

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

**ГЕНЕРАЦИЯ, УСИЛЕНИЕ И ИНДИКАЦИЯ ИНФРАКРАСНОГО  
И ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КВАНТОВЫХ  
СИСТЕМ**

***Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов***

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение . . . . .	161
I. Методы получения состояний систем с отрицательной температурой . . . . .	164
§ 1. Отрицательная температура . . . . .	164
§ 2. Сортировка молекул с помощью неоднородного электрического или магнитного поля в молекулярных пучках . . . . .	166
§ 3. Возбуждение молекул газа с помощью газового разряда . . . . .	167
§ 4. Импульсный метод получения отрицательных температур в полупроводниках . . . . .	173
§ 5. Получение отрицательных температур в полупроводниках между уровнями, принадлежащими одной зоне («усилители с отрицательной массой») . . . . .	182
§ 6. Получение отрицательных температур методом двойного резонанса . . . . .	186
II. Генерация и усиление электромагнитных волн системами с отрицательной температурой . . . . .	190
§ 7. Взаимодействие излучения с системами с отрицательной температурой . . . . .	190
§ 8. Вспомогательные устройства . . . . .	193
§ 9. Резонаторы . . . . .	196
§ 10. Усилители . . . . .	200
§ 11. Квантовые индикаторы излучения . . . . .	204
Заключение . . . . .	206
Цитированная литература . . . . .	207

**ВВЕДЕНИЕ**

Существуют три различных типа источников электромагнитного излучения: тепловые источники излучения, различные люминесцентные источники и генераторы. Эти три типа источников излучения существенно различаются по спектральному составу. Спектральный состав излучения тепловых источников близок к спектральному составу излучения абсолютно черного тела, люминесцентные источники имеют значительно более узкий спектр, генераторы дают практически монохроматическое излучение.

Интенсивность излучения абсолютно черного тела и его спектральный состав полностью описываются формулой Планка, где единственным параметром, от которого зависит как интенсивность, так и спектральный состав излучения, является температура. Интенсивность и спектральный состав люминесцентных источников не могут быть охарактеризованы

с помощью одного параметра (например, температуры). Однако для характеристики люминесцентного излучения можно ввести понятие эффективной температуры, считая эффективной температурой люминесцентного источника такую температуру черного тела, при которой интенсивности двух источников внутри некоторого интервала частот равны. Такое определение не является вполне однозначным, так как зависит от величины интервала частот. Естественно, что определенная таким образом эффективная температура зависит также от частоты, т. е. в различных участках спектра имеет различное значение.

Ввиду того, что спектральный состав люминесцентных источников излучения значительно уже спектрального состава тепловых источников излучения, с помощью люминофоров удается получить излучение, имеющее значительно более высокую эффективную температуру, чем в случае тепловых источников. Обычно эффективная температура излучения люминофора значительно превосходит температуру светящегося образца — люминофоры светят «холодным светом».

Вследствие того, что генераторы дают практически монохроматическое излучение, они обычно характеризуются частотой и мощностью излучения. Генераторы можно также характеризовать с помощью эффективной температуры, как это было сделано для люминесцентных источников. При этом, ввиду крайне малой полосы частот излучения и большой мощности генераторов, их эффективная температура оказывается очень большой. Например, с помощью генераторов в сантиметровом диапазоне волн можно получить излучение, имеющее эффективную температуру в  $10^{15} \div 10^{25}$  градусов.

Если в области длинных волн (радиодиапазон, сантиметровые волны) основными источниками излучения являются генераторы, то в субмиллиметровом, инфракрасном и оптическом диапазонах основными источниками излучения являются тепловые и люминесцентные источники.<sup>7</sup> До настоящего времени в инфракрасном и оптическом диапазонах не удалось создать генераторов ни с помощью электронных приборов, ни другими методами.

В последнее время получили значительное развитие методы генерации и усиления радиоволн, основанные на индуцированных переходах в квантовых системах (молекулах, атомах, ионах и т. д.)<sup>1-4,9</sup>.

Создание молекулярных генераторов и парамагнитных усилителей вызвало появление работ, предлагающих использование индуцированных переходов для генерации и усиления субмиллиметровых, инфракрасных и оптических волн, рассмотрению которых посвящена настоящая статья.

Механизм возникновения излучения в молекулярных генераторах существенно отличается от механизма, обусловливающего излучение в люминесцентных и тепловых источниках. Излучение фотонов в нагретых телах и при люминесценции происходит за счет спонтанных переходов атомов, молекул и т. д. с высоких (возбужденных) уровней на более низкие энергетические уровни. Это означает, что каждый акт испускания фотона происходит в отсутствие фотонов той же частоты, под влиянием нулевых колебаний электромагнитного поля. Следует отметить, что вследствие значительного уменьшения вероятности спонтанного излучения с уменьшением частоты, квантовый выход люминесценции при переходе в инфракрасный диапазон волн значительно падает. С этим обстоятельством, по-видимому, связано то, что до настоящего времени не удалось получить достаточно хороших люминофоров в инфракрасной области.

Поэтому для получения излучения в инфракрасной области (особенно в далекой инфракрасной области) использование индуцированных пере-

ходов, позволяющее существенно повысить вероятность испускания фотона, представляется целесообразным.

Для создания генераторов и усилителей, использующих индуцированные переходы, необходимо получить термодинамически неравновесные состояния системы — так называемые состояния с отрицательной температурой. В то время как в системах, находящихся в термодинамическом равновесии, а также системах, имеющих положительную температуру, заполнение энергетических уровней уменьшается с ростом энергии, в состояниях с отрицательной температурой, хотя бы в некотором интервале энергий, имеет место обратное распределение частиц по уровням: заполнение энергетических уровней увеличивается с ростом энергии. Такие состояния с отрицательной температурой могут излучать фотоны под влиянием падающего на них внешнего излучения. Поэтому квантовые системы, находящиеся в состоянии с отрицательной температурой, помимо генераторов могут быть использованы для усиления излучения. Хотя вследствие спонтанного излучения чувствительность таких усилителей уменьшается с ростом частоты, все же для волн инфракрасного диапазона можно ожидать существенного увеличения чувствительности по сравнению с существующими в этом диапазоне волн приборами. В работах<sup>5,6</sup> предлагается использование спектральных линий различных веществ для создания высокочувствительных индикаторов излучения, свободных от шумов спонтанного излучения.

Одной из основных характеристик систем с отрицательной температурой является «число активных частиц», т. е. избыток частиц на верхнем уровне по сравнению с низшим уровнем, образующимся в единицу времени. Это число определяет мощность, которую может излучать система.

Другой важной характеристикой является величина  $\kappa = \frac{2\pi|d|^2n}{h\Delta\omega}$ , где  $|d|^2$  — квадрат матричного элемента дипольного момента между рассматриваемыми уровнями,  $n$  — число активных частиц,  $\Delta\omega$  — ширина спектральной линии. Как будет показано в § 8, величина  $\kappa$  входит в условие самовозбуждения генераторов и определяет коэффициент усиления усилителей. Ввиду того, что в газах молекулы распределены по большему числу вращательных уровней, величина  $\kappa$  в сантиметровом диапазоне для газов в  $10^3$  раз меньше, чем для парамагнитных ионов в кристаллах, несмотря на то, что значение дипольного момента у парамагнитных ионов в  $10^2$  раз меньше. Аналогичные соотношения имеют место, по-видимому, и для инфракрасного диапазона волн. Поэтому более перспективными системами для генерации и усиления инфракрасных волн являются твердые тела.

Создание когерентных источников инфракрасного и оптического излучений является чрезвычайно актуальной задачей. Например, создание когерентных источников в инфракрасном и оптическом диапазонах волн позволит в спектроскопии сильно повысить чувствительность и разрешающую силу приборов; инфракрасные и оптические волны могут быть наряду с радиоволнами использованы для передачи информации (объем передаваемой информации растет с ростом частоты излучения и уменьшается с ростом ширины спектра) и т. д.

В настоящей статье дан обзор опубликованных в последнее время работ, в которых предлагаются различные методы получения отрицательных температур в газах и твердых телах, а также обсуждаются особенности работы генераторов и усилителей в инфракрасном и оптическом диапазонах волн. Последний параграф второй главы посвящен методам идентификации волн с помощью квантовых систем.

## I. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

### § 1. Отрицательная температура

В настоящее время широко используется понятие отрицательной температуры при описании работы молекулярных генераторов и усилителей, так как системы, находящиеся в состоянии с отрицательной температурой, усиливают проходящее через них электромагнитное излучение за счет индуцированного испускания.

Впервые условия, при которых возможно возникновение «отрицательной абсорбции» для излучения, были сформулированы в работе В. А. Фабриканта<sup>7</sup>.

Понятие отрицательной температуры впервые было введено<sup>7а</sup> для характеристики неравновесного распределения ядер Li по зеемановским уровням в случае, когда число ядер на более высоком энергетическом уровне превосходило число ядер на более низком уровне.



Рис. 1. Распределение частиц по двум уровням при различных значениях температуры  $T$ .

В настоящее время понятие отрицательной температуры широко используется при описании работы молекулярных генераторов и усилителей.

Пусть квантовая система обладает двумя энергетическими уровнями, причем на каждом из этих уровней может находиться произвольное число частиц (рис. 1). При термодинамическом равновесии распределение частиц по уровням характеризуется функцией Больцмана

$$N_i = A e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}, \quad (1,1)$$

где  $A$  — нормировочная постоянная,  $N_i$  — число частиц на  $i$ -м уровне,  $\varepsilon_i$  — энергия  $i$ -го уровня,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Из (1,1) следует, что при любом значении температуры, на более высоком энергетическом уровне находится меньше частиц, чем на более низком.

При отсутствии термодинамического равновесия распределение частиц между двумя уровнями может быть произвольным. Состояние системы, когда на более высоком энергетическом уровне находится меньше частиц, чем на более низком, формально может быть описано с помощью функции вида (1,1) с некоторой положительной температурой  $T$ . Для описания неравновесной системы, у которой на более высоком энергетическом уровне находится больше частиц, чем на более низком, учитывая функцию вида (1,1), следует считать величину  $T$  отрицательной. Поэтому такие состояния системы, у которых верхний уровень заселен больше нижнего, получили название состояний с отрицательной температурой.

Состоянию системы, когда все частицы находятся на верхнем энергетическом уровне, соответствует температура  $T \rightarrow -0^\circ$  К; когда все частицы находятся на нижнем энергетическом уровне — температура  $T \rightarrow +0^\circ$  К. Состоянию системы, когда верхний и нижний уровни заселены одинаково, соответствует температура  $T \rightarrow \pm \infty$ . Следует отметить, что при температуре  $T \rightarrow +0^\circ$  К энергия системы минимальна, а при  $T \rightarrow -0^\circ$  энергия системы максимальна.

Понятие отрицательной температуры может быть обобщено на системы с произвольным числом уровней, когда распределение частиц по квантовым состояниям системы описывается функцией распределения  $f_r$ . Функция распределения  $f_r$  пропорциональна вероятности нахождения частиц системы в  $r$ -м квантовом состоянии и нормирована следующим образом:

$$\sum_r f_r = N, \quad (1,1')$$

где  $N$  — число частиц системы, а сумма берется по всем состояниям системы. Все системы, описываемые функцией распределения, можно разделить на два класса:

1. Системы, у которых вероятность нахождения частиц в квантовом состоянии с энергией  $\varepsilon$  уменьшается с увеличением энергии во всем интервале состояний, т. е.

$$f_l > f_m, \text{ если } \varepsilon_l < \varepsilon_m, \quad (1,2)$$

а индексы  $l$  и  $m$  принимают всевозможные значения.

2. Системы, у которых хотя бы для двух энергетических уровней  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_m$  имеет место неравенство

$$f_l < f_m, \text{ если } \varepsilon_l < \varepsilon_m. \quad (1,3)$$

К системам первого класса, в частности, относятся системы, находящиеся в термодинамическом равновесии, функция распределения которых  $f(\varepsilon_r, T)$  в зависимости от статистики частиц является функцией Ферми — Дирака или Бозе — Эйнштейна:

$$f(\varepsilon_r, T) = g_r (e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} \pm 1)^{-1}, \quad (1,4)$$

где  $g_r$  — кратность вырождения энергетического уровня,  $\mu$  — химический потенциал.

В случае термодинамического равновесия единственным параметром в (1,4) является абсолютная температура  $T$ , которая всегда положительна.

В неравновесных состояниях системы распределение частиц по уровням нельзя характеризовать с помощью одного параметра — температуры. Однако для систем первого класса для любых двух уровней распределение частиц можно характеризовать с помощью функции (1,4) с положительным параметром  $T$ . Поэтому такие состояния системы называются состояниями с положительной температурой.

В системах второго класса, которые всегда неравновесны, для уровней, соответствующих неравенству (1,3), распределение частиц по этим уровням может формально описываться с помощью функций вида (1,4) при условии, что параметр  $T$  (температура) принимает отрицательные значения. Системы, удовлетворяющие неравенству (1,3), называются системами с отрицательной температурой по отношению к уровням  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_m$ .

Системы первого и второго классов ведут себя различным образом по отношению к взаимодействующему с ними монохроматическому электромагнитному излучению с частотой

$$\omega = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_l}{\hbar}. \quad (1,5)$$

Система с положительной температурой поглощает проходящее через нее электромагнитное излучение; система с отрицательной температурой по отношению к уровням  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_l$  при прохождении через нее излучения частоты  $\omega = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_l}{\hbar}$  усиливает это излучение.

Действительно, число испущенных системой фотонов в 1 сек при переходе из состояния  $m$  в состояние  $l$  равно

$$I^+ = w_{ml} (n_\lambda + 1) f_m (1 \mp f_l). \quad (1,6)$$

Верхний знак соответствует статистике Ферми, нижний знак — статистике Бозе,  $w_{ml}$  — квантовомеханическая вероятность испускания фотона<sup>8</sup>,  $n_\lambda$  — число фотонов в радиационном осцилляторе  $\lambda$ .

Число поглощенных системой фотонов в 1 сек равно

$$I^- = w_{lm} n_\lambda f_l (1 \mp f_m). \quad (1,7)$$

Вычитая (1,7) из (1,6) и учитывая, что  $w_{ml} = w_{lm}$ , получим

$$I^+ - I^- = w_{lm} \{n_\lambda (f_m - f_l) + f_m (1 \mp f_l)\}. \quad (1,8)$$

Только первый член выражения (1,8), пропорциональный числу фотонов, связан с индуцированным испусканием или резонансным поглощением, тогда как второй член (1,8), который не зависит от числа фотонов, дает спонтанные переходы в системе. Для того чтобы система усиливала проходящее через нее электромагнитное излучение, необходимо согласно (1,8) следующее:

$$f_m - f_l > 0, \quad (1,9)$$

т. е. система должна находиться в состоянии с отрицательной температурой по отношению к уровням  $m$  и  $l$  ( $\epsilon_m > \epsilon_l$ ). Условие (1,9) является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным условием усиления, так как в системе возможны переходы с данной частотой  $\omega$  между другими парами уровней, по отношению к которым температура положительна.

Таким образом, достаточным условием усиления является

$$\sum_{m,l} w_{ml} (f_m - f_l) > 0, \quad (1,10)$$

где суммирование производится по всем парам индексов при условии  $\epsilon_m - \epsilon_l = \hbar\omega$ .

Спонтанное излучение, представленное вторым членом в выражении (1,8), обусловливает шумы квантовых усилителей<sup>3-5, 9-11, 61</sup>, так как интенсивность спонтанного излучения не зависит от числа падающих на систему фотонов.

Ниже рассматриваются различные методы получения систем с отрицательной температурой, которые могут быть использованы в инфракрасном и оптическом диапазонах волн.

## § 2. Сортировка молекул с помощью неоднородного электрического или магнитного поля в молекулярных пучках

Метод сортировки молекул по уровням, применяемый в молекулярных генераторах, работающих на аммиаке<sup>1, 49</sup>, может быть использован для сортировки молекул и в инфракрасном, и оптическом диапазонах длин волн<sup>12, 13</sup>. Так, например, для молекул аммиака  $\text{NH}_3$  частота переходов

между различными вращательными уровнями  $j \rightarrow j + 1$  дается формулами

$$\omega = 2B(j + 1), \quad (2,1)$$

где  $B$  — вращательная постоянная молекулы (рис. 2).

Для молекулы  $\text{NH}_3$  постоянная  $B = 2,98 \cdot 10^5 \text{ Мгц}$ . Для  $\text{ND}_3$  постоянная  $B = 1,54 \cdot 10^5 \text{ Мгц}$ ,  $j$  — квантовое число полного момента количества движения нижнего вращательного уровня.

При комнатных температурах достаточно интенсивно заселены уровни с  $j \sim 10$ . Следовательно, согласно (2,1) у газообразного аммиака при комнатной температуре имеются достаточно интенсивные линии с длиной волны  $\lambda$  порядка нескольких сотых миллиметра.

Каждый вращательный уровень расщеплен на два инверсионных подуровня. Длина волны, соответствующая переходам между инверсионными уровнями, зависит от квантовых чисел  $j$  и  $k$  ( $k$  — проекция  $j$  на ось симметрии молекулы) и лежит в пределах  $1 \text{--} 2 \text{ см}$ . При пропускании пучка таких молекул через квадрупольный конденсатор на выходе конденсатора можно получить пучок молекул с заселенными верхними инверсионными уровнями.

Учитывая, что при дипольных переходах между вращательными уровнями должно изменяться инверсионное состояние молекул<sup>14</sup>, ясно, что отсортированный таким образом пучок молекул обладает отрицательной температурой не только при переходах между соседними инверсионными уровнями, но также и при вращательно-инверсионных переходах. С помощью квадрупольного конденсатора можно получить сортировку и ряда других молекул<sup>15</sup> ( $\text{HDO}$ ,  $\text{CH}_2\text{O}$ ).

Существенным недостатком такого метода является сравнительно малое количество активных\*) молекул, получаемых при таком способе сортировки. Существующие в настоящее время источники молекулярных пучков позволяют получать пучки молекул с плотностью потока, не большей  $10^{15} \frac{\text{част}}{\text{с.м}^2\text{сек}}$  на каждом из вращательных уровней.

### § 3. Возбуждение молекул газа с помощью газового разряда

Сравнительно недавно в работах<sup>16,17</sup> было указано на возможность получения отрицательных температур в газовом разряде при возбуждении молекул или атомов газа электронами. В упомянутой работе рассматривается стационарный процесс прохождения электронного пучка через газ. К системе приложено постоянное электрическое поле напряженности  $F$  (рис. 3).

