

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ
ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЕГО ОРБИТЫ**

Д. Е. Охоцимский, Т. М. Энеев, Г. П. Таратынова

Одним из важных вопросов, связанных с проблемой создания искусственного спутника Земли, является достаточно надежное определение времени его существования на орбите. Вследствие сопротивления атмосферы будет происходить рассеяние энергии спутника и его постепенное снижение.

При движении на больших высотах в разреженных слоях атмосферы сопротивление мало и время движения спутника может оказаться весьма значительным. При движении на сравнительно небольших высотах порядка 100—150 км время существования спутника невелико и при малых поперечных нагрузках спутник может не совершить даже одного полного оборота.

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных проблеме определения времени существования искусственного спутника. При этом достаточно строгое решение дается лишь для круговой орбиты. Для оценки времени движения спутника по эллиптической орбите применяются различные приближенные методы, использующие энергетические соображения и основанные на том, что потери энергии происходят в основном в области перигея, когда спутник подходит к Земле наиболее близко.

Применение этих методов не дает полного решения задачи в общем случае. Кроме того, как показывает анализ, применение приближенных методов определения времени существования в ряде случаев может приводить к существенным ошибкам.

Указанное положение вызвало необходимость разработки методики, дающей возможность достаточно быстро и надежно определять время существования спутника для общего случая его движения. Исследование выявило существование универсальных зависимостей между основными параметрами оскулирующего эллипса, такими как высоты перигея и апогея или параметр и эксцентриситет. Эти зависимости справедливы для любых спутников и зависят лишь от закона распределения плотности воздуха по высоте. Указанное обстоятельство позволило свести полное решение задачи о времени жизни искусственных спутников к построению зависящей от одного параметра серии интегральных кривых уравнения первого порядка. Помещенные в статье график и таблицы дают возможность быстро определить время существования, умножив результат, взятый из таблицы или графика, на некоторое число, просто зависящее от основных параметров спутника. Приведенные результаты позволяют не только вычислить время существования, но и определить закон

изменения во времени параметров орбиты при любых заданных параметрах спутника и для достаточно широкого диапазона начальных параметров орбиты.

Интегрирование уравнений было проведено на быстродействующей электронной счетной машине (БЭСМ) Академии наук СССР. Использованный метод интегрирования позволил максимально сократить объем вычислительной работы при сохранении необходимой точности результатов. Метод является достаточно общим и может быть, по-видимому, с успехом применен во многих случаях, когда дело сводится к интегрированию уравнений, решение которых является функцией, близкой к периодической, с медленно меняющимися параметрами. Так, подобный метод был разработан и успешно использован для исследования возмущенного движения спутника в нецентральной поле сил⁵.

Ниже, в § 1 приведены исходные данные, принятые для расчетов. В § 2 уравнения движения спутника в оскулирующих элементах приводятся к новому независимому переменному, удобному для проводимого исследования. В § 3 дано изложение методики интегрирования дифференциальных уравнений для вековых возмущений параметра и эксцентриситета орбиты за счет действия силы сопротивления воздуха. В § 4 приводятся и обсуждаются полученные результаты. В § 5 приводится обоснование основных упрощающих допущений, принятых при расчете, и дается оценка получающейся за счет этих допущений методической ошибки. Дается также приближенное исследование вековых возмущений орбиты за счет сжатия Земли и вращения атмосферы.

Отметим, что приведенные в работе результаты числовых расчетов по времени существования спутника основаны на использовании определенных предположений о строении верхних слоев атмосферы. Отсутствие надежных сведений о параметрах верхней атмосферы делает численные результаты пригодными лишь для ориентировочных оценок. Следует, однако, указать, что анализ движения искусственных спутников позволит существенно пополнить данные о верхней атмосфере и даст возможность провести по изложенной методике необходимые для дальнейшего уточнения расчеты.

§ 1. ЗАВИСИМОСТЬ ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ ОТ ВЫСОТЫ

Для расчета величины аэродинамического сопротивления необходимо знать плотность атмосферы на больших высотах. В настоящее время не имеется достаточно точных сведений относительно физических параметров верхней атмосферы. Неизвестны с достаточной степенью точности температура и состав атмосферы. В разных работах получены значения плотности, отличающиеся на 1,5 — 2,5 порядка.

В настоящей работе использовались данные о физических параметрах верхней атмосферы, приведенные в¹. Зависимость плотности от высоты $\rho(y)$ аппроксимировалась формулами вида

$$\rho = \rho_1 \Delta, \quad \Delta = \frac{x}{\left(1 + \frac{y - y_0}{x}\right)^k}, \quad (1,1)$$

где ρ_1 — плотность воздуха для некоторой фиксированной высоты y_1 . Для постоянных x , a , y_0 и k были приняты значения, указанные в таблице I.

Таблица I

Диапазон y (км)	λ	α (км)	y_0 (км)	k
100—150	1	55	100	8
150—250	$5,667 \cdot 10^{-3}$	100	150	7
250—900	$4,428 \cdot 10^{-5}$	215	250	6

Отклонения значений плотности, вычисленных по формуле (1,1), от значений, рассчитанных по данным¹, не превышают 10—15% от величины плотности. Такая погрешность вполне допустима, принимая во внимание, что сами данные об атмосфере являются весьма приближенными.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Движение спутника будем изучать, используя оскулирующие элементы орбиты. Уравнения движения в оскулирующих элементах имеют вид²:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{2r\sqrt{p}}{\sqrt{fM}} T, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{fM}} \sin \vartheta \cdot S + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{fM}} \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] T, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\sqrt{p}}{e\sqrt{fM}} \cos \vartheta \cdot S + \frac{\sqrt{p}}{e\sqrt{fM}} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta \cdot T - \\
 &\quad - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{fM}} \operatorname{ctg} i \sin u \cdot W, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{fM}} \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} W, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{fM}} \frac{r}{p} \cos u \cdot W, \\
 \frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e f M} \left[-(\cos \vartheta - e \sin \vartheta \cdot N) S + \frac{p}{r} NT \right],
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 u &= \omega + \vartheta, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \\
 N &= 2 \frac{p^2}{r^3} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3}
 \end{aligned} \tag{2.1a}$$

