1956 г. Ноябрь *Т. LX, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ РЕНОРМИРУЕМОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ЛИ*)

Г. Челлен и В. Паули

ВВЕДЕНИЕ

В недавно опубликованной работе[1] Т. Д. Ли предложил весьма интересный вариант ренормируемой теории поля. Этот вариант достаточно прост, чтобы получить более или менее явное решение, однако он сохраняет существенные черты, присущие всякой серьёзной теории. В этом варианте производится ренормировка массы частиц одного сорта, а также ренормировка константы взаимодействия g, описывающей взаимодействие между частицами. В точном решении, найденном Ли, отношение квадрата ренормированной константы взаимодействия g к квадрату неренормированной константы взаимодействия g_0 имеет вид

$$\frac{g^2}{g_0^2} = 1 - Ag^2, \qquad (1)$$

где A — расходящийся интеграл. Таким образом, отношение (1) равно $-\infty$. Это — весьма примечательный результат, находящийся в противоречии с весьма общими принципами[2], согласно которым величина этого отношения должна лежать в пределах от единицы до нуля.

Целью настоящей статьи является, во-первых, выяснение математических причин возникновения результата (1); во-вторых, будет показано, что нарушение основных принципов, выражаемое соотношением (1), ведёт к ряду следствий, поскольку S-матрица теории оказывается неунитарной. Чтобы избежать операций с расходящимися интегралами, мы введём во взаимодействие обрезающий фактор. Тогда обнаружится, что аномальное значение отношения (1) получается также и для конечного значения обрезания и что оно

*) Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, вып. 7 (1955).

не связано непосредственно с бесконечностями в исходных положениях.

Для полноты изложения мы начинаем с очерка основных положений теории Ли и изложения способа ренормировки, используемого в этой теории.

I. РЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИИ ЛИ

Рассмотрим систему, состоящую из трёх сортов частиц, которые, следуя Ли, мы назовём V-, N- и ϑ-частицами. Каждому сорту частиц соответствует своё поле, которое мы обозначим соответственно через ψ_V, ψ_N и a. Система описывается неренормированным гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_{\text{вз}}, \tag{2}$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} E_V(\mathbf{p})\,\psi_V^*(\mathbf{p})\,\psi_V(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{p}} E_N(\mathbf{p})\,\psi_N^*(\mathbf{p})\,\psi_N(\mathbf{p}) + \sum_{k} \omega(\mathbf{k})\,a^*(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}), \tag{3}$$

$$H_{\text{вз}} = -\frac{g_0}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{p}'+\mathbf{k}} \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} \left(\psi_V^*(\mathbf{p})\,\psi_N(\mathbf{p}')\,a(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k})\,\psi_N^*(\mathbf{p}')\,\psi_V(\mathbf{p})\right). \tag{4}$$

Операторы в (3) и (4) могут быть записаны как в p-, так и x-представлении. Эта теория не инвариантна по отношению к группе Лоренца, и поэтому нет необходимости использовать сложные варианты релятивистской теории поля. Энергии $E_V(\mathbf{p})$, $E_N(\mathbf{p})$ и $\omega(\mathbf{k})$ принципиально могут быть любыми функциями рассматриваемых импульсов; теория также может рассматриваться для таких произвольных функций. Тем не менее нам достаточно рассмотреть специальный случай

$$E_V(\mathbf{p}) = E_N(\mathbf{p}) = m \text{ (не зависят от } \mathbf{p}), \tag{5}$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}. \tag{6}$$

Уравнение (5), в частности, сильно упрощает формальные результаты, сохраняя при этом все интересующие нас детали.

Если угодно, такой выбор энергии в функции импульса может рассматриваться как описание взаимодействия между очень тяжёлыми V- и N-частицами равной массы с лёгкими релятивистскими ϑ-частицами. Функция $f(\omega)$ в (4) — это обрезающая функция, упомянутая выше; её задача сводится к тому, чтобы сделать сходящимися суммы, возникающие в дальнейшем. V — это величина объёмной периодичности пространства.