Упругие столкновения электронов с атомами газа при наличии внешнего электрического поля  $F$  приводят к хорошо известному эффекту «разогревания» электронов, когда средняя кинетическая энергия электрона может значительно превышать среднюю кинетическую энергию атомов газа. Неупругие столкновения первого рода между электронами и атомами приводят к возбуждению атомов, тогда как неупругие столкновения второго рода приводят к переходам атомов с более высоких на более низкие энергетические уровни.

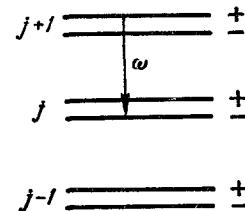


Рис. 2. Расщепление вращательных уровней на два инверсионных подуровня.

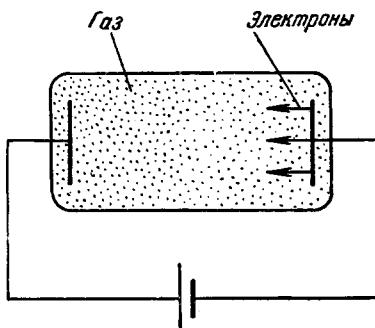
Стрелка показывает один из разрешенных переходов.

\*) Количество активных молекул равно разности числа молекул, находящихся на верхнем и нижнем энергетических уровнях.

Число переходов атома в единицу времени из состояния с энергией  $\varepsilon_1$  в состояние с энергией  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ) за счет ударов первого рода равно

$$\frac{1}{\theta_{12}} = \int_{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}^{\infty} \sigma_{12}(\varepsilon) v d n(\varepsilon), \quad (3,1)$$

где  $\theta_{12}$  — время жизни по отношению к переходу с уровня 1 на уровень 2,  $\sigma_{12}$  — сечение столкновения первого рода электрона с атомом,  $v$  — относительная скорость электрона и атома (фактически,  $v$  — скорость электрона),  $d n(\varepsilon)$  — число электронов в  $1 \text{ cm}^3$ , имеющих энергию в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ .



аналогично для числа переходов в обратном направлении с уровня  $\varepsilon_2$  на уровень  $\varepsilon_1$  можно написать

$$\frac{1}{\theta_{21}} = \int_0^{\infty} \sigma_{21}(\varepsilon) v d n(\varepsilon), \quad (3,2)$$

Рис. 3. Схема установки для возбуждения молекул газа с помощью пучка электронов.

где  $\sigma_{21}$  — сечение столкновения второго рода. В формуле (3,1) и (3,2) пределы интегрирования различны: в формуле (3,1) интегрирование ведется от некоторой начальной энергии  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ , которая соответствует минимальной энергии электрона, необходимой для возбуждения атома.

Для простоты можно считать, что распределение электронов по энергиям максвелловское с температурой  $T_e$ , причем, как указывалось выше,  $T_e \gg T_a$ , где  $T_a$  — температура атомов газа. Тогда в (3,1) и (3,2)

$$d n(\varepsilon) = a e^{-\varepsilon/kT_e} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \quad (3,3)$$

На основе принципа детального равновесия<sup>18</sup> можно написать

$$\varepsilon_1 \sigma_{12}(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \sigma_{21}(\varepsilon_2). \quad (3,4)$$

Из (3,1), (3,2) и (3,4) следует

$$\frac{\theta_{21}}{\theta_{12}} = e^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT_e}}. \quad (3,5)$$

Формула (3,5) показывает, что время жизни в более высоком энергетическом состоянии несколько короче, чем в более низком, если переходы в атомах происходят только за счет соударений с электронами.

Изменение числа атомов  $N_1$  и  $N_2$  на уровнях  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в единицу времени за счет ударов первого и второго рода равно

$$\frac{dN_1}{dt} = - \frac{dN_2}{dt} = - \frac{N_1}{\theta_{12}} + \frac{N_2}{\theta_{21}}, \quad (3,6)$$

где  $N_2$  — число атомов на уровне  $\varepsilon_2$ . В стационарном состоянии  $\frac{dN}{dt} = 0$ , и поэтому из (3,5) следует

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT_e}}. \quad (3,7)$$

Таким образом, распределение атомов по уровням является бульцмановским с температурой, равной температуре электронов  $T_e$ . Учет вырождения атомных уровней приводит к очевидному обобщению формулы (3,7)

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT_e}}, \quad (3,8)$$

где  $g_i$  — кратность вырождения  $i$ -го уровня.

В том случае, когда переход атомов с более высоких энергетических уровней на более низкие происходит не только за счет ударов второго рода, но и за счет других процессов, например радиационного распада, распределение атомов по уровням будет отличаться от (3,7) или (3,8).

Стационарное распределение в этом случае может быть получено путем рассмотрения изменения числа частиц на данном энергетическом уровне. Пусть время жизни по отношению к радиационному распаду уровня  $i$  будет равно  $\tau_i$ , тогда

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_1}{\theta_{12}} - \frac{N_2}{\theta_{21}} - \frac{N_2}{\tau_2}. \quad (3,9)$$

Если  $\tau_2 \ll \theta_{21}$ , то в стационарном случае получается

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\tau_2}{\theta_{21}} e^{-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT_e}}. \quad (3,10)$$

Сравнение (3,7) и (3,10) показывает, что распределение атомов по энергетическим уровням отличается от бульцмановского множителем  $\frac{\tau_2}{\theta_{21}} \ll 1$ .

В этом случае, если ввести в рассмотрение еще один энергетический уровень, для определенности более высокий, из (3,10) следует, что

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{\tau_3}{\theta_{31}} \frac{\theta_{21}}{\tau_2} e^{-\frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{kT_e}}. \quad (3,11)$$

В формуле (3,11) бульцмановский фактор  $\exp\left\{-\frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{kT_e}\right\} < 1$ , поскольку  $\epsilon_3 > \epsilon_2$ , однако предэкспоненциальный множитель  $\frac{\tau_3}{\theta_{31}} \frac{\theta_{21}}{\tau_2}$  при некоторых значениях входящих в него параметров может превышать 1, и, таким образом, возможно, что отношение  $\frac{N_3}{N_2}$  будет превышать 1, что эквивалентно наличию отрицательной температуры по отношению к уровням 3 и 2.

Как видно из предыдущего, отрицательные температуры будут возникать, если  $\tau_i < \theta_{ii}$ , что ограничивает плотность электронов, поскольку  $\theta_{ii}^{-1}$  пропорционально плотности электронного газа.

Условия самовозбуждения системы существенным образом зависят от числа активных атомов  $N_3 - N_2$ . При прочих равных условиях выгодно иметь большие плотности частиц, т. е. повышать давление в системе. При больших плотностях существенным становится эффект поглощения фотона, образовавшегося в результате спонтанного перехода другого атома. Такой процесс приводит к увеличению продолжительности жизни атома в возбужденном состоянии. Этот эффект будет полезен в том случае, когда он увеличивает продолжительность жизни атома на верхнем уровне 3, т. е. верхний уровень должен быть оптически связан с основным («разрешенный переход»). В этом случае система допускает работу при более высоких плотностях. Если же оптически связан с основным уровнем нижний

из уровней с отрицательной температурой — уровень 2, то увеличение плотности приводит к вредному эффекту — увеличению относительной заселенности уровня 2.

В качестве примера в работе<sup>16</sup> рассмотрен неон. Верхним 3 и нижним 2 уровнями, между которыми возникает состояние с отрицательной температурой, выбраны соответственно  $2s_4$  и  $2p_{10}$ . Уровень  $2p_{10}$  распадается за время  $\tau_2 \sim 10^{-8}$  сек на низлежащие уровни. При давлениях  $\sim 10$  мм рт. ст. время жизни верхнего уровня  $2s_4$  может быть оценено как  $\tau_3 \approx 60 \tau_2$ . Чтобы получить  $N_3 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$  при температуре электронного газа  $kT_e = 2,9 \text{ эв}$ , необходимо положить  $\frac{\tau_3}{\theta_{31}} = 3 \cdot 10^{-5}$ . Точное значение сечения возбуждения электроном атома на уровень  $2s_4$  неизвестно, однако, если положить его равным  $\sigma \approx 10^{-17} \text{ см}^2$ , получится для плотности электронов в пучке  $n \sim 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Очевидно, что такие значения плотностей и температур электронов в пучке могут быть получены реально.

Следует заметить, что для всех уровней  $i$  с оптически разрешенными переходами отношения  $\frac{\tau_i}{\theta_{ii}}$  практически равны, поскольку каждые из величин  $\tau_i^{-1}$  и  $\theta_{ii}^{-1}$  пропорциональны квадрату матричного элемента дипольного момента для рассматриваемого перехода<sup>19, 20</sup>. В этом случае согласно (3,11) отрицательные температуры возникать не могут. Однако, если оба уровня связаны с основным оптическим переходом, то согласно правилам отбора оптический переход между ними в первом приближении запрещен, и следовательно, такие уровни не могут быть практически использованы для получения излучения на этих переходах.

Рис. 4. Схема уровней двух взаимодействующих газов:  $x$  — рабочий,  $y$  — гасящий газ.

Таким образом, из двух уровней системы по крайней мере один должен соответствовать оптически запрещенному переходу. Возбуждение такого уровня при электронных ударах происходит за счет обменного эффекта падающего и атомного электрона. Сечение возбуждения в этом случае, как правило, меньше чем для оптически разрешенных переходов.

В рассмотренном выше примере нижний из уровней с отрицательной температурой соответствовал оптически запрещенному переходу. Небольшое сечение возбуждения этого уровня электронными ударами благоприятствует получению отрицательной температуры. Однако в подобных случаях, рассматриваемый уровень может быть оптически связан с каким-либо возбужденным метастабильным уровнем атома. Наличие большого числа таких метастабильных уровней и большого сечения возбуждения электронами на рассматриваемый уровень может привести к увеличению заселенности нижнего из рассматриваемых уровней. Этому будет так же способствовать возможный захват метастабильным атомом фотона, возникающего при излучении с данного уровня.

Для неона подобная ситуация имеет место. В работе<sup>16</sup> предлагается понижать концентрацию метастабильных атомов неона добавлением небольшого количества гасящего газа, например аргона.

Другая возможность получения систем с отрицательной температурой основана на рассмотрении взаимодействия между атомами двух различных газов (рис. 4).

Действительно, если энергии двух каких-либо возбужденных уровней атомов обоих газов отличаются на небольшую величину  $\Delta$ , то можно ожидать, что сечения неупругого столкновения этих атомов будут иметь

заметную величину. В этом случае возбуждение атомов будет происходить не только за счет соударений с электронами, но и за счет столкновений атомов между собой. В последнем случае энергия возбуждения одного атома будет передаваться другому и наоборот. Очевидно, для того чтобы существенно нарушилось равновесное распределение (3,7), вероятность такой передачи возбуждения атомом должна превышать вероятность  $\frac{1}{\theta_{0i}}$  возбуждения атома на данный уровень электронами.

В этом приближении может быть получено равновесное распределение атомов по возбужденным уровням энергии. Для простоты предполагается, что распределение атомов по энергии описывается формулой Максвелла с температурой  $T$ :

$$dn(\varepsilon) = a e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (3,12)$$

где  $\varepsilon = \frac{p^2}{2M}$  — кинетическая энергия атома; константа  $a$  определяется из условия нормировки

$$\int_0^\infty dn = n, \quad (3,13)$$

$n$  — число атомов газа, находящихся в данном возбужденном состоянии в  $1 \text{ см}^3$ .

Для определенности можно считать, что энергия возбуждения газа  $x$ , которую мы обозначим  $E_2^x$ , больше энергии возбуждения газа  $y$ , обозначаемой  $E_2^y$ , т. е.  $E_2^x - E_2^y = \Delta$ . Тогда вероятность возбуждения атома газа  $x$  атомами газа  $y$  равна

$$W_{xy} = a_2^y \int_{-\Delta}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sigma_{xy} v \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (3,14)$$

Здесь константа  $a$  определяется из условия

$$a_2^y \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = n_2^y, \quad (3,15)$$

где  $n_2^y$  — число возбужденных атомов газа  $y$  в  $1 \text{ см}^3$ ,  $\sigma_{xy}$  — сечение передачи возбуждения атомом  $y$  атому  $x$ ,  $v$  — относительная скорость атомов.

Для обратного процесса

$$W_{yx} = a_1^y \int_0^\infty \sigma_{yx} v e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (3,16)$$

$\sigma_{yx}$  — сечение обратного процесса,  $a_1^y$  аналогично (3,15) определяется плотностью атомов газа  $y$ , находящихся в основном состоянии 1.

Применяя принцип детального равновесия аналогично (3,4), из (3,14) и (3,16) можно получить

$$\frac{W_{xy}}{W_{yx}} = \frac{n_2^y}{n_1^y} e^{-\frac{\Delta}{kT}}. \quad (3,17)$$

Для скорости изменения числа атомов газа  $x$ , находящихся в возбужденном состоянии с энергией  $E_2^x$  из (3,14) и (3,16) следует

$$\frac{dn_2^x}{dt} = W_{xy} n_1^y - W_{yx} n_2^y. \quad (3,18)$$

В стационарном случае  $\frac{dn_2^x}{dt} = 0$  и после подстановки (3,17) в (3,18) выражение (3,18) принимает вид

$$\frac{n_2^x}{n_1^x} = \frac{n_2^y}{n_1^y} e^{-\frac{E_2^x - E_2^y}{kT}}. \quad (3,19)$$

Очевидно, что если бы имели место лишь электронные возбуждения атомов, то вместо формулы (3,19) можно было бы написать

$$\frac{n_2^y}{n_1^x} = \frac{n_2^y}{n_1^y} e^{-\frac{E_2^x - E_2^y}{kT_e}}. \quad (3,20)$$

Таким образом, наличие переходов между близлежащими уровнями различных атомов при соударениях приводит к отклонению от распределения, создаваемого возбуждением электронами согласно (3,20); при этом вероятность нахождения атома на верхнем из двух рассматриваемых уровней двух различных атомов уменьшается по сравнению с (3,20), в то время как вероятность нахождения атома на нижнем из этих уровней увеличивается по сравнению с (3,20). В этом случае в газе могут возникнуть состояния с отрицательной температурой между уровнями, распределение по которым дается формулой (3,20), и уровнями, для которых существен описанный выше механизм возбуждения при столкновении различных атомов, распределение по которым дается (3,19).

Недостатком этого метода получения состояний с отрицательной температурой является то, что для интенсивной передачи возбуждений при ударе атомов двух сортов их уровни должны быть близки и в этом случае эффект перераспределения атомов по уровням мал.

В работе <sup>16</sup> рассмотрен случай смеси газов Hg при давлении в  $10^{-3}$  мм рт. ст. и Kr при 10—50 мм рт. ст. Уровни Hg  $9^1P$  и  $6^1F$  лежат близко к  $5S_5$ -метастабильному уровню Kr, что может привести к увеличению заселенности уровней  $9^1P$  и  $6^1F$ . При этом можно ожидать возникновение отрицательной температуры по отношению к уровню  $6^1D$ .

Метастабильный уровень  $^3S_1$  в Ne лежит также близко к уровню  $2s_4$  в Ne, рассмотренному выше. Это также может привести к увеличению заселенности уровня  $2s_4$ , что облегчает создание отрицательных температур в системе с Ne, рассмотренной выше.

Подобная ситуация может возникать также в том случае, когда два или несколько уровней одного и того же атома слабо отличаются по энергиям. Для Ne группа уровней  $2s_2$ ,  $2s_3$ ,  $2s_4$  и  $2s_5$  имеет близкие энергии и можно ожидать, что на нижнем из этих уровней  $2s_5$  заселенность существенно увеличивается, что приведет к возникновению отрицательной температуры по отношению к уровню  $2p_{10}$ .

Существенным недостатком обоих методов получения состояний с отрицательной температурой в газе с помощью пучка электронов является относительно невысокая плотность возбужденных атомов.

Следует заметить, что в данном методе нет принципиальных ограничений на частоты, соответствующие переходам между уровнями с отрицательной температурой. Несколько иной метод получения состояний с отрицательной температурой рассмотрен и экспериментально изучен в работе <sup>79</sup>.

При помощи тлеющего разряда возбуждались пары ртути, к которым был добавлен водород. Водород сильно разрушает атомы ртути, возбужденные на уровень  $6^3P$ , при этом в переходе  $7^3S_1 \rightarrow 6^3P_{0,1,2}$  возможно возникновение состояний с отрицательной температурой. С помощью другой ртутной лампы исследовалась прозрачность разрядной трубки со смесью

паров ртути и водорода. Результаты экспериментов показали, что в некоторых случаях коэффициент прозрачности имел значения, превышающие 1. Авторы указывают, что теоретическое истолкование эксперимента затруднено отсутствием надежных данных об условиях в разрядах данного типа.

#### § 4. Импульсный метод получения отрицательных температур в полупроводниках\*)

В настоящее время накоплен обширный материал по оптическим свойствам полупроводников<sup>21</sup>. Полученные данные достаточно хорошо объясняются в рамках зонной теории твердого тела<sup>21,22</sup>. Спектры поглощения электромагнитных волн в полупроводниках обусловлены в основном следующими причинами: 1) переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости; 2) переходом с примесных уровней в основные зоны; 3) внутризонным поглощением, связанным с наличием свободных носителей тока; 4) поглощением решеткой кристалла.

В настоящем параграфе будет рассмотрена возможность получения отрицательных температур между основными зонами, а также между уровнями примесей и соответствующими зонами, предложенная в работе<sup>23</sup>.

Согласно зонной теории твердого тела полупроводник можно представить как ряд энергетических полос запрещенных и разрешенных состояний электронов. В чистом полупроводнике при температуре  $T \rightarrow 0$  в верхней энергетической полосе (зоне проводимости) полностью отсутствуют электроны, а в нижней энергетической полосе (валентной зоне) все энергетические состояния полностью заполнены электронами. Если в полупроводнике имеются примеси, то они образуют дополнительные уровни, расположенные, как правило, в запрещенной зоне. В полупроводнике существуют два типа примесей: примеси, способные отдавать электроны в зону проводимости (донарные), и примеси, способные захватывать электроны из валентной зоны (создавать дырочную проводимость) — так называемые акцепторы. Распределение электронов в полупроводнике по энергетическим уровням при термодинамическом равновесии описывается функцией распределения Ферми

$$f(\varepsilon) = (e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1)^{-1}, \quad (4,1)$$

где химический потенциал  $\mu$  определяется из условия нормировки

$$\int f(\varepsilon) d\Gamma = N, \quad (4,2)$$

$N$  — полное число электронов. Для электронов \*\*), находящихся в зоне проводимости

$$d\Gamma = Q(\varepsilon) d\varepsilon, \quad Q(\varepsilon) = \frac{V^{1/2} m^{3/2} e^{1/2} V}{\pi^2 h^3}. \quad (4,3)$$

В случае дискретного спектра интеграл в (4,2) заменяется суммой по квантовым состояниям.

