

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ
С ЗАПУСКОМ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА
ЗЕМЛИ****Д. Е. Охочимский, Т. М. Энеев**

В настоящей статье рассматривается вопрос о выведении искусственного спутника Земли на орбиту. Предполагается, что выведение осуществляется при помощи ракетного ускорителя, состоящего из одной или нескольких ступеней. Исследуется, каков должен быть закон изменения во времени направления тяги реактивных двигателей, чтобы обеспечить выведение спутника на заданную орбиту с минимальным расходом топлива. Ищется также наиболее выгодный режим расходования топлива.

Решение указанных задач проводится при ряде упрощающих предположений и позволяет составить определенное представление о характерных особенностях оптимальных условий выведения на орбиту и указать пути, идя по которым, можно добиться создания ускорителей с минимальным начальным весом.

В § 1 рассматривается задача об одновременном подборе как программы для направления тяги, так и режима расходования топлива. В § 2 исследуется задача о подборе оптимальной программы для многоступенчатого ускорителя с различным числом ступеней в предположении, что режим расходования топлива является заданным. В § 3 проведено обобщение задачи о выведении спутника на орбиту на случай движения в центральном поле тяготения с учетом вращения Земли.

**§ 1. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА РАСХОДОВАНИЯ ТОПЛИВА
И ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ ТЯГИ**

Решение указанной задачи будем проводить в предположении, что аэродинамические силы отсутствуют и что поле земного тяготения является плоско-параллельным. Основанием для первой гипотезы служит тот факт, что при выведении спутника на орбиту значительная часть траектории выведения будет лежать в высоких слоях атмосферы, где аэродинамические силы невелики. Замена центрального поля Земли плоско-параллельным возможна, если предположить, что протяженность траектории выведения невелика по сравнению с радиусом Земли.

Оба указанных предположения выполняются в действительности лишь приближенно. Однако решение задачи в указанной приближенной постановке представляет несомненный интерес, так как позволяет весьма просто получить полное решение задачи, проанализировать полученный результат и понять основные закономерности явления.

Уравнения движения спутника с ускорителями в проекции на прямоугольные оси координат могут быть записаны в виде (рис. 1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= p \cos \varphi, \\ \frac{dw}{dt} &= p \sin \varphi - g, \\ \frac{dy}{dt} &= w, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \end{aligned} \right\} \quad (1,1)$$

где u и w — горизонтальная и вертикальная проекции скорости, p — величина ускорения реактивной силы, φ — угол наклона силы тяги к горизонту. Так как тягу можно считать направленной вдоль продольной оси ускорителя, то под углом φ можно понимать угол наклона оси ускорителя к горизонту (угол тангажа). В уравнениях (1,1) x и y суть горизонтальная и вертикальная координаты.

Последнее уравнение системы (1,1) служит только для определения координаты x . Если не накладывать никаких ограничений на дальность полета, то при решении вариационной задачи это уравнение может быть отброшено, поскольку координата x в другие уравнения не входит.

Рассмотрим скорость V , которую приобрел бы спутник в идеальном случае, когда на него не действовали бы никакие другие силы, кроме реактивной силы. Имеем:

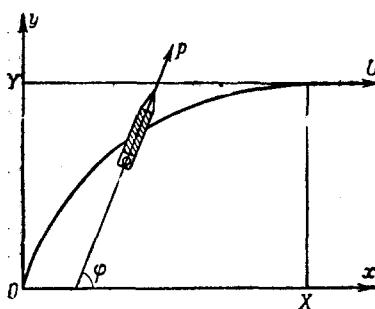


Рис. 1.

отсюда

$$V = \int_0^t p \, dt;$$

$$p = \frac{dV}{dt}.$$

Подставляя в систему (1,1), запишем первые три уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{dV}{dt} \cos \varphi, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{dV}{dt} \sin \varphi - g, \\ \frac{dy}{dt} &= w. \end{aligned} \right\} \quad (1,2)$$

Величина V представляет собой располагаемую скорость, которая может быть сообщена спутнику в процессе разгона и выведения на орбиту.

В правые части уравнений движения (1,2) входят две неопределенные функции времени $V(t)$ $\varphi(t)$. Поставим задачи выбрать эти функции таким образом, чтобы в конце участка выведения на заданной высоте получить наибольшую горизонтальную скорость. В силу взаимности полученного решения будет обеспечивать также достижение при заданной скорости наибольшей высоты, а также достижение заданных значений высоты и скорости при минимальном расходе топлива.

Сформулируем граничные условия. Предположим, что в начале движения при $t = 0$ имеем некоторую высоту y_0 и некоторые значения гори-

вонтальной и вертикальной проекций скорости u_0 и w_0 . Скорость V в начале движения естественно принять равной нулю. В конце движения в момент $t=T$ высота должна быть равна $y=Y$ и скорость должна быть направлена горизонтально, т. е. $w=0$. Значение V в конце движения положим равным некоторому фиксированному значению V_k . Тем самым предполагается, что имеется некоторый запас идеальной скорости, который нужно использовать наиболее рациональным образом. Если считать, что величина скорости истечения или удельной тяги не зависит от секундного расхода топлива, то величина полной идеальной скорости V_k будет определяться отношением начальных и конечных весов ускорителей и не будет зависеть от режима расходования топлива. Это означает, что задание определенного значения V_k в конце движения отвечает заданию определенного отношения начальных и конечных весов, а при заданном весе спутника означает задание определенного начального веса ускорителей.

Итак, граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } t=0 \quad u=u_0, \quad w=w_0, \quad y=y_0, \quad V=0. \\ \text{При } t=T \quad w=0, \quad y=Y, \quad V=V_k. \end{array} \right\} \quad (1,3)$$

Время движения T на участке выведения можно либо считать заданным, либо подбирать его из условия получения наибольшей скорости в конце движения. Можно при этом считать, что время движения T на участке выведения не совпадает с временем работы двигателя T_* , а удовлетворяет лишь условию

$$T \geq T_*,$$

где T_* — заданная величина.

Функцию $\varphi(t)$ не будем ограничивать никакими условиями, кроме условия непрерывности. Функцию $V(t)$, как интеграл от неотрицательной величины, следует считать неубывающей. Примерный график зависимости V от времени приведен на рис. 2. Горизонтальные участки отвечают движению с неработающим двигателем. Вертикальные участки отвечают мгновенному расходованию части топлива. Если не накладывать ограничений на величину секундного расхода, то допустимой линией в плоскость (t, V) будет любая линия, соединяющая точки O и B (рис. 2), вдоль которой V не убывает. Если на секундный расход наложить ограничения, то допустимая линия будет удовлетворять более жесткому условию, а именно, в каждой ее точке исходящий из этой точки элемент кривой должен быть расположен внутри или на границах некоторого угла, верхняя сторона которого отвечает движению с наибольшим, а нижняя с наименьшим секундным расходом. В предельном случае, когда наибольший допустимый расход будет бесконечно большим (мгновенное сгорание), а наименьший равен нулю (движение с выключенным двигателем), верхняя сторона угла будет идти вертикально, а нижняя горизонтально.

Скорость в конце участка разгона получим, интегрируя первое уравнение (1,2) в пределах от 0 до T :

$$u = \int_0^T \frac{dV}{dt} \cos \varphi \, dt + u_0. \quad (1,4)$$

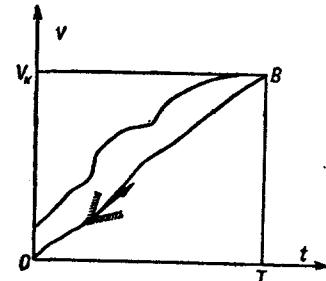


Рис. 2.

Кроме того, имеем два других уравнения, являющихся дифференциальными связями. Переопишем их в виде

$$\frac{dw}{dt} - \frac{dV}{dt} \sin \varphi + g = 0, \quad (1,5)$$

$$\frac{dy}{dt} - w = 0. \quad (1,6)$$

Имеем также гарничные условия (1,3). Величины u_0 и w_0 представим в виде

$$u_0 = v_0 \cos \vartheta_0; \quad w_0 = v_0 \sin \vartheta_0. \quad (1,7)$$

Считая V_0 заданным и варьируя угол ϑ_0 , получим из решения задачи значение оптимального угла наклона вектора начальной скорости.

Составим вспомогательный функционал

$$J = v_0 \cos \vartheta_0 + \int_0^T \left\{ \frac{dV}{dt} \cos \varphi + \lambda_1 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{dV}{dt} \sin \varphi + g \right) + \lambda_2 \left(\frac{dy}{dt} - w \right) \right\} dt, \quad (1,8)$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые неопределенные пока функции времени. Вычислим вариацию полученного функционала, варьируя также начальный угол ϑ_0 и время движения на участке выведения T .

Производя варьирование во всем входящим функциям и переменным параметрам и используя граничные условия, получим следующее выражение для вариации:

$$\begin{aligned} \delta J = & -v_0 (\sin \vartheta_0 + \lambda_1 \cos \vartheta_0) \delta \vartheta_0 + g \lambda_1 \delta T + \\ & + \int_0^T \left\{ (-\sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) \frac{dV}{dt} \delta \varphi + \left[-\frac{d}{dt} (\cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi) \right] \delta V - \right. \\ & \left. - \frac{d \lambda_2}{dt} \delta y - \left(\frac{d \lambda_1}{dt} + \lambda_2 \right) \delta w \right\} dt. \end{aligned} \quad (1,9)$$

Если начальный угол не фиксирован, а подбирается из условия оптимума, то имеем связь между начальным углом ϑ_0 и значением функции $\lambda_1(t)$ в начале движения

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = -\lambda_1|_{t=0}, \quad (1,10)$$

получающуюся приравниванием нулю первого из выражений перед интегралом. Приравнивая нулю второе выражение, получим условие в конце участка разгона

$$\lambda_1|_{t=T} = 0. \quad (1,11)$$

Если время движения фиксировано, то $\delta T = 0$ и выписанное условие для функции $\lambda_1(t)$ отпадает.

Определим теперь λ_1 и λ_2 таким образом, чтобы обратились в нуль множители при δy и δw под интегралом и тем самым эти вариации выпали из выражения для вариации функционала. Если сделать это, то выражение для вариации примет вид

$$\delta J = \int_0^T \left\{ (-\sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) \frac{dV}{dt} \delta \varphi + \left[-\frac{d}{dt} (\cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi) \right] \delta V \right\} dt. \quad (1,12)$$

где функция λ_1 должна быть определена из уравнения

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \quad (1.13)$$

при граничном условии (1.11), которое следует учитывать в случае, когда T не фиксировано.

Из второго уравнения (1.13) имеем

$$\lambda_2 = \text{const.} \quad (1.14)$$

Подставляя это значение в первое уравнение (1.13), получим

$$\lambda_1 = C_1 + C_2 t, \quad (1.15)$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. В случае, когда T не фиксировано, имеем соотношение

$$C_1 + C_2 T = 0$$

и выражение для λ_1 приведется к виду

$$\lambda_1 = -C_2(T - t). \quad (1.16)$$

Формулы (1.15) и (1.16) показывают, что величина λ_1 является линейной функцией времени. Отметим, что эти формулы содержат однаковое число произвольных постоянных, так как в формулу (1.16) вместо C_1 входит неизвестная величина T .