Операторы поля подчиняются следующим правилам коммутации и антикоммутации:

$$\{\psi_V^*(\mathbf{p}),\ \psi_V(\mathbf{p}')\} = \{\psi_N^*(\mathbf{p}),\ \psi_N(\mathbf{p}')\} = \delta_{\mathbf{p},\ \mathbf{p}'}, \tag{7}$$

$$\{\psi_V(\mathbf{p}),\ \psi_V(\mathbf{p}')\} = \{\psi_V(\mathbf{p}),\ \psi_N(\mathbf{p}')\} = \ldots = 0, \tag{8}$$

$$[a(\mathbf{k}),\ a^*(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\ \mathbf{k}'}, \tag{9}$$

$$[a(\mathbf{k})\,\psi_V(\mathbf{p})] = [a(\mathbf{k}),\ \psi_N(\mathbf{p}')] = \ldots = 0. \tag{10}$$

С помощью этих правил можно установить представление в гильбертовом пространстве, где каждое состояние характеризуется числом наличных в нём частиц. Далее, каждое состояние в этом представлении является собственным состоянием для гамильтониана H_0 свободных частиц (3), но не полного гамильтониана (2). Обозначим эти состояния так:

$$|n_V,\ n_N,\ n_k\rangle, \tag{11}$$

где n_V, n_N и n_k суть числа наличных «свободных» V-, N- и ϑ-частиц *).

С помощью (7—10) легко можно проверить, что два нижеследующих оператора коммутируют с полным гамильтонианом:

$$Q_1 = \sum_p \psi_V^*(\mathbf{p})\,\psi_V(\mathbf{p}) + \sum_p \psi_N^*(\mathbf{p})\,\psi_N(\mathbf{p}), \tag{12}$$

$$Q_2 = \sum_p \psi_N^*(\mathbf{p})\,\psi_N(\mathbf{p}) - \sum_k a^*(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}), \tag{13}$$

$$[H,\ Q_i] = 0, \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Поскольку каждое состояние (11) является одновременно собственным состоянием операторов Q_i, собственные состояния полного гамильтониана могут быть представлены как линейные комбинации

*) Вводимые таким способом «состояния свободных частиц» совершенно сходны с широко известными состояниями свободных частиц, например, в методе Тамма—Данкова; однако это совсем иное, чем так называемые «входящие (или выходящие) состояния свободных частиц», используемые в релятивистских теориях поля. Как это будет видно из дальнейшего, метод Тамма—Данкова для нашего случая даёт точное решение.

состояний (11), принадлежащих одному и тому же собственному значению q_i. Это обстоятельство существенно упрощает задачу диагонализации полного гамильтониана, а в некоторых случаях даже позволяет получить точное решение. В качестве примера укажем, что есть только одно состояние (11), в котором $q_1 = q_2 = 0$, именно состояние $|0, 0, 0\rangle$ или «свободный вакуум» («вакуум свободных частиц»).

Следовательно, это состояние является также собственным состоянием полного гамильтониана и простое вычисление обнаруживает для этого оператора в качестве собственного значения нуль. Таким образом, в этой модели «физический вакуум» в то же время есть и «вакуум свободных частиц». Аналогично можно показать, что физические состояния N-частиц и ϑ-частиц тождественны с соответствующими состояниями свободных частиц, но что состояния свободных V-частиц не являются собственными состояниями полного гамильтониана. Для того чтобы получить в этом случае собственные состояния полного гамильтониана, оказывается необходимым рассмотреть линейную комбинацию состояний $|1_V, 0, 0\rangle$ и $|0, 1_N, 1_k\rangle$. Несколько позже мы ещё вернёмся к этому. Сейчас же мы только заметим, что в этих условиях нет необходимости производить ренормировку масс N- и ϑ-частиц. Перенормировка массы в теории Ли производится добавлением в гамильтониан члена

$$\delta H = -\delta m \sum_{\mathbf{p}} \psi_V^*(\mathbf{p})\, \psi_V(\mathbf{p}), \tag{15}$$

который оставляет неизменными уравнения сохранения (14). Константа δm в (15) должна быть по возможности определена так, чтобы состояния, соответствующие V-частицам, имели бы массу m, входящую в H_0. Следуя правилам квантовой электродинамики, мы произведём ренормировку константы взаимодействия g_0 и оператора поля ψ_V на множитель N следующим образом:

$$g = g_0 N, \tag{16}$$

$$\psi_V'(\mathbf{p}) = \psi_V(\mathbf{p}) \frac{1}{N}. \tag{17}$$

Существенно подчеркнуть, что постоянную N в (16) и (17) можно выбрать действительной, поскольку операторы поля содержат произвольный фазовый множитель. Выбор действительного множителя N лишь налагает связь между фазами ψ_V и ψ_V', но не ведёт ни к каким физическим следствиям. Величина N определяется из условия [3]

$$\langle 0 | \psi_V'(\mathbf{p}) | V \rangle = 1. \tag{18}$$

Состояние $|V\rangle$ в (18) соответствует физическому состоянию V-частицы, а состояние $|0\rangle$ — состоянию физического вакуума. В последующем мы опускаем штрих над ренормированным ψ_V-оператором, поскольку соответствующий неренормированный оператор не будет употребляться вовсе. Таким образом, если использовать ренормированные выражения гамильтониана и канонических правил перестановки, то можно записать:

$$H = H_0 + H_{\text{вз.}} + \delta H, \tag{19}$$

$$H_0 = mN^2 \sum_{\mathbf{p}} \psi_V^*(\mathbf{p}) \psi_V(\mathbf{p}) + m \sum_{\mathbf{p}} \psi_N^*(\mathbf{p}) \psi_N(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \tag{20}$$

$$H_{\text{вз}} = -\frac{q}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{p}'+\mathbf{k}} \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} (\psi_V^*(\mathbf{p}) \psi_N(\mathbf{p}') a(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k}) \psi_N^*(\mathbf{p}') \psi_V(\mathbf{p})), \tag{21}$$

$$\delta H = -\delta m N^2 \sum_{\mathbf{p}} \psi_V^*(\mathbf{p}) \psi_V(\mathbf{p}), \tag{22}$$

$$\{\psi_V^*(\mathbf{p}), \psi_V(\mathbf{p}')\} = \frac{1}{N^2} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \tag{23}$$

(остальные правила перестановки не меняются).

Уравнения (19) — (23) являются основными для последующего рассмотрения.

II. ФИЗИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ V-ЧАСТИЦЫ И СОСТОЯНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАССЕЯНИЕ N- И ϑ-ЧАСТИЦ

Мы будем искать собственные состояния гамильтониана, имеющего вид

$$|z\rangle = |1_V, 0, 0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{k}) |0, 1_N, 1_k\rangle. \tag{24}$$

В этом выражении все члены имеют один и тот же полный импульс. В последующих формулах множитель, выражающий сохранение полного трёхмерного импульса, часто будет опускаться. Обозначая собственные значения состояния гамильтониана (24) через $m + \omega_0$ и используя (19) — (23), мы получим после несложных вычислений:

$$\omega_0+\delta m=-\frac{g}{N\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\Phi(\mathbf{k})f(\omega)}{\sqrt{2\omega}},\qquad(25)$$

$$(\omega-\omega_0)\Phi(\mathbf{k})=\frac{g}{N\sqrt{V}}\frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}}.\qquad(26)$$

Исключая из (25) и (26) величину $\Phi(\mathbf{k})$, мы получаем уравнение, определяющее собственное значение ω_0:

$$\omega_0+\delta m+\frac{g^2}{2N^2V}\sum_k\frac{f^2(\omega)}{\omega}\frac{1}{\omega-\omega_0}=0.\qquad(27)$$

Константа δm определяется из условия, что $\omega_0=0$ есть одно из решений (27). Соответствующее собственное состояние гамильтониана (24) при соответствующей нормировке есть физическое состояние V-частицы. Мы получаем в итоге:

$$\delta m=\frac{-g^2}{2V}\frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{k}}\frac{f^2(\omega)}{\omega^2},\qquad(28)$$

$$|V\rangle=C\left[|1_V,\ 0,\ 0\rangle+\frac{g}{N\sqrt{2V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{f(\omega)}{\omega^{3/2}}|0,\ 1_N,\ 1_k\rangle\right],\qquad(29)$$

$$C^{-2}=1+\frac{g^2}{2VN^2}\sum_{\mathbf{k}}\frac{f^2(\omega)}{\omega^3}.\qquad(30)$$

Далее, используя уравнение (18), получим:

$$C=N\qquad(31)$$

или

$$|V\rangle=N|1_V,\ 0,\ 0\rangle+\frac{g}{\sqrt{2V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{f(\omega)}{\omega^{3/2}}|0,\ 1_N,\ 1_k\rangle,\qquad(32)$$

$$N^2=1-\frac{g^2}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{f^2(\omega)}{\omega^3}.\qquad(33)$$

Результаты, полученные до сих пор в этом разделе, точно соответствуют результатам Ли. В частности, из уравнений (33) и (16) вытекает соотношение (1), полученное Ли, если положить формфактор равным единице для всех значений ω. Однако, если использовать конечное обрезание, уравнение (33) примет вид

$$N^2=1-\frac{g^2}{g^2_{\text{крит}}},\qquad(34)$$

где

$$g_{\text{крит}}^{-2} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)}{\omega^3}. \tag{34a}$$