Для получения отрицательных температур в полупроводнике можно воспользоваться ионизацией примесей или валентной зоны под действием импульса электрического поля. Пиковое напряжение импульса выбирается таким образом, чтобы вызвать ударную ионизацию валентной зоны или эффект Зиннера. При этом количество электронов в зоне проводимости

\*) В период подготовки статьи к печати появилась работа<sup>80</sup>, в которой рассмотрены возможности получения отрицательной температуры в полупроводниках между уровнями циклотронного резонанса и между уровнями примесных атомов.

\*\*) Все рассуждения полностью справедливы и для дырок.

резко возрастет. Число выброшенных в зону электронов определяется условиями пробоя (напряжением электрического поля и длительностью импульса).

При достаточно быстром спадании напряжения импульса все электроны перейдут на наиболее низкие энергетические уровни соответствующей зоны, если их время жизни в зоне достаточно велико. Плотность

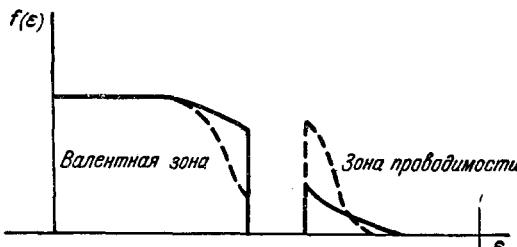


Рис. 5. Энергетическое распределение электронов в полупроводнике.

Сплошная линия — термодинамически равновесное распределение. Пунктирная линия — распределение термодинамически неравновесное, соответствующее наличию отрицательной температуры между валентной зоной и зоной проводимости

ности и  $f(\epsilon) < 0,5$  для некоторой области вблизи верхнего края валентной зоны (рис. 5).

Следует сказать, что требуемые для вырождения большие электронные плотности приводят к необходимости приложения к образцам довольно высоких электрических полей.

Вопросу, связанному с электрическим пробоем полупроводников, посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ<sup>24-29</sup>; в настоящем обзоре явление пробоя подробно рассматриваться не будет. Необходимо указать, что согласно упомянутым выше работам пробой валентных полупроводников происходит при полях, когда средняя энергия электронов зоны проводимости по порядку величины равна потенциалу ионизации. Величина поля  $F_i$ , при которой средняя энергия электрона порядка энергии ионизации  $\epsilon \approx \epsilon_i$ , определяется из условия

$$F_i \approx \frac{(\hbar\omega_0 m)^{\frac{1}{2}}}{e\tau_{on}(\epsilon_i)}, \quad (4,4)$$

где  $m$  — эффективная масса носителя,  $\omega_0$  — частота оптических колебаний решетки,  $\tau_{on}$  — время релаксации носителя с оптическими колебаниями решетки (см. (4,16)).

Распределение электронов зоны проводимости по энергиям в сильном электрическом поле при учете рассеяния на колебаниях решетки<sup>27</sup> имеет вид (рис. 6)

$$f(\epsilon) = N'' \exp \left\{ -\frac{\epsilon^2}{2p'(kT)^2} \right\}, \quad (4,5)$$



где

$$p' = \frac{(eFl_a)^2}{6mu^2kT} (1 + R)^{-1} + R \frac{(\hbar\omega_0)^2}{mu^2kT},$$

$$R \approx \frac{D^2}{C^2}, \quad l_a = -\frac{9\pi Mu^2\hbar^4 n_0}{4C^2 m^2 k T}.$$

Здесь  $F$  — напряженность внешнего электрического поля,  $u$  — скорость звука в полупроводнике,  $M$  — масса атома решетки,  $n_0$  — плотность атомов решетки,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура решетки,  $C^2$  и  $D^2$  — константы взаимодействия с акустическими и оптическими колебаниями решетки соответственно.

Функция распределения электронов зоны проводимости по энергиям близка к большинству распределению с эффективной температурой  $T_e \gg T$ .

После выключения электрического поля в полупроводнике будут происходить два процесса: 1) рекомбинация неравновесных носителей и 2) уменьшение их температуры до температуры кристалла. Отрицательные температуры в полупроводнике будут образованы только в том случае, если время второго процесса будет меньше времени жизни неравновесных носителей  $\tau_c$ . В настоящее время не существует общей теории, позволяющей определить время  $\tau_c$ . Существует ряд экспериментальных методов определения времени  $\tau_c$ , которые дают несколько различные значения<sup>74,75</sup>. Как правило, время  $\tau_c$  определяется безызлучательными переходами и связано с наличием примесей и дефектов в решетке.

В работе<sup>30</sup> приведено теоретическое рассмотрение времени образования отрицательной температуры  $t$  (или времени замедления неравновесных носителей тока) в полупроводниках.

Под неравновесными (быстрыми) носителями подразумеваются электроны \*) (дырки), имеющие начальную энергию  $\varepsilon_0$ , которая значительно больше средней тепловой энергии или энергии вырождения (если газ вырожденный), но не превышает пороговую энергию ударной ионизации валентной зоны  $\varepsilon_i$ .

В кристаллах замедление электронов обусловлено в основном рассеянием на колебаниях решетки. Примеси не могут заметно влиять на замедление, так как при столкновении электрона с примесным атомом теряемая электроном энергия (порядка  $m/M$ , где  $M$  — масса примесного атома, что гораздо меньше энергии, теряемой при испускании фона) мала по сравнению с энергией, теряемой при соударении с решеткой.

Замедление электронов может быть описано путем рассмотрения кинетического уравнения для функции распределения электронов по импульсу  $f(p)$  зоны проводимости кристалла. В кинетическом уравнении должно быть учтено фермиевское вырождение электронного газа, поскольку оно становится существенным в конечных стадиях замедления, когда заполнение квантовых состояний близко к единице. Член, описывающий столкновения электронов между собой, может быть опущен, так как он не приводит непосредственно к уменьшению средней энергии электронов. Однако при больших электронных плотностях междуэлектронные соударения могут существенно влиять на вид функции распределения, что в дальнейшем будет учтено.

Для простоты можно принять изотропный закон дисперсии  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ . Так как внешнее поле отсутствует, функция распределения будет зависеть только от энергии электронов, т. е.  $f(p) = f(\varepsilon)$ .

\*) В дальнейшем говорится только об электронах зоны проводимости, хотя все результаты полностью справедливы и для дырок валентной зоны.

Применение обычного метода разложения интеграла столкновений<sup>28</sup> по степеням малой величины  $\frac{\hbar\omega_q}{\varepsilon(p)}$ , где  $\hbar\omega_q$  — энергия фона с импульсом  $\mathbf{q}$ , дает следующее уравнение для  $f(\varepsilon)$ :

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial t} = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ G(\varepsilon) \left[ f(\varepsilon) (1 - f(\varepsilon)) + \eta(\varepsilon) \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] \right\}, \quad (4,6)$$

где

$$G(\varepsilon) = \frac{Vm}{2\pi\hbar^4} \int_0^{2p} B(q) \hbar\omega_q q dq,$$

$$G(\varepsilon) \eta(\varepsilon) = \frac{Vm}{4\pi\hbar^4} \int_0^{2p} B(q) (\hbar\omega_q)^2 (2n_q + 1) q dq,$$

где  $B(q)$  — квадрат матричного элемента взаимодействия электрона с фононом,  $n_q$  — число фононов с энергией  $\hbar\omega_q$

$$n_q = (\varepsilon^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - 1)^{-1}, \quad (4,7)$$

$V$  — объем кристалла.

Время столкновения электрона с решеткой  $\tau$  равно

$$\tau^{-1} = \frac{v}{l} = \frac{Vm}{4\pi\hbar^4 p^3} \int_0^{2p} B(q) (2n_q + 1) q^3 dq, \quad (4,8)$$

где  $v$  — скорость электрона,  $l$  — длина свободного пробега. Умножение уравнения (4,6) на  $\varrho(\varepsilon)$ , где плотность состояний электрона с энергией  $\varepsilon$

$$\varrho(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2m^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} V}}{\pi^2 \hbar^3},$$

и интегрирование по энергиям электрона дает

$$\frac{dE}{dt} = - \int_0^{\infty} \frac{\varrho(\varepsilon)}{p} G(\varepsilon) \left\{ f(\varepsilon) [1 - f(\varepsilon)] + \eta(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right\} d\varepsilon. \quad (4,9)$$

Здесь  $E = \int_0^{\infty} \varepsilon \varrho(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$  — средняя энергия электронов.

Первый член в интеграле уравнения (4,9) описывает потерю энергии электронов вследствие спонтанного испускания фононов; второй — диффузию электронов в энергетическом пространстве. Как будет видно из дальнейшего, учет второго члена в интеграле уравнения (4,9) при рассеянии электрона на акустических колебаниях решетки приводит к логарифмической бесконечности времени установления равновесия между электронами и решеткой. При рассмотрении замедления электронов до энергий, превосходящих температуру решетки, не будет пока учитываться второй член в (4,9).

Пусть происходит замедление отдельного электрона без учета вырождения. В этом случае

$$f(\varepsilon) \varrho(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - E). \quad (4,10)$$

I. Для акустических фононов<sup>31</sup>

$$G(\varepsilon) = \frac{16m^3C^2\varepsilon^2}{9\pi\hbar^4Mn_0}.$$
 (4.11)

Используя (4.10) и (4.4), можно получить из (4.9)

$$\frac{dE}{dt} = -a_0 E^{\frac{3}{2}}.$$
 (4.12)

$a_0$  выражается следующим образом через подвижность при рассеянии на акустических колебаниях решетки  $\omega$ :

$$a_0 = \frac{8u^2}{3\sqrt{\pi}w(T)(kT)^{\frac{3}{2}}}.$$
 (4.13)

Время замедления от энергии  $E_0$  до  $E$  равно

$$t = \frac{2}{a_0} (E^{-\frac{1}{2}} - E_0^{-\frac{1}{2}}).$$
 (4.14)

Существенно, что время замедления  $t$  зависит только от двух констант полупроводника — подвижности и скорости звука. В случае  $E_0 \gg E$  время замедления до энергий, соответствующих  $T \approx 300^\circ\text{K}$ , для электронов Ge ( $w \approx 3600 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  при комнатных температурах и  $u \approx 4,94 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ )  $t \approx 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$ , для электронов атомов

{Si ( $w \approx 1200 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  и  $u \approx 8,5 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ )  $t \approx 5,1 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$ .

Отношение времен замедления от энергии  $E_0$  до  $E$  при  $E_0 \gg E$  в двух различных полупроводниках  $x$  и  $y$  равно

$$\frac{t_x}{t_y} = \frac{\omega_x u_y^2}{\omega_y u_x^2}.$$
 (4.15)

Можно отметить, что формула (4.12) имеет простой физический смысл. Действительно, энергия, теряемая электроном при испускании акустического фона, равна  $\hbar\omega_q = iq$ . Так как рассеяние на акустических фонах сферически симметрично и максимальный импульс излучаемого фона вдвое больше импульса электрона, то  $\hbar\omega_q \sim (2meu^2)^{\frac{1}{2}}$ . Частота соударений, связанная с потерей энергии, выражается через время столкновения с решеткой (4.8), причем следует учесть, что только в одном случае из  $2n_q + 1$  ударов происходит потеря энергии. Отсюда

$$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{\hbar\omega_q}{\tau(2n_q + 1)} \approx -a_0 E^{\frac{3}{2}}.$$

II. В случае замедления быстрого электрона оптическими колебаниями решетки валентного полупроводника уравнения (4.6) и (4.9) справедливы, когда энергия электрона  $E \gg \hbar\omega_0$ , где  $\hbar\omega_0$  — энергия оптического фона ( $\hbar\omega_0 \approx kT_D$ ,  $T_D$  — температура Дебая).

В этом случае<sup>31</sup>

$$G(\varepsilon) = \frac{D^2 K^2 m^2 \varepsilon}{\pi \hbar^2 M n_0}, \quad \tau^{-1} = \frac{D^2 K^2 m^2 \nu}{2\pi \hbar^4 M n_0 \hbar \omega_0},$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{K^2 D^2 m^2 E^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi n_0 M \hbar^2}},$$
 (4.16)

где  $K$  — вектор обратной решетки,  $\bar{D}^2$  — константа взаимодействия с оптическими фононами, аналогичная  $C^2$ .

Время замедления от энергии  $E_0$  до  $E$  равно

$$t_{\text{опт}} = \frac{2\sqrt{2\pi}Mn_0\hbar^2}{K^2D^2m^2} \left( \frac{1}{E_0^2} - \frac{1}{E^2} \right). \quad (4,17)$$

Сравнение времен замедления на оптических и акустических фонах дает при  $C^2 \approx D^2$

$$\frac{t_{\text{опт}}}{t_{\text{акуст}} \approx \frac{mv^2}{kT_D} \approx 10^{-2}}.$$

Образование отрицательных температур в полупроводнике возможно только в случае довольно сильного вырождения электронов зоны проводимости и дырок валентной зоны при их замедлении решеткой кристалла. Как известно, вырождение связано с температурой (средней энергией) электронного газа и его плотностью. Уменьшение средней энергии электронного газа до малых значений сильно увеличивает время замедления, так что электроны могут рекомбинировать до образования отрицательной температуры. Поэтому разумнее ограничиться не очень малыми средними значениями энергии электронов, но увеличить их плотность \*). Как показано в работе<sup>24</sup>, обмен энергией в междуэлектронных соударениях уже при плотности электронов  $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$  становится более интенсивным, чем при столкновении с акустическими фононами (при  $T < T_D$  и  $\varepsilon > kT_D$  взаимодействие с оптическими фононами несущественно).

Таким образом, при необходимых для получения отрицательных температур плотностях электронов вид функции распределения можно считать известным:

$$f(\varepsilon) = \left( e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k\theta}} + 1 \right)^{-1}, \quad (4,18)$$

где  $\mu$  — химический потенциал,  $\theta$  — температура электронного газа.

Процесс замедления сводится к снижению температуры  $\theta$  до температуры решетки  $T$ . Ранее определялось время замедления электронов без учета вырождения и второго члена правой части уравнения (4,9). Сейчас из уравнения (4,9) будет получено время изменения температуры электронного газа от  $\theta_0$  до  $\theta$ , принимая во внимание только взаимодействие с акустическими фононами.

Учитывая (4,18) обычным путем, можно получить из (4,9)

$$\frac{dE}{dt} = -2a_0(\theta - T) \overline{\frac{1}{E^2}}, \quad (4,19)$$

где

$$\overline{\frac{1}{E^2}} = \int_0^\infty \varepsilon^2 Q(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Уравнение (4,19) есть дифференциальное уравнение для  $\theta(t)$ , которое сводится к интегрируемому в элементарных функциях при достаточно сильном вырождении, когда можно считать  $\frac{\mu}{k\theta_0} \gg 1$ . Применение

\*.) Плотность электронов, однако, не должна давать отрицательную диэлектрическую постоянную в интересующей области частот.

в этом случае обычной процедуры разложения интегралов<sup>32</sup> для  $E$ ,  $\frac{1}{E^2}$  и  $\mu$  дает

$$\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3a_0}{1} (\theta - T) \left[ \mu_0^2 + \frac{\pi^2 k^2 \theta^2}{6} \right], \quad (4.20)$$

$$k\pi^2 \mu_0^2$$

где

$$\mu_0 = \frac{(\pi\hbar)^2}{2m} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$n$  — плотность электронов.

Интегрирование (4.20) приводит к

$$t = \frac{k\pi^2}{3} \frac{1}{3a_0 \mu_0^{\frac{2}{3}} \left( 1 + \frac{\pi^2 k^2}{6\mu_0^2} T^2 \right)} \left\{ T \ln \frac{\left( \theta_0 - T \right) \left( 1 + \frac{\pi^2 k^2}{6\mu_0^2} \theta_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left( \theta - T \right) \left( 1 + \frac{\pi^2 k^2}{6\mu_0^2} \theta_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{6}\mu_0}{\pi k} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\pi k}{\sqrt{6}\mu_0} \theta_0 - \operatorname{arctg} \frac{\pi k}{\sqrt{6}\mu_0} \theta \right] \right\}. \quad (4.21)$$

При  $\theta \rightarrow T$  первый член в скобках формулы (4.21), возникший из-за учета второго члена в правой части уравнения (4.9), логарифмически обращается в бесконечность, что соответствует бесконечному времени установления равновесия между электронами и решеткой. В случае  $\theta > T$  логарифмом в (4.21) можно пренебречь и тогда время замедления имеет следующий вид:

$$t \approx \frac{k\pi^2}{3} (\theta_0 - \theta). \quad (4.22)$$

При сравнении времен замедления с учетом и без учета вырождения (см. (4.14)) в формуле (4.22) удобно заменить температуру  $\theta$  через среднюю энергию электрона  $\bar{\varepsilon}$ . Тогда ( $\theta_0 \gg \theta$ )

$$t \approx \frac{2}{a_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{5} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\varepsilon \approx \frac{3}{5} \mu_0,$$

$$\varepsilon_0 \approx \frac{3}{5} \mu_0 \left( 1 + \frac{5\pi^2 k^2 \theta_0^2}{12\mu_0^2} \right).$$

В этом случае, несмотря на различный вид формул (4.14) и (4.22), величины времен замедления одного порядка.

Нет необходимости рассматривать замедление вырожденного электронного газа на оптических фононах, так как в практически интересных случаях средняя энергия электронов, при которых существенно вырождение, меньше  $\hbar\omega_0$ . Таким образом, замедление электронного газа в полупроводнике распадается на две стадии: замедление на оптических колебаниях решетки до энергии  $\sim \hbar\omega_0$  с короткими временами согласно формуле (4.17) и дальнейшее замедление на акустических колебаниях с гораздо большими временами согласно (4.14) и (4.21).

Следовательно, времена образования отрицательных температур определяются в основном замедлением электронов от энергий  $\hbar\omega_0$  до энергий, соответствующих необходимой степени вырождения при учете взаимодействия только с акустическими колебаниями решетки.