ϑ связано с t уравнением

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{fM}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}. \tag{2.2}$$

Здесь p — параметр оскулирующего эллипса, e — его эксцентриситет, ω — угловое расстояние перигея от узла, Ω — долгота восходящего узла,

i — наклонение орбиты, τ — время прохождения через перигей оскулирующего эллипса, ϑ — истинная аномалия, u — аргумент широты; S, T, W — проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор, на перпендикуляр к нему в плоскости оскулирующего эллипса и на перпендикуляр к плоскости оскулирующего эллипса; r — радиус-вектор, f — постоянная тяготения, M — масса Земли. Заметим, что значения e , входящие в подынтегральное выражение в правых частях уравнения (2,2) и формулы (2,1а), соответствуют моменту времени t .

В случае, если правые части системы (2,1) не зависят явно от времени, то удобно ввести новое независимое переменное — аргумент широты u . Чтобы перейти к этому переменному, выведем дифференциальное соотношение, связывающее u с оскулирующими элементами орбиты и с временем t . С этой целью воспользуемся основным правилом, применяемым в курсах небесной механики при выводе уравнений для оскулирующих элементов. Правило это заключается в следующем: кинематические элементы абсолютного движения могут быть выражены через оскулирующие элементы орбиты с помощью формул, связывающих эти же кинематические элементы с элементами невозмущенного эллиптического движения. Пользуясь этим правилом, можно вывести следующее соотношение:

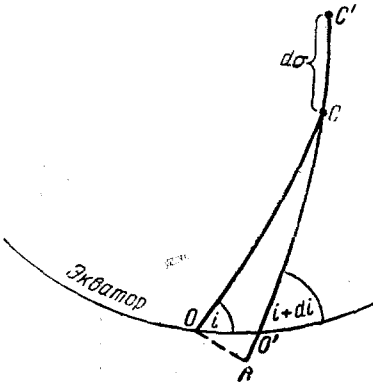


Рис. 1.

$$r^2 d\sigma = \sqrt{fMp} dt. \quad (2,3)$$

где $d\sigma$ — полное угловое перемещение радиуса-вектора за время dt . Заметим, что для невозмущенного движения соотношение (2,3) переходит в интеграл площадей, причем в этом случае, очевидно, $d\sigma = d\vartheta$.

Найдем выражение для $d\sigma$. Из рис. 1 нетрудно видеть, что

$$d\sigma = \widehat{BC'} - \widehat{BC} = \widehat{BC'} - \widehat{OC} = \widehat{O'C'} - \widehat{OC} + \widehat{BO'}. \quad (2,4)$$

где \widehat{OC} и $\widehat{BC'}$ — проекции дуг оскулирующих эллипсов на единичную сферу для моментов времени t и $t + dt$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{OO'} &= d\Omega, & \widehat{BO'} &= \cos i d\Omega, \\ \widehat{OC} &= u, & \widehat{O'C'} &= u + du. \end{aligned} \quad (2,5)$$

Подставляя (2,5) и (2,4), получим:

$$r^2 (du + \cos i d\Omega) = \sqrt{fMp} dt$$

или

$$r^2 \left(\frac{du}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = \sqrt{fM} \cdot V_p. \quad (2,6)$$

Наконец, принимая во внимание четвертое уравнение системы (2,1), получим следующее окончательное дифференциальное соотношение для u :

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{fM} \frac{V_p}{r^2} \left(1 - \frac{r^3}{fMp} \operatorname{ctg} i \sin u \cdot W \right). \quad (2,7)$$

С помощью формулы (2,7) систему (2,1) преобразуем к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{du} &= \frac{2\gamma}{fM} r^3 T, \\ \frac{de}{du} &= \frac{r^2\gamma}{fM} \left[\sin \vartheta \cdot S + \cos \vartheta \left(1 + \frac{r}{p} \right) T + e \frac{r}{p} T \right], \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2\gamma}{fMe} \left[\cos \vartheta \cdot S + \sin \vartheta \left(1 + \frac{r}{p} \right) T - e \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \cdot W \right], \\ \frac{d\Omega}{du} &= \frac{r^3\gamma}{fMp} \frac{\sin u}{\sin i} W, \\ \frac{di}{du} &= - \frac{r^3\gamma}{fMp} \cos u \cdot W. \end{aligned} \right\} (2,8)$$

где

$$\vartheta = u - \omega, \quad \gamma = \frac{1}{1 - \frac{r^3}{fMp} \operatorname{ctg} i \sin u \cdot W}. \quad (2,9)$$

Система (2,8) является замкнутой и уравнения этой системы должны интегрироваться в общем случае совместно. Время t может быть определено, после того как система (2,8) проинтегрирована, с помощью уравнения

$$\frac{dt}{du} = \frac{r^2\gamma}{V fMp}. \quad (2,10)$$

Время прохождения через перигей (τ) может быть также определено после интегрирования системы (2,8) с помощью соответствующего уравнения. Уравнение это здесь не приведено, так как в дальнейшем оно не понадобится.