Приравнивая нуль выражение при вариации $\delta\varphi$ под интегралом в формуле (1.12), получим

$$\operatorname{tg} \varphi = -\lambda_1 \quad (1.17)$$

и, используя формулу (1.15), найдем выражение для оптимальной программы по тангажу в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = -(C_1 + C_2 t). \quad (1.18)$$

Если T не фиксировано, то согласно (1.16) имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = C_2(T - t). \quad (1.19)$$

Следовательно, если время не фиксировано, то в конце движения угол тангажа должен быть равен нулю, т. е. ось ускорителей должна быть направлена горизонтально.

Формулу для оптимальной программы можно переписать еще в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t, \quad (1.20)$$

где φ_0 — угол тангажа в начальный момент времени.

Таким образом, приходим к заключению, что при оптимальной программе тангенс угла тангажа должен быть линейной функцией времени. Два параметра, входящие в общее выражение для программы, надлежит выбрать таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Сопоставление формул (1.10) и (1.17) показывает, что оптимальный начальный угол ϑ_0 должен удовлетворять условию

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (1.21)$$

Это означает, что направление продольной оси ускорителя в начальный момент должно совпадать с направлением начальной скорости. В случае, если угол ϑ_0 заранее задан, это условие может не выполняться.

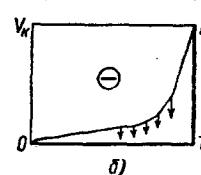
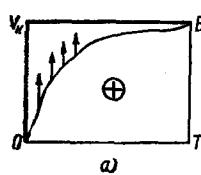
Формулы (1.18) — (1.20) дают закон изменения угла тангажа при любой зависимости $V(t)$. Будем теперь подбирать функцию $V(t)$

наилучшим образом, считая, что для каждой такой функции всякий раз выбран наилучший закон изменения угла тангажа.

Тогда вариация функционала примет вид

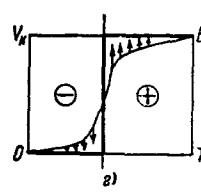
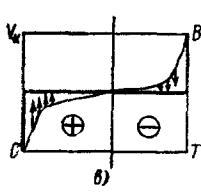
$$\delta J = \int_0^T \left\{ - \left[\frac{d}{dt} (\sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) \right] \delta V \right\} dt. \quad (1.22)$$

При выполнении дифференциальных условий (1.5) и (1.6) функционалы (1.4) и (1.8) совпадают. Если эти условия тождественно выполнены при варьировании, то вариации функционалов также должны совпадать. Поэтому формула (1.22) позволяет рассчитать вариацию скорости δU в конце участка разгона при изменении режима расходования топлива и связанной с ним функции $V(t)$. Необходимо отметить, что выраже-



ние для вариации (1.22) будет верно лишь в том случае, когда все изменение V заканчивается до момента T .

Формула (1.22) может быть преобразована к виду



где

$$\delta U = \int_0^T \Phi(t) \cdot \delta V \cdot dt, \quad (1.23)$$

$$\Phi = \frac{C_2 (\operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t)^2 + 1}} \quad (1.24)$$

или

$$\Phi = C_2 \sin \varphi. \quad (1.24a)$$

Рис. 3.

Формулы (1.23) и (1.24) показывают, что функция $\Phi(t)$, стоящая под интегралом множителем при вариации δV , зависит только от времени. На участке $(0, T)$ функция может либо иметь все время постоянный знак, либо менять знак, причем формула (1.24) показывает, что изменение знака Φ связано с изменением знака числителя и может поэтому иметь место только один раз.

На основании полученных свойств функции $\Phi(t)$ легко получить, что экстремум функционала достигается на функциях $V(t)$ со скачкообразным изменением. Рассмотрим отдельно различные возможные случаи.

а) Выражение Φ все время положительно (рис. 3, а). В этом случае сгорание всего запаса топлива должно происходить мгновенно в самом начале движения, так как всякую другую допустимую линию в плоскости (t, V) можно в противном случае проварировать вверх, вследствие чего получим $\delta U > 0$, что означает возрастание скорости в конце участка выведения.

б) Выражение Φ все время отрицательно (рис. 3, б). Аналогично предыдущему получаем, что в данном случае наилучшим видом расходования топлива будет мгновенное расходование всего запаса топлива в самом конце участка выведения при $t = T$.

в) Перемена знака Φ происходит с плюса на минус (рис. 3, в). В этом случае экстремум может достигаться лишь на ломаной, состоящей из вертикального, горизонтального и вертикального отрезков. Любую другую допустимую линию можно проварировать в каждой из областей ностоянства знака таким образом, что приращение конечной скорости будет положительным. Для того чтобы определить положение горизонтального отрезка, напишем выражение для вариации конечной скорости при

вертикальном смещении отрезка. Получим

$$\delta U = \delta V \int_0^T \Phi(t) dt. \quad (1.25)$$

Если значение интеграла положительно, то этот случай аналогичен случаю а), если отрицательно, то случаю б). Если значение интеграла равно нулю, то экстремум функционала может достигаться при каком-то промежуточном положении горизонтального отрезка. Это означает, что при определенных условиях может оказаться выгодным расходовать часть топлива мгновенно в самом начале движения, а оставшуюся часть расходовать мгновенно в самом конце движения.

г) Перемена знака Φ происходит с минуса на плюс (рис. 3, г). В этом случае расходование всего запаса топлива следует производить мгновенно в некоторый момент движения.

Все указанные возможности при определенных условиях могут реализоваться.

Рассмотрим случай, когда время движения не фиксировано, а выбирается из условия максимума конечной скорости. Начальный угол также не фиксирован и подбирается наилучшим. В этом случае имеем согласно (1.11), (1.17) и (1.20)

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 T = 0, \quad (1.26)$$

откуда

$$C_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{T}. \quad (1.27)$$

В этом случае числитель в формуле (1.24) для Φ будет иметь вид

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) \quad (1.28)$$

и будет положителен на всем участке $(0, T)$. Это означает, что будет реализован случай а). Видим, что наибольшее значение конечной скорости U в случае, когда начальный угол и время движения подбираются из условия оптимума, достигается при мгновенном израсходовании всего запаса топлива в самом начале движения. Направления начальной скорости v_0 и дополнительной скорости V должны совпадать. Здесь и в дальнейшем значок k у величины V опускаем.

Будем в дальнейшем считать, что начальная скорость v_0 включена в V , причем разбивка общего запаса скорости на две части, если это понадобится, осуществляется оптимальным образом. Можно, очевидно, ограничиться при этом рассмотрением случая $v_0 = 0$. Проведем исследование указанного случая как для свободного, так и для фиксированного времени движения на участке выведения. Выясним, при каких соотношениях параметров решение возможно, и исследуем зависимость характера оптимального движения от величины задаваемого времени выведения T .

Ясно, что при $v_0=0$ возможны только случаи а и в). Для удовлетворения граничных условий имеем соотношения:

$$V_1 \sin \varphi_1 + V_2 \sin \varphi_2 - gT = 0, \quad (1.29)$$

$$V_1 \sin \varphi_1 \cdot T - g \frac{T^2}{2} = Y, \quad (1.30)$$

где Y — заданная высота, V_1 — скорость, полученная в начальный момент движения, V_2 — скорость, полученная в конечный момент движения. Сумма

$$V_1 + V_2 = V, \quad (1.31)$$

где V — заданный запас располагаемой скорости.

Если T не фиксировано, то $V_2=0$. Уравнения (1,29) и (1,30) дают соотношение

$$\frac{gT^2}{2} = Y, \quad (1,32)$$

которое служит для определения времени T :

$$T = \sqrt{\frac{2Y}{g}}. \quad (1,33)$$

Подставляя это значение в любое из уравнений (1,29) или (1,30), получим

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{2gY}}{V}. \quad (1,34)$$

Задача разрешима, если правая часть меньше единицы. Это означает, что при заданной располагаемой скорости V высота выведения Y не должна быть взята слишком большой и, наоборот, при заданной высоте запас располагаемой скорости должен быть достаточно велик, во всяком случае, он должен быть больше той скорости, которая необходима, чтобы забросить тело вертикально вверх на высоту Y . При выполнении этого условия горизонтальная скорость в конце участка выведения будет

$$U = V \cdot \cos \varphi_1 \quad (1,35)$$

или

$$U = V \sqrt{1 - \frac{2gY}{V^2}}. \quad (1,36)$$

Если T фиксировано, то условие (1,32), вообще говоря, не выполнено и не может быть найдено решения при $V_2=0$. Решение необходимо искать по схеме в) при промежуточном положении горизонтального отрезка.

Легко видеть, что выражение для функции Φ можно представить в виде

$$\Phi = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right). \quad (1,37)$$

Поэтому равенство нулю интеграла в формуле (1,25) дает

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2, \quad (1,38)$$

откуда

$$\varphi_2 = \pm \varphi_1. \quad (1,39)$$

Рассмотрим обе возможности и выясним, при каких соотношениях между параметрами задачи они реализуются.

1. Пусть $\varphi_2 = \varphi_1$. Из формулы (1,29) имеем

$$\sin \varphi_1 = \frac{gT}{V}, \quad (1,40)$$

и на основании (1,30) и (1,31) получим

$$V_1 = \frac{V}{2} \left(1 + \frac{2Y}{gT^2} \right), \quad (1,41)$$

$$V_2 = \frac{V}{2} \left(1 - \frac{2Y}{gT^2} \right). \quad (1,42)$$

Так как V_2 должно быть положительно, то видим, что данный случай имеет место, если заданное время движения на участке выведения удовлетворяет условию

$$T > \sqrt{\frac{2Y}{g}}, \quad (1,43)$$

т. е. больше оптимального времени выведения. Для конечной скорости имеем формулу

$$U = V \sqrt{1 - \left(\frac{gT}{V}\right)^2}. \quad (1.44)$$

Условие, что выражение $\frac{gT}{V}$ должно быть меньше единицы, является требованием, налагаемым на величину располагаемого запаса скорости.

2. Пусть $\varphi_2 = -\varphi_1$. Тогда имеем

$$\sin \varphi_1 = \frac{2Y}{VT}. \quad (1.45)$$

Для скоростей получим

$$V_1 = \frac{V}{2} \left(1 + \frac{gT^2}{2Y}\right), \quad (1.46)$$

$$V_2 = \frac{V}{2} \left(1 - \frac{gT^2}{2Y}\right). \quad (1.47)$$

Решение имеет место, если заданное время T меньше оптимального, т. е. если

$$T < \sqrt{\frac{2Y}{g}}. \quad (1.48)$$

Конечная скорость вычисляется по формуле

$$U = V \sqrt{1 - \left(\frac{2Y}{VT}\right)^2}. \quad (1.49)$$

Условие, что выражение $\frac{2Y}{VT}$ должно быть меньше единицы, аналогично предыдущему, можно рассматривать как требование, чтобы располагаемый запас скорости V был достаточно велик.