Можно подробнее рассмотреть импульсный метод образования отрицательных температур между уровнями примесей полупроводника и соответствующей зоной. Величина поля, при которой в стационарном режиме на уровнях примесей остается  $N - n$  электронов, в случае механизма ударной ионизации находится из условия

$$\alpha n(N-n) - \beta n^2 + g_T(N-n) = 0, \quad (4.23)$$

где  $\beta$  — вероятность рекомбинации электронов проводимости с примесным уровнем,  $\alpha$  — коэффициент ударной ионизации, зависящий от поля,  $N$  — число донорных примесей в  $1 \text{ см}^{-3}$ ,  $n$  — число электронов в зоне проводимости,  $g_T$  — вероятность теплового выброса в зону проводимости в  $1 \text{ сек.}$

Непосредственная ионизация примесей полем (эффект Зиннера) приводит к уравнению

$$\gamma(N-n) - \beta n^2 + g_T(N-n) = 0, \quad (4.24)$$

где  $\gamma$  — вероятность ионизации атома примеси полем в  $1 \text{ сек.}$

Для низких температур тепловым выбросом в формулах (4.23) и (4.24) можно пренебречь. Тогда, для того чтобы число электронов на примесных уровнях было меньше  $\Delta N$  ( $\Delta N \ll N$ ), необходимо в случае (4.23)

$$\alpha > \left( \frac{N}{\Delta N} \right) \beta, \quad (4.25)$$

а в случае (4.24)

$$\gamma > \frac{N}{\Delta N} \beta N. \quad (4.26)$$

Ранее произойдет оголение примесей в основном за счет того механизма, который будет при меньшем поле удовлетворять одному из приведенных выше неравенств.

Если при некотором поле  $\alpha$  удовлетворяет условию (4.25), а  $\gamma$  при этом поле еще не достигло значения  $\alpha N$ , то оголение до величины  $\Delta N$  происходит за счет механизма ударной ионизации и наоборот. Зная функцию распределения электронов проводимости в сильном поле, можно получить зависимость коэффициента ударной ионизации от поля, если учитывать ионизацию как возмущение. В случае, когда рассеяние на оптических колебаниях решетки не существенно (низкие температуры и неглубокие примеси), согласно<sup>33</sup> коэффициент  $\alpha$  имеет следующий вид:

$$\alpha(F) = \frac{5\sigma_0 \left( \frac{I}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{F}{F_0^*} \right)^4 e^{-\frac{F_0^2}{F^2}}}{\Gamma \left( \frac{3}{5} \right) \left( \frac{F}{F_0^*} \right)^{\frac{6}{5}}}, \quad (4.27)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $I$  — потенциал ионизации примесей,  $\sigma_0$  — сечение ионизации в максимуме.

$$F_0^2 = \frac{24}{25\sqrt{2}} \left( \frac{I}{mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2Imu^2}{ekTl} \right)^2, \quad F_0^{*2} = \frac{5}{2} F_0^2. \quad (4.28)$$

Вероятность ионизации атома примеси полем можно оценить, если известна вероятность ионизации основного состояния атома водорода, изменив в соответствующей формуле потенциал ионизации и обычную массу на эффективную. Согласно работе<sup>34</sup>

$$\gamma(F) = \frac{16I^2em}{F\hbar^3} e^{-\frac{4(2m)^{1/2}I^{3/2}}{3e\hbar F}}. \quad (4,29)$$

Из выражения (4,29) для  $\gamma(F)$  следует, что при достаточно сильном поле всегда можно удовлетворить условию (4,26), т. е. создать нужную степень оголения за счет эффекта Зиннера. Несколько иначе обстоит дело с условием (4,25) для коэффициента  $\alpha$ . Точную зависимость  $\alpha$  от напряженности поля  $F$  при очень сильных полях определить не удается. Поэтому условие (4,25) не будет выполнено, если коэффициент  $\beta$  достаточно велик. Однако может случиться, что в этом случае коэффициент  $\beta$  будет падать, так как электроны в сильном поле не смогут рекомбинировать с передачей лишь одного фона. С другой стороны, в уравнении (4,23) при сильном поле может увеличиться  $gt$  из-за эффекта Френкеля<sup>35</sup>. Последние два эффекта могут создать нужную степень оголения еще до того, как такое же оголение будет достигнуто за счет эффекта Зиннера. Оценки показывают, что резкое оголение мелких примесей (например, Sb в германии) наступает при полях в  $20 \text{ e}\cdot\text{см}^{-1}$ .

Как указывалось ранее, создание отрицательной температуры между уровнями примесей и соответствующей зоной возможно, если только время жизни возбужденных носителей  $\tau_c$  больше времени замедления  $t$ , которое фактически определяется по формуле (4,14), т. е.

$$\tau_c > \frac{2}{a_0(kT)^2}. \quad (4,30)$$

В формуле (4,14) предположено  $E_0 \gg E$ , а  $E \approx kT$ , где  $T$  — температура решетки полупроводника. С другой стороны,  $\tau_c$  в случае рекомбинации на примеси дается формулой

$$\tau_c^{-1} \approx v\sigma_c(N-n), \quad (4,31)$$

где  $v$  — скорость электрона,  $\sigma_c$  — сечение безызлучательной рекомбинации.

Так как состояние с отрицательной температурой требует, чтобы в зоне проводимости образовалось вырождение, температура кристалла должна удовлетворять хорошо известному соотношению

$$T < 2\pi m^{-1}k^{-1}\hbar^2 n^3. \quad (4,32)$$

Из (4,31) и (4,32) с учетом (4,30) следует

$$T < 2\pi k^{-1}\hbar^2 \left(\frac{a_0}{m\sigma_c}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4,33)$$

Для примеси<sup>36</sup> Sb в Ge ( $\sigma_c \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2$ ,  $m \approx 2,5 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ ) согласно (4,33)  $T < 1,3^\circ \text{ К}$ .

Концентрация примесей при нужной температуре находится из условия (4,32)

$$n = \left(\frac{kmT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4,34)$$

Оценка для электронного Ge при  $T = 1^\circ \text{ К}$  дает  $n \approx 4,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , при этом согласно (4,31)  $\tau_c \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$ .

Следует отметить, что выполнение условий самовозбуждения (§ 8), необходимых для генерации, накладывает ограничение на минимальное число электронов в зоне проводимости.

Из приведенных выше оценок следует, что в Ge, например, а также и в остальных примесных полупроводниках осуществление состояния с отрицательной температурой хотя принципиально и возможно, но связано с большими трудностями из-за низких температур и из-за необходимости быстрого выключения поля.

В случае междузонных переходов величина электрического поля, необходимая для образования достаточной концентрации электронов в зоне проводимости, резко зависит от ширины запрещенной зоны. Поэтому для полупроводников с большими запрещенными зонами требуются высокие напряженности при сравнительно коротких импульсах. Если эффективная масса носителя в полупроводнике не мала по сравнению с массой электрона, то необходимые для вырождения концентрации приводят к сильным токам и большим мощностям; в этом случае трудно обеспечить низкую температуру образца. Это обстоятельство затрудняет получение отрицательных температур в таких хорошо изученных полупроводниках, как германий и кремний. Получение отрицательных температур облегчается при использовании полупроводников с узкой запрещенной зоной и малой эффективной массой носителей (например, таких, как InSb), если время жизни неравновесных носителей в них достаточно велико. Следует отметить, что времена жизни неравновесных носителей в случае междузонной рекомбинации в чистых кристаллах, как правило, во много раз превосходят времена жизни неравновесных носителей по отношению к примесным уровням.

Выбор полупроводниковых объектов для создания отрицательных температур в настоящее время сильно затруднен тем, что неизвестны характеристики достаточно чистых образцов различных полупроводниковых соединений.

### § 5. Получение отрицательных температур в полупроводниках между уровнями, прилежащими одной зоне («усилители с отрицательной массой»)

Для усиления электромагнитных волн в работе<sup>37</sup> было предложено использование носителей тока в полупроводнике, обладающих отрицательной эффективной массой, поскольку такие носители в некоторых случаях при движении в поле могут отдавать свою энергию воздействующему на них полю, т. е. обладают отрицательными потерями.

Пусть электрон, имеющий энергию  $\varepsilon(p)$  (рис. 7), расположен внутри зоны проводимости полупроводника \*). Рассматриваемый электрон при взаимодействии с излучением может поглотить квант энергии  $\hbar\omega$  и перейти при этом на более высокий энергетический уровень или излучить квант и перейти на более низкий энергетический уровень. Вероятности этих двух процессов зависят от структуры уровней зоны, т. е. от матричного элемента перехода и плотности уровней в конечном состоянии.

В случае, когда матричные элементы переходов с поглощением и излучением кванта равны, что, как правило, имеет место, вероятности перехода с уровня  $\varepsilon(p)$  на уровень  $\varepsilon(p) + \hbar\omega$  или на уровень  $\varepsilon(p) - \hbar\omega$  определяются плотностью конечных состояний. Таким образом, вероят-

\*) Все сказанное непосредственно справедливо и для дырок в валентной зоне.

ность индуцированного излучения кванта рассматриваемым электроном будет превышать вероятность поглощения, если плотность конечных состояний  $\rho(\varepsilon - \hbar\omega)$  больше  $\rho(\varepsilon + \hbar\omega)$ , и наоборот. В случае, когда данной энергии электрона  $\varepsilon$  соответствуют несколько состояний, необходимо произвести усреднение по этим состояниям.

Итак, для того чтобы отдельный электрон мог излучать под воздействием внешнего поля, он должен находиться в состоянии, в котором величина

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} < 0, \quad (5.1)$$

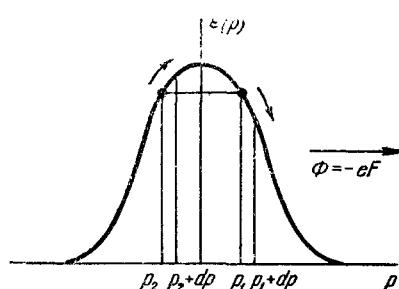
т. е. плотность состояний, должна падать с ростом энергии.

В случае изотропного закона дисперсии, когда вблизи верхнего и нижнего краев зоны можно положить  $\varepsilon(p) = \varepsilon_0 + \frac{(p-p_0)^2}{2m}$ , где постоянные  $\varepsilon_0$  и  $p_0$  равны соответственно граничным значениям энергии и импульса, знак  $\frac{\partial \rho(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$  совпадает со знаком эффективной массы носителя тока  $m$ , определяемой согласно равенству

$$m^{-1} = \frac{\partial^2 \varepsilon(p)}{\partial p^2}. \quad (5.2)$$

Как видно из (5.2) и из закона дисперсии, эффективная масса положительна для электрона, находящегося на уровнях в нижней части зоны проводимости и отрицательна для состояний, расположенных в верхней части зоны проводимости. Следовательно, электрон может индуцированно излучать, если он находится в состояниях с отрицательной массой, т. е. в верхней части зоны проводимости.

Это может быть проиллюстрировано на основе классического рассмотрения поведения электрона в полупроводнике в присутствии электрического поля. Пусть электрон находится в состоянии, соответствующем отрицательной массе с энергией  $\varepsilon(p_1)$ . В электрическом поле  $F$  на него будет действовать сила, равная  $-eF$  (рис. 8). Пусть для определенности поле направлено таким образом, что сила, действующая на электрон, направлена в сторону положительных значений импульса  $p$ .



Пусть электрон с энергией  $\varepsilon(p_1)$  движется вправо со скоростью  $v_1$  и под действием поля  $F$  приобретает импульс  $dp = -eF dt$ . Тогда его новая энергия  $\varepsilon(p_2)$  будет равна  $\varepsilon(p_1) + \Delta\varepsilon$ , где  $\Delta\varepsilon = eF dt$ . Аналогично, если бы электрон с энергией  $\varepsilon(p_1 + dp)$  движался влево со скоростью  $v_2$  и под действием поля  $F$  приобретал импульс  $dp = eF dt$ , то его новая энергия  $\varepsilon(p_2 + dp)$  была бы равна  $\varepsilon(p_1 + dp) - \Delta\varepsilon$ .

На рисунке 8 изображены две кривые, соответствующие различным состояниям электрона в зоне проводимости. Красная кривая имеет максимум, а синяя кривая — минимум. Две вертикальные линии разделяют ось импульса на участки  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_1 + dp$ ,  $p_2 + dp$ . На красной кривой отмечены точки  $p_1$  и  $p_2$ , а на синей кривой —  $p_1 + dp$  и  $p_2 + dp$ . Направление поля  $F$  обозначено стрелкой, указывающей вправо, а знак поля  $\Phi = -eF$  — на правом конце красной кривой.

$\varepsilon'_0$

$\varepsilon(p)$

$\varepsilon_0^2$

Рис. 7. Энергетическая схема зоны проводимости:  
 $\varepsilon(p)$  — энергия электрона с импульсом  $p$ ,  
 $\varepsilon_0^2$  — нижняя граница зоны проводимости,  $\varepsilon'_0$  — верхняя граница зоны проводимости.

к полупроводнику внешнего поля, что соответствует вышеизложенному квантовому рассмотрению.

Следует отметить, что предыдущее рассмотрение относилось к отдельному электрону, находящемуся в состоянии с отрицательной массой. В полупроводниках же всегда присутствует некоторое количество электронов, поведение которых в поле должно рассматриваться статистическими методами. При этом система, находящаяся в состоянии термодинамического равновесия, может только поглощать электромагнитное излучение независимо от знака эффективной массы носителя тока.

Действительно, можно рассмотреть два электрона, один из которых под влиянием поля переходит за время  $dt$  с энергией  $\epsilon_1$  в более высокое энергетическое состояние  $\epsilon_2$  с поглощением энергии поля, другой — в обратном направлении (рис. 9). Ясно, что усиление внешнего поля будет происходить лишь в том случае, если вероятность нахождения электрона на уровне  $\epsilon_2$  будет больше вероятности нахождения на уровне  $\epsilon_1$ . Однако в состоянии термодинамического равновесия имеет место обратное распределение электронов по уровням и поэтому усиление невозможно.

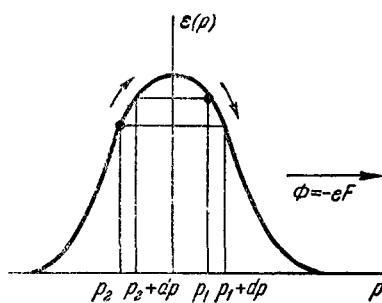


Рис. 9. Схема, показывающая, что под влиянием внешнего поля одновременно имеют место переходы с излучением и поглощением энергии.

длов. Такое состояние, как будет показано ниже, является состоянием с отрицательной температурой.

Поскольку число частиц, находящихся в данном состоянии с энергией  $\epsilon$ , пропорционально плотности уровней  $Q(\epsilon)$ , то вышеприведенное рассмотрение для отдельного электрона должно быть видоизменено с учетом распределения электронов по уровням. Действительно, разность между числом переходов в единицу времени с поглощением и индуцированным излучением под воздействием  $n$  квантов равна

$$nW \{Q(\epsilon)Q(\epsilon - \hbar\omega)f(\epsilon)[1 - f(\epsilon - \hbar\omega)] - Q(\epsilon - \hbar\omega)Q(\epsilon)f(\epsilon - \hbar\omega)[1 - f(\epsilon)]\}, \quad (5,3)$$

где  $W$  — величина, пропорциональная квадрату матричного элемента взаимодействия фотона с электроном полупроводника. Как следует из (5,3), для того чтобы индуцированное излучение превышало поглощение, необходимо, чтобы выполнялось

$$f(\epsilon) > f(\epsilon - \hbar\omega), \quad (5,4)$$

что полностью совпадает с приведенным ранее в § 1 общим условием на вид функции распределения для состояний, в которых система может усиливать падающее на нее излучение (состояний с отрицательной температурой).

Следует подчеркнуть, что полученный результат не зависит от знака эффективной массы носителя тока.

В работе <sup>37</sup> предлагалось два возможных варианта использования носителей с отрицательной эффективной массой для создания полупроводниковых усилителей, которые могут работать в стационарном режиме.

В обоих вариантах на основании энергетического рассмотрения для получения состояний с отрицательными потерями предлагалось прикладывать к полупроводнику постоянное электрическое поле. Это поле должно было служить источником энергии для усиления.

Однако в работе<sup>37</sup> условие (5,4) не было учтено и в ряде работ<sup>38-41</sup> было указано, что рассмотрение, приведенное в работе<sup>37</sup>, не является доказательством возможности создания усилителей с отрицательной массой. Действительно, создание полупроводникового усилителя или генератора, использующего эффект отрицательной массы, должно рассматриваться с точки зрения возможности нарушения термодинамического равновесия и получения состояний, удовлетворяющих условию (5,4). Но в стационарном режиме для случая изотропной зоны в постоянном электрическом поле, как это предлагается в<sup>37</sup>, в полупроводнике невозможно

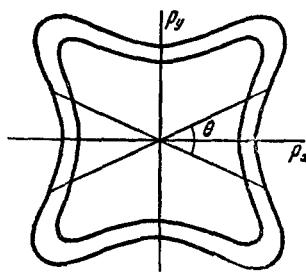


Рис. 10. Возможное сечение эквипотенциальных поверхностей плоскостью.

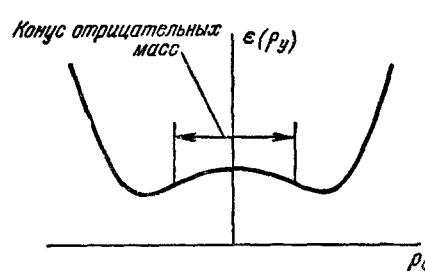


Рис. 11. График зависимости энергии  $\epsilon$  от импульса  $p_y$  при  $p_x = \text{const}$ .

получить состояния, удовлетворяющие (5,4), что показывается прямыми расчетами<sup>25-28</sup> (см. формулу (4,5) § 4). Найденная функция распределения имеет вплоть до больших значений поля  $\frac{\partial f(eF)}{\partial e} < 0$  ( $\frac{\partial f(eF)}{\partial e} \rightarrow 0$  при  $F \rightarrow \infty$ ).

В очень сильных полях, когда процесс рассеяния электрона на фононах решетки несуществен, также невозможно получить режим усиления, даже если пренебречь ударной ионизацией и эффектом Зиннера. В этом случае электрон будет совершать периодическое движение между верхним и нижним краями разрешенной зоны, так что состояния электрона с положительной и отрицательной массой равновероятны. Поэтому в случае изотропной эффективной массы принципиально невозможно получить состояния с отрицательными потерями в стационарном режиме, даже если исключить дополнительные трудности, связанные с ионизацией валентной зоны и взаимодействием с оптическими фононами в сильных полях.

Во втором варианте предлагается использовать эффект анизотропии эффективной массы, которая может быть отрицательной по отдельным направлениям квазимпульса  $p$ .

Например, энергетическая структура валентной зоны германия для тяжелых дырок имеет вид, изображенный на рис. 10. При такой структуре уровней носитель, находящийся в некоторых точках внутри конуса с углом  $\theta$ , имеет отрицательную эффективную массу в направлении  $p_y$ . Это непосредственно видно из кривых, приведенных на рис. 11. В отсутствие поля носители находятся в некоторой окрестности близи начала координат, если температура образца невелика.