Вместо аргумента широты u в качестве независимого переменного может быть взят какой-либо другой угловой параметр, например истинная аномалия ϑ . В этом случае система (2,1) после преобразований приведет к виду (2,8), с той лишь разницей, что в левых частях уравнений будут стоять производные не по u , а по ϑ . Кроме того, величина γ при независимом переменном ϑ будет определяться не по формуле (2,9), а по формуле

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{fMe} \cos \vartheta \cdot S - \frac{r^2}{fMe} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \cdot T}. \quad (2,11)$$

Полученные при этом уравнения будут отличаться от уравнений с истинной аномалией в качестве независимого переменного, приведенных в ². Указанные уравнения получены в ² из уравнений (2,1) при помощи соотношения

$$r^2 d\vartheta = \sqrt{fMp} dt, \quad (2,12)$$

справедливого для оскулирующего движения, но ошибочного для возмущенного движения, для которого вместо (2,12) должно быть использовано соотношение (2,3). Вследствие этого приведенные в ² уравнения по истинной аномалии являются ошибочными.

Отметим, что указание на возможность перехода к истинной аномалии как к независимому переменному при помощи соотношения (2,12), содержится также в ³.

Отметим также, что при исследовании возмущений по первому приближению использование соотношения (2,12) допустимо, поскольку для невозмущенного эллиптического движения оно выполняется. Этим замечанием мы воспользуемся в § 5 при определении вековых возмущений.

Следует указать, что уравнения по переменному u являются более удобными для расчетов, чем уравнения по переменному ϑ , поскольку при малых значениях эксцентриситета вследствие имеющих место значительных изменений r производная $\frac{d\vartheta}{dt}$ может быть весьма мала и для некоторых случаев может обращаться в нуль. Такое положение имеет место, например, при движении спутника по круговой орбите в плоскости экватора под действием силы тяготения сплюснутого земного сфероида.

§ 3. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА

Рассмотрим движение спутника в земной атмосфере при условии, что поле тяготения Земли является центральным. Пренебрежем также вращением атмосферы вместе с Землей в ее суточном движении. Для оценки времени существования спутника такие допущения являются вполне приемлемыми. В этом случае, очевидно, $W = 0$ и система (2,8) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{du} &= \frac{2r^2}{fM} T, \\ \frac{de}{du} &= \frac{r^2}{fM} \left[\sin \vartheta \cdot S + \cos \vartheta \left(1 + \frac{r}{p} \right) T + e \frac{r}{p} T \right], \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2}{fMe} \left[\cos \vartheta \cdot S + \sin \vartheta \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \right], \\ \frac{d\Omega}{du} &= 0, \\ \frac{di}{du} &= 0, \\ \vartheta &= u - \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Из (3,1) видим, что

$$\Omega = \Omega_0 = \text{const}, \quad i = i_0 = \text{const},$$

т. е. сопротивление атмосферы не вызывает вековых возмущений долготы узла и наклона орбиты. Оценка эффекта вращения атмосферы будет дана ниже, в § 5.

Для ускорения силы сопротивления примем:

$$R_x = \frac{c_x \cdot F}{m} \frac{\rho v^2}{2},$$

где m — масса спутника, v — скорость спутника относительно воздуха, c_x — коэффициент аэродинамического сопротивления, F — площадь, к которой отнесен аэродинамический коэффициент C_x . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{c_x \cdot F}{m} \frac{\rho v}{2} v_r, \\ T &= -\frac{c_x \cdot F}{m} \frac{\rho v}{2} v_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Здесь v_r и v_n — радиальная и трансверсальная составляющие скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{fM}{p}} e \sin \vartheta, \\ v_n &= \sqrt{\frac{fM}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (3,3)$$

Подставляя (1,1), (3,2) и (3,3) в (3,1) и используя формулы эллиптической теории:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta},$$

$$v = \sqrt{\frac{fM}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{du} &= -c\rho_1 \varphi(p, e, \omega, u), \\ \frac{de}{du} &= -c\rho_1 \psi(p, e, \omega, u), \\ \frac{d\omega}{du} &= -c\rho_1 \chi(p, e, \omega, u), \end{aligned} \right\} \quad (3,4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{p^2 \Delta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}, \\ \psi &= \frac{p \Delta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}, \\ \chi &= \frac{p \Delta \sin \vartheta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{2e(1 + e \cos \vartheta)}. \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

c — постоянная, $c = \frac{c_\tau F}{m}$ и $\vartheta = u - \omega$.

Заметим, что непосредственное интегрирование уравнений (3,4) нецелесообразно ввиду того, что вследствие большого интервала интегрирования и ограниченного шага по u количество шагов будет весьма велико, что приведет к большому времени, потребному для интегрирования системы, а также может привести к существенному накоплению погрешности искомых функций. Чтобы избежать этого, поступим следующим образом.

Проинтегрируем уравнения (3,5) по u от 0 до 2π . Получим:

$$\Delta p = -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \varphi(p, e, \omega, u) du, \quad (3,6)$$

$$\Delta e = -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \psi(p, e, \omega, u) du, \quad (3,7)$$

$$\Delta \omega = -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \chi(p, e, \omega, u) du, \quad (3,8)$$

где Δp , Δe , $\Delta \omega$ — изменения параметра, эксцентриситета и расстояния перигея от узла за один оборот. Заметим, что при вычислении указанных

интегралов в силу малого изменения параметра p , эксцентриситета e и расстояния перигея от узла ω в продолжение одного оборота эти элементы можно принять постоянными. В этом случае легко показать, что интеграл, стоящий в правой части (3,8), обращается в нуль:

$$\Delta\omega = 0. \quad (3,9)$$

Отметим, что при очень малых эксцентриситетах ($e < 0,0001$) принятое допущение может оказаться для ω весьма грубым, однако в этом случае для определения времени существования спутника будет существенно только изменение параметра p , которое, как это можно показать с помощью первого уравнения системы (3,1), практически не будет зависеть от ω .