Значение N^2, определяемое соотношением (34), как этого и следовало ожидать, заключено в пределах от единицы до нуля лишь в том случае, если ренормированная константа взаимодействия g меньше некоторого критического значения $g_{\text{крит}}$, определяемого (34a) и зависящего от обрезающей функции. Если обрезание не производится, то критическое значение константы взаимодействия равно нулю. С другой стороны, если перенормировка константы взаимодействия не производилась и все величины выражены через начальную константу взаимодействия g_0, следует во всех приведённых выше формулах заменить величину g^2 согласно равенству

$$g^2 = \frac{g_0^2 \cdot g_{\text{крит}}^2}{g_0^2 + g_{\text{крит}}^2}. \tag{35}$$

Соотношение (35) указывает на то, что перенормированная константа взаимодействия всегда меньше критической константы взаимодействия при том условии, что гамильтониан эрмитов, т. е. что величина g_0 действительна. Как это было уже подчёркнуто Ли, представляет некоторый интерес исследование также и случая, когда перенормированная константа взаимодействия больше критического значения, а гамильтониан является неэрмитовым. Решающим вопросом при таком рассмотрении является выяснение того, будет ли такое нарушение обычных представлений квантовой механики вести к каким-либо заметным неприятным последствиям или на этом пути всё же можно получить хотя бы отчасти удовлетворительную теорию.

Мы возвращаемся теперь к исследованию других решений задачи о собственных значениях, определяемых уравнением (27). Это уравнение с учётом (28) и (33) может быть переписано несколько иначе, а именно:

$$h(\omega_0) \equiv \omega_0 \left[1 + \frac{g^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)\,\omega_0}{\omega^3(\omega - \omega_0)} \right] = 0. \tag{36}$$

Второй множитель в (36) имеет полюсы при $\omega_0 = \omega_i$, где ω_i суть собственные значения невозмущённого гамильтониана H_0. Поскольку производная последнего множителя в (36) по ω_0 всегда положительна, этот множитель обращается в нуль один и только один раз в каждом интервале (ω_i, ω_{i+1}). Соответствующие собственные состояния гамильтониана (24) описывают рассеяние одной N-частицы и одной ϑ-частицы. После формальных преобразований эти состояния могут быть представлены в виде

$$| N,\vartheta \rangle = | 0,1_N, 1_k \rangle + \sum_{\mathbf{k}'} \alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}') \, | 0,1_{N'}, 1_{k'} \rangle + $$
$$+ \beta(\mathbf{k}) N \, | 1_V, 0,0 \rangle , \qquad (37)$$

$$\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{g}{\sqrt{2V}} \frac{\beta(\mathbf{k}) f(\omega')}{\sqrt{\omega'}} \left\{ P \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega) \right\} , \qquad (38)$$

$$\beta(\mathbf{k}) = - \frac{g f(\omega)}{\sqrt{2V}\, \omega^{3/2}} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{g^2 \omega}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega')}{\omega'^3} \left(P \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega) \right) \right]^{-1} . \qquad (39)$$

В соотношениях (38) и (39) предусмотрен переход к пределу $V \to \infty$, а сами уравнения имеют предписание, как обращаться с их знаменателями при интегрировании по $\mathbf{k}'$. Это предписание обеспечивает наличие только расходящихся волн во втором члене (37). В эти состояния входят только частицы с импульсом $\mathbf{k}$. Из формул, приведённых выше, можно подсчитать часть S-матрицы, ответственную за рассеяние N- и ϑ-частиц друг другом. Эта часть представляет собой унитарную матрицу

$$\langle N,\vartheta \mid S \mid N',\vartheta' \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \frac{i\pi g^2}{V} \frac{f^2(\omega)}{\omega} \frac{\delta(\omega' - \omega)}{h(\omega) + i \frac{g^2}{4\pi} |k| f^2(\omega)} . \qquad (40)$$

Из (40) мы найдём дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|k|^2} \sin^2 \delta, \qquad (41)$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{g^2}{4\pi} \frac{|\mathbf{k}| f^2(\omega)}{h(\omega)} . \qquad (42)$$

И эти результаты в точности соответствуют результатам, полученным Ли. В трёх последних формулах совершён предельный переход $V \to \infty$, а интеграл, возникающий в $h(\omega)$ [см. (36)], берётся в смысле главного значения.

