1957 г. Сентябрь *Т. LXIII, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О ВЛИЯНИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

И. М. Яцунский

Первые искусственные спутники Земли будут обращаться по сравнительно низким орбитам, так как достижение больших высот связано со значительными затратами энергии. Эти спутники в основном должны находиться в области, где еще заметно действие сопротивления воздуха, в результате которого они будут постепенно снижаться и в конце концов упадут на Землю или сгорят в атмосфере. Кроме силы сопротивления воздуха, на спутник будет действовать возмущающая сила, обусловленная отличием поля тяготения сфероидической Земли от центрального поля. Наконец, определенное значение имеют также аномалии силы тяжести, обусловленные отличием истинного поля тяготения от поля земного сфероида.

Влияние всех перечисленных сил, которые мы будем называть геофизическими факторами, необходимо учитывать при расчете орбиты с целью прогнозирования движения спутника. Очевидно, от точности знания этих сил будет зависеть точность прогнозирования орбиты при известных начальных условиях движения.

С другой стороны, можно поставить задачу об уточнении коэффициентов, входящих в математические выражения интересующих нас сил, на основании измерений координат спутника. Такое определение поля действующих сил по наблюдениям спутника, если оно окажется возможным, позволит в дальнейшем более точно прогнозировать орбиты спутников.

Ниже приводятся некоторые оценки возможной в настоящее время точности учета влияния геофизических факторов на движение спутника, а также даются предварительные соображения об уточнении поля указанных сил по результатам измерений его орбиты.

При расчете движения спутника будем пользоваться известной в астрономии системой дифференциальных уравнений эллиптических оскулирующих элементов [6]. Эти уравнения приведены также в статьях [8 9] с некоторыми изменениями, которые для рассматриваемых здесь задач не являются существенными.

Эллиптические оскулирующие элементы Ω, i, ω, p, e, τ полностью определяют положение спутника в пространстве и для каждого момента времени при известных возмущениях S, T, W могут быть вычислены путем непосредственного интегрирования указанной системы. В астрономии, однако, обычно используется метод последовательных приближений. Этот метод дает хорошие результаты при сравнительно небольших возмущениях, каковыми как раз и являются возмущения, обусловленные действием геофизических факторов.

§ 1. НЕСФЕРИЧНОСТЬ ЗЕМЛИ

Как известно, Земля по своей форме близка к сфероиду (или к эллипсоиду вращения). Потенциал сил тяготения для сфероидической Земли с достаточной для наших целей точностью может быть выражен следующим образом:

$$V_s = \frac{\mu}{r} - \varepsilon \frac{\sin^2 \psi - \frac{1}{3}}{r^3}. \tag{1}$$

Постоянная ε, зависящая от параметров общего земного эллипсоида, имеет вид

$$\varepsilon = \mu a^2 \left(\alpha - \frac{m}{2}\right). \tag{2}$$

Здесь a — большая полуось общего земного эллипсоида, $\alpha = \frac{a-b}{a}$ — сжатие Земли; $m = \frac{\tilde{\omega}^2 a}{g_a}$, b — малая полуось земного эллипсоида, $\tilde{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси, g_a — ускорение силы тяготения на экваторе общего земного эллипсоида, μ — постоянная тяготения Земли.

Дифференцируя V_s в направлениях S, T, W, легко получить для возмущающих ускорений следующие выражения:

$$S = \frac{3\varepsilon}{r^4}\left(\sin^2 i \sin^2 u - \frac{1}{3}\right), \quad T = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u, \quad W = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u. \tag{3}$$

Подставляя значения S, T, W в правые части системы уравнений оскулирующих элементов и интегрируя каждое из уравнений в отдельности при постоянных и равных их начальным значениям величинах Ω, i,... в правых частях, получим в первом приближении изменения элементов эллиптической орбиты за время интегрирования.

Не останавливаясь на выводе этих формул, поскольку подобные выводы делались ранее, приведем результаты интегрирования по ϑ от 0 до $2\pi n$ (где n — число оборотов по углу ϑ), т. е. выделим так называемые вековые члены:

$$\Omega - \Omega_0 = \Delta\Omega_в = -\frac{\varepsilon \cos i_0}{\mu p_0^2} 2\pi n, \tag{4}$$

$$i - i_0 = \Delta i_в = 0, \tag{5}$$

$$p - p_0 = \Delta p_в = 0, \tag{6}$$

$$e - e_0 = \Delta e_в = 0, \tag{7}$$

$$\omega - \omega_0 = \Delta\omega_в = \frac{\varepsilon}{\mu p_0^2} (4 - 5\sin^2 i_0)\, \pi n, \tag{8}$$

$$\tau - \tau_0 = \Delta\tau_в = \frac{\varepsilon}{\mu \sqrt{p_0 \mu}} (1 + 3e_0)\left(3 \sin^2 i_0 \sin_0^2 \omega_0 - 1\right) 2\pi n^*). \tag{9}$$

---

*) При выводе формулы для τ использовано разложение в ряд по e с удержанием членов порядка e^2.