Поскольку за один оборот элементы p и e изменяются весьма мало, можно с большой точностью принять, что указанные изменения этих величин за один оборот равны производным от этих элементов по числу оборотов спутника N ; $N = \frac{u}{2\pi}$. Принимая во внимание (3,9) и полагая

$$\omega = \omega_0 = \text{const},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dN} &= -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \varphi(p, e, u) du, \\ \frac{de}{dN} &= -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \psi(p, e, u) du. \end{aligned} \right\} \quad (3,10)$$

Полагая $v = Nc$, из уравнений (3,10) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dp} &= \frac{\int_0^{2\pi} \psi(p, e, u) du}{\int_0^{2\pi} \varphi(p, e, u) du}, \\ \frac{dv}{dp} &= \frac{1}{\rho_1 \int_0^{2\pi} \varphi(p, e, u) du}. \end{aligned} \right\} \quad (3,11)$$

Таким образом, задача об определении времени существования спутника свелась к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений (3,11), правые части которых выражены через определенные интегралы от величин φ и ψ , которые согласно формулам (3,5) являются известными функциями p , e и u . Заметим также, что правые части уравнений (3,11) не зависят от аэродинамического коэффициента c_x , а также от конструктивных параметров спутника: веса G и площади миделя F . Поэтому для заданной атмосферы уравнения (3,11) достаточно проинтегрировать один раз, а затем простым переходом от v к N ($N = \frac{v}{c}$, где $c = \frac{c_x F}{G} g$) получить количество оборотов спутника для определенных значений величин c_x , G и F . Отсюда, считая, что один оборот вокруг Земли совершается спутником примерно за 90—100 минут, можно получить достаточно точную оценку времени существования его.

При интегрировании системы (3,11) для удобства решения и экономии машинного времени интегралы, функции \cos и корень квадратный в правых частях уравнений были введены с помощью дифференциальных уравнений. Окончательно основная (3,11) и вспомогательная (3,13) системы уравнений, запрограммированные для решения на машине, имели вид

$$\frac{de}{dp} = \frac{\zeta_b}{\eta_k}, \quad \frac{d\gamma}{dp} = \frac{1}{\rho_1 \eta_k}, \quad (3,12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{du} &= -\frac{\xi p^2 \Delta}{(1 + e\lambda_2)^2}, & \frac{d\zeta}{du} &= -\frac{\xi p \Delta (e + \lambda_2)}{(1 + e\lambda_2)^2}, \\ \frac{d\xi}{du} &= -\frac{e\lambda_1}{\xi}, & \frac{d\lambda_1}{du} &= \lambda_2, & \frac{d\lambda_2}{du} &= -\lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (3,13)$$

В уравнениях (3,12) и (3,13) приняты следующие обозначения:

$$\lambda_2 = \cos \vartheta, \quad \lambda_1 = \sin \vartheta, \quad \xi = \sqrt{1 + e^2 + 2e\lambda_2},$$

$$\eta = -\int_0^u \frac{\xi p^2 \Delta}{(1 + e\lambda_2)^2} du,$$

$$\zeta = -\int_0^u \frac{\xi p \Delta (e + \lambda_2)}{(1 + e\lambda_2)^2} du, \quad \zeta_k = \zeta_u = 2\pi, \quad \eta_k = \eta_u = 2\pi,$$

Δ — определяется формулой (1,1), В качестве ρ_1 бралась плотность атмосферы на высоте 100 км. Кроме величин p , e , ν , в каждой расчетной точке основной системы (3,12) вычислялась дополнительно скорость в перигее v_π , высота апогея h_a и высота перигея h_π по формулам

$$v_\pi = \sqrt{fM} \frac{1+e}{\sqrt{p}}, \quad h_a = \frac{p}{1-e} - R, \quad h_\pi = \frac{p}{1+e} - R,$$

где R — радиус Земли.

Интегрирование проводилось следующим образом. Для заданных значений p и e вспомогательная система (3,13) интегрировалась по u в пределах от 0 до 2π методом Рунге — Кутты с постоянным шагом. Поскольку для целей последующего интерполирования в результате расчетов требовалось получить достаточно густую сетку значений величин p и e и поскольку требуемая точность расчета была сравнительно невелика, для интегрирования основной системы (3,12) оказалось целесообразным использовать метод Эйлера с постоянным шагом. Для интегрирования вспомогательной системы (3,13) был выбран шаг $\Delta\vartheta = 6^\circ$. При интегрировании основной системы (3,12) был выбран шаг $\Delta p = 5$ км для значений высоты апогея $h_a \leq 700$ км и $\Delta p = 10$ км для значений $h_a > 700$ км. Для принятых значений шагов методическая ошибка в определении времени движения спутника за счет приближенного интегрирования не превышала 2—5%.

В качестве исходных данных для системы (3,12) оказалось удобнее задавать начальные величины высоты апогея h_a и высоты перигея h_π , с которыми начальные значения эксцентриситета и параметра связаны соотношениями:

$$e_0 = \frac{h_{a_0} - h_{\pi_0}}{h_{a_0} + h_{\pi_0} + 2R}, \quad p_0 = (h_{a_0} + R)(1 - e_0).$$

Поскольку каждую точку на интегральной кривой можно рассматривать как начальную для какого-то другого движения, при выборе начальных

