно намагниченных подрешеток. Четвертое слагаемое представляет собой энергию анизотропии, записанную в предположении, что в теле существует избранная ось, которую мы обозначим через $\mathbf{n}$. Так как магнитная анизотропия связана с релятивистскими взаимодействиями, то $|\beta| \ll \delta$. Кроме того, мы будем считать, что $\beta > 0$. Это означает, что при отсутствии магнитного поля магнитные моменты направлены вдоль избранной оси. Наконец, последние два слагаемых определяют магнитную энергию. Они эквивалентны при рассмотрении квазистатических колебаний магнитных моментов выражению $+\frac{H^2}{8\pi}$, использованному при изучении спиновых волн в ферромагнетике. Действительно, разность этих выражений, равная

$$\int \left\{ \frac{H^2}{4\pi} + (\mathbf{H}, \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \right\} dv = \int \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{4\pi} dv,$$

представляет собой в квазистатическом случае, когда $\mathbf{H} = \nabla \varphi$, поверхностный интеграл, который может быть отброшен при определении частот колебаний магнитных моментов.

При написании гамильтониана (7,1), мы исходим из предположения, что минимуму энергии антиферромагнетика соответствуют однородно намагниченные подрешетки. Это означает, что квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} \right) + \alpha_{12} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i}$$

должна быть существенно положительной, откуда следует, что $\alpha > 0$, $\alpha_{12} < \alpha$. Величины α и α_{12} , так же как и соответствующая величина α в ферромагнетиках, пропорциональны обменному интегралу между соседними атомами. Поэтому α и α_{12} имеют один и тот же порядок величины

$$\alpha \sim \alpha_{12} \sim \frac{T_C}{\mu M_0} a^2,$$

где T_C — температура Кюри — Нейля антиферромагнетика, т. е. температура, при которой антиферромагнетик переходит в парамагнитное состояние. Постоянная δ по порядку величины равна $T_C/\mu M_0$.

Магнитное поле $\mathbf{H}$ складывается из внешнего постоянного однородного поля $\mathbf{H}_0$ и магнитного поля спиновых волн $\mathbf{h}$, которое определяется в случае низкочастотных колебаний уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h} = -4\pi \text{div} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \quad (7,2)$$

(антиферромагнетик предполагается диэлектриком, поэтому не выписан член с током проводимости).

Напишем уравнения движения магнитных моментов, аналогичные уравнению (2,4)

$$\frac{d\mathbf{M}_j}{dt} = g [\mathbf{M}_j, \mathbf{H}_j^{(e)}], \quad (7,3)$$

где $\mathbf{H}_j^{(e)}$ — эффективное поле, действующее на момент $\mathbf{M}_j$:

$$\mathbf{H}_j^{(e)} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{M}_j}. \quad (7,4)$$

(Релаксационные силы мы здесь не учитываем.) Используя выражение (7,4) для $\mathcal{H}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{(e)} &= \mathbf{H} - \delta \mathbf{M}_2 - \beta \mathbf{M}_{1\perp} + \alpha \Delta \mathbf{M}_1 + \alpha_{12} \Delta \mathbf{M}_2, \\ \mathbf{H}_2^{(e)} &= \mathbf{H} - \delta \mathbf{M}_1 - \beta \mathbf{M}_{2\perp} + \alpha \Delta \mathbf{M}_2 + \alpha_{12} \Delta \mathbf{M}_1, \end{aligned} \quad (7,5)$$

где $\mathbf{M}_{j\perp} = \mathbf{M}_j - \mathbf{n}(\mathbf{nM}_j)$.

Для нахождения энергетического спектра антиферромагнетика нужно рассмотреть малые колебания магнитных моментов около их равновесных значений $\mathbf{M}_{10}$ и $\mathbf{M}_{20}$. Эти значения соответствуют минимуму энергии антиферромагнетика и не зависят от координат. Для определения направлений $\mathbf{M}_{10}$ и $\mathbf{M}_{20}$ нужно найти минимум выражения

$$E = \delta \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{20} - \frac{1}{2} \beta [(\mathbf{nM}_{10})^2 + (\mathbf{nM}_{20})^2] - (\mathbf{M}_{10} + \mathbf{M}_{20}, \mathbf{H}_0), \quad (7,6)$$

где $\mathbf{H}_0$ — заданное внешнее поле, при добавочных условиях $M_{10}^2 = M_{20}^2 = M_0^2$. В результате мы получим следующие формулы, определяющие направления магнитных моментов $\mathbf{M}_{10}$ и $\mathbf{M}_{20}$:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{H_0}{\delta M_0} \sin(\theta_1 - \varphi) + \frac{\beta}{\delta} \sin \theta_1 \cos \theta_1 &= 0, \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{H_0}{\delta M_0} \sin(\theta_2 - \varphi) + \frac{\beta}{\delta} \sin \theta_2 \cos \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (7,7)$$

где θ_1, θ_2 — углы между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{M}_{10}, \mathbf{M}_{20}$; φ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}_0$ (векторы $\mathbf{M}_{10}, \mathbf{M}_{20}$ лежат в плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{H}_0)$).