Если к такому образцу приложить постоянное электрическое поле  $F$ , направленное вдоль оси  $x$ , то носитель при движении в поле будет попадать в область, где его эффективная масса в направлении  $y$  становится

отрицательной, и следовательно, он может усиливать переменное электрическое поле, приложенное вдоль оси  $y$ . В этом случае состояния с отрицательной массой достижимы при сравнительно небольших энергиях носителей, когда потери на ионизацию и испускание оптических фононов отсутствуют.

В работе <sup>37</sup> предполагается, что носитель при действии поля перемещается внутри конуса отрицательных масс, поскольку пренебрегается рассеянием на акустических колебаниях решетки и считается, что носитель, достигнув энергии, равной энергии оптического фонона, мгновенно испускает его и возвращается в начало координат. Такое предположение соответствует бесконечно большой константе взаимодействия  $D^2$  с оптическими фононами, так что  $\frac{D^2}{C^2} \rightarrow \infty$ . Однако в реальных полупроводниках эти константы имеют одинаковый порядок величины и поэтому функция распределения «размывается» в направлении  $p_y$ . Хотя в этом случае вид функции распределения не был вычислен, по-видимому, и здесь невозможно получить распределение, удовлетворяющее условию (5.4). Имеются работы, в которых предлагается для получения излучающих состояний с отрицательной массой использовать постоянное электрическое и магнитное поля одновременно <sup>42</sup>. В работе <sup>41</sup> было указано, что и в этом случае состояния с отрицательными температурами получены быть не могут.

Итак, постоянные поля, приложенные к полупроводнику, не могут образовать состояний с отрицательной температурой для переходов внутри одной зоны. Как и в случае переходов между различными зонами, для переходов внутри зоны можно ожидать возникновения состояний с отрицательной температурой при импульсном воздействии на полупроводник, хотя практическое осуществление таких приборов вряд ли возможно, так как оно связано с очень малыми временами  $t \approx 10^{-10} \div 10^{-12}$  сек.

### § 6. Получение отрицательных температур методом двойного резонанса

В молекулярных усилителях, работающих в сантиметровом диапазоне волн, широкое распространение для создания состояний с отрицательной температурой получил метод воздействия на квантовую систему с помощью вспомогательного высокочастотного поля <sup>43, 72, 73</sup>.

Пусть система имеет три энергетических уровня (рис. 12). Если на систему воздействовать излучением с частотой  $\omega_{13}$  такой интенсивности, что достигается эффект насыщения по уровням 1 и 3, то между уровнями 1 — 2 или 2 — 3 могут возникнуть состояния с отрицательной температурой.

В работе <sup>44</sup> было впервые предложено применить сортировку с помощью вспомогательного высокочастотного поля для создания усилителей на основе спиновых систем.

Заполнение уровней в таких системах можно определить из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= w_{13} \left( n_3 - n_1 + \frac{N\hbar\omega_{31}}{3kT} \right) + w_{21} \left( n_2 - n_1 + \frac{N\hbar\omega_{21}}{3kT} \right) - W_{31} (n_1 - n_3), \\ \frac{dn_2}{dt} &= w_{23} \left( n_3 - n_2 + \frac{N\hbar\omega_{32}}{3kT} \right) + w_{21} \left( n_1 - n_2 - \frac{N\hbar\omega_{21}}{3kT} \right) + W_{32} (n_3 - n_2), \\ \frac{dn_3}{dt} &= w_{13} \left( n_1 - n_3 - \frac{N\hbar\omega_{31}}{3kT} \right) + w_{23} \left( n_2 - n_3 - \frac{N\hbar\omega_{32}}{3kT} \right) + W_{31} (n_1 - n_3) + \\ &\quad + W_{32} (n_2 - n_3), \end{aligned} \right\} (6.1)$$

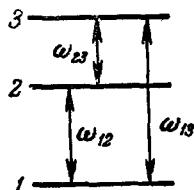


Рис. 12. Система трех уровней.

где  $n_i$  — число частиц, находящихся на уровне  $i$ ,  $N = n_1 + n_2 + n_3$ ,  $T$  — температура системы,  $\omega_{ij}$  — частота перехода между уровнями  $i$  и  $j$ ,  $w_{ij}$  — вероятность перехода частицы под влиянием теплового возбуждения с уровня  $i$  на уровень  $j$ . При тепловом равновесии

$$\frac{w_{ij}}{w_{ji}} = e^{-\frac{\hbar\omega_{ij}}{kT}}$$

для  $i < j$ ,  $W_{31}$  и  $W_{32}$  — соответственно вероятности перехода между уровнями 3—1 и 3—2. В системе (6,1) было предположено, что  $\hbar\omega_{ij} \ll kT$ .

В случае, когда интенсивность вспомогательного высокочастотного излучения велика, так что  $W_{31} \gg W_{32}$ , приближенное решение системы (6,1) имеет вид

$$n_1 - n_2 = n_3 - n_2 = \frac{Nh(-\omega_{23}\omega_{32} + \omega_{21}\omega_{21})}{3kT(\omega_{23} + \omega_{21} + W_{32})}. \quad (6,2)$$

Использование вспомогательного излучения в оптическом диапазоне для изменения населенности на различных зеемановских компонентах впервые было предложено в работе<sup>45</sup>. Если воспользоваться излучением с круговой поляризацией, то можно получить перераспределение частиц по уровням зеемановских компонент, так как имеют место переходы, удовлетворяющие правилу отбора  $\Delta s = +1$  или  $\Delta s = -1$  в зависимости от направления поляризации, где  $s$  — квантовое число, характеризующее проекцию момента количества движения частицы, находящейся на данном уровне, на направление поля. Например, для системы атомных уровней, изображенной на рис. 13, можно получить избыток атомов на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$ , если пользоваться поляризованным по кругу излучением, вызывающим переходы с  $\Delta s = +1$ , и если время релаксации между уровнями  $s = \pm \frac{1}{2}$  для  $S_{1/2}$  значительно больше времени жизни атома в возбужденном состоянии  $P_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$ , что, как правило, имеет место. Ввиду того что при спонтанном излучении равновероятны переходы  $\Delta s = +1$  и  $\Delta s = 0$ , происходит накопление атомов на уровнях  $S_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$ . При этом предполагается, что время релаксации между уровнями  $P_{1/2}$  с  $s = \pm \frac{1}{2}$  велико по сравнению с временем жизни на уровне  $P_{1/2}$  по отношению к переходам на уровни  $S_{1/2}$ . Если имеет место обратное соотношение времен, накопление на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$  будет происходить по-прежнему, так как возникающие переходы с уровнем  $P_{1/2}$  с  $s = -\frac{1}{2}$  на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = \pm \frac{1}{2}$  равновероятны. Отношение количества атомов, находящихся на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$ , к количеству атомов на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = -\frac{1}{2}$  равно отношению времени релаксации между этими уровнями к обратной вероятности

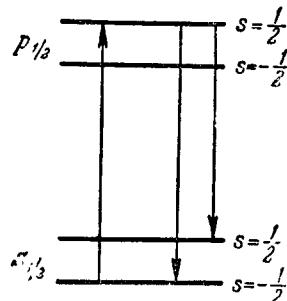


Рис. 13. Схема уровней при наличии зеемановского расщепления.

возбуждения с уровня  $S_{1/2}$  с  $s = -\frac{1}{2}$  на уровень  $P_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2} \tau W, \quad (6,3)$$

где  $n_2$  — число атомов на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = \frac{1}{2}$ ,  $n_1$  — число атомов на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = -\frac{1}{2}$ ,  $W$  — вероятность возбуждения с уровня  $S_{1/2}$  с  $s = -\frac{1}{2}$  на уровень  $P_{1/2}$  с  $s = +\frac{1}{2}$ ,  $\tau$  — время жизни атома на уровне  $S_{1/2}$  с  $s = \frac{1}{2}$ .

Частота перехода между соседними зеемановскими компонентами равна

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{eH}{2\pi mc} \approx 2,9 \cdot 10^6 H \text{ сек}^{-1}, \quad (6,4)$$

где  $H$  — напряженность магнитного поля в CGSE. В реально достижимых полях  $H \approx 10^5$  э частота  $\frac{\omega}{2\pi} \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  соответствует излучению в миллиметровом диапазоне волн. Поэтому зеемановское расщепление уровней невозможно использовать для получения излучения в инфракрасном и оптическом диапазонах волн.

Однако такая трехуровневая квантовая система может быть использована для преобразования излучения оптического и инфракрасного диапазонов волн в излучение в сантиметровом диапазоне волн, т. е. в такой диапазон волн, где существуют высокочувствительные приемники.

Необходимо отметить, что для полупроводников в формуле (6,4) под величиной  $m$  следует понимать эффективную массу носителя тока, которая может быть значительно меньше массы электрона. В этом случае частота перехода  $\omega$  в реально достижимых полях  $10^5$  э может принимать значения, лежащие в пределах инфракрасного диапазона.

Недостатком такого метода получения отрицательных температур является отсутствие в настоящее время достаточно мощных источников излучения, которые бы давали возможность достигать эффекта насыщения по вспомогательному переходу. Так, например, для насыщения перехода, имеющего частоту  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{14} \text{ сек}^{-1}$  ( $\lambda \sim 3\mu$ ), дипольный момент которого равен  $d \approx 10^{-18} \text{ CGSE}$  и  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-6}$ , необходимая для насыщения мощность равна

$$P \approx \frac{cF^2}{4\pi} \approx \frac{(\Delta\omega)^2 c h^2}{4\pi d^2} \approx 10^5 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}. \quad (6,5)$$

Мощность вспомогательного излучения может быть уменьшена на несколько порядков путем использования резонаторов, однако она остается все еще большой, и поэтому практически в подобных случаях приходится работать вдали от насыщения по вспомогательному переходу.

Из системы уравнений (6,1) следует, что отношение числа частиц, находящихся на уровнях 2 и 3, не зависит от мощности вспомогательного излучения и равно

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{w_{21}}{w_{32}}. \quad (6,6)$$

Это соотношение будет иметь место в случае, когда число частиц на уровнях 2 и 3 за счет переходов, вызванных вспомогательным излуче-

нием, будет больше числа частиц, имевшихся в тепловом равновесии на этих уровнях, т. е. минимальная мощность, необходимая для создания отрицательной температуры, определяется из условия

$$\frac{w_{32}Wn_1}{w_{21}(w_{32}+w_{31})} \gg n_2^0, \quad (6,7)$$

где  $W$  — вероятность перехода под влиянием вспомогательного излучения (см. (6,1)),  $n_2^0$  — число частиц, находящихся в тепловом равновесии на уровне 2.

Используя для вероятности перехода выражение (7,3) в случае, если ширина уровней, обусловленных соударениями, примерно равна доплеровской ширине уровней (в этом случае мощность вспомогательного излучения минимальна), можно получить следующее неравенство:

$$P > \frac{c\hbar^2\Delta\omega w_{21}(w_{32}+w_{31})}{2\pi |d_{13}|^2 w_{32}} e^{-\frac{\hbar\omega_{13}}{kT}}. \quad (6,8)$$

Например, для схемы уровней, изображенных на рис. 12, в случае, когда  $\frac{\omega_{13}}{2\pi} = 1 \cdot 10^{-14}$  сек $^{-1}$ ,  $\frac{\omega_{32}}{2\pi} = 3 \cdot 10^{13}$  сек $^{-1}$ ,  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-6}$ ,  $w_{31} = w_{32} = 10^7$  сек $^{-1}$ ,  $w_{21} = 10^8$  сек $^{-1}$ ,  $d_{13}^2 \approx 10^{-18}$  CGSE и температура  $T \approx 300^\circ$  К, необходимая мощность должна быть

$$P > 10^{-3} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}. \quad (6,9)$$

Итак, для получения состояний с отрицательной температурой между уровнями 3 и 2 необходимо, чтобы, как это следует из (6,6),  $w_{21} > w_{32}$ , а мощность вспомогательного излучения должна удовлетворять условию (6,8). При увеличении частоты переходов необходимая мощность согласно (6,8) уменьшается, что облегчает получение состояний с отрицательной температурой, но при этом число активных молекул также убывает.

В работе <sup>46</sup> предлагается использовать систему атомных уровней калия, находящегося в газообразном состоянии, для получения отрицательной температуры в диапазоне волн  $\lambda \sim 3,14 \mu$ . Схема уровней калия и времена их жизни изображены на рис. 14. Вспомогательное излучение в этом случае вызывает переходы между уровнями  $4s$  и  $5p$ , а отрицательная температура может возникнуть между уровнями  $5p$  и  $3d$ . В качестве источника вспомогательного излучения предлагается использовать калиевую лампу, из которой с помощью фильтра выделено излучение, соответствующее переходу  $4s - 5p$ , а излучение, соответствующее переходу  $4s - 4p$ , удалено. Давление паров в газе калия должно быть таким, чтобы ширина линий была обусловлена преимущественно эффектом Доплера. При  $T = 435^\circ$  К обеспечивается нужное давление паров калия, при этом  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 1,2 \cdot 10^{-6}$ . В работе <sup>46</sup> утверждается, что для вспомогательного излучения достаточно мощности 15-ваттной калиевой лампы, работающей в форсированном режиме. Мощность излучения на нужной частоте (переход  $4s - 5p$ ) по утверждению авторов работы <sup>46</sup> может достигать 0,6 мвт с 5 см $^3$  объема лампы.

В работе <sup>47</sup> рассматривалось использование вспомогательного излучения для получения состояний с отрицательными температурами в твердых телах, однако в этом случае ширина уровней значительно больше, чем в газах, и поэтому необходимая мощность для получения отрицательных температур увеличивается (6,5).

Если использовать для вспомогательного излучения источники с широким спектральным составом, то в случае широких линий, имеющих

место в твердом теле, удается несколько скомпенсировать это увеличение мощности, однако мощность существующих в настоящее время источников все же недостаточна для получения отрицательных температур в твердом теле.

Наиболее подходящими объектами для получения отрицательных температур в твердых телах, по-видимому, являются монокристаллы, содержащие примеси атомов редких земель, которые имеют узкие спектральные линии, связанные с переходами электронов между уровнями незаполненных внутренних оболочек<sup>48</sup>.

Следует также отметить недавно полученные результаты по спектрам некоторых органических веществ, замороженных до температуры жидкого азота, где наблюдаются резкие линии<sup>48a</sup> шириной до  $1 \div 2 \text{ см}^{-1}$ . Такие вещества могут оказаться подходящими объектами для получения состояний с отрицательной температурой методом двойного резонанса.

В работе<sup>79</sup> рассматривалась экспериментально возможность получения состояний с отрицательной температурой между уровнями цезия  $8^2D$  и  $7^2P$ .

Атомы цезия возбуждались излучением гелиевой лампы с уровня  $6^2S_{1/2}$  на уровень  $8^2P_{1/2}$ . При добавлении к парам цезия паров инертных газов (например, гелия) возникали переходы

атомов цезия с уровня  $8^2P_{1/2}$  на уровни  $8^2D_{3/2}$ , что приводило к возможности возникновения отрицательной температуры на уровнях  $8^2D$  и  $7^2P$ .

В экспериментах наблюдалось возрастание интенсивности излучения атомов цезия с увеличением интенсивности возбуждающего излучения гелиевой лампы, которое может быть объяснено наличием отрицательной температуры на уровнях  $8^2D$  и  $7^2P$  атомов цезия. Однако авторы указывают на то, что эксперимент не дает достаточно четких и прямых доказательств наличия отрицательной температуры в цезии.

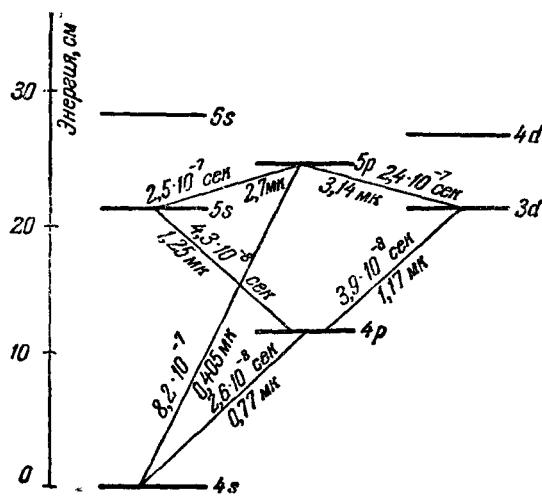


Рис. 14. Схема уровней калия.

## II. ГЕНЕРАЦИЯ И УСИЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СИСТЕМАМИ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

### § 7. Взаимодействие излучения с системами с отрицательной температурой

В системе, находящейся в состоянии с отрицательной температурой, может происходить усиление падающего на систему излучения. При выполнении некоторых условий — условий самовозбуждения — состояние системы с отрицательной температурой становится неустойчивым и в системе возникает генерация<sup>1</sup>.

По аналогии с системами с положительной температурой, характеризуемыми коэффициентом поглощения, систему, находящуюся в состоянии с отрицательной температурой, можно характеризовать коэффициентом излучения  $a(\omega)$ , который определяет возрастание квадрата амплитуды волн или интенсивности  $I = \frac{eF^2}{4\pi}$  при прохождении через систему. Частично этот вопрос был рассмотрен в работе <sup>79</sup>. Для малых значений интенсивности, когда можно пренебречь эффектом насыщения, имеет место

$$I(l) = I(0) e^{+a(\omega, I)l}, \quad (7.1)$$

где  $I(0)$  — начальное значение интенсивности поля в точке  $x=0$ ,  $I(l)$  — то же в точке  $x=l$ , где  $l$  — путь, пройденный волной. Коэффициент излучения <sup>12</sup>  $a(\omega)$  может быть связан с вероятностью индуцированного перехода  $W_{mn}$  следующим образом:

$$a(\omega, I) = \frac{W_{mn} h \omega n}{I}, \quad (7.2)$$

$$W_{mn} = \frac{1/\tau}{(\omega - \omega_{mn})^2 + 1/\tau^2 + d_{mn}^2 F^2 / h^2} \frac{d_{mn}^2 F^2}{2h^2}, \quad (7.3)$$

где  $\omega_{mn}$  — частота перехода,  $\omega$  — частота падающего излучения,  $d_{mn}$  — матричный элемент дипольного момента между рассматриваемыми уровнями,  $\tau$  — среднее время жизни системы в возбужденном состоянии,  $n$  — число активных молекул в единице объема \*).