Остаётся выяснить важное обстоятельство, образуют ли полученные нами состояния (32) и (37) полную систему или же *существуют другие возможные состояния системы, гамильтониан которой задаётся в виде* (24), *которые являются также и собственными состояниями полного гамильтониана*. Если такие состояния существуют, то они должны соответствовать другим решениям задачи о собственных значениях, т. е. другим решениям уравнения (36). Поэтому следует начать с более подробного исследования этого уравнения. Ранее приведённые соображения позволили перебрать все корни уравнения (36), лежащие в области $\omega_0 > \mu$ *). В области $\omega_0 < \mu$ мы нашли, что второй множитель в (36) всё ещё сохраняет положительную производную и что при больших значениях $|\omega_0|$ он стремится к значению, равному $N^2 = 1 - \frac{g^2}{g^2_{\text{крит}}}$. Если константа взаимодействия меньше критического значения, то никаких дополнительных корней уравнение (36) не имеет и рассмотренные состояния образуют полную систему. Однако, если константа взаимодействия больше критической константы, существует один дополнительный корень уравнения (36) в области $\omega_0 < \mu$. Соответствующее собственное состояние уже не является состоянием рассеяния, а представляет собой другое состояние V-частицы **). Это состояние может быть получено непосредственно из нашего формализма и имеет вид

$$|V_{-\lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|h'(-\lambda)|}} \times$$
$$\times \left[N \mid 1_V, 0,0\rangle + \frac{g}{\sqrt{2V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(\omega)}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{\omega+\lambda} \mid 0, 1_N, 1_k\rangle \right], \tag{43}$$

$$h(-\lambda) = 0; \quad \lambda > 0. \tag{44}$$

Выбор нормировки состояния (43) будет пояснён в следующем разделе.

В дополнении I будет показано, что уравнение (36) не имеет других корней, кроме действительных.

III. ВВЕДЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОЙ МЕТРИКИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Отрицательный знак величины N^2 в (34) в случае, когда g больше $g_{\text{крит}}$, очевидно, вызывает трудности при нормировке физического состояния V-частицы (32). Если попытаться подправить нормировку этого состояния умножением на подходящий множитель, то это повлечёт за собой изменение выполненной нами перенормировки,

*) Если обрезающая функция равна нулю для ω, бóльшего некоторого значения Ω, область $\omega_0 > \Omega$ требует специального исследования, поскольку аргументы, приведённые вслед за формулой (36), здесь уже не имеют силы. Действительно, можно показать, что в этом случае имеется ещё один корень в области $\omega_0 > \Omega$, если g меньше, чем критическое значение $g_{\text{крит}}$. Чтобы избежать излишних усложнений в рассуждениях, мы рассмотрим обрезающие функции с большими шлейфами, как, например, $f(\omega) = e^{-\frac{\omega}{\Omega}}$; в этом случае подобные трудности не возникают.

**) В работе Ли, в примечании 4, упомянута вскользь возможность другого стабильного состояния V-частицы, однако исследование его свойств не проведено. Для нас это состояние имеет первостепенное значение.

поскольку мы уже не сможем использовать один и тот же множитель в (16) и (17) *для* перенормировки константы взаимодействия и оператора поля ψ_V. В этом случае приходится вводить специальные множители в гамильтониан (21), описывающий взаимодействие, и легко усмотреть, что таким образом сделать теорию математически состоятельной невозможно. Единственной возможностью спасти нормировку состояния (32) является *определение* нормы состояния $\alpha \langle n_V, n_N, n_k \rangle$ как $|\alpha|^2 (-1)^{n_V}$. Так как в нашем случае величина N^2 действительна и отрицательна, такая неопределённая метрика будет подходящим обрамлением модели Ли[4]. Введение такой метрики не меняет большинства формальных выкладок, проведённых ранее, и в частности состояний рассеяния (37) и S-матрицы (40), которые остаются неизменными. Вместе с тем норма состояния (32) уже будет такой, какой ей полагается быть по новой метрике. Норма состояния (43) будет:

$$\frac{1}{|h'(-\lambda)|}\left[N^2 + \frac{g^2}{2V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)}{\omega(\omega+\lambda)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{|h'(-\lambda)|}\left[1 + \frac{g^2}{2V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)}{\omega}\left[\frac{1}{(\omega+\lambda)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{|h'(-\lambda)|}\,\frac{g^2}{2V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)}{\omega}\left[\frac{1}{(\omega+\lambda)^2} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{\lambda}{\omega^2(\omega+\lambda)}\right] =$$

$$= \frac{h'(-\lambda)}{|h'(-\lambda)|} = -1\,. \qquad (45)$$

С л е д о в а т е л ь н о, н о р м а с о с т о я н и я $|V_{-\lambda}\rangle$ о т р и ц а т е л ь н а и нормируется в (43) к -1.