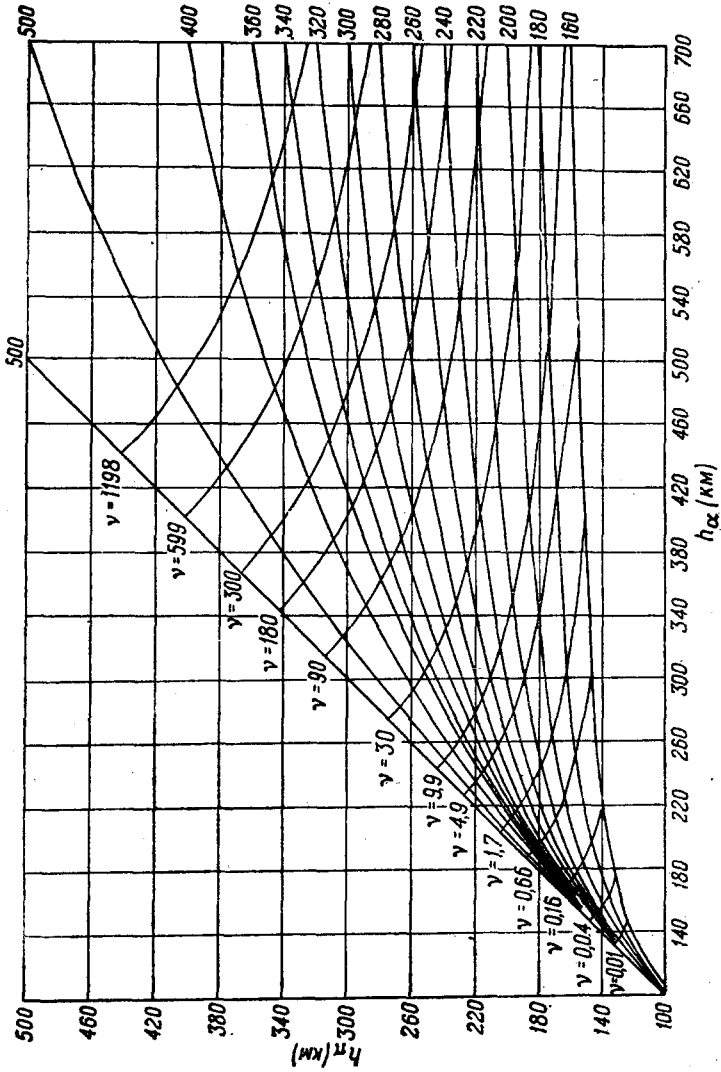


Рис. 2.

величин параметров h_a и h_π не было необходимости варьировать оба параметра. Достаточно было получить, например, серию интегральных кривых по h_π для максимального начального значения h_a . Расчеты проводились для начальной высоты апогея $h_{a_0} = 1600$ км и начальных высот перигея из диапазона

$$160 \text{ км} \leq h_{\pi_0} \leq 500 \text{ км}.$$

Ввиду того, что для высот, больших 900 км, не имеется данных относительно плотности атмосферы, принималось, что закон изменения плотности на таких высотах такой же, что и для высот

$$250 \text{ км} \leq y \leq 900 \text{ км}.$$

Интегрирование системы уравнений (3,12) проводилось до момента достижения спутником высоты 100 км. Рассмотрение движения спутника после этого не имело смысла, так как вследствие сильного торможения об атмосферу он мог бы существовать еще лишь весьма незначительное время.

§ 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты расчетов приведены в таблице II и на рис. 2. В таблице II приведены значения величины ν [в $\text{м}^3/\text{кг сек}^2$] в зависимости от начальных значений высоты апогея h_a и высоты перигея h_π . В этой же таблице приведены значения скорости в перигее v_π [в м/сек] в начале движения спутника. С помощью результатов, приведенных в таблице II, и используя соотношение

$$N = \nu \frac{G}{F} \frac{1}{gc_x}, \tag{4,1}$$

где $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, можно определить количество оборотов спутника и, следовательно, время его существования для любых значений аэродинамического коэффициента c_x и поперечной нагрузки $\frac{G}{F}$ [в кг/м^2].

На рис. 2 изображены в плоскости (h_a , h_π) два семейства кривых. Первое семейство соответствует зависимостям

$$h_\pi = f(h_a), \tag{4,2}$$

имеющим место при движении спутника вокруг Земли. Каждая точка указанных кривых соответствует своему значению ν . Линии второго семейства отвечают соотношению

$$\nu = \text{const} \tag{4,3}$$

и соединяют на кривых первого семейства точки, соответствующие одним и тем же значениям ν . Совместное рассмотрение обоих семейств кривых дает возможность не только оценить полное время существования спутника при некоторых начальных значениях высот апогея и перигея, но и оценить время, в течение которого высоты апогея и перигея меняются в некоторых определенных пределах.

На основании приведенных результатов расчетов можно сделать ряд выводов о характере изменения параметров орбиты во время движения спутника. Видно, что высоты апогея и перигея монотонно убывают, причем для всех эллиптических орбит скорость убывания высоты апогея больше скорости убывания высоты перигея. Для сильно вытянутых орбит это различие может быть весьма существенным. Так, для орбиты с высотой перигея 300 км и высотой апогея 700 км понижение апогея на 100 км отвечает понижению перигея примерно на 6 км. Для больших

Таблица II (продолжение)