Из шести оскулирующих элементов только три (Ω, ω, τ) испытывают вековые возмущения, обусловленные влиянием эллиптичности Земли. Параметр (p) и эксцентриситет (e) орбиты, а также наклонение (i) вековых возмущений, по крайней мере в первом приближении, не имеют.

За счет действия вековых членов Ω и ω орбита с течением времени значительно изменит свою ориентацию в пространстве. Максимальная скорость вращения узла (Ω) и перигея (ω) для низких орбит $\Delta\Omega_в = 26'$, $\Delta\omega_в = 52'$ за один оборот. За сутки (14 ÷ 16 оборотов) смещение узла достигнет 7° и перигея 14°.

Определим, с какой точностью возможно рассчитывать вековые отклонения параметров орбиты. Что касается периодических членов, то от возможной точности их учета будет зависеть лишь прогнозирование в пределах одного витка. Ошибка не связана с номером витка. Однако в некоторых случаях, как будет видно из дальнейшего, ошибка эта не является пренебрежимо малой.

Дифференцируя $\Delta\Omega_в$ и $\Delta\omega_в$ по a, α и m, будем иметь

$$\delta(\Delta\Omega_в)_a = 2\Delta\Omega_в \frac{\delta a}{a}, \tag{10}$$

$$\delta(\Delta\Omega_в)_\alpha = \frac{\Delta\Omega_в}{\alpha - \frac{m}{2}}\delta\alpha, \tag{11}$$

$$\delta(\Delta\Omega_в)_m = -\frac{\Delta\Omega_в}{2\left(\alpha - \frac{m}{2}\right)}\delta m. \tag{12}$$

Аналогично, для $\Delta\omega_в$ получим

$$\delta(\Delta\omega_в)_a = 2\Delta\omega_в \frac{\delta a}{a}, \tag{13}$$

$$\delta(\Delta\omega_в)_\alpha = \frac{\Delta\omega_в}{\alpha - \frac{m}{2}}\delta\alpha, \tag{14}$$

$$\delta(\Delta\omega_в)_m = -\frac{\Delta\omega_в}{2\left(\alpha - \frac{m}{2}\right)}\delta m. \tag{15}$$

По современным данным [1] большая полуось a может считаться известной с ошибкой порядка 100 *м*, сжатие α — с ошибкой не более двух единиц знаменателя, величина $|\delta m| < 10^{-7}$. Подставляя значения указанных погрешностей, будем иметь $|\delta\Omega_a| < 1''$, $|\delta\Omega_\alpha| < 6'$, $|\delta\Omega_m| < 1''$, $|\delta\omega_a| < 1''$, $|\delta\omega_\alpha| < 12'$, $|\delta\omega_m| < 2''$. Таким образом, наибольшее значение имеет возможная погрешность в величине сжатия Земли α. Для рассматриваемых орбит (при i, близком к нулю) за одни сутки может накопиться погрешность в положении узла $6'$ и в положении перигея около $12'$.

Величина постоянной тяготения μ не отражается непосредственно на движении узла и перигея, но время прохождения спутника через перигей τ от μ зависит.

Варьируя формулу (9) по a, α, m и μ, получим *)

$$\delta(\Delta\tau_в)_a = 2\Delta\tau_в \frac{\delta a}{a}, \tag{16}$$

$$\delta(\Delta\tau_в)_\alpha = \frac{\Delta\tau_в}{\alpha - \frac{m}{2}}\delta\alpha, \tag{17}$$

$$\delta(\Delta\tau_в)_m = -\frac{\Delta\tau_в}{2\left(\alpha - \frac{m}{2}\right)}\delta m, \tag{18}$$

$$\delta(\Delta\tau_в)_\mu = -\frac{1}{2}\Delta\tau_в \frac{\delta\mu}{\mu}. \tag{19}$$

*) Здесь связь величин a, α, m и μ не учитывается.

Принимая, как и ранее, $\delta a = 100$ *м*, $\delta\alpha = \frac{\alpha}{150}$, $\delta m < 10^{-7}$ и для $\delta\mu$ значение, равное двум единицам пятого знака [1], получим следующие погрешности (для $n = 15$):

$$|\delta(\Delta\tau_в)_a| < 0{,}004 \text{ сек.}, \qquad |\delta(\Delta\tau_в)_\alpha| < 1{,}7 \text{ сек.},$$
$$|\delta(\Delta\tau_в)_m| < 0{,}004 \text{ сек.}, \qquad |\delta(\Delta\tau_в)_\mu| < 0{,}002 \text{ сек.}$$

И в этом случае наибольшее значение имеет ошибка в сжатии $\delta\alpha$.

За сутки время прохождения через перигей может получить вековое изменение до 1,7 сек. вследствие неточного знания, главным образом, величины α. Весьма благоприятным фактором с точки зрения возможности уточнения постоянных, связанных с Землей, из наблюдений движения спутника является преимущественное влияние одного параметра, именно величины сжатия α *). Последнее позволяет надеяться уточнить прежде всего этот наименее точно известный параметр. Однако такая задача оказывается не столь простой, как может показаться с первого взгляда. Сложность этой задачи станет понятной после анализа действия аномалий силы тяжести.