В случае больших интенсивностей, когда в (7.3) выполняется неравенство (эффект насыщения)

$$\frac{1}{\tau^2} \leq \frac{d_{mn}^2 F^2}{h^2}, \quad (7.4)$$

зависимость интенсивности от расстояния имеет более сложный вид. В предельном случае сильного насыщения

$$I(l) = I(0) + Al. \quad (7.5)$$

Спектральный состав излучения, проходящего через такую среду, также будет претерпевать изменение. Вследствие того, что фононы, вызванные индуцированным испусканием, имеют направление, поляризацию и частоту, строго совпадающую с падающими фотонами, изменение спектрального состава излучения связано только с формой линии.

Пусть на систему падает излучение достаточно широкого спектрального состава и малой интенсивности, так что справедлива формула (7.1).

На расстояниях  $l < \frac{1}{a(\omega_{mn})}$  к начальной интенсивности  $I(\omega, 0)$  добавляется интенсивность, имеющая спектральный состав в виде формы спектральной линии

$$I(\omega, l) = I(\omega, 0) [1 + a(\omega) l]. \quad (7.6)$$

На расстояниях  $l \gg \frac{1}{a(\omega_{mn})}$ , когда еще нет насыщения, спектральный состав излучения значительно уже спектральной линии (рис. 15). Его ширина равна

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\ln 2}{a(\omega_{mn}) l}}. \quad (7.7)$$

\* ) Формула (7.3) справедлива в том случае, когда уширение линии перехода, связанное с временем жизни  $\tau$ , больше ширины, обусловленной другими причинами, например Допплер-эффектом для пучков, шириной полосы, занятой носителями в полупроводниках, и т. д.

При достаточно больших интенсивностях, когда достигается насыщение, спектральный состав излучения, индуцированного первоначально падающими на систему квантами, сохраняется (рис. 15).

Таким образом, спонтанное излучение, возникшее внутри образца достаточно больших размеров, спектральный состав которого описывается

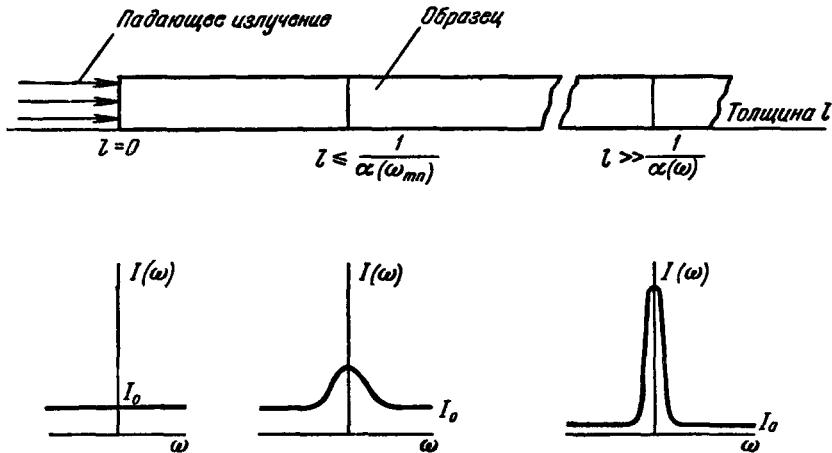


Рис. 15. Сужение спектрального состава излучения при прохождении через среду с отрицательными потерями в случае отсутствия насыщения.

формой спектральной линии, на выходе из образца будет иметь практически монохроматический состав с частотой, близкой к вершине спектральной линии спонтанного излучения.

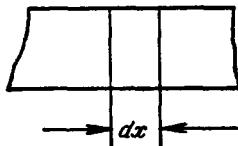


Рис. 16. Слой среды с отрицательной температурой сечением  $1 \text{ cm}^2$  и длиной  $dx$ .

В приведенном выше рассмотрении пренебрегалось отражением излучения от границы образца, т. е. считалось, что в системе нет обратной связи. Возникающее при этом излучение в некотором смысле сходно с люминесценцией и отличается от нее более узким спектральным составом.

Кроме вышеописанного процесса увеличения числа фотонов за счет индуцированного испускания, в образце образуется излучение вследствие спонтанных переходов. Спектральный состав такого излучения (спонтанного и индуцированного) можно получить следующим образом (рис. 16).

Рассмотрим излучение плоского слоя  $dx$ , обусловленное спонтанными и вынужденными переходами; в предположении отсутствия насыщения

$$\frac{dI(\omega)}{dx} = \alpha(\omega) I(\omega) + \beta(\omega), \quad (7,8)$$

где  $\beta(\omega)$  — интенсивность спонтанного излучения единицы длины образца в направлении оси  $x$  в интересующем нас телесном угле  $d\Omega$ . Интегрируя, получим

$$I(\omega) = \tilde{I}(\omega) e^{\alpha l} - \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}, \quad (7,9)$$

где

$$\tilde{I}(\omega) = I(\omega, 0) + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом, спектральный состав излучения при достаточно большой толщине  $l \gg \frac{1}{\alpha(\omega_{mn})}$  будет состоять из сильно суженной спектральной линии  $\tilde{I}(\omega) e^{\alpha l}$  и фона спонтанного излучения  $\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}$ . Следует отметить, что, в то время как ширина линии индуцированного испускания уменьшается, при увеличении размеров образца спектральный состав спонтанного фона не зависит от этих размеров.

При наличии насыщения уравнение (7,8) заменяется на следующее:

$$\frac{dI(\omega)}{dx} = C + \beta, \quad (7,10)$$

где

$$C = \frac{n\hbar\omega}{2\tau} \quad \text{при} \quad (\omega - \omega_{mn})^2 < \frac{d_{mn}^2 F^2}{\hbar^2}.$$

Интегрирование (7,10) дает

$$I(\omega, l) = I(\omega, 0) + (C + \beta) l. \quad (7,11)$$

В этом случае на фон с широким спектральным составом, интенсивность которого линейно возрастает с увеличением размеров образца, накладывается интенсивность узкой спектральной линии  $I(\omega, 0)$ .

При увеличении толщины образца в этом случае излучение стремится к сплошному фону, причем интенсивность спектральной линии на этом фоне становится малой.

Необходимо отметить, что при достаточно больших размерах образца спектральный состав теплового излучения, обусловленного спектральной линией шириной  $\Delta\omega$ , будет иметь значительно более широкий частотный интервал по сравнению с  $\Delta\omega$ .

## § 8. Условия самовозбуждения

В предыдущем параграфе рассматривалось прохождение излучения через среду с отрицательной температурой без учета явлений, связанных с наличием границ образца. В этом случае, как указывалось выше, возникающее излучение сходно с люминесценцией. При наличии отражающих границ в системе с отрицательной температурой появляется положительная обратная связь: фотоны, отразившись от границы, могут возвратиться в исходную точку пространства в том же состоянии, в котором они ранее вышли из этой точки. Наличие такой положительной обратной связи приводит к тому, что в системе возможно при некоторых условиях (условиях самовозбуждения) возникновение режима генерации.

В случае молекулярного генератора, когда имеется резонатор с добротностью  $Q_{рез}$ , в котором может возбуждаться один тип колебаний, условия самовозбуждения<sup>1</sup> имеют вид

$$\beta = \frac{4\pi N_0}{V\hbar} |d|^2 Q_{рез}\tau^2 > 1, \quad (8,1)$$

где  $\beta$  — коэффициент самовозбуждения (в режиме генерации  $\beta > 1$ ),  $N_0$  — число активных молекул, влетающих в резонатор в одну секунду,  $V$  — объем резонатора,  $|d|$  — матричный элемент дипольного момента,  $\frac{1}{\tau} = \Delta\omega$  — ширина спектральной линии. Удобно переписать (8,1) в симметричной форме

$$\beta = \frac{4\pi n_0 |d|^2}{\hbar\omega} Q_{рез} Q_{лин} > 1, \quad (8,2)$$

где  $n_0 = \frac{N_0\tau}{V}$  — число активных молекул в единице объема,

$$Q_{\text{лип}} = \frac{\omega}{\Delta\omega}.$$

В области оптических и инфракрасных частот практически невозможно использовать резонатор, в котором существует один тип колебаний вблизи рассматриваемой частоты, поскольку линейные размеры такого резонатора должны быть порядка длины волны излучения. Поэтому в области оптических и инфракрасных длин волн приходится иметь дело с резонаторами, в которых возбуждаются высшие типы колебаний, при этом вблизи рассматриваемой частоты имеется несколько типов колебаний. В этом случае, так же как и в случае наличия одного типа колебаний, самовозбуждение будет иметь место тогда, когда излучаемая средой с отрицательными потерями мощность в рассматриваемый тип колебаний превосходит потери энергии в этом типе колебаний, т. е.

$$P_{\text{изл}} > P_{\text{пот}}, \quad (8,3)$$

где  $P_{\text{изл}}$  — мощность излучения системой с отрицательной температурой,  $P_{\text{пот}}$  — мощность потерь в резонаторе.

Мощность потерь в резонаторе может быть выражена через его добродарность для данного типа колебаний

$$P_{\text{пот}} = \frac{E_{\text{зап}}\omega}{Q_{\text{рез}}},$$

где  $E_{\text{зап}} = \hbar\omega N$  — запасенная в резонаторе энергия,  $N$  — число фотонов в системе на данном типе колебаний.

Излучаемая системой мощность может быть вычислена, если известно время жизни по отношению к спонтанному распаду. Пусть время жизни в системе по отношению к радиационному распаду при излучении в  $p$  радиационных осцилляторов внутри полосы частот, равной ширине линии  $\Delta\omega$ , равно  $\tau$ , тогда вероятность радиационного распада в данный тип колебаний равна

$$W_c = \frac{1}{p\tau}. \quad (8,4)$$

Вероятность индуцированного испускания  $W_i$  под влиянием  $N$  квантов, имеющихся в данном типе колебаний, в  $N$  раз больше вероятности (8,4)

$$W_i = \frac{N}{p\tau}. \quad (8,5)$$

Если система с объемом  $V$  содержит  $nV$  активных молекул, то излучаемая в данный тип колебаний мощность равна

$$P_{\text{изл}} = \frac{\hbar\omega nV}{p\tau}. \quad (8,6)$$

Таким образом, условие самовозбуждения (8,3) приводит к формуле

$$\frac{\hbar\omega NnV}{p\tau} > \frac{\omega}{Q_{\text{рез}}} N\hbar\omega, \quad (8,7)$$

т. е.

$$\beta = \frac{Q_{\text{рез}} nV}{\omega p\tau} > 1.$$

В случае свободного пространства объема  $V$  величина  $p$  равна

$$p = \frac{8\pi\omega^2\Delta\omega V}{(2\pi)^3 c^3}. \quad (8,8)$$

Для полупроводниковых генераторов время жизни  $\tau$  зависит от числа свободных носителей  $n$  и может быть выражено через значение  $\tau_0$ , известное для некоторой концентрации носителей  $n_0$ :

$$\tau = \frac{n_0 \tau_0}{n}. \quad (8,9)$$

Тогда условие (8,7) приобретает вид

$$\frac{Q_{\text{pc3}} n^2 V}{\omega p n_0 \tau_0} > 1. \quad (8,10)$$

Как было отмечено во введении, безразмерной величиной, которая определяет качество системы с отрицательной температурой, является

$$\kappa = |d|^2 \frac{2\pi n}{\hbar \Delta \omega}, \quad (8,11)$$

где  $|d|^2$  — квадрат матричного элемента дипольного момента,  $n$  — разность между числом частиц на верхнем и нижнем уровнях,  $\Delta\omega$  — ширина спектральной линии.

Квадрат матричного элемента дипольного момента связан с временем жизни по отношению к спонтанному распаду следующим соотношением:

$$\tau = \frac{3\hbar c^3 (2\pi)^3}{32\pi^3 \omega^3 |d|^2}. \quad (8,12)$$

Для газообразных систем  $\frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ Гц}$  при давлении газа порядка 1 мм рт. ст.,  $|d|^2 \approx 10^{-36} \text{ CGSE}$ , максимальное число активных молекул на заданном вращательном уровне может быть равным числу молекул на данном вращательном уровне, т. е.  $n = \frac{n_1}{\Sigma_{\text{вр}}}$ , где  $n_1$  — полное число молекул в 1 см<sup>3</sup> при давлении 1 мм рт. ст.,  $\Sigma_{\text{вр}}$  — вращательная статистическая сумма. Для  $\Sigma_{\text{вр}} \approx 10^3$  величина  $\kappa$  равна  $\kappa_{\text{газа}} \ll 10^{-3}$ . Для парамагнитных ионов кристалла  $\Delta\omega \sim 10^{-2}\omega$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{11}$ ,  $|d|^2 \approx 10^{-38}$ , с концентрацией парамагнитных ионов  $\sim 1\%$  величина  $\kappa$  равна  $\kappa_{\text{п}} \ll 0,1$ .

Для полупроводниковых веществ удобно в формуле (8,11) заменить  $|d|^2$  через время жизни по отношению к излучательному переходу (8,12). Подставляя  $\tau$  из (8,9) в (8,12), для величины  $\kappa$  можно получить

$$\kappa = \frac{3\pi c^3 n^2}{2\pi^3 \omega^3 \tau_0 n_0 \Delta\omega}. \quad (8,13)$$

В этом случае величина  $\kappa$  нелинейно зависит от плотности активных частиц  $n$ .

Для полупроводникового кристалла InSb, у которого

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-1}, \quad \frac{\omega}{2\pi} \sim 3 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}, \quad n \sim 10^{17}, \quad \tau_0 \approx 10^{-6} \text{ с} \quad \text{при } n_0 = 5 \cdot 10^{16}$$

величина<sup>21</sup>  $\kappa$  равна

$$\kappa \approx 1.$$

Мощность  $P$ , излучаемая молекулярным генератором, когда условия самовозбуждения выполнены достаточно сильно, определяется числом активных молекул  $N_0$ , образующихся в единицу времени<sup>1</sup>:

$$P_{\max} = \frac{N_0}{2} \hbar \omega. \quad (8,14)$$

При работе полупроводниковой системы в импульсном режиме максимальная мощность равна

$$P'_{\max} = \frac{n}{2} \frac{\hbar \omega}{\Delta t}, \quad (8,15)$$

где  $\Delta t$  — длительность импульса излучения (порядка времени замедления электронов в полупроводнике в предположении, что время замедления короче времени жизни).

При работе молекулярных генераторов в непрерывном режиме ширина полосы излучения генератора имеет порядок полосы частот  $\delta\omega$ , обусловленных спонтанным излучением<sup>49</sup>:

$$\delta\omega = \frac{2kT(\Delta\omega_{\text{сп}})^2}{P}. \quad (8,16)$$

В импульсном режиме ширина полосы определяется длительностью излучения  $\Delta t$ , так как, по-видимому,  $\delta\omega \ll \frac{1}{\Delta t}$ .

В инфракрасном и оптическом диапазонах частот источники излучения принято характеризовать эффективной температурой. Значение эффективной температуры для генераторов может быть получено, если считать, что мощность, излучаемая генератором в интервале частот, определяемом шириной полосы (8,16), равна мощности, излучаемой черным телом в том же интервале частот. Поток энергии с  $1 \text{ см}^2$  поверхности черного тела, нагреветого до температуры  $T$ , когда  $kT \gg \hbar\omega$ , описывается формулой Релея — Джинса

$$S = \frac{kT\omega^2\Delta\omega}{(2\pi c)^2}. \quad (8,17)$$

Для полупроводникового образца, имеющего форму куба с размерами  $l$ :

$$T_{\text{эфф}} \approx \frac{2\pi nl\hbar c^2}{k\omega}. \quad (8,18)$$

Оценка величины эффективной температуры для случая  $n \approx 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $l \approx 1 \text{ см}$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} \approx 3 \cdot 10^{13}$  дает

$$T_{\text{эфф}} > 10^{13} \text{ градусов}$$

В настоящем параграфе рассматривались условия самовозбуждения, когда в резонаторе имелось несколько различных типов колебаний, имеющих примерно равные добротности. Однако возможность одновременной генерации на нескольких различных типах колебаний требует дополнительных исследований<sup>50</sup>.

## § 9. Резонаторы

Как было отмечено выше, в инфракрасной и оптической областях, частот невозможно использовать простейшие типы колебаний в резонаторе, так как для них размеры резонатора становятся малыми и добротности низкими.

В работе<sup>13</sup> был предложен резонатор, состоящий из двух отражающих параллельных пластинок, и оценена их добротность, оказавшаяся довольно высокой. Такой резонатор аналогичен интерферометру Фабри — Перо, обычно применяемому в оптических исследованиях. В работе<sup>76</sup> этот резонатор был исследован экспериментально в миллиметровом диапазоне волн.

Более подробный анализ резонаторов такого типа и учет имеющихся место в них спонтанных шумов был приведен в работе<sup>46</sup>. Если длина волны излучения значительно меньше расстояния между пластинками и размеров пластинок, то можно пользоваться приближением геометрической оптики. Для вычисления добротности такого резонатора следует оценить потери энергии в резонаторе при отражении на стенках и из-за излучения

через боковые поверхности. Энергия, теряемая при отражении на стенах, равна

$$dE = E \frac{cdt}{L} (1 - a), \quad (9,1)$$

где  $E$  — полная энергия в резонаторе;  $\frac{cdt}{L}$  — количество отражений от стенок, расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга, за время  $dt$ ;  $a$  — коэффициент отражения;  $c$  — скорость света. Интегрирование (8,1) дает

$$E = E_0 e^{-\frac{c(1-a)}{L} t}. \quad (9,2)$$

Следовательно, характеристическое время затухания (время жизни кванта) равно

$$t_0 = \frac{L}{c(1-a)}. \quad (9,3)$$

С этим временем связана полоса частот, пропускаемая резонатором:

$$\Delta\omega = \frac{1}{t_0}, \quad (9,4)$$

которая может быть выражена через добротность резонатора  $Q$

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{Q}. \quad (9,5)$$

Таким образом,

$$Q = t_0 \omega = \frac{L\omega}{c(1-a)}. \quad (9,6)$$

Оценка значения добротности для  $L=1$  см,  $a=0,95$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{14}$  сек<sup>-1</sup> ( $\lambda=3$  м) дает

$$Q \approx 4 \cdot 10^5.$$

Наряду с потерями энергии при отражении от пластин имеет место потеря энергии при излучении через боковые поверхности резонатора (рис. 17) \*

$$dE = -E \frac{c \cdot \operatorname{tg} \theta dt}{D}, \quad (9,7)$$

где  $D$  — поперечный размер резонатора,  $\theta$  — угол дифракции.