Полученные формулы показывают, что величина дополнительной скорости V_2 , сообщаемой в конце движения на участке выведения, зависит оттого, насколько заданное время выведения отличается от оптимального и будет тем больше, чем больше это отличие. Если заданное время равно оптимальному, то $V_2 = 0$ и оба случая превращаются в предыдущий. Отметим, что в обоих случаях

$$V_2 < V_1,$$

т. е. вторая дополнительная скорость по величине всегда меньше первой.

Условия (1.43) и (1.48) означают, что добавка скорости должна происходить в первом случае на нисходящей, а во втором случае на восходящей ветви параболы, получающейся при движении с начальной скоростью V_1 . Оба случая представлены на рис. 4. Когда заданное время больше оптимального, добавка скорости V_2 направлена параллельно начальной скорости V_1 . Когда же заданное время выведения меньше оптимального, добавка скорости V_2 направлена вниз под углом к горизонту, равным по величине начальному углу φ_1 .

На участке выведения должны быть решены задачи подъема на заданную высоту и сообщения необходимой скорости в горизонтальном направлении. Полученные результаты показывают, что в наиболее

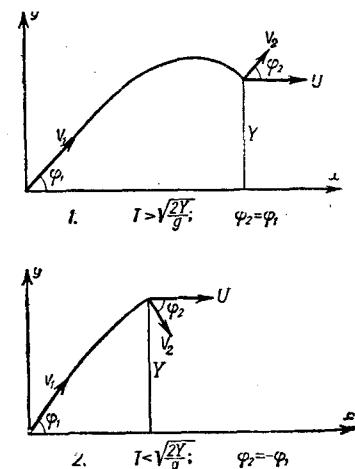


Рис. 4.

выгодном случае, когда время выведения также выбрано оптимальным, набор скорости и набор высоты следует производить путем приложения мгновенного импульса в самом начале движения. Выведение на горизонтальное направление движения должно осуществляться за счет действия силы тяжести. Если заданное время выведения отлично от оптимального, то для выведения на горизонтальное направление необходимо использовать импульс, сообщаемый в конце участка выведения. Если заданное время излишне велико, то отклонение вектора скорости за счет силы тяжести больше необходимого и вертикальная составляющая второго импульса должна быть направлена вверх. Если заданное время мало, сила тяжести не успевает произвести разворот вектора скорости и недостающий разворот должен быть произведен при помощи второго импульса, имеющего вертикальную составляющую, направленную вниз.

При получении решения мы исходили из предположения о допустимости мгновенного сообщения импульса и мгновенного расходования всего запаса топлива или его части. Так как в действительности это невозможно, то наилучшее решение поставленной задачи о выведении получим, заменив мгновенное сгорание сгоранием топлива с максимальным секундным расходом топлива, а промежуток между приложением импульсов — движением с минимальным секундным расходом или, еще лучше, движением с выключенным двигателем.

Выше было получено, что при движении в плоско-параллельном поле тяжести наилучшее выведение осуществляется за счет приложения одного импульса в начале движения. При выведении на орбиту в центральном поле сил такое решение оказывается неприемлемым, так как таким путем невозможно получить, например, круговую орбиту или орбиту, не пересекающую и не касающуюся поверхности Земли. Поэтому для приложения к решению задачи о выведении в центральном поле сил полученных выше результатов основное значение имеет задача о выведении на орбиту в заданное время. Если заданное время не слишком велико, то размеры траектории выведения будут невелики по сравнению с радиусом Земли и гипотезы, положенные в основу приближенного рассмотрения, не будут сильно нарушены.

Рассчитаем пример, позволяющий оценить величину протяженности траектории выведения и величину потребного запаса располагаемой скорости при различных значениях задаваемого времени выведения. При расчете примера ограничимся наиболее важным случаем, когда задаваемое время выведения не превосходит оптимального времени выведения в плоско-параллельном поле сил.

Пусть нужно вывести спутник на высоту $Y = 300$ км с горизонтальной скоростью $U = 7900$ м/сек.

По формуле

$$T = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

получим оптимальное время выведения в плоско-параллельном поле сил

$$T_{\text{опт}} = 248 \text{ сек.}$$

На рис. 5 дан для области $0,4 T_{\text{опт}} < T < T_{\text{опт}}$ график зависимости от T величины суммарной потребной располагаемой скорости V , начального импульса v_1 , начального угла ϕ_1 и горизонтальной дальности X . Из рисунка видно, что по мере сокращения времени выведения суммарная потребная скорость увеличивается, величина начального импульса падает, а конечного импульса растет. Величина начального угла с уменьшением времени выведения увеличивается, траектории становятся все более

крутыми и горизонтальная дальность участка выведения уменьшается. Полученные величины горизонтальной дальности значительно меньше радиуса Земли. Поэтому имеется достаточно оснований рассматривать приведенный пример как приближенный расчет оптимального выведения спутника на орбиту.

Отметим в заключение параграфа, что, как показано выше, линейный закон изменения тангенса угла тангажа во времени не зависит от характера изменения функции $V(t)$. Он будет приложим при использовании как одноступенчатых, так и многоступенчатых ускорителей, а также в случае наличия перерывов между концом работы одной ступени и началом работы другой. Этот результат будет использован в следующем параграфе при рассмотрении выведения с помощью ускорителя типа ступенчатой ракеты.

Отметим также, что при других постановках вариационной задачи закон для тангенса угла тангажа может оказаться отличным от линейного. Так, например, если, подбирая время движения оптимальным, фиксировать горизонтальную дальность на участке выведения, то оптимальный закон изменения по времени тангенса угла тангажа оказывается дробнолинейным.

§ 2. ДВИЖЕНИЕ С ЗАДАННЫМ РЕЖИМОМ РАСХОДОВАНИЯ ТОПЛИВА

Выше было получено, что наилучший закон управления по тангажу обеспечивается линейной зависимостью тангенса угла тангажа от времени

$$\operatorname{tg} \varphi = -(C_1 + C_2 t). \quad (2,1)$$

Интегрируя уравнения движения (1,1) — (1,4), получим выражения для проекций скорости и для координат в некоторый момент времени t_1 :

$$u = \int_0^{t_1} p(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt + u_0, \quad (2,2)$$

$$w = \int_0^{t_1} p(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt + w_0 - gt_1, \quad (2,3)$$

$$x = \int_0^{t_1} (t_1 - t) \cdot p(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt + u_0 t_1 + x_0, \quad (2,4)$$

$$y = \int_0^{t_1} (t_1 - t) \cdot p(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt + w_0 t_1 + y_0 - \frac{gt_1^2}{2}. \quad (2,5)$$

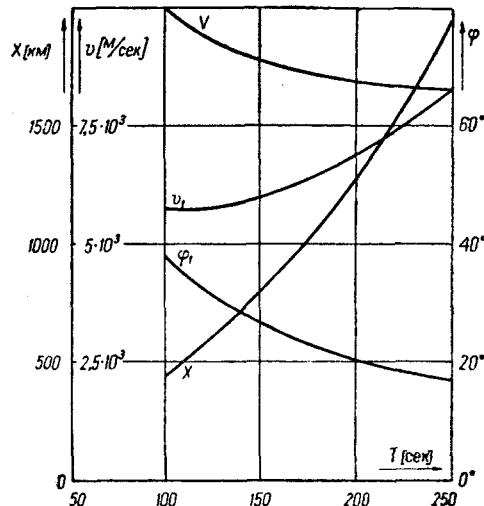


Рис. 5.

Величины $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ могут быть на основании (2,1) представлены как функции времени

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (C_1 + C_2 t)^2}}, \quad (2,6)$$

$$\sin \varphi = - \frac{C_1 + C_2 t}{\sqrt{1 + (C_1 + C_2 t)^2}}. \quad (2,7)$$

Так как функция $p(t)$ считается заданной, то интегралы в правых частях формул (2,2) — (2,5) могут быть, вообще говоря, вычислены.

Правые части формул (2,2 — (2,5) содержат две произвольные константы, связанные с программой управления. Подбирая эти константы, можно, вообще говоря, добиться того, что при фиксированном времени движения на участке разгона будут обеспечены в конце участка разгона заданная высота y_k и равенство нулю вертикальной составляющей скорости. Подобрав таким образом константы, можно затем по формулам (2,2) и (2,4) определить величину скорости u_k и величину x_k .

Для фактического вычисления интегралов в правых частях формул (2,2) — (2,5) необходимо знать зависимость реактивного ускорения от времени, т. е. знать функцию $p(t)$. Заметим, что функция $p(t)$ является в общем случае разрывной, например, в случае составной ракеты. Поскольку составные ракеты для искусственного спутника представляют наибольший интерес, то в дальнейшем будет проведено более детальное исследование оптимального движения составной ракеты.

Для случая движения составной ракеты, используя (2,2) — (2,5), кинематические параметры в конце траектории выведения представим в виде

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^n u_k^{(i)}, \quad (2,8)$$

$$w_k = w_0 + \sum_{i=1}^n w_k^{(i)}, \quad (2,9)$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^n x_k^{(i)}, \quad (2,10)$$

$$y_k = y_0 + \sum_{i=1}^n y_k^{(i)}, \quad (2,11)$$

где

$$u_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} p_i(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt, \quad (2,12)$$

$$w_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} p_i(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt - g (t_k^{(i)} - t_0^{(i)}), \quad (2,13)$$

$$x_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} (t_k^{(i)} - t) p_i(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt + (t_k^{(i)} - t_0^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} u_k^{(q)}, \quad (2,14)$$

$$\begin{aligned}
 y_k^{(i)} = & \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} (t_k^{(i)} - t) \cdot p_i(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt + (t_k^{(i)} - t_0^{(i)}) \times \\
 & \times \sum_{q=0}^{i-1} w_k^{(q)} - \frac{1}{2} g (t_k^{(i)} - t_0^{(i)}), \\
 w_k^0 = u_0, \quad w_k^0 = w_0.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь $t_0^{(i)}$ и $t_k^{(i)}$ — время в начальный и конечный моменты движения, $w_k^{(i)}$ и $w_k^{(i)}$ — величины приращения горизонтальной и вертикальной компонент скорости, $x_k^{(i)}$ и $y_k^{(i)}$ — приращения горизонтальной и вертикальной координат за время движения, $p_i(t)$ — ускорение реактивной силы, причем все величины отнесены к движению i -й ступени ракеты.