Уравнения (7,7) показывают, что ориентация магнитных моментов существенно определяется внешним магнитным полем $\mathbf{H}_0$. Рассмотрим сперва тот случай, когда внешнее магнитное поле параллельно избранной оси $\mathbf{n}$. Если при этом $H_0 < \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0$, то

$$\mathbf{M}_{10} = -\mathbf{M}_{20}, \quad \mathbf{M}_{10} \parallel \mathbf{H}_0. \quad (7,8)$$

Если $(2\delta - \beta) M_0 \geq H_0 \geq \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0$, то угол между моментами $\mathbf{M}_{10}$ и $\mathbf{M}_{20}$ отличен от π . Углы, образуемые моментами $\mathbf{M}_{10}, \mathbf{M}_{20}$ с осью легчайшего намагничения, определяются формулами:

$$\cos \theta_1 = \frac{H_0}{H_e}, \quad \theta_1 = -\theta_2, \quad (7,9)$$

где $H_e = (2\delta - \beta) M_0 \approx 2\delta M_0$.

В интервале полей

$$\sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0 \leq H_0 \leq \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0$$

минимуму энергии (7,6) соответствуют две конфигурации (7,8) и (7,9) (см. рис. 4—5). Если поле

$$H_0 < \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0,$$

то более глубокому минимуму, т. е. основному состоянию, соответствует конфигурация (7,8); если поле

$$H_0 > \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0,$$

то основным состоянием будет состояние с конфигурацией (7.9). Заметим, что при

$$H_0 = \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} \frac{2\delta - \beta}{2\delta + \beta} M_0$$

происходит перестройка основного состояния антиферромагнетика: магнитные моменты поворачиваются на угол, близкий к $\frac{\pi}{2}$ относи-



Рис. 4.

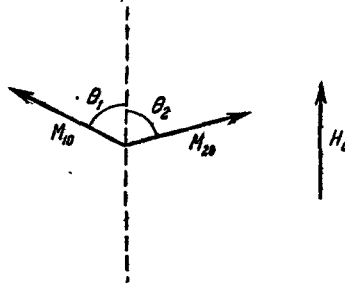


Рис. 5.

тельно избранной оси. При $H_0 > H_e$ магнитные моменты выстраиваются вдоль оси $\mathbf{n}$.

Если магнитное поле $\mathbf{H}_0$ перпендикулярно к оси $\mathbf{n}$ и $H_0 < H'_e$, где $H'_e = (2\delta + \beta) M_0 \approx 2\delta M_0$, то магнитные моменты лежат в плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{H})$ и

$$\sin \theta_1 = \frac{H_0}{H'_e}, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1. \quad (7.10)$$

При $H_0 > H'_e$ оба магнитных момента ориентируются вдоль магнитного поля, т. е. при $H_0 = H'_e$ антиферромагнетик как бы переходит в ферромагнитное состояние.

Обозначим отклонения магнитных моментов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ от их равновесных значений $\mathbf{M}_{10}$ и $\mathbf{M}_{20}$ через $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$. Предполагая, что $|\mathbf{m}_1|, |\mathbf{m}_2| \ll M_0$, получим после линеаризации следующую систему уравнений для определения $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial t} &= g [\mathbf{M}_{10}, \mathbf{h} - \delta \mathbf{m}_2 - \beta \mathbf{m}_{1\perp} + \alpha \Delta \mathbf{m}_1 + \alpha_{12} \Delta \mathbf{m}_2] + \\ &\quad + g [\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_0 - \delta \mathbf{M}_{20} - \beta \mathbf{M}_{10\perp}], \\ \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial t} &= g [\mathbf{M}_{20}, \mathbf{h} - \delta \mathbf{m}_1 - \beta \mathbf{m}_{2\perp} + \alpha \Delta \mathbf{m}_2 + \alpha_{12} \Delta \mathbf{m}_1] + \\ &\quad + g [\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_0 - \delta \mathbf{M}_{10} - \beta \mathbf{M}_{20\perp}], \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

где $\mathbf{m}_{j\perp} = \mathbf{m}_j - \mathbf{n}(\mathbf{m}_j, \mathbf{n})$, $\mathbf{M}_{0\perp} = \mathbf{M}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{M}_0)$.

Решение этих уравнений в виде плоских монохроматических волн ($\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$) приводит, после исключения магнитного поля $\mathbf{h}$, к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega \mathbf{m}_1 &= g \left[\mathbf{M}_{10}, -\frac{4\pi\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) - \delta \mathbf{m}_2 - \beta \mathbf{m}_{1\perp} - \alpha k^2 \mathbf{m}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{12} k^2 \mathbf{m}_2 \right] + g [\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_0 - \delta \mathbf{M}_{20} - \beta \mathbf{M}_{10\perp}], \\ -i\omega \mathbf{m}_2 &= g \left[\mathbf{M}_{20}, -\frac{4\pi\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) - \delta \mathbf{m}_1 - \beta \mathbf{m}_{2\perp} - \alpha k^2 \mathbf{m}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{12} k^2 \mathbf{m}_1 \right] + g [\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_0 - \delta \mathbf{M}_{10} - \beta \mathbf{M}_{20\perp}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Приравнивая детерминант этой системы нулю, найдем связь между ω и k . При этом оказывается, что существуют две ветви колебаний. Они отличаются дисперсионной зависимостью при наличии внешнего магнитного поля. Когда это поле обращается в нуль, то обе ветви сливаются в одну, если пренебречь магнитным взаимодействием спинов (т. е. положить $h = 0$). Такое пренебрежение всегда законно, так как магнитное взаимодействие значительно меньше обменного. Заметим, что в ферромагнетиках магнитным взаимодействием можно пренебречь только при достаточно больших k , когда выполняется неравенство $ak \gg \left(\frac{4\pi\mu M_0}{\theta_C}\right)^{1/2}$. При этом условии энергия обменного взаимодействия, содержащая пространственные производные от момента, будет значительно больше энергии магнитного взаимодействия. В случае антиферромагнетиков пренебрежение магнитным взаимодействием возможно при любых волновых векторах. Это связано с тем, что энергия антиферромагнетика (7,1) содержит слагаемое $\delta M_1 M_2$, описывающее обменное взаимодействие однородно намагниченных подрешеток. Однако надо иметь в виду, что слабое магнитное взаимодействие приводит к небольшому различию между двумя ветвями энергетического спектра антиферромагнетика.