Для того чтобы сделать формальное рассмотрение максимально простым, удобно ввести[4] здесь «метрический оператор» η, который имеет для состояний свободной частицы (11) следующие матричные элементы:

$$\langle n_V, n_N, n_k | \eta | n'_V, n'_N, n'_k \rangle = \delta_{n_V n'_V}\,\delta_{n_N n'_N}\,\delta_{n_k n'_k}\,(-1)^{n_V}. \qquad (46)$$

Для физических состояний, рассмотренных ранее, имеем:

$$\langle V | \eta | V \rangle = \langle N,\vartheta | \eta | N,\vartheta \rangle = 1\,, \qquad (47)$$

$$\langle V_{-\lambda} | \eta | V_{-\lambda} \rangle = -1\,. \qquad (48)$$

Все недиагональные элементы η, заключенные между этими состояниями, равны нулю. Условия, налагаемые на оператор F для того, чтобы иметь действительные средние значения, заключаются уже не в эрмитовости оператора, а в условии «самосопряжённости», имеющем следующий смысл:

$$F = F^{+} \equiv \eta F^{*} \eta . \tag{49}$$

Детальное рассмотрение предшествующих вычислений показывает, что введение неопределённой метрики математически соответствует тому, что вместо операторов ψ_V^*, ψ_N^* и a^* в уравнения (23) вводятся операторы ψ_V^+, ψ_N^+ и a^+. Такая замена делает также самосопряжённым и гамильтониан. С другой стороны, правая часть (23) теперь не имеет определённого знака, но отрицательные значения этих c-чисел уже не будут противоречить основам теории. Особый случай наблюдаемых значений этих антикоммутаторов исследован в дополнении I.

Если преобразование, приводящее от состояний свободной частицы $|\,n\rangle$ к физическим состояниям $|\,P\rangle$, задаётся в виде матрицы U

$$|\,P\rangle = \sum_{|n\rangle} |\,n\rangle\langle n\,|\,U\,|\,P\rangle , \tag{50}$$

то эта матрица не унитарна, но обладает свойством

$$U^{+} U = \eta U^{*} \eta U = 1 . \tag{51}$$

Важно знать, является ли S-матрица теории унитарной или же она также обладает свойством (51). Наличие свойства (51) не противоречило бы результату (40), так как для всех рассматриваемых физических состояний оператор η обладает единственным матричным элементом $+1$. Уравнение (51) могло бы иметь нетривиальные следствия лишь в том случае, если бы участвовали ф и з и ч е с к и е состояния с неположительными нормами.

Простейшим процессом такого рода является рассеяние ϑ-частиц V-частицами в нормальном состоянии или же в состоянии $|\,V_{-\lambda}\rangle$. В первом случае можно ожидать, что имеют место переходы V-частиц в новые состояния и что эти переходы совершаются с «отрицательной вероятностью». Следующий раздел посвящён рассмотрению этого вопроса.

IV. РАССЕЯНИЕ ϑ-ЧАСТИЦ V-ЧАСТИЦАМИ

Мы исследуем собственные векторы полного гамильтониана, взятого в виде

$$|z\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \Phi_1(\mathbf{k}) N |\,1_V, 0, 1_k\rangle + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \Phi_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \,|\, 0, 1_N, 1_k, 1_{k'}\rangle . \tag{52}$$

Если попрежнему обозначить собственные значения через $m + \omega_0$, непосредственные вычисления приведут к следующим уравнениям для коэффициентов, входящих в (52):

$$\Phi_1(\mathbf{k})(\omega-\omega_0-\delta m)=\frac{1}{N^2}g\sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{\mathbf{k}'}\Phi_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')\frac{f(\omega')}{\sqrt{\omega'}}, \quad (53)$$

$$\Phi_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')(\omega+\omega'-\omega_0)=\frac{g}{\sqrt{2V}}\frac{1}{2}\left[\Phi_1(\mathbf{k})\frac{f(\omega')}{\sqrt{\omega'}}+\Phi_1(\mathbf{k}')\frac{f(\omega)}{\sqrt{\omega}}\right]. \quad (54)$$

В данном случае мы вовсе не заинтересованы в полной системе состояний гамильтониана (52), а будем искать только те состояния, которые соответствуют рассеянию ϑ-частицы V-частицей в нормальном состоянии. Другими словами, мы ищем решение (53) и (54), когда $\Phi_1(\mathbf{k})$ задаётся в виде

$$\Phi_1(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}+\psi(\mathbf{k},\mathbf{k}_0), \quad (55)$$

причём расходящиеся волны содержатся только в $\psi(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$ и $\Phi_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')$. Последнее условие позволяет получить:

$$\Phi_2(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}_0)=\frac{g}{\sqrt{2V}}\frac{1}{2}\left[\Phi_1(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\frac{f(\omega')}{\sqrt{\omega'}}+\right.$$
$$\left.+\Phi_1(\mathbf{k}',\mathbf{k}_0)\frac{f(\omega)}{\sqrt{\omega}}\right]\left[P\frac{1}{\omega+\omega'-\omega_0}+i\pi\delta(\omega+\omega'-\omega_0)\right] \quad (56)$$