Очевидно, что формулы (2.12) — (2.15) охватывают также и случай, когда между работой двигателей отдельных ступеней составной ракеты имеют место паузы. В этом случае можно принять, что промежуток времени, соответствующий паузе, относится к некоей ступени ракеты, для которой

$$p_i(t) \equiv 0.$$

Проведем вычисление интегралов правых частей формул (2.12) — (2.15) для одного весьма важного частного случая, при котором движение каждой ступени ракеты происходит с постоянной тягой. В этом случае для i -й ступени имеем

$$p_i(t) = \frac{g P_i}{G_i}, \tag{2.16}$$

где P_i — тяга двигателя, G_i — вес. Вес G_i можно представить в виде

$$G_i = G_0^{(i)} \cdot \mu_k^{(i)} = G_0^{(i)} \left[1 - (1 - \mu_k^{(i)}) \frac{t - t_0^{(i)}}{T_i} \right], \tag{2.17}$$

где $G_0^{(i)}$ — начальный вес, $\mu_k^{(i)}$ — конечное отношение масс, T_i — время работы двигателя. Вводя обозначение

$$\nu_0^{(i)} = \frac{G_0^{(i)}}{P_i}, \tag{2.18}$$

получим выражение для $p_i(t)$

$$p_i(t) = \frac{g}{\nu_0^{(i)} \cdot \left[1 - (1 - \mu_k^{(i)}) \frac{t - t_0^{(i)}}{T_i} \right]}. \tag{2.19}$$

Определяя тягу двигателя по формуле

$$P_i = - \frac{c_i}{g} \cdot \frac{dG_i}{dt}, \tag{2.20}$$

где c_i — скорость истечения газов из сопла двигателя, легко получим для времени T_i формулу

$$T_i = \frac{c_i}{g} \cdot \nu_0^{(i)} (1 - \mu_k^{(i)}). \tag{2.21}$$

Заметим, что при постоянной тяге двигателя секундный расход постоянен и масса ракеты является линейной функцией времени. Для каждой ступени можно поэтому считать тангенс угла тангажа зависящим линейно не от времени, а от массы ступени или от ее относительной массы. Имеем тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = A_i + B_i \cdot \mu_k^{(i)}, \quad (2,22)$$

где A_i и B_i — некоторые константы. В начале движения ступени $\mu_k^{(i)} = 1$ и

$$\operatorname{tg} \varphi_0^{(i)} = A_i + B_i. \quad (2,23)$$

В момент окончания работы двигателя ступени $\mu_k^{(i)} = \mu_k^{(i)}$ и

$$\operatorname{tg} \varphi_k^{(i)} = A_i + B_i \cdot \mu_k^{(i)}. \quad (2,24)$$

Здесь $\varphi_0^{(i)}$ и $\varphi_k^{(i)}$ — значения угла тангажа в начале и в конце движения ступени.

Подставляя в формулы (2,8) — (2,15) выражение для $p_i(t)$ из (2,19) и выражения для $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ из (2,6) и (2,7), получим после интегрирования

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot f_1^{(i)}, \quad (2,25)$$

$$w_k = w_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot [f_2^{(i)} - v_0^{(i)} \cdot (1 - \mu_k^{(i)})], \quad (2,26)$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{g} v_0^{(i)} \cdot \left[f_3^{(i)} + (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} \frac{c_q}{c_i} \cdot f_1^{(q)} \right], \quad (2,27)$$

$$y_k = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{g} v_0^{(i)} \left\{ f_4^{(i)} - \frac{1}{2} v_0^{(i)} (1 - \mu_k^{(i)}) + \right. \\ \left. + (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} \frac{c_q}{c_i} \cdot [f_2^{(q)} - v_0^{(q)} \cdot (1 - \mu_k^{(q)})] \right\}, \quad (2,28)$$

где безразмерные функции $f_1^{(i)}$, $f_2^{(i)}$, $f_3^{(i)}$ и $f_4^{(i)}$ определяются выражениями

$$f_1^{(i)} = \frac{u_0}{c_0}, \quad f_2^{(i)} = \frac{w_0}{c_0}, \\ f_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{1 + A_i^2}} \left\{ \operatorname{Arcsh} \left(A_i + \frac{1 + A_i^2}{\mu_k^{(i)} \cdot B_i} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{Arcsh} \left(A_i + \frac{1 + A_i^2}{B_i} \right) \right\}, \quad (2,29)$$

$$f_2^{(i)} = A_i f_1^{(i)} + \operatorname{Arcsh} (A_i + B_i) - \operatorname{Arcsh} (A_i + B_i \mu_k^{(i)}), \quad (2,30)$$

$$f_3^{(i)} = \frac{1}{B_i} [\operatorname{Arcsh} (A_i + B_i) - \operatorname{Arcsh} (A_i + B_i \mu_k^{(i)})] - \mu_k^{(i)} \cdot f_1^{(i)}, \quad (2,31)$$

$$f_4^{(i)} = \frac{1}{B_i} \left[\sqrt{1 + (A_i + B_i)^2} - \sqrt{1 + (A_i + B_i \mu_k^{(i)})^2} \right] - \mu_k^{(i)} \cdot f_2^{(i)}. \quad (2,32)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Заметим, кроме того, что $v_0^{(0)} = 0$. Константы A_i и B_i , входящие в формулы (2,29)–(2,32), в силу непрерывности программы управления по тангажу, а также в силу формул (2,22)–(2,24) связаны между собой при помощи $2(n-1)$ соотношений:

$$A_i + B_i \mu_k^{(i)} = A_{i+1} + B_{i+1} \quad (2,33)$$

$$\frac{B_i}{B_{i+1}} = \frac{v_0^{(i)}}{v_0^{(i+1)}} \cdot \frac{c_i}{c_{i+1}}, \quad (2,34)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

Соотношения (2,34) получаются следующим образом. Согласно (2,1) $\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \varphi) = -C_2 = \operatorname{const}$. С другой стороны, согласно (2,17) и (2,22)

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{d}{d\mu_k^{(i)}}(\operatorname{tg} \varphi) \frac{d\mu_k^{(i)}}{dt} = -B_i \cdot \frac{1 - \mu_k^{(i)}}{T_i} = -C_2. \quad (2,35)$$

Из (2,35), принимая во внимание (2,21), легко получить (2,34).

Формулы (2,21)–(2,25) позволяют полностью рассчитать экстремальное движение. Чтобы получить движение, удовлетворяющее заданным изопериметрическим условиям, необходимо соответствующим образом подобрать две произвольные постоянные программы управления C_1 и C_2 или, что то же самое, какие-либо две постоянные из совокупности $2n$ величин A_i и B_i , пример A_1 и B_1 или A_n и B_n . Приравнивая w нулю, а y заданной величине y_k , получим для определения постоянных A_i и B_i систему двух трансцендентных уравнений, решение которых может быть найдено только подбором. Проще поэтому не определять величины A_i и B_i , а задавать их, а по ним уже рассчитывать все другие величины. Изменяя $\mu_k^{(i)}$, A_i и B_i в некотором разумном диапазоне, можно получать движения с различными значениями $v_0^{(i)}$, y_k и u_k . При этом вычисления будут гораздо более экономными, так как не надо решать уравнений, а надо лишь производить вычисления по формулам.

В дальнейшем остановимся на рассмотрении одного весьма интересного частного случая схемы составной ракеты и на нем проиллюстрируем описанную выше методику.

Рассмотрим составную ракету, у которой все n ступеней по ряду основных своих характеристик подобны между собой, именно ракету, у которой

$$c_i = c; \quad \mu_k^{(i)} = \mu_k; \quad v_0^{(i)} = v_0. \quad (2,36)$$

В качестве произвольных констант программы управления примем A_n и B_n . Все остальные постоянные A_i и B_i весьма просто можно выразить через A_n и B_n . В самом деле, согласно (2,34)

$$B_i = B_n, \quad (2,37)$$

а из (2,33), используя также (2,37), легко получим

$$A_i = A_n (1 - \mu_k) (n - i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2,38)$$

Схема расчета будет теперь такой. Задав μ_k , A_n и B_n и используя формулу (2,38), определим по формулам (2,29)–(2,32) величины $f_1^{(i)}$, $f_2^{(i)}$,

$f_3^{(l)}$ и $f_4^{(l)}$. Из условия $w_k = 0$ в конце движения имеем формулу

$$v_0 = \frac{\sum_{i=1}^n f_2^{(l)}}{n(1-\mu_k)}. \quad (2,39)$$

На основании этой формулы определим v_0 . После этого по формулам (2,25), (2,27) и (2,28) определим величины x_k , y_k и u_k .

При выполнении подобного расчета можно задаваться не самими величинами A_n и B_n , а некоторыми величинами, от них зависящими.

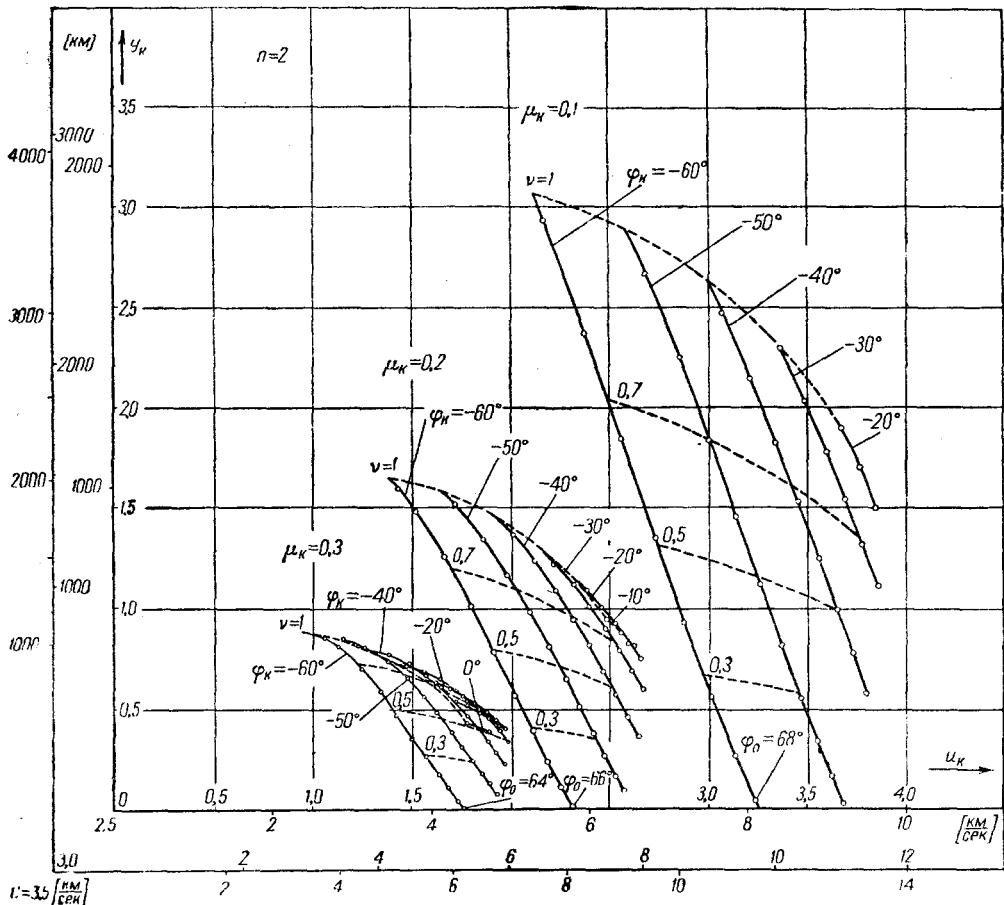


Рис. 6.