Оценим величину ошибки в периодических членах, появляющихся при интегрировании от 0 до ϑ уравнений окулирующих элементов, если за S, T, W принимать выражения (3). Для этих периодических членов можно написать оценки

$$|\Delta\Omega_{пер}| < \frac{\varepsilon\cos i}{2\mu p^2}, \tag{20}$$

$$|\Delta i_{пер}| < \frac{\varepsilon\sin 2i}{4\mu p^2}, \tag{21}$$

$$|\Delta p_{пер}| < \frac{\varepsilon\sin^2 i}{\mu p}, \tag{22}$$

$$|\Delta e_{пер}| < \frac{2\varepsilon}{\mu p^2}, \tag{23}$$

$$|\Delta\omega_{пер}| < \frac{2\varepsilon}{\mu p^2 e}, \tag{24}$$

$$|\Delta\tau_{пер}| < \frac{\varepsilon}{e\mu\sqrt{p\mu}}. \tag{25}$$

Неравенства (20) $\div$ (25) показывают, что наиболее существенное влияние ошибки в постоянных Земли будут оказывать на смещение перигея (ω) и время прохождения через перигей (τ) для орбит с малыми эксцентриситетами.

Подсчитаем максимальные значения погрешностей $\delta(\Delta\Omega_{пер})$, $\delta(\Delta i_{пер})$,..., учитывая лишь влияние возможной ошибки в α, поскольку она является наибольшей. При этом будем принимать

$$p = 7000 \text{ км}, \qquad e = 0{,}05.$$

Получим

$$\delta(\Delta\Omega_{пер})_\alpha < \frac{a^2\cos i}{2p^2} = 2'' \quad \text{при} \quad i = 0,$$

$$\delta(\Delta i_{пер})_\alpha < \frac{a^2\sin 2i}{4p^2}\delta\alpha = 1'' \quad \text{при} \quad i = 45°,$$

$$\delta(\Delta p_{пер})_\alpha < \frac{a^2\sin^2 i}{p}\delta\alpha = 120 \text{ м} \quad \text{при} \quad i = 90°,$$

*) Заметим, что погрешность в μ отражается на первом члене выражения (1) и может быть выявлена из наблюдения периода обращения спутника.

$$\delta(\Delta e_{\text{пер}})_a < \frac{2a^2 \sin^2 i}{p^2}\delta\alpha = 0{,}3\cdot 10^{-4} \quad \text{при } i = 90°,$$

$$\delta(\Delta\omega_{\text{пер}})_a < \frac{2a^2}{p^2 e}\delta\alpha = 2',$$

$$\delta(\Delta\tau_{\text{пер}})_a < \frac{a^2}{e\sqrt{p\mu}}\delta\alpha = 0{,}3 \text{ сек}.$$

Очевидно, ошибки в положении узла и в величине наклонения, а также в p и e очень незначительны. Остальные две погрешности являются более заметными для рассматриваемых орбит.

§ 2. АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Поле аномалий силы тяжести для всей Земли может быть представлено в математической форме в виде разложения по сферическим функциям.

Запишем выражение для потенциала аномалий силы тяжести в виде

$$V_a = \gamma_m \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(\alpha_{nm}\cos m\lambda + \beta_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\varphi). \qquad (26)$$

Здесь γ_m — среднее значение силы тяжести для геоида, R — средний радиус Земли, r — радиус-вектор спутника, φ, λ — географические широта и долгота спутника, α_{nm}, β_{nm} — коэффициенты разложения, численные значения которых определяются путем соответствующей обработки гравиметрических данных.

Формула (26) легко получается на основании общего выражения для возмущающего потенциала V_a во всем внешнем поле [2], если вместо Δg (аномалий) в него подставить соответствующее разложение по сферическим функциям [1].

Дифференцируя (26) в направлениях S, T, W, получим

$$S = -\frac{\gamma_m}{R}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos m\lambda + \beta_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\varphi), \qquad (27)$$

$$T = \frac{\gamma_m}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos m\lambda + \beta_{nm}\sin m\lambda)\,P'_{nm}(\sin\varphi)\cos\delta +$$

$$+\frac{\gamma_m}{R\cos\varphi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(-\alpha_{nm}\sin m\lambda + \beta_{nm}\cos m\lambda)\,mP_{nm}(\sin\varphi)\sin\delta, \qquad (28)$$

$$W = \frac{\gamma_m}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos m\lambda + \beta_{nm}\sin m\lambda)\,P'_{nm}(\sin\varphi)\sin\delta -$$

$$-\frac{\gamma_m}{R\cos\varphi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(-\alpha_{nm}\sin m\lambda + \beta_{nm}\cos m\lambda)\,mP_{nm}(\sin\varphi)\cos\delta. \qquad (29)$$

Здесь δ — текущий азимут; штрихом обозначена производная по φ.