или, используя (28) и (33),

$$\Phi_1(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)h(\omega_0-\omega)=$$
$$=\frac{g^2}{2V}\frac{f(\omega)}{\sqrt{\omega}}\sum_{\mathbf{k}'}\frac{f(\omega')\Phi_1(\mathbf{k}',\mathbf{k}_0)}{\sqrt{\omega'}}\left[P\frac{1}{\omega+\omega'-\omega_0}+i\pi\delta(\omega+\omega'-\omega_0)\right]. \quad (57)$$

В противоположность тому, что мы имели в разделе II, мы не можем найти явное решение уравнения (57). Но это вовсе не необходимо для наших целей, так как нам достаточно исследовать свойства S-матрицы. Исследование может быть проведено способом, весьма сходным с методом Мёллера[5] для доказательства унитарности S-матрицы в случае эрмитовости гамильтониана. Следуя Мёллеру, мы вводим:

$$U(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)=$$
$$=i\frac{g^2}{2V}\frac{f(\omega)}{\sqrt{\omega}}\sum_{\mathbf{k}'}\frac{f(\omega')\Phi_1(\mathbf{k}',\mathbf{k}_0)}{\sqrt{\omega'}}\left[P\frac{1}{\omega+\omega'-\omega_0}+i\pi\delta(\omega+\omega'-\omega_0)\right]. \quad (58)$$

Из уравнения (57) мы выводим:

$$\sum_{\mathbf{k}} \Phi_1^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\, U\, (\mathbf{k}, \mathbf{k}_0') =$$

$$= i \frac{g^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \frac{\Phi_1^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) f(\omega)}{\sqrt{\omega}} \frac{f(\omega'') \Phi_1(\mathbf{k}'', \mathbf{k}_0')}{\sqrt{\omega''}} \times$$

$$\times \left[P \frac{1}{\omega + \omega'' - \omega_0'} + i\pi\delta(\omega + \omega'' + \omega_0') \right], \tag{59}$$

$$\sum_{\mathbf{k}''} U^*(\mathbf{k}'' \mathbf{k}_0)\, \Phi_1(\mathbf{k}'', \mathbf{k}_0') =$$

$$= i \frac{g^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \frac{\Phi_1^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) f(\omega)}{\sqrt{\omega}} \frac{f(\omega'') \Phi_1(k'', k_0')}{\sqrt{\omega''}} \times$$

$$\times \left[P \frac{1}{\omega + \omega'' - \omega_0} - i\pi\delta(\omega + \omega'' - \omega_0) \right]. \tag{60}$$

Суммы в (59) и (60) обращаются в нуль только при условии $\omega_0 < 2\mu$, точно так же как соответствующие суммы в работе Мёллера. В этом случае, выражение $\omega + \omega'' - \omega_0$ в физическом интервале частот ω, ω'' (μ, ∞) нигде не обращается в нуль и переходы $V + \vartheta \to N + \vartheta' + \vartheta''$ не происходят.

В случае же, когда $\omega_0 > 2\mu$, эти переходы несколько усложняют картину и мы получаем:

$$\delta(\omega_0 - \omega_0') \left[\sum_{\mathbf{k}} \Phi_1^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\, U\, (\mathbf{k}, \mathbf{k}_0') + \sum_{\mathbf{k}} U^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \Phi_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0') \right] =$$

$$= -\frac{\pi g^2}{V} \delta(\omega_0 - \omega_0') \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \Phi_1^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{f(\omega) f(\omega'')}{\sqrt{\omega\omega''}} \times$$

$$\times\, \Phi_1(\mathbf{k}'', \mathbf{k}_0')\, \delta(\omega + \omega'' - \omega_0). \tag{61}$$

С помощью (55), (57) и (58), имея в виду, что $h(0) = 0$, можно получить:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\, h(\omega_0 - \omega) = i\, U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0). \tag{62}$$

Решение уравнения (62) мы запишем символически в виде

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = i \frac{U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{h(\omega_0 - \omega)_+}, \tag{63}$$