Так, например, можно задаваться величиной угла тангажа в конце траектории и значением отношения масс и рассчитывать серию траекторий, меняя величину угла тангажа в начале участка разгона. Обозначая начальный угол тангажа 1-й ступени $\varphi_0^{(1)}$ через φ_0 , согласно (2,23) будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = A_1 + B_1. \quad (2,40)$$

Согласно (2,24) получим

$$\operatorname{tg} \varphi_k = A_n + B_n \mu_k, \quad (2,41)$$

где через φ_k обозначен конечный угол тангажа для последней n -й сту-

пени $\varphi_k^{(n)}$. Наконец, принимая во внимание, что согласно формуле (2,38):

$$A_1 = A_n + B_n (1 - \mu_k) (n - 1) \quad (2,42)$$

и что $B_1 = B_n$ из соотношений (2,40), (2,41) и (2,42) получим формулы, связывающие A_n и B_n с φ_0 и φ_k :

$$B_n = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_k}{n (1 - \mu_k)},$$

$$A_n = \operatorname{tg} \varphi_k - \mu_k \cdot B.$$

Результаты расчета представлены на рис. 6, 7 и 8. При этом расчеты были проведены для двухступенчатой (рис. 6), трехступенчатой

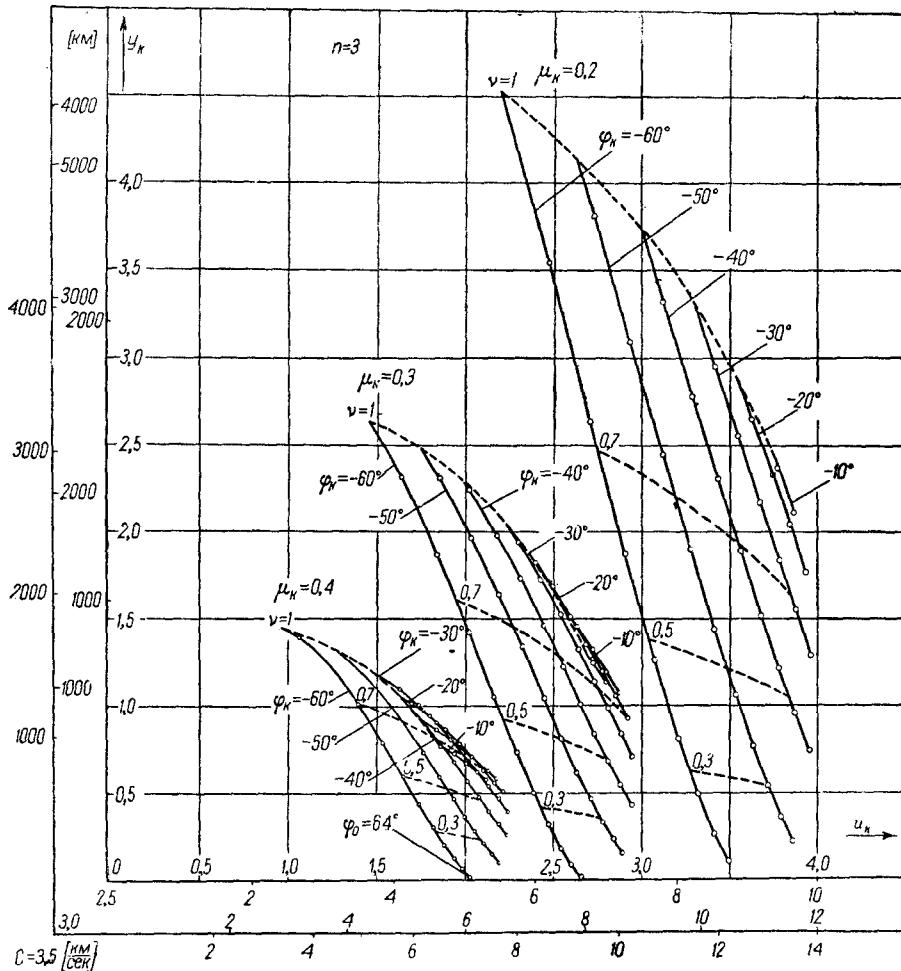


Рис. 7.

(рис. 7) и четырехступенчатой (рис. 8) ракет. На графиках по оси абсцисс как в размерной, так и в безразмерной форме (см. ниже) отложена конечная скорость ракеты u_k ; по оси ординат — конечная высота выведения y_k . При выполнении расчетов значения углов тангенса в конце траектории были взяты равными

$$\varphi_k = 0^\circ; -10^\circ; -20^\circ; -30^\circ; -40^\circ; -50^\circ; -60^\circ.$$

Значения μ_k были взяты

$$\mu_k = 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5.$$

Для этих значений параметров были построены кривые, вдоль которых менялось φ_0 . Крайняя правая точка каждой кривой соответствует $\varphi_0 = 60^\circ$. Исключение составляют кривые, у которых точки, соответствующие $\varphi_0 = 60^\circ$, лежат под осью абсцисс; значения φ_0 для крайних правых точек этих кривых отмечены на графиках. Остальные точки φ_0 , отмеченные на графиках кружками, нанесены через интервал $\Delta\varphi_0 = 2^\circ$.

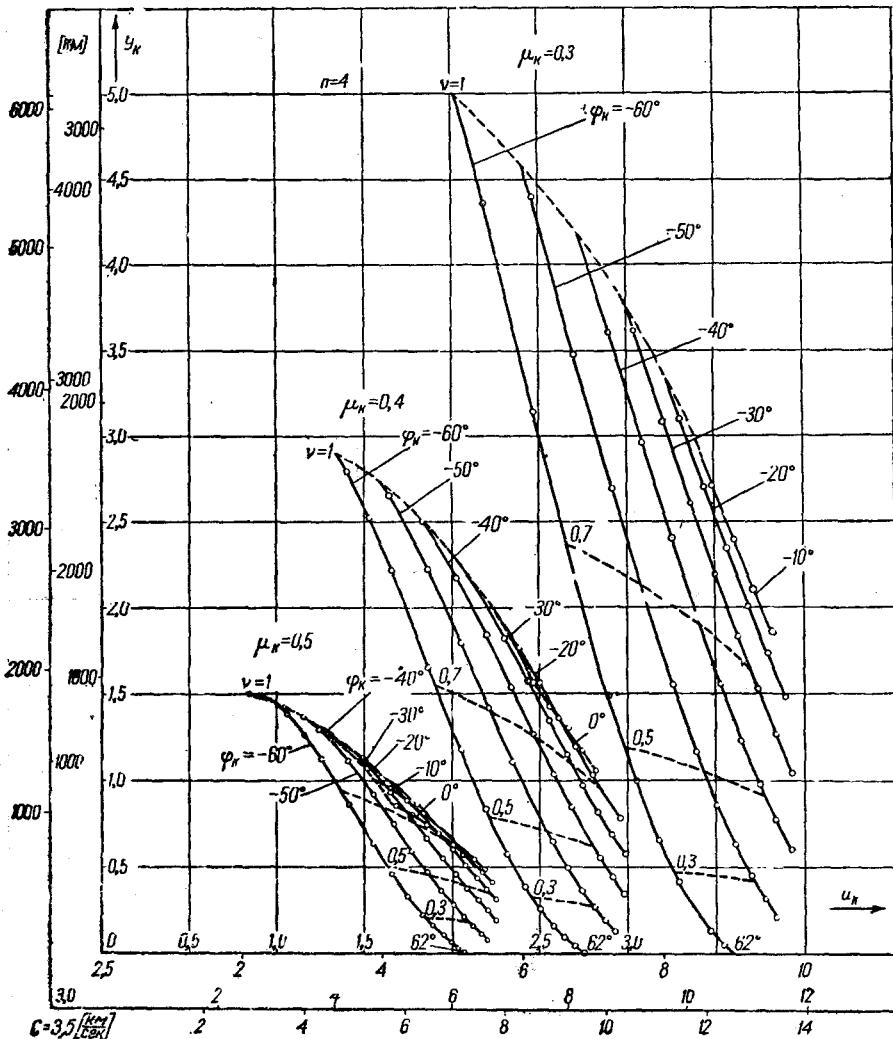


Рис. 8.

в сторону возрастания φ_0 . Оказалось, что вдоль таких кривых значения v_0 меняются монотонно. При малых v_0 получаем точки в правой нижней части кривой, соответствующей меньшим значениям φ_0 . С увеличением v_0 получаем точки, расположенные левее и выше и соответствующие большим значениям угла φ_0 . Так как для практически интересных случаев v_0 не должно быть меньше единицы, то точка на кривой

$\varphi_k = \text{const}$, соответствующая $v_0 = 1$, является левой границей рассматриваемой кривой. На рис. 6—8 пунктиром нанесены линии, соединяющие точки с $v_0 = 1$, или, что то же, соединяющие левые границы кривых $\varphi_k = \text{const}$. Нетрудно заметить, что кривые $\varphi_k = \text{const}$ могут лежать как справа, так и слева от кривой $v_0 = 1$.

На рис. 6—8 также пунктиром показаны кривые, соответствующие другим постоянным значениям v_0 :

$$v_0 = 0,3; 0,5; 0,7.$$

Интересно отметить, что кривые постоянных значений v_0 могут в ряде случаев пересекаться. Так, из рис. 6—8 легко видеть, что в случаях $n = 2, \mu_k = 0,3; n = 3, \mu_k = 0,4; n = 4, \mu_k = 0,5$ имеет место пересечение кривой $v_0 = 1$ с кривыми $v_0 = 0,7, v_0 = 0,5$ и, по-видимому, с кривой $v_0 = 0,3$ (если продолжать кривую $v_0 = 1$ в сторону положительных значений φ_k). Это означает, что при заданных n и μ_k и для двух различных значений v_0 соответствующие данным значениям v_0 оптимальные программы могут обеспечить получение одной и той же комбинации (u_k, \dot{u}_k) .

Для того чтобы пояснить значение указанного факта, приведем пример. Допустим, что для $n = 2, \mu_k = 0,3, v_0 = 0,5$ и для высоты $\dot{u}_k = 1,53$ (взята в безразмерной форме) необходимо найти оптимальную программу, обеспечивающую получение максимальной скорости \dot{u}_k .

Пользуясь рис. 6, с помощью интерполяции находим параметры оптимальной программы φ_0 и φ_k :

$$\varphi_0 \approx 68^\circ, \varphi_k \approx -43^\circ.$$

Найденная оптимальная программа обеспечивает получение максимальной скорости \dot{u}_k , при этом $\dot{u}_k = 0,46$ (взята также в безразмерной форме). Однако из того же рис. 6 легко видеть, что та же комбинация (u_k, \dot{u}_k) может быть получена при использовании другого значения v_0 , именно, $v_0 = 1$. В этом случае параметры оптимальной программы φ_0 и φ_k будут уже другими

$$\varphi_0 = 64^\circ, \varphi_k = 0.$$

Следует иметь в виду, что при сохранении стартового веса ракеты большиим значениям v_0 , согласно формуле (2,18), будут соответствовать меньшие значения тяги двигателя ракеты P и, следовательно, меньший вес самого двигателя. Значит, сохраняя n и μ_k , и обеспечивая значение $v_0 = 1$, вместо $v_0 = 0,5$ имеем возможность поместить в ракете больший полезный груз, не ухудшая при этом основных летных характеристик ракеты — u_k и \dot{u}_k .