Мы не будем здесь производить подробных вычислений, а приведем только окончательные формулы для энергии спиновых волн в наиболее интересных случаях.

Если внешнее магнитное поле H_0 параллельно избранной оси, причем $H_0 < \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0$, то ³⁴

$$\varepsilon_{1,2} = \hbar\omega_{1,2} = \sqrt{(\mu H_a)^2 + \theta_C^2 (ak)^2} \pm \mu H_0, \quad (7,13)$$

где $\mu = gh$, $\theta_C = \sqrt{2\delta(\alpha - \alpha_{1,2})} \frac{1}{a}$, а $H_a = \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} M_0 \approx \sqrt{2\delta\beta} M_0$ (по порядку величины θ_C совпадает с температурой Кюри — Нейля).

Мы видим, что увеличение магнитного поля приводит к уменьшению энергии одной из ветвей спектра.

Если $H_e \gg H_0 > \sqrt{(2\delta + \beta)\beta} \frac{2\delta - \beta}{2\delta + \beta}$, то ³⁸

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \theta_C (ak), \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{\mu^2 (H_0^2 - H_a^2) + \theta_C^2 (ak)^2}. \end{aligned} \quad (7,14)$$

Отметим, что в этом случае ε_1 стремится к нулю вместе с k .

Рассмотрим далее случай, когда магнитное поле перпендикулярно оси n . Если при этом $H_0 \ll H'_e$, то ³⁴

$$\varepsilon_1 = \sqrt{(\mu H_a)^2 + \theta_C^2 (ak)^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{(\mu H_a)^2 + (\mu H_0)^2 + \theta_C^2 (ak)^2}. \quad (7,15)$$

Если $H_0 > H'_e$, то ³⁸

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{[\theta_C (ak)^2 + \mu (H_0 - H'_e)] [\theta_C (ak)^2 + \mu (H_0 - H_e)]}, \\ \varepsilon_2 &= \theta_{1C} (ak)^2 + \mu H_0, \end{aligned} \quad (7,16)$$

где $\theta_{1C} = \frac{\mu M_0}{a^2} (\alpha + \alpha_{12})$.

Если $H_0 = 0$, то

$$\varepsilon_{1,2} \approx \begin{cases} \theta_C (ak), & ak \gg \frac{\mu H_a}{\theta_C}, \\ \mu H_a + \frac{\theta_C}{2\mu H_a} (ak)^2, & ak \ll \frac{\mu H_a}{\theta_C}. \end{cases} \quad (7,17)$$

Мы рассмотрели колебания магнитных моментов в простейших магнитных системах: в ферромагнетиках, обладающих одним магнитным моментом, и в антиферромагнетиках с двумя зеркальными магнитными подрешетками. Наряду с этими простейшими системами существует целый ряд тел, имеющих более сложную магнитную структуру. Если в сложной магнитной системе нет полной (или почти полной, как, например, у $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, MnCO_3 и др.) компенсации магнитных моментов, то все ветви энергетического спектра, кроме одной, содержат энергию активации порядка температуры Кюри — Нейля. Аналогичная ситуация имеет место в колебаниях сложных кристаллических решеток, у которых из $3n$ (n — число атомов и элементарной ячейке) колебаний три не имеют энергии активации и представляют собой звуковые колебания, а $3n-3$ являются оптическими. В случае колебаний магнитных моментов активационным ветвям соответствуют колебания с изменением углов между моментами подрешеток. Ветви, не содержащей энергии активации, соответствуют колебания без изменения угла между моментами. Например, для не слишком длинных волн, когда можно пренебречь магнитным взаимодействием, частота такой безактивационной волны в системе с двумя антипараллельными, но не равными по абсолютной величине моментами M_1 и M_2 определяется формулой

$$\hbar\omega = \frac{\mu_1\mu_2(M_1^2 + M_2^2)}{\mu_2M_1 - \mu_1M_2} \alpha k^2 - 2 \frac{\mu_1\mu_2M_1M_2}{\mu_2M_1 - \mu_1M_2} \alpha_{12}k^2 + \\ + \frac{\mu_1\mu_2(M_1 - M_2)H_0}{\mu_2M_1 - \mu_1M_2}, \quad \mu_2M_1 - \mu_1M_2 > 0.$$

Рассмотрим теперь случай антиферромагнетика со слабым ферромагнетизмом*). Наличие слабого ферромагнетизма у антиферромагнетиков может быть связано с двумя обстоятельствами: либо магнитные моменты подрешеток не строго антипараллельны, а повернуты на угол, близкий к 180° ; либо магнитные моменты подрешеток антипараллельны, но слегка различны по величине из-за различия g -факторов. В первом случае небольшое отклонение магнитных моментов от антипараллельного расположения обусловлено специфическим видом энергии анизотропии, характерным для кристаллов с ромбоэдрической симметрией ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, MnCO_3 и др.). В таких кристаллах спонтанный магнитный момент перпендикулярен оси антиферромагнетизма («поперечный» слабый ферромагнетизм). Второй случай может иметь место в силу того, что подрешетки составлены из атомов различных элементов таким образом, что $N_1s_1 = N_2s_2$, а $g_1 \neq g_2$. Здесь N_1 , s_1 , g_1 и N_2 , s_2 , g_2 — числа атомов, их спины и g -факторы соответственно для первой и второй подрешеток. Кроме того, даже для одинаковых атомов g -факторы могут оказаться различными, если атомы занимают неэквивалентные места в кристаллической решетке. В этом случае результирующий спонтанный магнитный момент кристалла параллелен оси антиферромагнетизма («продольный» слабый ферромагнетизм). Продольный слабый ферромагнетизм обнаружен у деформированных кристаллов CoF_2 (А. Боровик-Романов³⁹).