Число членов разложения (гармоник) n должно быть довольно велико, если мы хотим иметь сколько-нибудь удовлетворительную точность. В настоящее время, однако, отсутствие подробного гравиметрического материала для всей земной поверхности [1] делает бессмысленным использование высших гармоник. Отсюда точность подобных разложений

весьма невелика. При оценке влияния на движение спутника аномалий силы тяжести используем материалы [1], имея в виду, однако, что ошибка учета действия аномалий может превышать 100%. Таким образом, в настоящее время возможно лишь приближенно установить качественный характер и порядок отклонений в движении спутника, обусловленных действием аномалий силы тяжести.

Были рассчитаны изменения оскулирующих элементов для одной из возможных орбит (средняя высота 500 *км*) за время пяти оборотов. Ввиду больших вычислительных трудностей расчеты проводились лишь с учетом второй гармоники, т. е. с членами, составляющими большую часть от возмущающих ускорений. Анализ результатов этих расчетов позволяет сделать следующие выводы. Изменения оскулирующих элементов носят в основном колебательный характер, причем с течением времени (в пределах пяти витков) амплитуда колебаний возрастает. Кроме того, для некоторых элементов наблюдается постепенно накапливающаяся составляющая, т. е. с течением времени уровень, около которого происходят колебания, смещается. Это явление можно объяснить наличием длиннопериодических колебаний, связанных с периодом обращения Земли вокруг своей оси.

По абсолютным значениям некоторые из отклонений достигают заметных величин. Так, например, изменения параметра орбиты в конце рассматриваемого периода становятся равными $1 \div 1{,}2$ *км*. Изменения эксцентриситета доходят до $2 \cdot 10^{-4}$, смещение перигея — до нескольких угловых минут, τ — до одной десятой секунды. Изменения Ω и i остаются в пределах 0,5.

Эти оценки носят лишь качественный характер и истинное поле аномалий может вызывать несколько иные отклонения. Несмотря на это, судить о порядке отклонений, по-видимому, представляется возможным.

§ 3. СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА

Сила сопротивления воздуха, в отличие от сил тяготения, не является консервативной. Работа, производимая этой силой, уменьшает полную энергию спутника, если его рассматривать как движущуюся материальную точку. В результате размеры орбиты постепенно сокращаются, спутник входит в плотные слои атмосферы и в зависимости от термостойкости его оболочки может сгореть или упасть на Землю.

Оценим возможную точность учета сил сопротивления воздуха, зависящую от точности знания коэффициента сопротивления спутника и распределения плотности атмосферы по высоте.

Прежде всего мы имеем совершенно недостаточные сведения с распределении плотности по высотам для высот свыше 150 *км*. Правда, за последние годы появились некоторые отрывочные данные о плотности до 200 *км* и выше, полученные на основании ракетных исследований. Однако эти результаты являются единичными и не могут быть распространены на все области, где будут летать искусственные спутники. Кроме того, эти данные заметно расходятся с данными определения плотности другими методами. Как будет видно из дальнейшего, для близких к Земле спутников особую роль играют характеристики сопротивления атмосферы на высотах примерно от 200 до 500 *км*. По поводу возможных значений плотности на этих высотах приведем одно высказывание Л. Шпицера [3]: «... ни изучение ионосферы, ни спектроскопические наблюдения не допускают однозначной оценки температуры и плотности частиц на высоте 300 *км*. Данные, приведенные выше, указывают только на то, что плотность частиц должна быть, по крайней мере, так

же велика, как электронная плотность, равная 10^6 *см*$^{-3}$, и не может намного превышать 10^{10} *см*$^{-3}$... Представляется вероятным, что плотность частиц значительно больше 10^8 *см*$^{-3}$,... мы будем считать, что истинное значение плотности мало отличается от 10^{10} *см*$^{-3}$. Несмотря на то, что в настоящее время это значение кажется наиболее правдоподобным, мы не можем считать полностью исключенным, что плотность на высоте 300 *км* может быть большую часть времени равной 10^6 *см*$^{-3}$». По другим данным [7], полученным из анализа особенностей поведения слоя F_2, концентрация частиц в слое F_2 имеет порядок 10^8 *см*$^{-3}$. Такое же примерно значение концентрации частиц принято в [4] для высоты 300 *км* ($\sim 7 \cdot 10^8$ *см*$^{-3}$).

Мы намеренно привели данные о плотности на высоте 300 *км* из различных источников, чтобы показать, что, выбирая любое из приведенных значений плотности, легко можно ошибиться более чем на порядок.

Несколько точнее известна плотность атмосферы на высотах ниже 150 *км*, где она неоднократно определялась из наблюдений метеоров. Шпицер принимает для высоты 150 *км* концентрацию частиц 10^{12} *см*$^{-3}$, Митра — $2{,}5 \cdot 10^{-11}$ *см*$^{-3}$. Ниже, при анализе вероятной точности учета сопротивления воздуха, мы будем пользоваться двумя атмосферами — моделью, данной Митра [4], и моделью, специально построенной по данным Шпицера, причем на высоте 300 *км* будем во втором случае принимать концентрацию частиц 10^{10} *см*$^{-3}$. Последняя атмосфера нами рассматривается как наиболее плотная, т. е. как наиболее существенно влияющая на орбиту спутника.