h_{α} (км) \ h_{π} (км)	260	280	300	320	340	360	400	500	700	800
160	0,889 7843	1,17 7849	1,38 7854	1,67 7860	1,91 7866	2,19 7871	2,89 7884	5,42 7911	8,34 7966	10,9 7993
170	1,48 7833	1,89 7839	2,29 7845	2,66 7851	3,23 7856	3,75 7860	4,81 7876	7,50 7902	14,3 7957	20,4 7984
180	2,22 7824	2,91 7830	3,61 7836	4,28 7842	4,84 7847	5,75 7854	7,50 7865	12,7 7893	23,9 7948	31,1 7975
190	3,29 7816	4,26 7821	5,00 7827	6,20 7832	7,15 7838	8,50 7844	11,4 7856	20,0 7884	37,4 7939	50,9 7966
200	4,51 7807	5,77 7813	7,28 7818	8,75 7824	10,4 7830	12,5 7835	16,8 7847	28,3 7875	56,2 7930	73,4 7957
210	6,04 7798	7,75 7803	9,87 7810	12,3 7815	14,8 7821	17,9 7827	24,2 7838	42,0 7867	81,9 7921	110 7948
220	7,83 7789	10,3 7794	13,5 7800	16,7 7806	20,8 7812	24,5 7818	32,9 7829	57,0 7857	116 7943	152 7939
230	10,0 7780	13,4 7785	17,9 7792	22,5 7797	26,9 7803	31,6 7810	44,4 7820	77,2 7849	159 7904	211 7930
240	12,6 7772	17,1 7777	22,7 7783	28,3 7788	34,6 7795	42,1 7800	56,4 7812	101 7840	214 7895	281 7922
250	15,3 7763	21,4 7768	27,6 7774	35,6 7780	43,9 7786	52,6 7791	71,7 7803	131 7831	279 7886	367 7913
260	17,9 7753	25,7 7759	33,6 7765	43,6 7771	53,1 7777	63,9 7782	88,4 7794	164 7822	354 7877	467 7904
280		34,3 7741	47,9 7747	59,6 7753	74,7 7759	90,0 7765	127 7777	246 7805	541 7860	718 7886
300			62,2 7729	80,6 7735	101 7741	124 7748	175 7760	350 7787	789 7842	1050 7869
320				102 7718	132 7724	166 7730	238 7742	481 7769	1110 7824	1490 7851
340					162 7707	207 7713	302 7724	621 7752	1520 7807	2060 7834
360						248 7695	366 7707	832 7735	2030 7790	2760 7817
400							494 7673	1250 7702	3390 7756	4760 7782
500								3070 7617	9350 7671	14200 7698

Таблица II (окончание)

h_a (км) \ h_x (км)	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
160	13,8 8019	17,2 8045	21,0 8071	25,3 8096	30,1 8120	35,4 8144	41,2 8168	47,4 8191
170	24,8 8010	29,3 8036	33,8 8062	38,2 8087	42,5 8111	46,7 8135	50,7 8159	54,5 8182
180	38,7 8001	46,9 8027	55,4 8053	64,2 8078	73,2 8102	82,3 8126	91,6 8150	101 8173
190	62,1 7992	73,2 8018	84,3 8044	95,1 8069	105 8093	118 8117	133 8141	147 8164
200	91,9 7983	111 8009	132 8035	152 8060	173 8084	195 8108	216 8132	237 8155
210	134 7975	158 8000	182 8026	210 8051	241 8075	274 8099	308 8123	342 8146
220	191 7966	231 7991	273 8017	316 8042	358 8066	401 8090	443 8114	485 8137
230	259 7957	306 7982	364 8008	426 8033	490 8057	556 8081	623 8105	690 8128
240	358 7948	428 7974	504 7999	580 8024	657 8048	733 8072	808 8096	894 8119
250	452 7939	549 7965	656 7990	765 8015	877 8039	990 8064	1100 8087	1200 8110
260	587 7930	712 7956	840 7981	968 8006	1100 8031	1250 8055	1400 8078	1560 8102
280	907 7912	1100 7938	1300 7964	1510 7988	1740 8013	1980 8037	2220 8061	2470 8084
300	1340 7895	1630 7921	1930 7946	2270 7971	2620 7995	2980 8019	3350 8043	3710 8066
320	1900 7877	2320 7903	2400 7936	3290 7953	3420 7983	4330 8002	4850 8025	5370 8049
340	2620 7860	3240 7886	3930 7911	4630 7936	5350 7960	6080 7984	6800 8008	7520 8031
360	3540 7843	4420 7868	5370 7894	6340 7919	7320 7943	8300 7967	9380 7991	10500 8014
400	6270 7808	7850 7834	9440 7859	11100 7884	13000 7909	15000 7932	17000 7956	19000 7979
500	20200 7724	26900 7750	34400 7775	42200 7800	50300 7824	58500 7848	66600 7871	74600 7895

стремиться к круговой. На рис. 2 это проявляется в том, что кривые первого семейства стремятся, как к асимптоте, к прямой $h_\alpha = h_\pi$, отвечающей круговой орбите. Рассмотрение рис. 2 показывает, что по мере уменьшения эксцентриситета разница скорости убывания апогея и перигея уменьшается.

Результаты расчетов позволяют оценить изменение времени движения спутника при изменении начальных параметров h_{α_0} и h_{π_0} , а также указать значения начальных параметров, позволяющих обеспечить заданное время движения наиболее простым путем.

Характер хода кривых второго семейства показывает, что, как и следовало ожидать, время существования спутника сильнее возрастает с увеличением начальной высоты перигея и слабее с увеличением начальной высоты апогея. Так, например, для орбиты с перигеем 360 км и апогеем 1500 км изменение высоты перигея на 20 км вызывает изменение времени жизни примерно на 40%, а такое же изменение апогея — примерно на 2%, т. е. в 20 раз меньше.

Ввиду того, что осуществление орбит спутников с большой начальной высотой перигея может встретить ряд трудностей, существенно отметить, что значительного увеличения продолжительности существования спутника можно достигнуть и при неизменной высоте перигея путем увеличения начальной высоты апогея, причем для этого требуется сравнительно небольшое увеличение скорости в перигее. Так, например, для орбиты с параметрами $h_\pi = 360$ км и $h_\alpha = 700$ км, увеличение высоты апогея до 1000 км приводит к увеличению времени существования в 2,2 раза, при этом требуется увеличение скорости в перигее всего на 78 м/сек. Приведенный результат указывает на целесообразность использования вытянутых орбит, что может позволить добиться значительного увеличения продолжительности существования искусственного спутника Земли сравнительно простым путем.

Как уже указывалось, приведенные значения ν получены при определенной схеме распределения плотности воздуха по высоте. При отклонении фактических значений от принятых продолжительность существования спутника окажется иной. Уточнение данных о плотности верхних слоев атмосферы даст возможность провести по той же методике уточненный расчет значений ν для выдачи более точных прогнозов о времени существования спутника.