Рассмотрим прежде всего энергетический спектр спиновых волн антиферромагнетиков с «поперечным» слабым ферромагнетизмом (А. Боровик-Романов^{39, 40}, Е. Туров⁴²).

Гамильтониан антиферромагнетиков, кристаллическая решетка которых имеет ромбоэдрическую симметрию, отличается от гамильтониана одноосного антиферромагнетика (7,1) наличием слагаемого

$$d(M_{1x}M_{2y} - M_{1y}M_{2x}), \quad (7,18)$$

*) Подробное исследование слабого ферромагнетизма содержится в работах А. Боровика-Романова^{39, 40} и И. Дзялошинского⁴¹.

ответственного за слабый ферромагнетизм. Кроме того, в этих кристаллах, как правило, константа магнитной анизотропии β отрицательна. Поэтому при отсутствии слагаемого (7,18) магнитные моменты в основном состоянии устанавливаются в плоскости, перпендикулярной оси n при $H_0 = 0$. Благодаря специфической энергии (7,18) магнитные моменты поворачиваются на угол, близкий к 180° (рис. 6), в результате чего в антиферромагнетике возникает слабый магнитный момент, равный по порядку величины $2 \frac{d}{\delta} M_0$. Так как энергия (7,18) релятивистского происхождения, а не обмен-

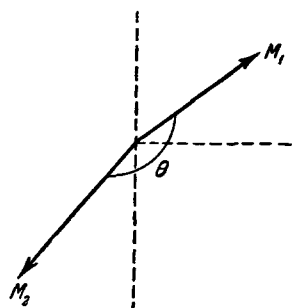


Рис. 6.

ного, то $d \ll \delta$. В $MnCO_3$ спонтанный магнитный момент порядка $200 \frac{CGSM}{\text{моль}}$, т. е. $\frac{d}{\delta} \approx 0,007$.

Продельвая вычисления, аналогичные тому, как это было сделано ранее, получим теперь ^{42,49}

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{\mu^2 (H_d + H_0) H_0 + 6_C^2 (ak)^2}, \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{\mu^2 (H_a^2 + H_d (H_d + H_0)) + 6_C^2 (ak)^2}, \end{aligned} \quad (7,19)$$

где $H_d = dM_0$, а $H_a = \sqrt{2\delta|\beta|} M_0$.

Энергетический спектр спиновых волн антиферромагнетика с продольным слабым ферромагнетизмом можно получить из гамильтониана ферромагнетика с двумя магнитными подрешетками, предположив, что $M_1 g_2 = M_2 g_1$. При этом в теле может существовать магнитный момент, равный

$$M(0) = M_1 - M_2 = vM,$$

где

$$v = \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2}, \quad M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2).$$

Так как различие в g -факторах — релятивистский эффект, то $M(0) \ll M$. В этих предположениях спектр спиновых волн имеет вид (Е. Туров ⁴²):

$$\varepsilon_{1,2} = \sqrt{\mu^2 (vH_e H_0 + v^2 H_0^2) + 6_C^2 (ak)^2} \pm \mu H_0, \quad (7,20)$$

где $\mu = \frac{1}{2} \hbar (g_1 + g_2)$, а H_0 предполагается направленным вдоль оси антиферромагнетизма и достаточно мало по абсолютной величине ($H_0 < vH_e$).

§ 8. Тепловые и магнитные свойства ферромагнетиков

Знание спектра спиновых волн позволяет определить магнитный момент ферромагнетика как функцию температуры и магнитного поля при $T \ll T_C$, а также найти вклад, вносимый спиновыми волнами в теплоемкость и другие термодинамические характеристики ферромагнетика.

Чтобы найти равновесное значение магнитного момента ферромагнетика при заданной температуре и заданном внешнем магнитном поле, будем исходить из формул (3,22), определяющих среднее квантовомеханическое значение магнитного момента:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_z \rangle &= MV - \sum_k \mu_k n_k, \\ \langle \mathfrak{M}^2 \rangle &\cong (MV)^2 - 2MV \sum_{k \neq 0} \mu_k n_k, \end{aligned} \quad (8,1)$$

где M и μ_k определяются формулами (3,23) и ось z совпадает с осью легчайшего намагничивания. Мы видим, что эти величины определяются

числами спиновых волн n_k . Подставив вместо величин n_k их равновесные значения, определяемые формулой $n_k^0 = \left(\exp \frac{\epsilon_k}{T} - 1 \right)^{-1}$, где ϵ_k — энергия спиновой волны и T — температура, выраженная в эргах, получим следующее выражение для равновесного магнитного момента ферромагнетика:

$$\overline{M}_z = MV - \sum_k \frac{\mu_k}{e^{\epsilon_k/T} - 1}, \quad (8,2)$$

$$\overline{M}^2 \approx (\overline{M}_z)^2.$$

Равновесной функцией распределения **спиновых** волн определяется также теплоемкость C_s ферромагнетика, связанная со спиновыми волнами,

$$C_s = \frac{d}{dT} \sum_k \frac{\epsilon_k}{e^{\epsilon_k/T} - 1}. \quad (8,3)$$