Вторым фактором, от которого зависит траектория спутника в атмосфере, является коэффициент сопротивления c_x. В выражение для силы сопротивления c_x входит в виде множителя, равно как и плотность. Поэтому относительная ошибка в c_x будет в той же степени влиять на движение спутника, как и относительная ошибка в плотности. В настоящее время коэффициент сопротивления c_x для простых тел (шар, цилиндр) рассчитывается теоретически сравнительно точно [5]. Несмотря на то, что ошибка такого расчета может быть по абсолютной величине и большой, она во всяком случае во много раз меньше, чем неточность в определении плотности воздуха.

Прежде чем переходить к выводу формул для расчета орбиты с учетом сопротивления, сделаем два замечания. Во-первых, расчеты показывают, что колебания в величине радиуса-вектора орбиты за счет нецентральности поля сил тяготения могут достигать $10 \div 15$ *км*. В то же время колебания высоты над уровнем земного сфероида раза в два меньше, т. е. всего $5 \div 8$ *км*. Таким образом, высота полета и, следовательно, плотность воздуха могут быть вычислены с достаточной точностью, если принять Землю за сферу, а орбиту — за точный эллипс. Поэтому мы будем пренебрегать нецентральностью поля сил тяготения и эллиптичностью Земли при расчете орбиты с учетом сопротивления воздуха, предполагая, что изменения параметров орбиты в этом случае будут близки к истинным.

Второе замечание состоит в том, что при выводе расчетных формул мы будем рассматривать эксцентриситет орбиты как величину малую ($\varepsilon < 0{,}1$). Действительно, при $e = 0{,}1$ и высоте перигея $h_п = 300$ *км*, имеем высоту апогея $h_a = 1770$ *км*. Таким образом, такое ограничение по эксцентриситетам вполне допустимо. Легко видеть, что в результате сделанных допущений рассматривается случай плоской орбиты. Следовательно, возмущения узла и наклонения не будут иметь места. Будут отсутствовать также вековые возмущения перигея ω. Дело сводится лишь к расчету вековых возмущений параметра p и эксцентриситета e орбиты, т. е. к расчету изменения этих величин за целое число витков.

Действительно, для ускорения силы сопротивления воздуха можно записать

$$R_x = \frac{C_x S_m}{2m} \rho v^2 = \frac{1}{2} b \rho V^2,$$

где ρ — плотность воздуха, v — скорость движения по орбите, S_m — площадь миделевого сечения, m — масса спутника,

$$b = \frac{C_x S_m}{m}.$$

Для возмущающих ускорений будем иметь [9]

$$S = -\frac{R_x}{v}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin\vartheta = -\frac{1}{2} b\rho \frac{\mu}{p} e \sin\vartheta (1 + 2e\cos\vartheta + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$T = -\frac{R_x}{v}\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\vartheta) = -\frac{1}{2} b\rho \frac{\mu}{p}(1 + e\cos\vartheta)(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$W = 0.$$

После подстановки выражений S, T в уравнения оскулирующих элементов для p и e получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{d\vartheta} &= -b\rho p^2 \frac{\sqrt{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}}{(1 + e\cos\vartheta)^2}, \\ \frac{de}{d\vartheta} &= -b\rho p \frac{(e + \cos\vartheta)\sqrt{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}}{(1 + e\cos\vartheta)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Время прохождения через перигей τ нас не будет интересовать, поскольку мы ограничиваемся рассмотрением полных оборотов. Прежде чем переходить к интегрированию полученных выражений, необходимо подобрать аналитическую зависимость для плотности воздуха. Одним из наиболее простых и употребительных выражений для ρ является показательная функция вида

$$\rho = Ae^{-kh}, \qquad (31)$$

где h — текущая высота, A и k — постоянные.

Проведенное сравнение значений ρ по (31) с имеющимися данными показывает, что расхождения могут достигать больших величин, если одними и теми же постоянными A и k пытаться описывать плотность во всем диапазоне рабочих высот (от 100 до 500 *км*). Удовлетворительные результаты получаются, если применять формулу (31) по участкам протяженности по 90÷100 *км*.