Из приведенных графиков видим также, что при заданном числе ступеней ракеты и при данном μ_k имеют место определенные ограничения на возможность получения различных комбинаций высоты и скорости выведения. Эти ограничения имеют двоякий характер. Чтобы показать это, разобьем все кривые $\varphi_k = \text{const}$ на два класса. К первому классу отнесем кривые, имеющие участки, расположенные правее и выше кривой $v_0 = 1$. К этому классу относятся, например, все кривые $\varphi_k = \text{const}$, соответствующие случаю $n = 2, \mu_k = 0,3$ или, например, кривые $\varphi_k = -20^\circ$ и $\varphi_k = -10^\circ$, соответствующие случаю $n = 2, \mu_k = 0,2$ (рис. 6). Ко второму классу отнесем кривые, целиком расположенные левее и ниже пунктирной кривой $v_0 = 1$. К этому классу относятся, например, все кривые $\varphi_k = \text{const}$, соответствующие случаю $n = 2, \mu_k = 0,1$ или, например, кривые $\varphi_k = -60^\circ, -50^\circ, -40^\circ, -30^\circ$, соответствующие случаю $n = 2, \mu_k = 0,2$ (рис. 6).

Из рис. 6—8 легко видеть, что для семейств кривых первого класса легко построить огибающие, касающиеся кривых с одинаковыми значениями μ_k (огибающие эти на рисунках не показаны). Эти огибающие ограничивают в плоскости u_k , y_k некоторые области достижимости, причем это ограничение энергетического характера и связано с возможностью получения при заданном запасе топлива лишь некоторых ограниченных высот и скоростей.

Другое ограничение, относящееся целиком к кривым второго класса, связано с практической нецелесообразностью использования ракет, у которых тяга первой ступени меньше ее начального веса. Пунктирная кривая $v_0 = 1$ будет в этом случае ограничивающей кривой в плоскости (y_k, u_k) , выше которой мы не можем подняться, если n и μ_k задано.

Комбинируя огибающую семейства кривых первого класса и ограничивающую семейства кривых второго класса, можно получить общую ограничивающую кривую, указывающую область достижимых комбинаций y_k и u_k при заданных n и μ_k . Указанная ограничивающая кривая дает наибольшие значения скорости, достижимой на данной высоте при данных n и μ_k , или наибольшие значения высоты для заданной скорости в конце при данных n и μ_k . Кроме того, эти ограничивающие кривые указывают наибольшие значения μ_k , при которых энергетически возможно достижение данной высоты и скорости. Точки кривых $\mu_k = \text{const}$, лежащие на ограничивающей кривой, будут отвечать значениям v_0 , энергетически наиболее выгодным.

На рис. 6—8 основной шкалой является шкала для безразмерных скорости и высоты \tilde{u}_k и \tilde{y}_k , где

$$\tilde{u}_k = \frac{u_k}{c}, \quad \tilde{y}_k = \frac{y_k}{\frac{c^2}{g}}.$$

Благодаря этому приведенные графики имеют универсальный вид и пригодны для использования в случае различных скоростей истечения газов из сопла реактивного двигателя. На этих же графиках нанесены три размерные шкалы, соответствующие трем различным скоростям истечения

$$c = 2,5 \text{ км/сек; } 3 \text{ км/сек; } 3,5 \text{ км/сек.}$$

Для приведенных скоростей истечения часть кривых попадает в область таких больших высот y_k , для которых непосредственное применение развитой теории выведения в плоско-параллельном поле силы тяжести становится затруднительным. Тем не менее и в этом случае указанные кривые позволяют делать некоторые качественные суждения общего характера относительно влияния выбора параметров ракеты и ее программы управления по тангажу на расширение области достижимых скоростей и высот.

§ 3. ЗАДАЧА О ВЫВЕДЕНИИ НА ОРБИТУ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОСТИ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ И ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

В настоящем разделе рассматривается более сложная постановка задачи о выведении на орбиту, учитывающая переменность поля тяготения и вращение Земли. При этом рассматривается относительное движение ракеты в системе координат, связанной с Землей.

Полагая, что траектория ракеты относительно Земли является плоской, рассмотрим декартову систему координат, начало которой помещено в точке старта, ось x направлена по касательной к Земле в сторону

движения ракеты, ось y направлена вертикально вверх, ось z перпендикулярна к осям x , y и направлена так, что составляет с ними правую систему координат (рис. 9). Уравнения движения ракеты в проекциях на оси декартовой системы координат запишутся в виде:

$$\ddot{x} = -g_x + p_x - a_{\text{пер}x} - a_{\text{кор}x}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} = -g_y + p_y - a_{\text{пер}y} - a_{\text{кор}y}, \quad (3.2)$$

$$\ddot{z} = -g_z + p_z - a_{\text{пер}z} - a_{\text{кор}z}, \quad (3.3)$$

где g_x , g_y , g_z — проекции ускорения силы тяготения и p_x , p_y , p_z — проекции ускорения реактивной силы на оси x , y , z ; $a_{\text{пер}x}$, $a_{\text{пер}y}$, $a_{\text{пер}z}$; $a_{\text{кор}x}$, $a_{\text{кор}y}$, $a_{\text{кор}z}$ — соответственно проекции переносного ускорения и ускорения Кориолиса на те же оси.

Проанализируем отдельные слагаемые уравнений (3.1) — (3.3). Прежде всего ясно, что в силу условия движения ракеты в плоскости x , y должно быть

$$\ddot{z} = \dot{z} = \ddot{z} = 0. \quad (3.4)$$

Далее, в силу того же условия, а также в силу центральности рассматриваемого поля тяготения проекция ускорения силы тяготения на ось z должна быть равна нулю

$$g_z = 0. \quad (3.5)$$

Рис. 9.

Проекции ускорения силы тяготения на оси x и y можно представить в виде

$$g_x = \frac{gR^2}{x^2 + (y + R)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y + R)^2}}, \quad (3.6)$$

$$g_y = \frac{gR^2}{x^2 + (y + R)^2} \cdot \frac{y + R}{\sqrt{x^2 + (y + R)^2}}. \quad (3.7)$$

Проекции ускорения реактивной силы равны

$$p_x = p \cos \varphi \cos \beta, \quad (3.8)$$

$$p_y = p \sin \varphi, \quad (3.9)$$

$$p_z = p \cos \varphi \sin \beta, \quad (3.10)$$

где φ — угол между продольной осью ракеты и плоскостью x , z (угол тангажа), β — угол между вертикальной плоскостью, проходящей через ось ракеты, и плоскостью x , y (угол рыскания), p , как и ранее, — модуль ускорения реактивной силы — заданная функция времени.

Проекции ускорения Кориолиса $a_{\text{кор}x}$, $a_{\text{кор}y}$ и $a_{\text{кор}z}$ легко выразить через кинематические параметры относительного движения, если воспользоваться формулой

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}], \quad (3.11)$$

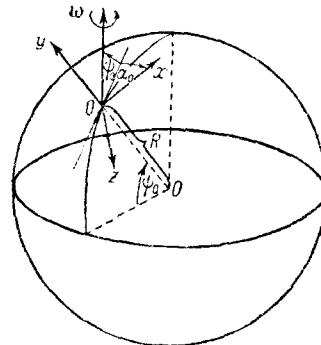
где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли, $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ — относительная скорость движения ракеты. Заметим, что для проекций угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ на оси x , y и z имеем формулы

$$\omega_x = \omega \cos \psi_0 \cos \alpha_0, \quad (3.12)$$

$$\omega_y = \omega \sin \psi_0, \quad (3.13)$$

$$\omega_z = -\omega \cos \psi_0 \sin \alpha_0, \quad (3.14)$$

где ω — модуль угловой скорости вращения Земли, ψ_0 — широта точки старта, α_0 — угол между плоскостью x , y и меридиональной плоскостью



(азимут плоскости траектории). Принимая во внимание (3,11) для проекций ускорения Кориолиса, получим известные формулы

$$a_{\text{кор } x} = 2[\omega \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]_x = y\omega_z - z\omega_y, \quad (3,15)$$

$$a_{\text{кор } y} = 2[\omega \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]_y = z\omega_x - x\omega_z, \quad (3,16)$$

$$a_{\text{кор } z} = 2[\omega \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]_z = x\omega_y - y\omega_x. \quad (3,17)$$

Наконец, принимая во внимание, что в силу условий движения $z=0$, формулы для проекций Кориолиса представим в следующем окончательном виде:

$$a_{\text{кор } x} = y\omega_z, \quad (3,18)$$

$$a_{\text{кор } y} = -x\omega_z, \quad (3,19)$$

$$a_{\text{кор } z} = x\omega_y - y\omega_x. \quad (3,20)$$

Обращаясь теперь к проекциям переносного ускорения, заметим, что они пренебрежимо малы по сравнению с другими членами уравнений (3,1) — (3,3) и при решении рассматриваемой задачи их можно отбросить.

Принимая во внимание сделанные замечания, систему уравнений (3,1) — (3,3) запишем в виде

$$\ddot{x} = -g_x + p \cos \varphi \cos \beta - y\omega_z, \quad (3,21)$$

$$\ddot{y} = -g_y + p \sin \varphi + x\omega_z, \quad (3,22)$$

$$0 = p \cos \varphi \sin \beta - (x\omega_y - y\omega_x). \quad (3,23)$$

Последнее уравнение системы (3,21) — (3,23) служит для определения угла β , необходимого для компенсации боковых сил и обеспечивающего движение ракеты в плоскости x, y . Согласно (3,23) имеем

$$\sin \beta = \frac{x\omega_y - y\omega_x}{p \cos \varphi}. \quad (3,24)$$

Оценка угла β , произведенная с помощью формулы (3,24), показывает, что в практически интересных случаях угол β будет достаточно мал и, во всяком случае, никогда не будет превосходить нескольких градусов, так что при решении рассматриваемой задачи, без большой погрешности, в уравнении (3,21) можно положить $\cos \beta = 1$.