При абсолютном нуле температуры

$$(C_s)_{T=0} = 0, \quad (8,3')$$

$$(\overline{M}_z)_{T=0} = MV.$$

Магнитный момент при $T=0$ сложным образом зависит от приложенного поля H_0 . Мы приведем здесь выражение для M в двух предельных случаях малых и больших полей (Голстейн, Примаков³⁾:

$$M = \begin{cases} M_0 - \frac{\mu}{2a^3} \left(\frac{2\pi\mu M_0}{\theta_C} \right)^{3/2}, & H_0 + \beta M_0 \ll 2\pi M_0, \\ M_0 - \frac{\mu}{2a^3} \left(\frac{2\pi\mu M_0}{\theta_C} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi M_0}{H_0 + \beta M_0} \right)^{1/2}, & H_0 + \beta M_0 \gg 2\pi M_0. \end{cases} \quad (8,4)$$

Перейдем теперь к вычислению спиновой теплоемкости и магнитного момента ферромагнетика при конечных температурах. С этой целью удобно ввести термодинамический потенциал Ω газа спиновых волн, определяемый формулой

$$\Omega = T \sum_k \ln \left(1 - e^{-\frac{\epsilon_k}{T}} \right). \quad (8,5)$$

Свободная энергия F тела связана с потенциалом Ω соотношением⁴³

$$\Omega = F - \zeta N, \quad (8,5')$$

где ζ — химический потенциал, отнесенный к одной частице, и N — общее число частиц. Так как число спиновых волн не является определенным (спиновые волны могут рождаться и поглощаться), то химический потенциал спиновых волн равен нулю. Поэтому потенциал Ω совпадает со свободной энергией F :

$$\Omega = F.$$

Теплоемкость C_s и магнитный момент тела $\overline{M}_z = M(T, H) V$ связаны со свободной энергией соотношениями

$$M(T, H) = M - \frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial H}, \quad C_s = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2},$$

и, следовательно,

$$M(T, H) = M - \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial H}, \quad C_s = -T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2}. \quad (8,6)$$

Используя формулу (8,5) и выражение (2,11) для ϵ_k и переходя в формуле (8,5) от суммирования к интегрированию по волновому вектору k , согласно формуле

$$\sum_k f(k) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f(k) dk \quad (8,5')$$

получим после интегрирования по частям следующее выражение для Ω :

$$\Omega = -\frac{V}{6\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{k^3(\epsilon, \theta) d\epsilon}{e^{\epsilon/T} - 1}, \quad (8,6')$$

где $k(\epsilon, \theta)$ — величина волнового вектора спиновой волны, выраженная через ее энергию ϵ и угол θ , и

$$\epsilon_0 = V \sqrt{(\mu H^{(e)})^2 + 4\pi\mu^2 M_0 H^{(e)} \sin^2 \theta}, \quad H^{(e)} = H + \beta M_0$$

(здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что магнитное поле направлено вдоль оси легчайшего намагничения, $H \equiv H_0$).

Так как рассматривается область низких температур, верхний предел в интеграле (8,6') можно взять равным бесконечности.

Выполнить интегрирование в (8,6') в общем виде не удастся. Поэтому мы рассмотрим только некоторые наиболее интересные предельные случаи.

Если температура достаточно высока, $T \gg 2\pi\mu M_0$, $\mu H^{(e)}$, то (Ф. Блох¹⁾)

$$M(T, H) = M - \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{8\pi^{3/2}} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2}, \quad (8,7)$$

$$C_s = \frac{15}{32} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{3/2}} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2},$$

где $\zeta(x)$ — риманова ζ -функция (теплоемкость и магнитный момент отнесены к единице объема).

В области температур $\mu H^{(e)} \ll T \ll 2\pi\mu M_0$ имеем^{3, 44}

$$\begin{aligned} M(T, H) &= M - \frac{\pi}{48\sqrt{2}} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{T}{2\pi\mu M_0}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2} \approx \\ &\approx M - 0,05 \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{T}{2\pi\mu M_0}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (8,8)$$

$$C_s = \frac{147}{64} \frac{\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{\pi^{3/2} a^3} \frac{T}{2\pi\mu M_0} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2} \approx 0,5 \frac{1}{a^3} \frac{T}{2\pi\mu M_0} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2}.$$

Эти формулы справедливы, если ферромагнетик обладает малой энергией анизотропии, т. е. если $\beta \ll 2\pi$.

Если $\mu H^{(e)} \gg T$, $2\pi\mu M_0$, то⁴⁴

$$\begin{aligned} M(T, H) &= M - \frac{1}{8\pi^{3/2}} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu H^{(e)}}{T}}, \\ C_s &= \frac{1}{8\pi^{3/2} a^3} \left(\frac{\mu H^{(e)}}{\theta_C}\right)^{3/2} \left(\frac{\mu H^{(e)}}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H^{(e)}}{T}}. \end{aligned} \quad (8,9)$$

Если, наконец, $T \ll \mu H^{(e)}$, $2\pi\mu M_0$, то

$$M(T, H) = M - \frac{1}{16\pi^{3/2}} \frac{\mu}{a^3} \frac{1}{2\pi\mu M_0} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu H^{(e)}}{T}},$$

$$C_s = \frac{1}{16\pi^{3/2} a^3} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^{1/2} \frac{(\mu H^{(e)})^2}{2\pi\mu M_0 \theta_C} e^{-\frac{\mu H^{(e)}}{T}}.$$
(8,10)

Мы видим, что в случае больших полей и очень низких температур спиновая теплоемкость и отклонение магнитного момента от насыщения экспоненциально малы. Такой же ход с температурой имеет место и в отсутствие поля, если $T \ll \beta\mu M_0$. Это обстоятельство связано с наличием активационной энергии у спиновой волны.