Для атмосферы Митра такая апроксимация дает максимальную погрешность до 20% в середине некоторых интервалов, что при существующих данных о плотности является небольшой ошибкой. Заменяя высоту h по формуле

$$h = r - R = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} - R,$$

для плотности получим

$$\rho = Ae^{-k\left(\frac{p}{1 + e\cos\vartheta} - R\right)}. \qquad (32)$$

Заменяя далее, ρ и r их выражениями через p, e, ϑ для производных $\frac{dp}{d\vartheta}$, $\frac{de}{d\vartheta}$ окончательно будем иметь

$$\frac{dp}{dv} = -Abp^2 e^{-k\left(\frac{p}{1+e\cos\vartheta} - R\right)} \cdot \frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}, \tag{33}$$

$$\frac{de}{dv} = -Abpe^{-k\left(\frac{p}{1+e\cos\vartheta} - R\right)} \cdot \frac{(e+\cos\vartheta)\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}. \tag{34}$$

Теперь воспользуемся малостью эксцентриситета e. Применяя разложение в степенной ряд, вместо (33) и (34) получим

$$\frac{dp}{d\vartheta} = -Abp^2 e^{-k(p-R)} e^{\xi\cos\vartheta}\left(1 - \xi e\cos^2\vartheta + \frac{\xi^2}{2}e^2\cos^4\vartheta\right)(1 - e\cos\vartheta), \tag{35}$$

$$\frac{de}{d\vartheta} = -Abpe^{-k(p-R)} e^{\xi\cos\vartheta}\left(1 - \xi e\cos^2\vartheta + \frac{\xi^2}{2}e^2\cos^4\vartheta\right) \times$$

$$\times (\cos\vartheta + e\sin^2\vartheta), \tag{36}$$

где $\xi = kpe$.

При разложении показательной функции в ряд удерживались члены порядка e^2, в других случаях — порядка e. Интегрируя (35) и (36) по ϑ в пределах от 0 до $2\pi n$, будем иметь в первом приближении

$$p - p_0 = -2\pi nAbp_0^2 e^{-k(p_0-R)}\left[\left(1 - \xi e_0 + \frac{\xi^2}{2}e_0^2\right) I_0(\xi) + \frac{e_0^2}{2} I_2(\xi)\right], \tag{37}$$

$$e - e_0 = -2\pi nAbp_0 e^{-k(p_0-R)}\left[\left(1 + \frac{e_0}{\xi} - \xi e_0 - e_0^2 + \frac{\xi^2}{2}e_0^2\right) I_1(\xi) + \right.$$

$$\left. + \left(e_0 + 3\frac{e_0^2}{\xi} - \xi e_0^2\right) I_2(\xi) + \frac{3}{2} e_0^2 I_3(\xi)\right]. \tag{38}$$

Здесь $I_0(\xi)$, $I_1(\xi)$, $I_2(\xi)$, $I_3(\xi)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

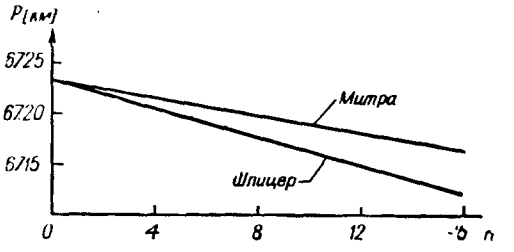

Рис. 1.

Расчет по формулам (37) и (38) производится следующим образом. Задавая некоторое число оборотов n, по начальным данным p_0 и e_0 подсчитываем соответствующие изменения $(p - p_0)$ и $(e - e_0)$ и новые значения параметра p и эксцентриситета e. Принимая эти p и e за начальные, вновь задаем n и находим следующие значения p и e и т. д.

Число n выбирается такое, чтобы уменьшение высоты апогея происходило на $30 \div 40$ *км*.

Ошибка расчета может быть не более 20% по сравнению с численным интегрированием в случае, если коэффициенты k и A выбираются посто-

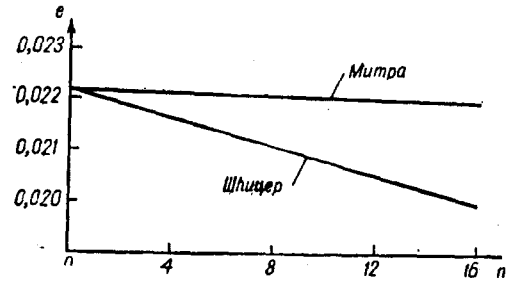

Рис. 2.

янными в интервалах высот по 50 *км*, а переход к новым k и A производится по высоте перигея.

С целью получения оценки точности учета сопротивления воздуха по полученным формулам были подсчитаны изменения p и e для неко-

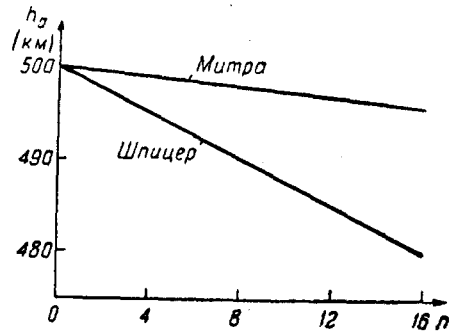

Рис. 3.

торой орбиты в атмосферах Митра и Шпицера. Результаты приведены на рис. 1, 2. Изменения высоты апогея и перигея показаны на рис. 3, 4.