Из (8,7) следует  $(20 \approx \frac{\lambda}{D} \ll 1)$

$$E = E_0 e^{-\frac{c\theta t}{D}}, \quad (9,8)$$

т. е.

$$t'_0 = \frac{D}{c\theta} = \frac{2D^2}{c\lambda}. \quad (9,9)$$

Следовательно,

$$Q' = \frac{D^2 \omega^2}{\pi c^2}. \quad (9,10)$$

\*). Для уменьшения потерь и числа возможных типов колебаний в резонаторе боковые стенки его могут быть сделаны из диэлектрика, как это было отмечено в работе <sup>78</sup>.

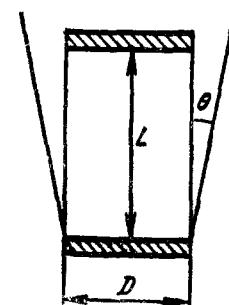


Рис. 17. Потеря энергии при излучении через боковые поверхности резонатора.

Оценка значения  $Q'$  для  $D = 1 \text{ см}$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{14} \text{ сек}^{-1}$  дает  $Q \approx 10^8$ . Из оценки очевидно, что при выбранных условиях дифракция не играет никакой роли.

Для резонаторов указанного типа большие значения добротностей можно получить лишь при достаточно строгой параллельности пластин. Практически, значения добротности будут определяться непараллельностью пластин.

Если пластины непараллельны, то при каждом отражении угол наклона увеличивается на величину  $\beta_0$  (рис. 18). Таким образом, время ухода луча вследствие непараллельности имеет порядок

$$t''_0 = \eta \frac{L}{c}, \quad (9,11)$$

где  $\eta$  — максимальное число отражений луча до ухода из системы — определяется из условия

$$\sum_1^\eta \beta_0 n L = D. \quad (9,12)$$

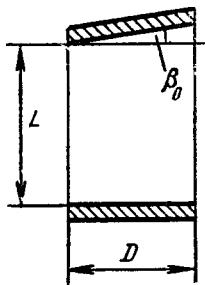
Тогда

$$t''_0 = \frac{1}{c} \left( \frac{2LD}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9,13)$$

Добротность равна

$$Q'' = \frac{\omega}{c} \left( \frac{2LD}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9,14)$$

Для  $Q'' \approx 10^6$  и  $L = D = 1 \text{ см}$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{14} \text{ сек}^{-1}$  получаем  $\beta_0 \approx 10^{-3} \approx 3''$ . Большое значение добротности резонатора для коротких длин волн показывает,



что вполне достаточно пользоваться диэлектрическими резонаторами, где отражение получается на границе двух сред с различными диэлектрическими постоянными. Так, в случае полупроводникового генератора в качестве резонатора может служить сам образец, так как полупроводники имеют высокое значение диэлектрической постоянной ( $\epsilon \sim 10$ ) вплоть до инфракрасной области частот. Большое значение диэлектрической постоянной в полупроводниках затрудняет вывод излучения из образца, так как при косом падении излучения на поверхность образца оно может испытывать полное внутреннее отражение. Поэтому типы колебаний, которые распространяются под малыми углами к поверхности образца, имеют большую добротность и можно ожидать, что генерация будет происходить преимущественно на этих типах колебаний. Задача вывода излучения из подобных систем, где имеется большое количество различных типов колебаний, связана со значительными трудностями.

Для вычисления шумов молекулярных усилителей необходимо знать число различных колебаний, имеющих достаточно большое значение добротности на данной частоте. Выше было показано, что добротность, связанная с отражением от стенок резонатора, меньше добротности, обусловленной «расходимостью» волны из-за дифракции. Из такого соотношения добротностей следует, что достаточно большое количество колебаний с направлением распространения внутри некоторого угла  $\vartheta$ , превышающего угол дифракции, имеет достаточно высокую добротность.

Аналогично (9.9) для времени жизни квантов, отражающихся от поверхностей резонатора под углом  $\vartheta$ , можно написать

$$t_0 = \frac{L}{c\vartheta} . \quad (9.15)$$

Приравнивая (9.15) времени жизни, обусловленному отражением (9.3) для угла  $\vartheta$ , внутри которого значение добротности еще велико, можно получить

$$\vartheta = \frac{(1-\alpha)D}{L} = \frac{\omega D}{Qc} . \quad (9.16)$$

Отсюда следует, что число различных типов колебаний в резонаторе, имеющих достаточно высокую добротность, равно полному числу типов колебаний в объеме  $LD^2$ , умноженному на отношение телесных углов  $2\pi\vartheta^2$  и  $4\pi$ :

$$p_{\text{рез}} = p \frac{\vartheta^2}{2} . \quad (9.17)$$

Из (9.8), (9.16) и (9.17) следует

$$p_{\text{рез}} = \frac{LD^4\omega^4\Delta\omega}{2\pi^2c^5Q^2} . \quad (9.18)$$

Для рассмотренного выше типа резонатора ( $L \approx D = 1 \text{ см}$ ,  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 10^{-3}$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ ) оценка дает

$$p_{\text{рез}} \approx 10^6 . \quad (9.19)$$

Чтобы снизить число типов колебаний, целесообразно уменьшать поверхность отражающих пластин; например, при размерах  $D=0,1 \text{ см}$  число типов колебаний уменьшается до  $10^2$ .

Для осуществления связи с отдельным или небольшим количеством типов колебаний

можно воспользоваться дифракционным изображением от края пластин<sup>46</sup> с помощью линзы (рис. 19). Поскольку параллельные пучки лучей, падающие на линзу под различными углами, фокусируются в фокальной плоскости в различных точках, то с помощью экрана с малым отверстием, размещенным в фокальной плоскости, можно осуществить связь с отдельными типами колебаний. Ниже рассмотрены условия, которым необходимо удовлетворить, чтобы получить с помощью линзы связь с одним типом колебаний. Пусть излучение из резонатора выходит через одну из пластин, составляющих резонатор. При коэффициенте отражения  $\alpha$  выходящая мощность меньше мощности, падающей изнутри на стенку, в  $(1-\alpha)$  раз.

Для того чтобы проще было осуществить разделение различных типов колебаний, необходимо потребовать, чтобы угол между направлениями распространения соседних типов колебаний был достаточно велик. Этот угол можно оценить следующим образом. Условие образования стоячей волны между двумя пластинками резонатора, отстоящими друг от друга на расстоянии  $L$ , состоит в том, что длина  $L$  должна быть кратна целому числу полуволн, т. е.

$$2L = q\lambda , \quad (9.20)$$

где  $q$  — целое число.

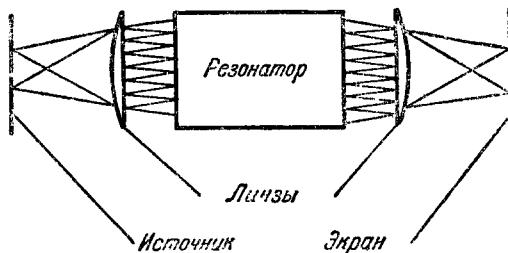


Рис. 19. Осуществление связи с небольшим типом колебаний с помощью линзы.

Для излучения, распространяющегося под малым углом к направлению нормали, проведенной к поверхности пластины, аналогичное условие можно написать в виде

$$\frac{2L}{\cos \theta_1} = q_1 \lambda. \quad (9,21)$$

Очевидно, что минимальный угол  $\theta_1$  в (9,21) будет соответствовать значению  $q_1 = q + 1$ . Этот угол как раз равен углу между распространением соседних типов колебаний

$$\theta_1 = \left( \frac{\lambda}{L} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9,22)$$

Если резонатор имеет конечную добротность, которая обуславливает наличие конечной ширины полосы пропускания резонатора, то какой-либо определенный тип колебаний будет распространяться не строго под данным углом, а внутри некоторого интервала углов  $\Delta\theta_1$ , который можно получить аналогичным образом. Действительно, из условия

$$\frac{2L}{\cos \Delta\theta_1} = q (\lambda - \Delta\lambda), \quad (9,23)$$

$$\Delta\lambda = -2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega^2} \quad (9,24)$$

можно получить, что

$$\Delta\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{Q}},$$

где  $Q$  — добротность резонатора, связанная с максимальной полосой пропускания  $\Delta\omega$  равенством

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}. \quad (9,25)$$

Для того чтобы было возможно разделить соседние типы колебаний, необходимо потребовать, чтобы  $\theta_1 > \Delta\theta_1$ , что приводит к условию

$$4\pi(1-a) < 1. \quad (9,26)$$

При выводе (9,26) считалось, что добротность резонатора определяется потерями при отражениях (формула (9,6)).

Кроме выполнения (9,26), для разделения различных типов колебаний с помощью линзы необходимо, чтобы угол дифракции излучения, выходящего из торцевой пластины резонатора, обусловленный конечными размерами ее  $D$ , был меньше угла между соседними типами колебаний  $\theta_1$ . Это дает условие

$$\frac{D^2}{\lambda} \geq L, \quad (9,27)$$

которое легко выполнимо даже в случае  $D < L$ , поскольку в области инфракрасных частот практически имеет место  $D \gg \lambda$ . В резонаторах, для которых выше были приведены численные оценки, условия (9,26) и (9,27) легко удовлетворяются, т. е. для рассматриваемых резонаторов возможно осуществить связь с отдельным типом колебаний.

## § 10. Усилители

Как было показано выше, квантовые системы, находящиеся в состояниях с отрицательной температурой, могут быть использованы как усиители электромагнитных волн.

В настоящее время разработаны различные типы усилителей (парамагнитные усилители) в сантиметровом и дециметровом диапазоне волн<sup>51-59</sup>. Отличительная особенность таких усилителей — чрезвычайно высокая чувствительность, так как усилители могут работать при температурах, близких к абсолютному нулю, когда шумы усилителя определяются только спонтанным излучением возбужденных ионов<sup>60-64</sup>.

В инфракрасном диапазоне волн, так же как и в сантиметровом диапазоне волн, в принципе возможны две существенно различные конструкции усилителей: 1) усилители резонаторного типа<sup>51</sup> и 2) усилители с бегущей волной<sup>52, 56, 58</sup>.

Усилитель резонаторного типа аналогичен регенеративному усилителю, в котором обратная связь осуществляется через поле излучения. Усилителем является среда с отрицательной температурой. Коэффициент усиления (по мощности) усилителя такого типа определяется через коэффициент самовозбуждения (см. (8,1))

$$\beta = \frac{4\pi N_0}{V\hbar} |d|^2 Q_{\text{рез}} \tau^2.$$

Коэффициент усиления равен<sup>65</sup>

$$k = \frac{1}{(1-\beta)^2} k_0, \quad (10,1)$$

где  $k_0$  — коэффициент передачи мощности через резонатор в отсутствие среды с отрицательной температурой. Ширина полосы пропускания таких усилителей уменьшается с ростом коэффициента усиления, как это имеет место и в других усилителях регенеративного типа. Исходная ширина полосы усилителя определяется либо шириной спектральной линии, либо шириной полосы пропускания резонатора, именно той полосы, которая является более узкой. Имеет место следующая зависимость полосы пропускания от коэффициента усиления:

$$\Delta\omega(k) = \sqrt{\frac{k_0}{k}} \frac{1}{\tau}. \quad (10,2)$$

Приведенные выше формулы были получены применительно к резонатору, в котором может возбуждаться вблизи рассматриваемой частоты один тип колебаний.

Как было отмечено выше, в области инфракрасных длин волн практически невозможно получить резонатор, имеющий вблизи рассматриваемой частоты один тип колебаний. С другой стороны, поскольку в области инфракрасных частот добротность велика, для получения достаточно большой ширины полосы пропускания необходимо использовать несколько различных типов колебаний.

Пусть с помощью некоторой оптической системы осуществляется связь с  $M$  различными типами колебаний (рис. 20), лежащими внутри интервала частот  $\Delta\Omega$  и имеющими примерно одинаковые добротности.

Если добротности отдельных типов колебаний таковы, что эти колебания перекрываются по частотам, как это изображено на рисунке, то ширина полосы пропускания практически не будет меняться при изменении коэффициента усиления  $k$  до тех пор, пока отдельные типы колебаний не разрешатся по частотам, и тогда коэффициент усиления будет иметь провалы на отдельных частотах.

Простейший тип усилителя с бегущей волной по существу был рассмотрен в § 7. Как было указано, коэффициент усиления и ширина полосы пропускания такого усилителя определяются шириной спектральной линии и коэффициентом излучения и зависят от оптического пути,

пройденного волной. В сантиметровом диапазоне волн для уменьшения размеров усилителя используют так называемую замедляющую систему, в которой групповая скорость волны мала<sup>58</sup>. Подобные системы можно применять и в инфракрасной области (рис. 21).

Шумы усилителей, использующих системы с отрицательной температурой, могут определяться, как было отмечено выше, спонтанным излуче-

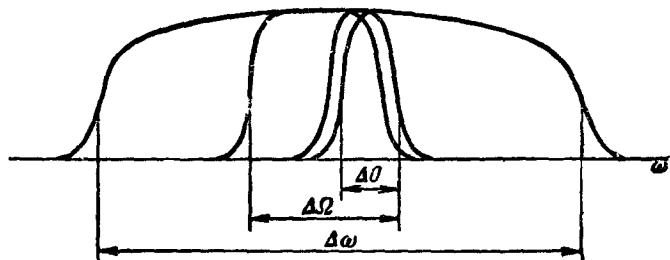


Рис. 20. Полоса пропускания усилителя при наличии нескольких типов колебаний:

$\Delta\Omega$  — ширина полосы частот, с которой осуществлена связь оптической системы,  $\Delta\Omega$  — ширина полосы пропускания резонатора для определенного типа колебаний,  $\Delta\omega$  — частота интервала излучательных переходов в среде в состоянии с отрицательной температурой.

нием возбужденных частиц, если температура остальных элементов усилителя достаточно низка. Ниже приведена оценка температуры шумов усилителей.

Для простоты можно рассмотреть систему, имеющую только два уровня в состоянии, когда все частицы находятся на верхнем энергетическом уровне. В этом случае шумы имеют максимальное значение\*).

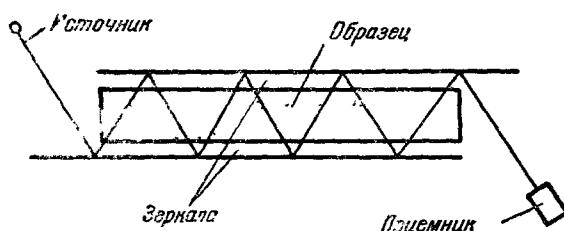


Рис. 21. Замедляющая система.

Пусть рассматриваемая система помещена в резонатор добротности  $Q$ , имеющей один тип колебаний вблизи рассматриваемой частоты; причем ширина линии излучения системы с отрицательной температурой больше ши-

рины полосы пропускания резонатора. Возникающее в резонаторе излучение измеряется детектором, который не вносит своих шумов в резонатор (например, шумящий детектор соединен с резонатором невзаимным элементом с ферритовой связкой, работающей при низкой температуре). Если для такой системы условия самовозбуждения не выполнены и система работает как усилитель с коэффициентом усиления  $k$ , то температуру шумов такой системы можно определить следующим образом. Мощность излучения, регистрируемая детектором, будет увеличиваться при увеличении температуры стенок резонатора вследствие того, что при температуре резонатора, отличной от нуля, в нем появится некоторое число тепловых квантов, которые будут усиливаться усилителем. Температурой шумов, как обычно, следует считать такую температуру резонатора, которая удваивает мощность шумов, приходящих на детектор.

\*). По поводу шумов, обусловленных когерентностью спонтанного излучения, на возможность которых было указано в работе<sup>66</sup>, см.<sup>77</sup>

При температуре резонатора, равной  $T$ , число квантов в данном типе колебаний равно

$$n = \left( e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \quad (10,3)$$

Вероятность индуцированного излучения, обусловленная тепловыми квантами, станет равной вероятности спонтанного излучения, когда  $n=1$ , что и определяет искомую температуру шумов

$$T_{ш} = \frac{\hbar\omega}{k \ln 2}. \quad (10,4)$$

Чувствительность усилителя можно также охарактеризовать числом квантов, которые дают на его выходе сигнал, вдвое превышающий шум усилителя. Для этого к резонатору должна подводиться такая мощность, которая обусловливает в резонаторе наличие одного кванта. Учитывая, что добротность равна по определению

$$Q = \frac{\omega E_{зап}}{P_{пот}}, \quad (10,5)$$

где  $E_{зап}$  — запасенная энергия в резонаторе,  $P_{пот}$  — мощность потерь в резонаторе,  $\omega$  — частота определенного типа колебаний в резонаторе, можно получить, полагая  $E_{зап} = \hbar\omega$  и  $P_{пот} = \eta\hbar\omega$  ( $\eta$  — число квантов, приходящих в резонатор в 1 сек.):

$$\eta = \frac{\omega}{Q}. \quad (10,6)$$

В случае, когда в резонаторе имеется несколько типов колебаний, (10,6) переходит в

$$\eta = \frac{M\omega}{Q}, \quad (10,7)$$

где  $M$  — число типов колебаний с данной частотой  $\omega$ . Множитель  $M$  в (10,7) возник вследствие того, что спонтанное излучение при наличии нескольких типов колебаний будет происходить независимо в каждом типе колебаний.

Следует отметить, что температура шумов в смысле определения (10,4) не зависит от числа различных типов колебаний в резонаторе, в то время как квантовая чувствительность (10,7) уменьшается с ростом числа различных типов колебаний.

Действительно, при индикации теплового излучения от нагретого тела (например, стенок самого резонатора) с увеличением числа типов колебаний в резонаторе, число приходящих в резонатор квантов будет расти пропорционально числу типов колебаний в резонаторе. Пропорционально этому же количеству различных типов колебаний будут расти и шумы, обусловленные спонтанным излучением. Следовательно, чувствительность квантового усилителя, использующего резонатор с большим числом различных типов колебаний, когда кванты поступают во все типы колебаний, не меняется при изменении числа типов колебаний. Однако, поскольку число квантов, поступающих в резонатор, в этом случае растет пропорционально количеству типов колебаний, квантовая чувствительность такого усилителя уменьшается. Поэтому при приеме внешнего когерентного излучения для увеличения чувствительности целесообразно использовать усилители, работающие только на одном типе колебаний.