Таким образом, при очень низких температурах вклад спиновых волн в теплоемкость экспоненциально мал.

Выясним, при каких температурах вклад спиновых волн в теплоемкость достаточно велик. Сравним для этого формулы (8,7) и (8,8) с известным выражением для фононной теплоемкости

$$C_l = \frac{2\pi^2}{5} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_l} \right)^3,$$
(8,11)

где θ_D — температура Дебая, определяемая как

$$\frac{3}{\theta_D^3} = \frac{2}{\theta_l^3} + \frac{1}{\theta_t^3}, \quad \theta_l = \frac{\hbar s_l}{a}, \quad \theta_t = \frac{\hbar s_t}{a}$$

(s_l и s_t — скорости продольных и поперечных звуковых колебаний). Легко убедиться, что спиновая теплоемкость превосходит фононную теплоемкость или совпадает с ней по порядку величины в интервале температур

$$\beta\mu M_0 \ll T \ll \theta_D^2/\theta_C.$$

Нижний предел составляет здесь несколько сотых градуса для веществ с малой энергией анизотропии ($\beta \ll 1$) и равен примерно градусу для одноосных кристаллов, у которых энергия анизотропии велика ($\beta \sim 10$); верхний предел порядка $10 \div 100^\circ \text{K}$.

Заметим, что зависимость теплоемкости ферромагнетика, а следовательно, и его энтропии от магнитного поля должна приводить к магнитокалорическому эффекту, имеющему такой же характер, как и в случае обычных парамагнетиков.

Формулы (8,7) — (8,10) показывают, что магнитный момент ферромагнетика изменяется с температурой по такому же закону, как спиновая теплоемкость, только в области температур $T \gg \mu H^{(e)}$, $2\pi\mu M_0$. В других температурных областях эти величины имеют различный температурный ход.

Температурная зависимость магнитного момента и теплоемкости изучалась экспериментально⁴⁵, причем в согласии с теорией спиновых волн обнаружен закон $C_s \sim M - M(T, H) \sim T^{3/2}$ в сравнительно широком интервале температур. В больших магнитных полях и при очень низких температурах эксперименты, по-видимому, не производились.

§ 9. Тепловые и магнитные свойства антиферромагнетиков

Тепловые и магнитные свойства антиферромагнетиков могут быть исследованы так же, как это было сделано в случае ферромагнетиков. Именно, используя выражения (7,13), (7,17) для энергетического спектра антиферромагнетика, следует определить согласно формуле (8,5)

термодинамический потенциал Ω и, далее, по формулам (8,6) найти теплоемкость и магнитный момент антиферромагнетика.

Приведем прежде всего выражения для теплоемкости антиферромагнетика в некоторых предельных случаях. Если магнитное поле H_0 отсутствует, то ³⁴

$$C_s \cong \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi^3}\right)^{1/2} \frac{1}{a^3} \left(\frac{\mu H_a}{\theta_C}\right)^3 \left(\frac{\mu H_a}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_a}{T}} & (T \ll \mu H_a), \\ \frac{8\pi^2}{15} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^3 & (\theta \gg T \gg \mu H_a). \end{cases} \quad (9,1)$$

Если H_0 отлично от нуля и приложено вдоль избранной оси антиферромагнетика, то теплоемкость определяется следующими формулами ³⁸:

$$C_s \cong \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi^3}\right)^{1/2} \frac{1}{a^3} \frac{\mu^3 H_a (H_a - H_0)^2}{\theta_C^3} \left(\frac{\mu H_a}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu(H_a - H_0)}{T}}, & \mu H_a > \mu H_0 \gg T, \\ \frac{4\pi^2}{15} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^3, & \mu H_0 \gg \mu H_a \gg T, \mu H_0 \gg T \gg \mu H_a, H_e \gg H_0, \\ \frac{8\pi^2}{15} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^3, & \theta_C \gg T \gg \mu H_a > \mu H_0. \end{cases} \quad (9,2)$$

Если внешнее магнитное поле ориентировано перпендикулярно избранной оси, то при достаточно низких температурах теплоемкость экспоненциально убывает с убыванием температуры:

$$C_s = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi^3}\right)^{1/2} \frac{1}{a^3} \left(\frac{\mu H_a}{\theta_C}\right)^3 \left(\frac{\mu H_a}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_a}{T}}, & \mu H_a \gg \mu H_0 \gg T, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi^3}\right)^{1/2} \frac{1}{a^3} \left(\frac{\mu H_a}{\theta_C}\right)^3 \left(\frac{\mu H_a}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_a}{T}}, & \theta_C \gg \mu H_0 \gg \mu H_a \gg T, \\ \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{a^3} (\mu H_0)^{3/2} \left(\frac{1}{\theta_C^{3/2}} + \frac{1}{\theta_{C1}^{3/2}}\right) \left(\frac{\mu H_0}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_0}{T}}, & \mu H_0 \gg \mu H_e \gg T. \end{cases} \quad (9,3)$$

При сравнительно высоких температурах теплоемкость зависит от температуры степенным образом:

$$C_s = \begin{cases} \frac{8\pi^2}{15} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^3, & \theta_C \gg T \gg \mu H_0 > \mu H_a, \\ \frac{4\pi^2}{15} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^3, & \theta_C \gg \mu H_0 \gg T \gg \mu H_a, \\ \frac{15}{32} \frac{\xi(5/2)}{\pi^{3/2}} \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{3/2}, & H_0 > H_e, T \gg \mu(H_0 - H_{1e}). \end{cases} \quad (9,4)$$

Мы видим, что спиновая теплоемкость антиферромагнетиков в широкой температурной области ($\mu H_a \ll T \ll \theta_C$) пропорциональна третьей степени температуры, т. е. ведет себя так же, как и фононная теплоемкость.