Так как скорость изменения параметров орбиты пропорциональна плотности атмосферы, которая быстро убывает с высотой, то изменение параметров орбиты по времени будет вначале значительно более медленным, чем впоследствии, при снижении в более плотные слои. Поэтому основное время спутник будет существовать в высоких слоях атмосферы.

Быстрое убывание плотности с высотой и медленное изменение высоты перигея указывают на то, что основное значение для времени существования спутника будет иметь величина плотности воздуха в области первоначального перигея. Этот вывод дает возможность оценить величину изменения расчетного времени существования при изменении данных о плотности атмосферы. Продолжительность существования спутника будет примерно обратно пропорциональна плотности воздуха в области первоначального перигея.

Это обстоятельство указывает на возможность оценки фактической плотности воздуха в области начального перигея по начальным значениям апогея и перигея и по фактическому времени существования спутника на орбите. Обработка результатов по ряду пусков с различными начальными высотами перигея даст возможность оценки фактического распределения воздуха по высотам.

Приведем в заключение несколько примеров. Рассмотрим спутник шарообразной формы с диаметром $d=0,5$ м и весом $G=10$ кг. Значение коэффициента сопротивления примем равным $c_x=2$. В этом случае значение множителя, на который нужно умножить величину ν для получения времени существования спутника в оборотах, будет [в кг сек м⁻³] равно

$$\frac{4G}{\pi d^3} \frac{1}{gc_x} \cong 2,6.$$

Оценку времени существования в сутках получим делением полученного значения числа оборотов на 16, что соответствует количеству оборотов в сутки для полторачасовой орбиты ($n \cong \frac{N}{16}$).

Возьмем высоту перигея и апогея равными $h_p = 360$ км и $h_a = 800$ км. Тогда из таблицы II находим $\nu = 2760$; число оборотов N будет равно $N = 2760 \times 2,6 \cong 7200$ оборотов, а число суток $n \cong 450$ суток, что соответствует примерно 1 году и 3 месяцам.

Для высот перигея и апогея, равных $h_p = 500$ км и $h_a = 1500$ км, имеем аналогично $\nu = 66\,600$, $N = 174\,000$ оборотов и $n \cong 11\,000$ суток, что соответствует времени существования порядка 30 лет.

Таким образом, при выборе достаточно больших начальных высот перигея и апогея время существования искусственного спутника Земли может оказаться весьма значительным.

Взяв высоты перигея и апогея равными $h_p = 200$ км и $h_a = 400$ км, получим $\nu = 16,8$, $N \cong 44$ и $n = 2,7$ суток, т. е. при сравнительно малых значениях высот перигея и апогея продолжительность существования спутника на орбите оказывается небольшой.

§ 5. О ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА

Проведенное выше исследование вопроса о времени жизни искусственного спутника было основано на изучении вековых возмущений элементов орбиты за счет сопротивления атмосферы. В настоящем параграфе будет дана оценка вековых возмущений элементов орбиты за счет влияния других возмущающих факторов. Периодические возмущения элементов орбиты не рассматриваются. Ясно, что периодические возмущения не могут оказать сколько-нибудь существенного влияния на продолжительность существования искусственного спутника.

Будем исходить из уравнений движения в параметрах оскулирующего эллипса (2,8). При учете влияния отклонения поля тяготения от центрального будем исходить из выражения для потенциала⁴

$$V = \frac{fM}{r} - \frac{\varepsilon}{3r^3} (3 \sin^2 \psi - 1), \quad (5,1)$$

где

$$\varepsilon = fMa^2 \left(\alpha - \frac{m}{2} \right), \quad m = \frac{\Omega^2 a}{g_a}, \quad (5,2)$$

ψ — широта, a — экваториальный радиус Земли, α — сжатие Земли, Ω — угловая скорость суточного вращения Земли, g_a — ускорение силы земного тяготения на экваторе. Формула (5,1) приводит к следующим ражениям для проекций возмущающего ускорения:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\varepsilon}{r^4} [3 \sin^2 i \sin^2 u - 1], \\ T &= -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u, \quad W = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u. \end{aligned} \right\} \quad (5,3)$$

При оценке дополнительных ускорений, обусловленных влиянием ветра за счет вращения атмосферы вместе с Землей, будем исходить из

приближенных формул, полученных из более точных отбрасыванием членов, содержащих параметр $\frac{\Omega r}{v}$ в степени выше первой⁵:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{c_x F}{G} \frac{g}{2} \frac{v_n}{v} v_r \rho \Omega r \cos i, & T &= \frac{c_x F}{G} \frac{g}{2} \frac{v^2 + v_n^2}{v} \rho \Omega r \cos i, \\ W &= - \frac{c_x F}{G} \frac{g}{2} v_p r \Omega \sin i \cos u. \end{aligned} \right\} (5,4)$$

Для оценки вековых возмущений будем интегрировать правые части уравнений (2,8) на один оборот по u от $u=0$ до $u=2\pi$, считая параметры эллипса постоянными и пренебрегая периодическими возмущениями параметров. Заметим, что при получении указанных оценок по первому приближению можно принять $\gamma=1$.

Используя такой метод, получим, что сжатие Земли и связанное с ним отклонение потенциала вызывает вековые возмущения долготы восходящего узла Ω и углового расстояния перигея от узла ω . Другие параметры орбиты, в том числе параметр и эксцентриситет, от влияния сжатия вековых возмущений не испытывают. Это означает, что пренебрежение сжатием при расчете времени существования спутника является вполне законным. Уход узла показывает, что под влиянием сжатия плоскость орбиты вращается вокруг оси вращения Земли, сохраняя с этой осью постоянный угол.