Уменьшение квантовой чувствительности при увеличении числа типов колебаний в усилителе можно характеризовать эффективной

температурой шумов, которая согласно (10,4) и (10,7) равна

$$T_{\text{эфф}} = T_{\text{ш}} M. \quad (10,8)$$

В случае, когда ширина спектральной линии меньше полосы пропускания резонатора, температура шумов усилителя уменьшается в  $\frac{Q_{\text{лин}}}{Q}$  раз<sup>67</sup>. Такое уменьшение шумов связано с тем, что если в случае, когда ширина спектральной линии была больше полосы пропускания резонатора, все фотонны вызывали индуцированное испускание молекул, то в случае обратного соотношения между ширинами индуцированное испускание будет вызывать лишь часть фотонов, имеющих частоты, заключенные внутри ширины спектральной линии, т. е. температура шумов в этом случае будет равна

$$T'_{\text{ш}} = \frac{\hbar\omega}{k} \frac{\Delta\omega_{\text{лин}}}{\Delta\omega_{\text{рез}}}, \quad (10,9)$$

где  $\Delta\omega_{\text{лин}}$  — ширина спектральной линии,  $\Delta\omega_{\text{рез}}$  — ширина полосы пропускания резонатора. Формула (10,9) показывает, что температура шумов спонтанного излучения уменьшается с уменьшением добротности резонатора и в предельном случае  $\frac{\Delta\omega_{\text{рез}}}{\omega} \approx 1$  формула (10,8) переходит в

$$T_{\text{ш}} = \frac{\hbar\Delta\omega_{\text{лин}}}{k}, \quad (10,10)$$

т. е., как и в случае обычных усилителей,  $T_{\text{ш}}$  определяется шириной полосы пропускания усилителя. Следует отметить, что поскольку в инфракрасном диапазоне частот добротности резонаторов достаточно велики, а добротности спектральных линий малы, условия, приводящие к формуле (10,10), реализовать трудно.

Итак, температура шумов с ростом частоты увеличивается и для частоты  $\frac{\omega}{2\pi} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$  составляет  $T_{\text{ш}} \approx 1500^\circ$ , если пользоваться усилителем, в котором осуществляется связь с одним типом колебаний. При наличии связи с несколькими типами колебаний чувствительность усилителя будет падать пропорционально количеству этих типов колебаний.

При приведенном выше значении температуры  $T_{\text{ш}} = 1500^\circ$  чувствительность квантовомеханического усилителя по мощности равна (предполагается один тип колебаний)

$$P_{\text{лин}} = kT_{\text{ш}} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx 6 \cdot 10^{-12} \text{ вт}$$

при полосе пропускания  $\Delta\omega \approx 2 \cdot 10^9 \text{ гц}$ , что значительно превосходит чувствительность обычно используемых в инфракрасном диапазоне волн болометров<sup>68</sup>, имеющих чувствительность порядка  $10^{-11} \text{ вт}$  при полосе пропускания  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-3}$ , т. е. в этом диапазоне волн квантовые усилители могут дать выигрыш по чувствительности по сравнению с болометрами примерно в 1000 раз.

#### § 11. Квантовые индикаторы излучения

В предыдущей главе было показано, что чувствительность молекулярных усилителей уменьшается с увеличением частоты вследствие температуры шумов, вызванных спонтанным излучением. Можно ожидать, что для частоты  $\frac{\omega}{2\pi} \approx 10^{13} \text{ сек}^{-1}$  молекулярный усилитель обнаруживает  $\sim 10^6$  квантов. В то же время известно, что чувствительность счетчиков  $\gamma$ -кван-

тов или чувствительность фотоумножителей может быть доведена до такого уровня, когда практически они улавливают отдельные кванты.

Как было показано в работе<sup>5</sup>, высокая чувствительность счетчиков связана с тем, что в них отсутствуют шумы, обусловленные спонтанным излучением. В этой же работе был предложен квантовомеханический индикатор сантиметровых волн, свободный от шумов спонтанного излучения.

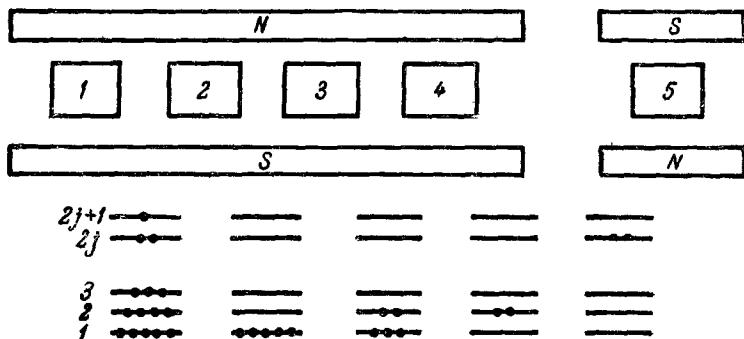


Рис. 22. Принцип действия квантовомеханического индикатора:  
1 — источник молекул, 2 — сортирующая система, 3 — резонатор, 4 — вторая сортирующая система, 5 — второй резонатор.

Принцип действия такого индикатора заключается в следующем (рис. 22). Пусть имеется  $2j+1$  эквидистантных энергетических уровней, образующихся, например, при взаимодействии магнитного момента молекулы с приложенным магнитным полем. С помощью неоднородного магнитного поля выделяют из пучка молекулы, находящиеся на нижнем энергетиче-

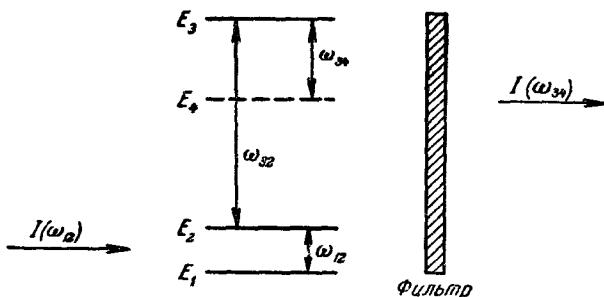


Рис. 23. Схема уровней инфракрасного индикатора.

ском уровне, которые потом пропускают через объемный резонатор, настроенный на частоту, соответствующую переходам между соседними уровнями. В резонатор поступает измеряемое излучение, которое поглощается этими молекулами, так что часть молекул, пропорциональная числу обнаруживаемых квантов, переходит на первый возбужденный уровень. С помощью второй сортирующей системы, расположенной после резонатора, выделяются молекулы, находящиеся на первом возбужденном уровне. Приготовленный таким способом молекулярный пучок поступает в область пространства с противоположным направлением магнитного поля по отношению к первоначальному полю. При этом происходит инверсия энергетических уровней, так что заселенным оказывается второй уровень, отсчитываемый от наивысшего. Такая система через некоторое

время может излучить  $(2j-1)$  квантов на каждый индицируемый квант. Таким образом, такая система позволяет усиливать в  $(2j-1)$  раз первоначальные кванты. Подобная система может обнаруживать кванты, частота которых заключена в диапазоне частот, определяемом шириной спектральной линии. Так как частоты излученных квантов не связаны однозначно с частотой поглощенных квантов, такая система может быть использована только для индикации, но не для усиления. Точнее, в то время как рассматриваемая система способна индицировать кванты в сравнительно широком интервале частот, обусловленном временем взаимодействия молекул с резонатором, полоса пропускания такой системы определяется временем спонтанного излучения в возбужденном состоянии  $(\tau \approx 10^6 \text{ сек для } \frac{\omega}{2\pi} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1})$ . Вследствие того, что исходным состоянием квантовой системы является состояние с наиболее низким уровнем энергии, в описываемом индикаторе отсутствуют шумы, связанные со спонтанным излучением.

Недостатком такой системы является ее большая сложность. Кроме того, большие времена жизни в сантиметровом диапазоне делают ее практически неосуществимой.

В работе<sup>6</sup> для индикации инфракрасного и оптического излучений была предложена другая система, в которой также отсутствуют шумы, связанные со спонтанным излучением. Пусть квантовая система имеет энергетические уровни, изображенные на рис. 23. Частота  $\omega_{21}$  соответствует индицируемому инфракрасному излучению. На частоте  $\omega_{32}$  действует вспомогательное излучение, так что оно создает насыщение между уровнями  $E_2$  и  $E_3$ . При достаточно низкой температуре заселен только уровень  $E_1$ . Индицированные кванты частоты  $\omega_{21}$ , поглощаясь, вызывают переходы на уровень  $E_2$ , а вследствие действия вспомогательного излучения частоты  $\omega_{32}$  с уровня  $E_2$  переходят на уровень  $E_3$ . Последующий переход с уровня  $E_3$  на уровень  $E_4$  происходит спонтанно и обнаруживается при помощи фотоумножителя, поскольку частота  $\omega_{34}$  соответствует оптическому диапазону. Между системой и фотоумножителем расположен фильтр для поглощения вспомогательного оптического излучения частоты  $\omega_{32}$ . Так как фотоумножитель способен улавливать единичные кванты в оптическом диапазоне, такая система обладает высокой чувствительностью.

Ввиду того, что при достаточно низкой температуре система находится в основном состоянии  $E_1$ , в ней отсутствуют шумы, связанные со спонтанным излучением. Так же, как и в предыдущем случае, такая система не является усилителем. В работе<sup>6</sup> она получила название счетчика квантов.

При рассмотрении вышеуказанных систем может показаться, что при снижении температуры можно произвольно уменьшать шумы. Однако вследствие статистического характера спонтанного излучения такие системы имеют конечную температуру шумов.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые системы за короткое время развития приобрели большое значение для генерации и усиления электромагнитных волн в сантиметровом и дециметровом диапазонах. Создание молекулярных генераторов и усилителей в этом диапазоне позволило решить две важнейшие задачи в радиотехнике: существенно повысить стабильность частоты генерации и значительно увеличить чувствительность приемников. С помощью молекулярных генераторов на пучках аммиака удалось уже в настоящее время

достигнуть высокой стабильности частоты<sup>69</sup>. Молекулярные усилители в сантиметровом и дециметровом диапазонах волны имеют температуру шумов порядка 10°К. Молекулярные генераторы и усилители позволили решить и поставить целый ряд научных и технических задач в области радиолокации, навигации, дальней радиосвязи, радиоастрономии, создания эталона частоты (времени) и т. д.

К настоящему времени в этой области опубликовано свыше тысячи работ, среди которых имеются обзоры<sup>1-3,10</sup> и монографии<sup>70,71</sup>, касающиеся теории, конструкции и различных применений квантовых приборов. Эти работы составляют содержание нового раздела физики, получившего название квантовой радиофизики.

В настоящее время в лабораториях ряда стран ведутся исследования возможностей применения квантовых систем для генерации, усиления и индикации электромагнитного излучения в субмиллиметровом, инфракрасном и оптическом диапазонах\*).

Имеется большое количество различных предложений, касающихся методов получения отрицательных температур в различных квантовых системах и некоторых вопросов теории. Содержание большинства этих работ было изложено в настоящем обзоре. Однако следует подчеркнуть, что пока не опубликовано ни одной работы, в которой сообщалось бы об осуществлении режима усиления и генерации в инфракрасном или оптическом диапазонах волн. Однако, как это видно, например, из настоящего обзора, отсутствие принципиальных ограничений позволяет надеяться на то, что в ближайшее время будут созданы генераторы и усилители в инфракрасном и оптическом диапазонах волн.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН 57, 485 (1955).
2. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Изв. вузов, сер. радиофиз., 2, 3 (1959).
3. J. Weberg, Rev. Mod. Phys. 31, 681 (1959).
4. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ред. Р. Г. Мириманов, М., ИЛ, 1959.
5. J. Weberg, Phys. Rev. 108, 537 (1957).
6. N. Bloembergen, Phys. Rev. Lett. 2, 84 (1959).
7. В. А. Фабрикант, Тр. ВЭИ 41, 236, 254 (1940); Докторская диссертация, ФИАН (1939).
- 7а. Е. М. Риггсли, R. V. Pound, Phys. Rev. 81, 279 (1951).
8. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, изд. 2-е, М., ИЛ, 1956.
9. J. P. Wittke, Proc. IRE 45, 291 (1957).
10. P. N. Butcher, Proc. IEE 105, 684 (1958).
11. M. W. Müller, Phys. Rev. 106, 8 (1957).
12. Н. Г. Басов, Радиотехника и электроника 3, 297 (1958).
13. А. М. Прохоров, ЖЭТФ 34, 1658 (1958).
14. Г. Герцберг, Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул, М., ИЛ, 1949.
15. P. Thaddeus, J. Loubsier, A. Javan, L. Krishner, H. Leeser, Conference on quantum electronic and resonance phenomena, 14—16 September, 1959, Bloominburg, N.—Y., 1959.
16. A. Javan, Phys. Rev. Lett. 3, 87 (1959).
17. J. H. Sanders, Phys. Rev. Lett. 3, 86 (1959).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Гостехиздат, 1948.
19. Д. И. Блохицев, Основы квантовой механики, М., Гостехиздат, 1948.
20. Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, М., ИЛ, 1951.
21. T. S. Moss, Optical Properties of Semiconductors, Ltd., Butterworths, 1949.
22. Ф. Зейтц, Современная теория твердого тела, М., Гостехиздат, 1949.
23. Н. Г. Басов, Б. М. Вул, Ю. М. Попов, ЖЭТФ 37, 587 (1959).

\*) В сентябре 1959 г. в Нью-Йорке состоялась Международная конференция по квантовой радиофизике. Более 10 докладов на этой конференции было посвящено использованию квантовых систем в субмиллиметровом, инфракрасном и оптическом диапазонах.

24. H. Fröhlich, B. V. Raghavarao, Proc. Phys. Soc. B69, 21 (1956).
25. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 37, 713 (1959).
26. В. А. Чуенков, Физ. твердого тела 2, 200, 209 (1959).
27. J. Yamashita, M. Watanabe, Progr. Theor. Phys. 12, 443 (1954).
28. R. Stratton, Proc. Roy. Soc. A 242, 355 (1957).
29. А. П. Шотов, ЖТФ 26, 1634 (1956); 28, 437 (1958).
30. О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, ЖЭТФ 38, 1589 (1960).
31. F. Seitz, Phys. Rev. 73, 549 (1948).
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1951.
33. В. А. Чуенков, Физ. твердого тела 2, 799 (1960).
34. J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. 31, 66 (1928).
35. Я. И. Френкель, ЖЭТФ 8, 1292 (1938).
36. S. H. Coenig, Phys. Rev. 110, 988 (1958).
37. H. Kötömer, Proc. IRE 47, 397 (1959).
38. D. C. Mattis, M. J. Stevenson, Phys. Rev. Lett. 3, 18 (1959).
39. P. Kaus, Phys. Rev. Lett. 3, 20 (1959).
40. S. Rodriguez, Phys. Rev. 115, 821 (1959).
41. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, ЖЭТФ 38, 1001 (1960).
42. G. C. Doumanis, Phys. Rev. Lett. 1, 55 (1958).
43. Н. Г. Басов, А. М. Прокоров, ЖЭТФ 28, 249 (1955).
44. N. Bloembergen, Phys. Rev. 104, 324 (1956).
45. A. Kastler, J. Phys. Rad. 11, 255 (1950).
46. A. L. Schawlow, C. H. Townes, Phys. Rev. 112, 1940 (1958).
47. J. Brossel, Conference on quantum electronic and resonance phenomena, 14–16 September, 1959, Bloomington, N.—Y., 1959.
48. W. Low, Conference on quantum electronic and resonance phenomena, 14–16 September, 1959, Bloomington, N.—Y., 1959.
- 48а. Э. В. Шпольский, А. А. Ильина, Л. А. Климова, ДАН СССР 87, 935 (1952); Э. В. Шпольский, Л. А. Климова, Изв. АН СССР, сер. физ. 20, 471 (1956); 23, 23 (1959); Э. В. Шпольский, Э. Л. Гидрэяускайте, Л. А. Климова, Материалы X Всесоюзного совещания по спектроскопии, Львов, 1956.
49. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev. 95, 282 (1954); 99, 1264 (1955).
50. С. Веллюстицкий, Уч. зап. Горьковск. ун-та, 12, 157 (1939).
51. N. Bloembergen, Phys. Rev. 104, 324 (1956).
52. H. Scovil, G. Feher, H. Seidel, Phys. Rev. 105, 762 (1957).
53. Г. М. Зверев, Л. С. Корниенко, А. А. Манепков, А. М. Прокоров, ЖЭТФ 34, 1660 (1957).
54. A. L. Wootton, I. W. Meyer, Phys. Rev. 109, 312 (1958).
55. С. Makarov, C. Kikuchi, I. Lambe, R. W. Terhune, Phys. Rev. 109, 1399 (1958).
56. R. W. De Grasse, IRE Wescon. Conv. Record. (1958).
57. T. A. Gioramaine, L. E. Alsop, C. H. Mayer, C. H. Townes, Proc. IRE 47, 1062 (1959).
58. R. W. De Grasse, E. O. Schulz-Du Bois, H. Scovil, Bell System Techn. J. 38, 305 (1959).
59. Л. С. Корниенко, А. М. Прокоров, ЖЭТФ 36, 919 (1959).
60. R. V. Pound, Ann. Phys. 1, 24 (1957).
61. M. W. Stenberg, Phys. Rev. 106, 617 (1957).
62. J. P. Gordon, L. D. White, Proc. IRE 46, 1588 (1958).
63. A. C. Whorter, F. R. Abrams, Proc. IRE 46, 913 (1958).
64. K. Schimode, H. Takahashi, C. H. Townes, L. Phys. Soc. Japan 12, 686 (1957).
65. Н. Г. Басов, Диссертация ФИАН СССР, 1956.
66. R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
67. Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. вузов, сер. радиофиз., 2, 2, 181 (1959).
68. Материалы информационного симпозиума по инфракрасному излучению (IRIS), Proc. IRE 47, № 9 (1959).
69. Н. Г. Басов, В. В. Никитин, А. Н. Ораевский, Г. М. Стражовский, И. В. Череминский, Отчет ФИАН, 1959.
70. J. R. Singer, Masers, N. Y., Ind., 1959.
71. G. J. Trouper, Masers, N. G., Ind., 1959.
72. Н. Г. Басов, Б. Д. Осипов, Оптика и спектроскопия 4, 795 (1958).

73. K. Schimoda, Conference on quantum electronic and resonance phenomena, 14—16 September, 1959, Bloominburg, N.—Y., 1959; J. Phys. Soc. Japan **14**, 954 (1959).
74. Электрофизические свойства германия и кремния, ред. А. В. Ржанов, М., Изд. «Сов. радио», 1956.
75. L. B. Valdes, Proc. IRE **40**, 1420 (1952).
76. А. И. Барчуков, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника **4**, 2094 (1959).
77. I. R. Sinitzky, Phys. Rev. **11**, 33 (1958).
78. S. M. Bergman, J. Appl. Phys. **31**, 275 (1960).
79. Ф. А. Бутаева, В. А. Фабрикант, см. сб. «Исследования по экспериментальной и теоретической физике. Памяти академика Г. С. Ландесберга», М., Изд. АН СССР, 1959.
80. B. Lax, см. сб. «Quantum Electronics», N. Y., 1960.
-