Формулы (9,2) показывают, что если $H_0 \parallel n$, то спиновая теплоемкость антиферромагнетиков различным образом зависит от температуры при $H_0 > H_a$ и $H_0 < H_a$. Если $H_0 \perp n$, то особенность температурного хода теплоемкости имеет место при $H_0 = H_e$. Вблизи этих значений магнитного поля имеют особенности также и другие термодинамические величины. Эти особенности связаны с изменением структуры основного состояния антиферромагнетика (см. § 7).

Если $H_0 \parallel n$ и $H_0 \leq H_a$, то, как видно из формул (7, 13), ветвь спиновых волн ϵ_1 имеет при $H_0 \approx H_a$ очень малую энергию активации, причем

энергия активации возрастает с уменьшением поля H_0 . Поэтому адиабатическое выключение поля H_0 должно приводить к повышению температуры антиферромагнетика. Изменение температуры тела можно определить из равенства энтропий до и после выключения магнитного поля

$$S(T_i, H) = S(T_f, 0),$$

где S — суммарная энтропия тела, включающая энтропию спиновых волн и фононов, T_i и T_f — начальная и конечная температуры тела. Если $T_i \ll \mu H_a$, $\frac{\theta_D^2}{\theta_C^2} \mu H_a$, то конечная температура будет равна

$$T_f = T_i \frac{\theta_D}{\theta_C} \left(\frac{\mu H_a}{T_i} \right)^{1/2}. \quad (9,5)$$

Отметим, что процесс нагревания может идти в два этапа: сначала нагревается спиновая система до температуры порядка $\mu H_a / \ln \frac{\mu H_a}{T}$, а затем установится общая температура спинов и решетки, определяемая формулой (9,5). Такая картина будет иметь место, если время релаксации внутри системы спинов значительно меньше, чем время выравнивания температур фононов и спиновых волн.

Так как магнитная структура антиферромагнетика существенно зависит от ориентации магнитного поля, то изменение ориентации магнитного поля без изменения его величины также может приводить к магнитокалорическому эффекту³⁸.

Рассмотрим теперь магнитные свойства антиферромагнетиков. Так как магнитные моменты подрешеток в отсутствие магнитного поля компенсируют друг друга, то результирующий магнитный момент при не слишком сильных полях оказывается пропорциональным магнитному полю. Поэтому магнитные свойства антиферромагнетиков удобно описывать тензором магнитной восприимчивости χ_{ik} .

Приведем формулы для продольной и поперечной составляющих этого тензора относительно избранной оси антиферромагнетика в ряде предельных случаев³⁴:

$$\chi_{||} = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi^3} \right)^{1/2} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_C} \left(\frac{\mu H_a}{\theta_C} \right)^{3/2} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_a}{T}}, & T \ll \mu H_a, \\ \frac{2\mu^2}{3a^3 \theta_C} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^2, & \theta_C \gg T \gg \mu H_a; \end{cases} \quad (9,6)$$

$$\chi_{\perp} = \begin{cases} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi^3} \right)^{1/2} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_C} \left(\frac{\mu H_a}{\theta_C} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu H_a}{T}}, & T \ll \mu H_a, \\ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{6} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_C} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^2, & \mu H_a \ll T \ll \theta_C. \end{cases} \quad (9,7)$$

Эти формулы справедливы при $H_0 \ll H_a$.

Если внешнее поле достаточно велико, то магнитный момент антиферромагнетика не будет пропорционален магнитному полю. При достаточно большом значении магнитного поля, как указывалось, изменяется структура основного состояния антиферромагнетика и величина магнитного момента существенно зависят от ориентации магнитного поля и взаимной ориентации магнитных моментов.

Используя формулы (7,19) и (7,20) для энергетического спектра антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом, можно вычислить температурную зависимость магнитного момента и магнитную восприимчивость таких тел.

В случае антиферромагнетика со слабым поперечным ферромагнетизмом имеем^{40, 42}:

$$M(T) = 2M_0 \frac{H_d}{H_e} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_C} \frac{H_e}{M_0} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^2 \right\},$$

$$\chi_{\perp}(T) = 2 \frac{M_0}{H_e} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_C} \frac{H_e}{M_0} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^2 \right\}. \quad (9,8)$$

В случае антиферромагнетика со слабым продольным ферромагнетизмом имеем⁴²:

$$M(T) = \nu M_0 \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{\mu^2 H_e}{a^3 \theta_C M_0} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^2 \right\},$$

$$\chi_{\parallel}(T) = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_C} \left(\frac{T}{\theta_C} \right)^2. \quad (9,9)$$

До настоящего времени, по-видимому, нет экспериментов, из которых можно было бы определить спиновую теплоемкость антиферромагнетика.

Зависимость магнитного момента и магнитной восприимчивости от температуры в удобных для сравнения результатов эксперимента с теорией условиях изучалась⁴⁰ на антиферромагнетиках со слабым ферромагнетизмом (MnCO_3). При этом оказывается, что зависимость магнитного момента от температуры удовлетворительно описывается первой из формул (9,8), а магнитная восприимчивость зависит от температуры значительно слабее, чем это требуется второй формулой (9,8).