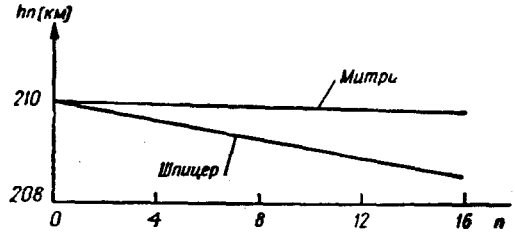

Рис. 4.

Из этих графиков видно, что в зависимости от того, какая из двух атмосфер выбирается, изменения высот апогея и перигея могут различаться в $5 \div 7$ раз. Следовательно, во столько же раз может меняться и время существования спутника.

§ 4. ВОЗМОЖНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВОЗДУХА, ПОСТОЯННЫХ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА И АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ СПУТНИКА

Как показывают приведенные оценки, влияние геофизических факторов на движение спутника может быть учтено с определенной погрешностью. Особенно большое значение эта погрешность имеет место для низко летающих спутников, где сопротивление воздуха заметно, т. е. для орбит с высотой перигея $150 \div 300$ *км*. Определяя элементы этих орбит по результатам измерений в течение длительного времени, мы будем обнаруживать систематическое уменьшение параметра и эксцентриситета, обусловленное сопротивлением воздуха. Используя затем формулы (37) и (38) по известному числу оборотов и полученным из измерений p и e, можно найти постоянные A и k. Эти постоянные будут соответствовать плотности воздуха в некотором диапазоне высот вблизи перигея.

Перейдя к следующему числу n и элементам p, e, найдем A и k для следующего интервала высот. Такой способ определения функции плотности не может быть очень точным, тем более, что коэффициент c_x даже для наиболее простых форм спутника известен с большой погрешностью. Но и эти результаты будут весьма полезны, поскольку значения плотности воздуха в рассматриваемом диапазоне высот практически отсутствуют.

Рассмотрим возможность уточнения поля тяготения Земли по результатам измерения орбиты. Эта задача значительно сложнее, чем определение плотности воздуха. Дело в том, что действие сопротивления воздуха легко отделить от действия других сил, если высота полета спутника будет достаточно низкой.

Что же касается гравитационного поля, то разделить влияния различных постоянных этого поля почти не представляется возможным. Сравнительно легко исключить лишь действие сопротивления воздуха. Для этого необходимо поднять перигей орбиты выше $300 \div 350$ *км*, чтобы движение спутника (имеется в виду, что средняя плотность спутника не слишком мала) почти целиком определялось земным гравитационным полем.

Как было выяснено выше, среди постоянных Земли основное значение для спутника имеет величина сжатия α. Если бы аномалии силы тяжести не могли вызывать вековых смещений узла и перигея, то из наблюдений этих смещений сжатие можно было бы получить почти однозначно. Однако вековые смещения узла и перигея за счет аномалий вполне вероятны, причем по порядку величины они могут быть такими же, что и за счет $\delta\alpha$. Для отделения влияния $\delta\alpha$ от аномалий целесообразно иметь несколько орбит с различными наклонениями. При этом часть векового смещения узла и перигея, зависящая от $\delta\alpha$, будет меняться совершенно определенным образом (см. формулы (4) и (8)). Другая часть, связанная с аномалиями, должна меняться по какому-то другому неизвестному закону. Таким образом можно попытаться выделить влияние $\delta\alpha$, если будет видно, что основная часть смещений происходит именно за счет $\delta\alpha$, а не за счет аномалий, и тем самым уточнить значение α для земного эллипсоида. Принципиально возможна также постановка задачи определения коэффициентов ряда сферических функций для поля аномалий, т. е. α_{nm}, β_{nm} (по крайней мере для первых гармоник) из наблюдений движения спутника.

Действительно, интегрируя от 0 до t каждое из уравнений оскулирующих элементов при постоянных Ω, i, ω, p, e, τ в правых частях и S, T, W по (27), (28), (29) и варьируя получающиеся выражения, при-

дем к следующей системе алгебраических уравнений:

$$l_i = a_{i1}\alpha_{00} + a_{i2}\alpha_{20} + a_{i3}\alpha_{21} + a_{i4}\beta_{21} + \ldots + a_{ik-1}\alpha_{nn} + a_{ik}\beta_{nn} \qquad (39)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Здесь неизвестными являются коэффициенты разложения α_{00} (включенный в число неизвестных с целью определения (см. ниже) постоянных α и γ_e), α_{20}, α_{21}, $\beta_{21}, \ldots, \beta_{nn}$. Всего $k = n^2 + 2n - 2$ неизвестных, где n — порядок наивысшей гармоники [1]. Величины l_1, $l_2, \ldots, l_6$ суть разности между расчетными значениями оскулирующих элементов (соответственно Ω, i, ω, p, e, τ) для момента времени t и их значениями, полученными в результате измерений координат для того же момента времени. Коэффициенты a_{ij} рассчитываются по данным расчетной орбиты. Наиболее простым способом вычисления этих коэффициентов является способ квадратур. Так, например,

$$a_{13} = \frac{\gamma_m}{R\sqrt{p}\sin i}\int_0^t r\sin u\left(\frac{R}{r}\right)^4\left[\cos\lambda\, P'_{21}(\sin\varphi)\sin\delta + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\lambda}{\cos\varphi}P_{21}(\sin\varphi)\cos\delta\right]dt.$$

Для получения требуемого числа уравнений ($\geqslant n^2 + 2n - 2$), выражения (39) составляются для ряда значений моментов времени t. Избыточное число таких уравнений (которые в этом случае рассматриваются как условные) позволяет применить способ наименьших квадратов и определить наивероятнейшие значения коэффициентов α_{nm}, β_{nm}.