Учитывая, что в рассматриваемой задаче протяженность траектории выведения предполагается более или менее ограниченной, с целью облегчения решения задачи упростим выражения для компонент ускорения земного тяготения g_x и g_y , заменив формулы (3,6) и (3,7) соответствующими приближенными формулами. С этой целью функции $g_x(x, y)$ и $g_y(x, y)$ разложим в окрестности точки $(0, 0)$ в ряд по степеням x и y

$$g_x = g_x(0, 0) + \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} \right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} \right)_0 \cdot y + \dots, \quad (3,25)$$

$$g_y = g_y(0, 0) + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} \right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y} \right)_0 \cdot y + \dots, \quad (3,26)$$

где для коэффициентов разложения будем иметь следующие формулы:

$$g_x(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} \right)_0 = \frac{g}{R}, \quad \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} \right)_0 = 0,$$

$$g_y(0, 0) = g, \quad \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial g_y}{\partial y} \right)_0 = -\frac{2g}{R}.$$

В дальнейшем, в разложении (3,25), (3,26) ограничимся членами, содержащими x и y в первой степени. Получим следующие приближенные

формулы:

$$g_x = g \cdot \frac{x}{R}, \quad (3.27)$$

$$g_y = g - 2g \cdot \frac{y}{2}. \quad (3.28)$$

Принимая во внимание все сделанные замечания и упрощения, систему уравнений движения ракеты представим в следующем окончательном виде:

$$\psi_1 = \dot{u} - 2\omega_z w + v^2 x - p \cos \varphi = 0, \quad (3.29)$$

$$\psi_2 = \dot{w} + 2\omega_z u - 2v^2 y - p \cos \varphi + g = 0, \quad (3.30)$$

$$\psi_3 = \dot{x} - u = 0, \quad (3.31)$$

$$\psi_4 = \dot{y} - w = 0, \quad (3.32)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad (3.33)$$

$$\omega_z = -\omega \cos \theta_0 \sin \alpha_0. \quad (3.34)$$

Как и в § 1, поставим вариационную задачу о достижении максимальной высоты на заданной высоте при условии, что угол между вектором конечной скорости и местным горизонтом равен нулю. Как и ранее, в силу взаимности полученнное решение будет обеспечивать достижение максимальной высоты при заданной скорости, а также достижение заданных значений высоты и скорости при минимальном расходе топлива.

Сформулируем граничные условия. Предположим, что в начале движения (при $t = t_0$) имеем координаты x_0 и y_0 и некоторые значения горизонтальной и вертикальной проекций скорости u_0 и w_0 . Положим также, что кинематические параметры x_0 , y_0 , u_0 и w_0 зависят от некоторого параметра, которым может явиться, в частности, угол θ_0 между вектором начальной скорости v_0 и горизонтом в момент $t = t_0$. Вводя в последующих формулах в качестве такого параметра угол θ_0 , будем иметь в виду возможность замены θ_0 некоторым другим параметром. Полагаем, что при $t = t_0$

$$x_0 = x_0(\theta_0), \quad y_0 = y_0(\theta_0), \quad u_0 = u_0(\theta_0), \quad w_0 = w_0(\theta_0). \quad (3.35)$$

В конце движения в момент $t = T$ полная высота полета h фиксирована и угол между вектором скорости и местным горизонтом должен быть равен нулю. Оба указанных условия записываются в следующем виде:

при $t = T$

$$\sqrt{(R + y_k)^2 + x_k^2} - R = h, \quad (3.36)$$

$$\frac{x_k}{R + y_k} = -\frac{w_k}{u_k}. \quad (3.37)$$

В предельном случае, если x_k мало, условие (3.37) принимает вид

$$w_k = 0,$$

т. е. такой же, как и в задаче, рассмотренной в §§ 1 и 2.

Итак, поставим вариационную задачу. Для заданной функции $p(t)$ найти функцию $\varphi(t)$, обеспечивающую максимальную горизонтальную скорость v_k на заданной высоте h , а также наивыгоднейший угол θ_0 между вектором начальной скорости и горизонтом, соответствующим точке старта. Заметим, что зависимость функционала задачи v_k от функции $\varphi(t)$ не может быть, как это было ранее, представлена в простейшем виде.

Чтобы решить поставленную задачу, необходимо, прежде всего, найти первую вариацию функционала v_k . Для нахождения первой вариации воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. С этой целью наряду с исходным функционалом

$$v_k = \sqrt{u_k^2 + w_k^2} \quad (3,38)$$

рассмотрим новый функционал

$$J = \sqrt{u_k^2 + w_k^2} + \int_0^T H dt. \quad (3,39)$$

Для подынтегральной функции H имеем выражение

$$H = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 + \lambda_4 \psi_4, \quad (3,40)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 — некоторые, пока не определенные функции времени, а ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 определяются согласно (3,29) — (3,32). Ясно, что функционалы (3,39) и (3,38) совпадают в силу выполнения условий (3,29) — (3,32). Будут совпадать также вариации функционалов (3,38) и (3,39), если при варьировании функции φ будут удовлетворены связи (3,29) — (3,32), т. е. будут выполнены условия

$$\delta\psi_1 = \delta\psi_2 = \delta\psi_3 = \delta\psi_4 = 0.$$

Первая вариация функционала J будет иметь вид

$$\delta J = \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2 + w_k^2}} \delta u_k + \frac{w_k}{\sqrt{u_k^2 + w_k^2}} \delta w_k + \int_0^T \delta H dt, \quad (3,41)$$

где

$$\delta H = H'_u \delta u + H'_w \delta w + H'_x \delta x + H'_y \delta y + H'_\varphi \delta \varphi. \quad (3,42)$$

Для производных H'_u , H'_w и т. д. согласно (3,29) — (3,32) и (3,40) имеем формулы:

$$\left. \begin{aligned} H'_u &= 2\omega_z \lambda_2 - \lambda_3; & H'_w &= -2\omega_z \lambda_1 - \lambda_4; & H'_x &= v^2 \lambda_1; & H'_y &= -2v^2 \lambda_2; \\ H'_w &= \lambda_1; & H'_x &= \lambda_2; & H'_y &= \lambda_3; & H'_\varphi &= \lambda_4; \\ H'_\varphi &= p(\lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3,43)$$

Полагая функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 непрерывными и дифференцируемыми в каждой точке, проинтегрируем по частям в подынтегральном выражении правой части (3,41) члены, содержащие производные от вариаций. В результате получим

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{u_k}{v_k} \delta u_k + \frac{w_k}{v_k} \delta w_k + \lambda_{1k} \delta u_k + \lambda_{2k} \delta w_k + \lambda_{3k} \delta x_k + \lambda_{4k} \delta y_k - \\ &- \lambda_{10} \delta u_0 - \lambda_{20} \delta w_0 - \lambda_{30} \delta x_0 - \lambda_{40} \delta y_0 + \int_0^T \delta \tilde{H} dt, \end{aligned} \quad (3,44)$$

где $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}$ и $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}, \lambda_{4k}$ — значения функций $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 соответственно в начальный и в конечный момент времени. Заметим, что вариации $\delta u_k, \delta w_k, \delta x_k$ и δy_k в силу условий (3,36) и (3,37) не являются независимыми, а связаны между собой соотношениями

$$\frac{1}{R + y_k} \delta x_k - \frac{x_k}{(R + y_k)^2} \delta y_k = \frac{w_k}{u_k^2} \delta u_k - \frac{1}{u_k} \delta w_k, \quad (3,45)$$

$$x_k \delta x_k + (R + y_k) \delta y_k = 0. \quad (3,46)$$

Таким образом, из четырех вариаций $\delta u_k, \delta w_k, \delta x_k$ и δy_k лишь две являются независимыми. В дальнейшем в качестве независимых вариаций

примем вариации δu_k и δw_k . Также согласно (3,35) вариации δu_0 , δw_0 , δx_0 и δy_0 не независимы, а связаны между собой через вариацию $\delta \theta_0$.

Очевидно, имеем

$$\delta u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0, \quad \delta w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0, \quad \delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0, \quad \delta y_0 = \frac{\partial y_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0. \quad (3,47)$$

Пользуясь (3,45), (3,46) и (3,47), исключим из выражения, стоящего перед интегралом правой части (3,44), лишние вариации. После простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \delta J = & \left\{ \frac{u_k}{v_k} + \lambda_{1k} + \frac{w_k}{u_k^2} \left(\frac{R + y_k}{R + h} \right)^2 [(R + y_k) \lambda_{3k} + x_k \lambda_{4k}] \right\} \delta u_k + \\ & + \left\{ \frac{w_k}{v_k} + \lambda_{2k} - \frac{1}{u_k} \left(\frac{R + y_k}{R + h} \right)^2 [(R + y_k) \lambda_{3k} + x_k \lambda_{4k}] \right\} \delta w_k + \\ & + \left\{ \lambda_{10} \frac{\partial u_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{20} \frac{\partial w_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{30} \frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{40} \frac{\partial y_0}{\partial \theta_0} \right\} \delta \theta_0 + \int_0^T \tilde{H} dt. \end{aligned} \quad (3,48)$$

Далее, для выражения $\delta \tilde{H}$, стоящего под интегралом в (3,48), имеем формулу

$$\begin{aligned} \delta \tilde{H} = & (2\omega_z \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1) \delta u + (-2\omega_z \lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_2) \delta w + \\ & + (v^2 \lambda_1 - \lambda_3) \delta x + (-2v^2 \lambda_2 - \lambda_4) \delta y + p (\lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi) \delta \varphi. \end{aligned} \quad (3,49)$$

Подберем теперь множители λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 таким образом, чтобы в правой части выражения для вариации функционала (3,48) под интегралом пропали члены, содержащие вариации δu , δw , δx , δy , а также члены, стоящие перед интегралом и содержащие вариации δu_k и δw_k . В результате получим систему дифференциальных уравнений для λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 :

$$\dot{\lambda}_1 = 2\omega_z \lambda_2 - \lambda_3, \quad (3,50)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -2\omega_z \lambda_1 - \lambda_4, \quad (3,51)$$

$$\dot{\lambda}_3 = v^2 \lambda_1, \quad (3,52)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -2v^2 \lambda_2, \quad (3,53)$$

а также два условия на правой границе, которые представим в виде

$$\lambda_{1k} = -\frac{u_k}{v_k} - \frac{w_k}{u_k^2} \left(\frac{R + y_k}{R + h} \right)^2 [(R + y_k) \lambda_{3k} + x_k \lambda_{4k}], \quad (3,54)$$

$$\lambda_{2k} = -\frac{w_k}{v_k} + \frac{1}{u_k} \left(\frac{R + y_k}{R + h} \right)^2 [(R + y_k) \lambda_{3k} + x_k \lambda_{4k}]. \quad (3,55)$$

Первая вариация функционала (3,39) может быть теперь представлена в виде, содержащем непосредственно связь вариации функционала с вариациями угла θ_0 и функции $\varphi(t)$:

$$\delta J = \left(\lambda_{10} \frac{\partial u_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{20} \frac{\partial w_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{30} \frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{40} \frac{\partial y_0}{\partial \theta_0} \right) \delta \theta_0 + \int_0^T p (\lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi) \delta \varphi dt. \quad (3,56)$$

Полагая, что существует внутренний экстремум функционала (3,39) как по θ_0 , так и по $\varphi(t)$, найдем его из условия

$$\delta J = 0. \quad (3,57)$$

Так как вариации $\delta \theta_0$ и $\delta \varphi$ независимы, то условие (3,57) будет, очевидно, выполнено, если

$$\lambda_{10} \frac{\partial u_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{20} \frac{\partial w_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{30} \frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{40} \frac{\partial y_0}{\partial \theta_0} = 0, \quad (3,58)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (3,59)$$

Мы получили два соотношения, из которых первое служит для определения оптимального угла θ_0 , а второе для определения оптимальной программы $\varphi(t)$.