Для расчета величины ухода восходящего узла и величины ухода расстояния перигея от восходящего узла за один оборот получим формулы:

$$\frac{d\Omega}{dN} = - \frac{2\pi\varepsilon}{p^2 f M} \cos i, \quad (5,5)$$

$$\frac{d\omega}{dN} = \frac{\pi\varepsilon}{p^2 f M} (5 \cos^2 i - 1). \quad (5,6)$$

Рассмотрим для примера орбиту со средней высотой порядка 500 км. Получим для ухода узла и перигея

$$\frac{d\Omega}{dN} \cong - 0^\circ,54 \cos i, \quad \frac{d\omega}{dN} \cong 0^\circ,27 (5 \cos^2 i - 1).$$

При наклонении 45° получим за оборот $\Delta\Omega_{об} \cong - 0^\circ,38$, $\Delta\omega_{об} \cong 0^\circ,4$ и за сутки $\Delta\Omega_{сут} \cong - 6^\circ,1$, $\Delta\omega_{сут} \cong 6^\circ,5$.

Формула (5,5) показывает, что быстрота ухода восходящего узла существенно зависит от широты и будет наибольшей для орбит, близких к экваториальным, и равной нулю для орбиты, проходящей через полюсы.

Рассмотрим теперь влияние на вековые возмущения параметров орбиты спутника вращения атмосферы вместе с Землей в ее суточном движении. Используя формулы (5,4), получим, подставляя ρ по формуле (1,1) и интегрируя по u от ω до $\omega+2\pi$, следующие оценочные формулы:

$$\left| \frac{dp}{dN} \right| < \frac{2cp^2 \sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{fM}} \rho_1 \Omega I \cos i, \quad (5,7)$$

$$\left| \frac{dr}{dN} \right| < \frac{cp^2 \sqrt{\bar{p}}}{2 \sqrt{fM}} \rho_1 \Omega I \cos i, \quad (5,8)$$

$$\left| \frac{d\Omega}{dN} \right| < \frac{cp^2 \sqrt{\bar{p}}}{2 \sqrt{fM}} \rho_1 \Omega I \sin 2\omega, \quad (5,9)$$

$$\left| \frac{di}{dN} \right| < \frac{cp^2 \sqrt{\bar{p}}}{2 \sqrt{fM}} \rho_1 \Omega I \sin i, \quad (5,10)$$

$$\left| \frac{d\omega}{dN} \right| < \frac{cp^2 \sqrt{\bar{p}}}{2 \sqrt{fM}} \rho_1 \Omega I \cos i \sin 2\omega, \quad (5,11)$$

где

$$c = \frac{C_x F}{G} g. \quad (5,12)$$

Как показывает расчет, возмущения параметра и эксцентриситета за счет вращения атмосферы не превышают 10—12% соответствующих возмущений для неподвижной атмосферы. Это и понятно, так как изменение скоростного напора при переходе от абсолютного движения к относительному не должно превосходить этой величины. Наибольшее влияние будет для экваториальной орбиты, причем при движении спутника на восток сила сопротивления будет убывать, а при движении на запад возрастать по сравнению с сопротивлением при неподвижной Земле. Для орбит, проходящих вблизи полюсов, влияние вращения Земли на параметр и эксцентриситет несущественно.

Полученный результат означает, что при движении спутника на восток время существования спутника при той же величине начальных значений апогея и перигея будет больше, чем для спутника, запущенного в направлении на запад. Отличие во времени существования от случая пренебрежения вращением атмосферы наибольшее для орбит, близких к экваториальным, не будет превосходить 10—12%. Для других орбит отличие будет меньше. Для полярной орбиты отличие будет равно нулю. В настоящее время, при весьма малой точности знания плотности верхних слоев атмосферы, указанные выше величины погрешностей в определении времени жизни следует признать пренебрежимо малыми.

Величины вековых возмущений долготы узла, наклонения и расстояния перигея от узла за счет вращения атмосферы оказываются весьма малыми. Для оценки этих возмущений удобно произвести оценку величины полного ухода указанных параметров за все время существования спутника. Такая оценка оказывается возможной в силу того, что как указанные возмущения, так и вековые возмущения орбиты, непосредственно влияющие на время жизни, пропорциональны одним и тем же величинам — плотности атмосферы, обратной величине поперечной нагрузки и коэффициенту аэродинамического сопротивления. В силу сказанного, полученная оценка будет верна для любых спутников с различными конструктивными параметрами и различными начальными значениями параметров орбиты.

На основании расчетов получим следующие оценки:

$$|\Delta\Omega| < 0,2^\circ, \quad |\Delta i| < 0,1^\circ, \quad |\Delta\omega| < 0,2^\circ. \quad (5,13)$$

Приведенные результаты показывают, что отклонения получаются весьма малыми. Влияние вращения атмосферы на вековые уходы долготы узла, наклонения и углового расстояния от узла оказывается мало существенным.

Отметим, что при выполнении вычислений были использованы значения интеграла I , полученные из анализа результатов расчетов на машине.

Приведенные выше результаты показывают, что использованная в настоящей работе методика расчета времени жизни является достаточно обоснованной, что подтвердилось также расчетами, проведенными при использовании точных уравнений движения в оскулирующих элементах⁵. Это означает, что точность изложенной методики является вполне достаточной для получения надежных прогнозов о времени существования искусственных спутников Земли.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. К. Митра, Верхняя атмосфера, М., ИЛ, 1955.
2. Г. Н. Дубошин, Введение в небесную механику, М.—Л., ОНТИ, 1938.
3. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, М.—Л., ОНТИ, 1937.
4. Н. И. Идельсон, Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике, М., ОНТИ, 1936.
5. Г. П. Таратынова, Статья в настоящем выпуске УФН.