К уравнениям вида (39) с соответствующими весами можно добавить еще следующие:

$$\left.\begin{aligned} &a_1\alpha_{00} + a_2\alpha_{20} + a_3\alpha_{21} + \ldots + a_k\beta_{nn} = \Delta g_1,\\ &b_1\alpha_{00} + b_2\alpha_{20} + b_3\alpha_{21} + \ldots + b_k\beta_{nn} = \Delta g_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

В правых частях равенств (40) стоят некоторые осредненные по заранее выбранным зонам аномалии силы тяжести на поверхности геоида. Коэффициенты a_i, $b_i, \ldots$ суть некоторые сферические функции, заданные в тех же зонах [1]. Совместная обработка по способу наименьших квадратов результатов измерения орбиты (уравнения (39) и имеющегося гравиметрического материала (уравнения (40)) может увеличить надежность определения искомых коэффициентов. Для повышения точности целесообразно использовать также другой путь [1], а именно по найденным из решения уравнений (39) и (40) значениям α_{nm}, β_{nm} (или, что то же, $A_{nm} = \frac{\gamma_m}{R}(n-1)\alpha_{nm}$, $B_{nm} = \frac{\gamma_m}{R}(n-1)\beta_{nm}$) вторично определить эти коэффициенты, пользуясь формулами

$$\left.\begin{aligned} A_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi}\int \Delta g P_{n0}(\sin\varphi)\,d\sigma,\\ B_{n0} &= 0,\\ A_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int \Delta g P_{nm}(\sin\varphi)\cos m\lambda\,d\sigma,\\ B_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int \Delta g P_{nm}(\sin\varphi)\sin m\lambda\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

В выражениях (41) интегрирование производится по поверхности единичной сферы σ. За величины Δg принимаются значения аномалий, вычисленные согласно ранее полученным коэффициентам α_{nm} и β_{nm}.

Приравнивая найденные значения $A_{00} = a_{00}$, $A_{20} = a_{20}$, можем определить также сжатие α и ускорение силы тяжести на экваторе γ_e для нового общего земного эллипсоида. Действительно, для распределения ускорений силы тяжести на эллипсоиде имеем выражение [1]

$$\gamma = a_{00} + a_{20} P_{20} + a_{40} P_{40},$$

причем коэффициенты разложения a_{00}, a_{20} и a_{40} являются известными функциями α и γ_e, а именно

$$\alpha = \frac{\frac{5}{2} m - \beta}{1 + \frac{17}{14} m}, \qquad \beta = \left(\frac{3}{2} a_{20} + \frac{5}{8} a_{40} \right) \frac{1}{\gamma_e},$$

$$\gamma_e = a_{00} - \frac{1}{2} a_{20} + \frac{3}{8} a_{40} \text{ *)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ влияния геофизических факторов на движение близкого к Земле спутника и оценка возможной точности их учета показывают, что при настоящем уровне знаний в этой области ошибки прогнозирования орбиты могут оказаться большими. На основании длительных измерений орбиты вполне возможно значительно уточнить данные о плотности атмосферы на высотах от 150 до 300 *км*. Представляется возможным уточнить также величину сжатия земного сфероида, однако надежные данные, по-видимому, удается получить лишь при наличии нескольких спутников, орбиты которых имеют резко различные наклонения.

Наиболее трудной задачей является определение поля аномалий силы тяжести, так как здесь необходимо определять на основании измерений периодические изменения оскулирующих элементов орбиты. Очевидно, чем на большей территории будут произведены измерения орбиты, и чем больший отрезок времени они будут продолжаться, тем больше будет уверенности в результатах.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Жонголович, Труды Института теоретической астрономии, вып. 3, 1952.
2. Н. И. Идельсон, Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизики, изд. 2, 1936.
3. Атмосферы Земли и планет. Сборник статей под редакцией Д. П. Койпера, ИЛ, 1951.
4. С. К. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, 1955.
5. Газовая динамика. Сборник статей под редакцией С. Г. Попова и С. В. Фалькович, ИЛ, 1950.
6. Г. Н. Дубошин, Введение в небесную механику, М.-Л, ОНТИ, 1938.
7. Я. Л. Альперт, ЖЭТФ 18, 995 (1948).
8. Д. Е. Охоцимский, Т. М. Энеев, Г. П. Таратынова — в этом выпуске УФН.
9. Г. П. Таратынова — в этом выпуске УФН.

*) Величины a_{40} и m можно считать точно известными.