(Окончание статьи в следующем выпуске.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. F. Bloch, Z. Phys. 61, 206 (1930).
2. Л. Ландау, ЖЭТФ 30, 1058 (1956); 32, 59 (1957).
3. T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. 58, 1098 (1940).
4. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. Я. Френкель, Z. Phys. 49, 31 (1928); Я. Дорфман, Nature 119, 353 (1928).
6. W. Heisenberg, Z. Phys. 49, 619 (1928).
7. F. Dyson, Phys. Rev. 102, 1217, 1230 (1956).
8. Е. Лифшиц, ЖЭТФ 15, 97 (1945).
9. C. Herring and C. Kittel, Phys. Rev. 81, 869 (1951).
10. С. Вонсовский, Я. Шур, Ферромагнетизм, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
11. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Sow. Phys. 8, 157 (1935).
12. А. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ 35, 474 (1958).
13. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ 35, 474 (1958).
14. А. Абрикосов, И. Дзялошинский, ЖЭТФ 35, 771 (1958).
15. Н. Боголюбов, Лекції з квантової статистики, Киев, 1948; Н. Боголюбов, С. Тябликов, ЖЭТФ 19, 257 (1948).
16. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
17. В. Гинзбург, ЖЭТФ 34, 1597 (1958).
18. С. Пекар, ЖЭТФ 33, 1022 (1957); 34, 1176 (1958); 36, 451 (1959).
19. L. Walker, Phys. Rev. 105, 310 (1957).
20. C. Kittel, Phys. Rev. 71, 270 (1947).
21. J. Griffiths, Nature 158, 670 (1946).
22. R. White, J. Solt, Phys. Rev. 104, 56 (1956).
23. J. Mercerau and R. Feynman, Phys. Rev. 104, 63 (1956).
24. C. Kittel, Phys. Rev. 110, 1295 (1958).
25. W. Ament and G. Rado, Phys. Rev. 97, 1558 (1955).
26. M. Seavey and P. Tannenwald, Phys. Rev. Lett. 1, 168 (1958).
27. В. Гинзбург, Г. Мотулевич, УФН 55, 469 (1955).
28. G. Reuter and E. Sondheimer, Proc. Phys. Soc. 295, 336 (1948).

29. В. Гуревич, ЖЭТФ 33, 1497 (1957).
 30. В. Гуревич, ЖТФ 28, 2352 (1958).
 31. И. Киккоин, *Sow. Phys.* 9, 1 (1936); E. Pugh, N. Rostoker, N. Schindler, *Phys. Rev.* 80, 680 (1950); S. Foner, E. Pugh, *Phys. Rev.* 91, 20 (1953); К. Белов, Е. Свирина, Ю. Белоусов, *Физ. металлов и металлосведение* 6, 621 (1958).
 32. С. Kittel, *Phys. Rev.* 110, 836 (1958).
 33. Е. Туров, Ю. Ирхин, *Физ. металлов и металлосведение* 3, 15 (1956).
 34. М. Каганов, В. Цукерник, ЖТФ 34, 106 (1958).
 35. Л. Ландау, *Sow. Phys.* 4, 675 (1933).
 36. L. Neel, *Ann. Phys.* 8, 137 (1948).
 37. L. Neel, *Ann. Phys.* 5, 232 (1936); С. Тябликов, А. Амагуни, *ДАН СССР* 108, 69 (1956); К. Власов, *Изв. АН СССР, сер. физ.*, 18, 339, 1954; А. Амагуни, *Физ. металлов и металлосведение* 3, 411 (1956); 6, 395 (1958); G. Gorter, J. Naantjes, *Physica* 18, 285 (1952).
 38. Е. Туров, ЖЭТФ 34, 1009 (1958).
 39. А. Боровик-Романов, М. Орлова, ЖЭТФ 31, 579 (1956); А. Боровик-Романов, ЖЭТФ 36, 75 (1959).
 40. А. Боровик-Романов, Диссертация, ИФП АН СССР, Москва, 1959.
 41. И. Дзялошинский, ЖЭТФ 32, 1547 (1957).
 42. Е. Туров, ЖЭТФ 36, 1254 (1959).
 43. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Статистическая физика*, М.—Л, Гостехиздат, 1951.
 44. М. Каганов, В. Цукерник, *Физ. металлов и металлосведение* 5, 561 1957.
 45. W. Keesom, B. Kurrlmeyer, *Physika* 6, 364, 401, 633 (1939) W. Keesom, C. Clark, *Physica* 2, 230, 513 (1935); J. Kouvel, *Phys. Rev.* 102, 1489 (1956).
 46. А. Ахизер, *J. Phys. USSR* 10, 217 (1946).
 47. А. Ахизер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ 36, 216 (1959).
 48. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ 36, 224 (1959).
 49. В. Барьяхтар, ЖЭТФ 37, 690 (1959).
 50. В. Барьяхтар, Г. Урушадзе, ЖЭТФ 38, 1253 (1960).
 51. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ 37, 823 (1959).
 52. А. Ахизер, Л. Шишкин, ЖЭТФ 34, 1267 (1958); А. Ахизер, В. Барьяхтар, ЖЭТФ 38 (в печати).
 53. R. Reierls, *Ann. Phys.* 5, 1055 (1929).
 54. А. Ахизер, ЖЭТФ 10, 1934 (1940).
 55. А. Галкин, А. Королук, ЖЭТФ 34, 1025 (1958)
-