Система уравнений (3,50) — (3,53), (3,59) совместно с граничными условиями (3,54), (3,55), (3,58), а также с уравнениями движения (3,29) — (3,32) и граничными условиями (3,35) — (3,37) дает полное решение поставленной задачи. При этом зависимость оптимальной программы управления от времени может быть получена в явном виде.

Действительно, система (3,50) — (3,53) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и потому может быть легко проинтегрирована. Для нахождения общего решения системы (3,50) — (3,53) необходимо найти корни характеристического уравнения этой системы:

$$k^4 - (v^2 - 4\omega_z^2)k^2 - 2v^4 = 0. \quad (3,60)$$

Уравнение (3,60) будет иметь два действительных и два мнимых корня.

$$k_{1,2} = \pm v_1, \quad k_{3,4} = \pm iv_2, \quad (3,61)$$

где

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v^2 - 4\omega_z^2)^2 + 8v^4 + (v^2 - 4\omega_z^2)}, \quad (3,62)$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v^2 - 4\omega_z^2)^2 + 8v^4 - (v^2 - 4\omega_z^2)}, \quad (3,63)$$

Найдя общее решение системы (3,50) — (3,53) и подставляя его в (3,59), получим общую формулу для оптимальной программы управления по тангажу, содержащую явную зависимость φ от времени t

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{s_3 \operatorname{ch} v_1(T-t) - s_4 \operatorname{sh} k_1(T-t) + s_3 \cos k_3(T-t) - s_4 \sin k_3(T-t)}{s_1 \operatorname{ch} v_1(T-t) - s_2 \operatorname{sh} k_1(T-t) + s_1 \cos k_2(T-t) - s_2 \sin k_2(T-t)}, \quad (3,64)$$

где

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= (v_1^2 + v^2 + 4\omega_z^2) \lambda_{1k} + 2\omega_z \lambda_{4k}, \\ s_2 &= (v_2^2 + 2v^2 - 4\omega_z^2) \lambda_{2k} + 2\omega_z \lambda_{3k}, \\ s_3 &= \frac{1}{v_1} [2\omega_z (v_1^2 - v^2 + 4\omega_z^2) \lambda_{2k} - (v_1^2 + v^2 + 4\omega_z^2) \lambda_{3k}], \\ s_4 &= -\frac{1}{v_1} [2\omega_z (v_1^2 + v^2 - 4\omega_z^2) \lambda_{1k} + (v_1^2 + 2v^2 - 4\omega_z^2) \lambda_{4k}], \end{aligned} \right\} \quad (3,65)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= (v_2^2 - v^2 - 4\omega_z^2) \lambda_{1k} - 2\omega_z \lambda_{4k}, \\ s_2 &= (v_1^2 - 2v^2 + 4\omega_z^2) \lambda_{2k} - 2\omega_z \lambda_{3k}, \\ s_3 &= \frac{1}{v_1} [2\omega_z (v_2^2 + v^2 - 4\omega_z^2) \lambda_{2k} - (v_2^2 - v^2 - 4\omega_z^2) \lambda_{3k}], \\ s_4 &= -\frac{1}{v_2} [2\omega_z (v_1^2 - v^2 + 4\omega_z^2) \lambda_{1k} + (v_1^2 - 2v^2 + 4\omega_z^2) \lambda_{4k}]. \end{aligned} \right\} \quad (3,66)$$

Чтобы довести задачу до конца, необходимо в формулах (3,65) и (3,66) определить постоянные λ_{1k} , λ_{2k} , λ_{3k} и λ_{4k} . Напомним при этом, что λ_{1k} и λ_{2k} определяются через λ_{3k} , λ_{4k} и через кинематические параметры u_k , w_k , x_k , y_k по формулам (3,54), (3,55).

Таким образом формула (3,64) определяет программу управления $\varphi(t)$ как функцию времени, а также шести параметров — λ_{3k} , λ_{4k} , u_k , w_k , x_k , y_k , т. е.

$$\varphi = \varphi(t; \lambda_{3k}, \lambda_{4k}, u_k, w_k, x_k, y_k). \quad (3,67)$$

Подставим $\varphi(t)$, определенное по формуле (3,64), в уравнения движения (3,29) — (3,32). Система (3,29) — (3,32) превратится после этого в неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с переменной правой частью, явно зависящей от времени. Решение такой системы может быть представлено в квадратурах. В результате интегрирования (3,29) — (3,32) получим четыре соотношения, связывающие семь параметров $u_k, w_k, x_k, y_k, \lambda_{3k}, \lambda_{4k}$ и θ_0 . Эти соотношения запишем в виде

$$u_k - u_0(\theta_0) + \Phi_1(\lambda_{3k}, \lambda_{4k}, u_k, w_k, x_k, y_k) = 0, \quad (3,68)$$

$$w_k - w_0(\theta_0) + \Phi_2(\lambda_{3k}, \lambda_{4k}, u_k, w_k, x_k, y_k) = 0, \quad (3,69)$$

$$x_k - x_0(\theta_0) + \Phi_3(\lambda_{3k}, \lambda_{4k}, u_k, w_k, x_k, y_k) = 0, \quad (3,70)$$

$$y_k - y_0(\theta_0) + \Phi_4(\lambda_{3k}, \lambda_{4k}, u_k, w_k, x_k, y_k) = 0, \quad (3,71)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 содержат интегралы, в общем случае не берущиеся в элементарных функциях. Уравнения (3,68) — (3,71) вместе с конечными соотношениями (3,36) — (3,37) и соотношением (3,58) представляют замкнутую систему семи трансцендентных уравнений с семью неизвестными — $u_k, w_k, x_k, y_k, \lambda_{3k}, \lambda_{4k}, \theta_0$ *). Разрешая эту систему, найдем значения кинематических параметров в конце траектории выведения u_k, w_k, x_k, y_k , оптимальное значение начального угла θ_0 и значения параметров оптимальной программы управления $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}, \lambda_{4k}$, причем, λ_{1k} и λ_{2k} вычисляются дополнительно с помощью формул (3,54) и (3,55). Система уравнений (3,68) — (3,71), (3,36), (3,37) и (3,58) весьма сложна и громоздка и разрешить ее в явном виде, в общем случае невозможно. Поэтому при практическом использовании предлагаемого метода нахождения оптимальной программы для решения указаний системы целесообразно использовать какой-либо численный итерационный метод. Не останавливаясь здесь на вопросе практического использования найденной оптимальной программы, проанализируем формулу (3,64) и упростим ее.

Прежде всего выясним влияние вращения Земли на выбор оптимальной программы по тангажу и покажем, что это влияние незначительно.

Рассмотрим случай, когда условия движения ракеты таковы, что

$$\omega_z = 0. \quad (3,72)$$

Условие (3,72) выполняется, например, если $\alpha_0 = 0$ или π , а также если $\psi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$.

В этом случае формулы (3,62) и (3,63) для v_1 и v_2 сильно упрощаются и принимают вид

$$v_1 = \sqrt{2} v, \quad v_2 = v.$$

Формулы для $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и σ_4 также упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 3v^2\lambda_{1k}, & \sigma_3 &= -3\lambda_{3k}, \\ \sigma_2 &= 3v^2\lambda_{2k}, & \sigma_4 &= -3\lambda_{4k} \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} (3,73)$$

Что касается S_1, S_2, S_3 и S_4 , то в этом случае из (3,66) легко получить, что

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0. \quad (3,74)$$

Принимая во внимание (3,73) и (3,74), получим значительно упрощенную формулу для программы $\varphi(t)$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_{2k} \operatorname{ch} \sqrt{2}v(T-t) + \frac{\lambda_{4k}}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2}v(T-t)}{\lambda_{1k} \cos v(T-t) + \frac{\lambda_{3k}}{v} \sin v(T-t)}. \quad (3,75)$$

*) Заметим, что $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}$ и λ_{40} , входящие в (3,58), выражаются с помощью конечных формул через $\lambda_{3k}, \lambda_{4k}, u_k, w_k, x_k$ и y_k .

Формула (3,75) с большой степенью точности может быть использована как формула оптимальной программы и в том случае, когда $\omega_z \neq 0$. Это легко доказать, если учесть, что вращение Земли влияет на вид оптимальной программы через величины v_1 и v_2 .

Из (3,62) и (3,63) видим, что ω_z входит в формулы для v_1 и v_2 лишь в комбинации $(v^2 - 4\omega_z^2)$. Можно показать, что $4\omega_z^2$ мало по сравнению с v^2 . Пользуясь этим, с помощью (3,62) и (3,63) выведем приближенные формулы для v_1 и v_2 :

$$v_1 \approx \sqrt{2}v \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega_z}{v} \right)^2 \right], \quad v_2 \approx v \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\omega_z}{v} \right)^2 \right]. \quad (3,76)$$

Возьмем для ω_z максимально возможное значение, равное ω . Известно, что

$$\omega = 7,292 \cdot 10^{-5}. \quad (3,77)$$

С другой стороны, по формуле (3,33) вычислим v

$$v = 1,241 \cdot 10^{-3}. \quad (3,78)$$

Пользуясь (3,77), (3,78), вычислим максимальное значение поправочного члена в формулах (3,76):

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 = 0,230 \cdot 10^{-2}. \quad (3,79)$$

Таким образом, поправка для v_1 и v_2 за счет вращения Земли действительно весьма незначительна и, учитывая, что рассматриваемая вариационная задача решена при ряде упрощений формул для внешних действующих сил, этой поправкой можно, безусловно, пренебречь.

Таким образом, формулу (3,75) можно рассматривать как общую формулу для оптимальной программы управления по тангажу, пригодную для использования в случае различных географических условий выведения на орбиту.

Рассмотрим предельный вид формулы (3,75), соответствующий малому значению параметра vT . В этом случае, полагая $\operatorname{ch} \sqrt{2}vT$ и $\cos vT$ равными единице, а $\operatorname{sh} \sqrt{2}vT$ и $\sin vT$ равными vT , согласно (3,75) будем, очевидно, иметь

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_{2k} + \lambda_{4k}(T-t)}{\lambda_{1k} + \lambda_{3k}(T-t)}. \quad (3,80)$$

Формулу (3,80) можно также получить, если решать рассматриваемую задачу без учета переменности поля сил тяготения. Если при этом считать достаточно малыми величины

$$\frac{x_k}{R}, \quad \frac{y_k}{R}, \quad \frac{T}{\sqrt{\frac{R}{g}}} \quad \text{и} \quad \frac{w_k}{u_k},$$

то в результате получим формулу (2,1) предыдущего параграфа, а вместе с ней и всю теорию оптимального выведения на орбиту, развитую для плоско-параллельного поля силы тяжести.