где знак плюс указывает на то, что расходящиеся волны должны быть выбраны в нулях функции $h(\omega_0 - \omega)$. Используя это решение, можно переписать (61) так:

$$\delta(\omega_0 - \omega_0')\,[U(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0') + U^*(\mathbf{k}_0', \mathbf{k}_0)] +$$
$$+ i\delta(\omega_0 - \omega_0') \sum_{\mathbf{k}} U^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\, U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0') \left[\frac{1}{h(\omega_0 - \omega)_+} - \frac{1}{h(\omega_0 - \omega)_-}\right] +$$
$$+ \frac{\pi g^2}{V}\delta(\omega_0 - \omega_0') \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \Phi_1^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{f(\omega) f(\omega'')}{\sqrt{\omega\omega''}} \Phi_1(\mathbf{k}'', \mathbf{k}_0')\,\delta(\omega + \omega'' - \omega_0) = 0. \tag{64}$$

В последнем выражении можно преобразовать квадратную скобку второго члена следующим образом:

$$\frac{1}{h(\omega_0 - \omega)_+} - \frac{1}{h(\omega_0 - \omega)_-} = -2\pi i \sum_{\rho_i} \frac{1}{h'(\rho_i)}\,\delta(\omega_0 - \omega - \rho_i), \tag{65}$$

где суммирование проводится по всем корням уравнения $h(x) = 0$.

Для упрощения обозначений введём матрицы

$$\langle V, \vartheta \mid R^{(1)} \mid V', \vartheta' \rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega')\, U(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \tag{66}$$

$$\langle V_{-\lambda}, \vartheta \mid R^{(2)} \mid V, \vartheta' \rangle = 2\pi\delta(\omega + \lambda - \omega') \frac{U(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\sqrt{-h'(-\lambda)}}, \tag{67}$$

$$\langle N, \vartheta', \vartheta'' \mid R^{(3)} \mid V, \vartheta \rangle =$$
$$= 2\pi\delta(\omega' + \omega'' - \omega) \frac{g}{\sqrt{2V}} \frac{1}{2} \left[\Phi_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{f(\omega'')}{\sqrt{\omega''}} + \Phi_1(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) \frac{f(\omega')}{\sqrt{\omega'}}\right]. \tag{68}$$

Можно показать, что сумма по всем корням в (65), соответствующим состояниям рассеяния раздела II, и последний член в (64) могут быть выражены через матрицу $R^{(3)}$. Таким образом, можно переписать (64) в виде

$$\langle V, \vartheta \mid R^{(1)} + R^{(1)*} + R^{(1)*} R^{(1)} \mid V', \vartheta' \rangle -$$
$$- \langle V, \vartheta \mid R^{(2)*} R^{(2)} \mid V', \vartheta' \rangle + \langle V, \vartheta \mid R^{(3)*} R^{(3)} \mid V', \vartheta' \rangle = 0. \tag{69}$$

Отсюда следует, что S-матрица в теории Ли, которая для состояний, рассматриваемых в настоящем разделе, представляется в виде

$$S = 1 + R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)}, \tag{70}$$

не унитарна, поскольку вероятность переходов $V + \vartheta \to V_{-\lambda} + \vartheta'$, оказывается отрицательной по (69). Как это ожидалось, матрица S

удовлетворяет соотношению

$$\eta S^* \eta S = 1, \tag{71}$$

если диагональные элементы η, принадлежащие состояниям $|V_{-\lambda}, \vartheta\rangle$, положить равными -1. Можно показать также, что тот же самый результат получится, если рассматривать переходы *из* состояний $|V_{-\lambda}, \vartheta\rangle$. Неунитарность преобразования (50), связывающего состояния свободных частиц с физическими состояниями, имеет тесную связь с неунитарностью S-матрицы и делает теорию неприемлемой по физическим соображениям.

Здесь естественно задать вопрос, нельзя ли дать иную интерпретацию формализму теории, используя аргументы теории дырок в квантовой электродинамике. Можно было бы, например, назвать состояния $|V_{-\lambda}\rangle$ вакуумом, а состояния, которые здесь названы вакуумом, назвать состояниями «античастицы». Однако легко видеть, что таким путём формализм теории не может быть улучшен, поскольку никакая новая интерпретация такого рода не изменяет неунитарных свойств S-матрицы в (69).

Итак, нами показано, что теория Ли согласуется с физическими представлениями о вероятности лишь в том случае, если в теорию вводится обрезание и если перенормированная константа взаимодействия меньше критической константы взаимодействия, определяемой соотношением (34а).

В этом случае величина константы N^2 лежит в пределах от нуля до единицы, как это и должно быть согласно общим соображениям[2]. Если не вводить обрезания, критическое значение константы взаимодействия равно нулю.

ДОПОЛНЕНИЕ I

В этом дополнении мы покажем непосредственным вычислением, каким образом неопределённая метрика может быть ответственной за отрицательный знак правой части антикоммутатора

$$\{\psi_V^+(\mathbf{p}), \psi_V(\mathbf{p}')\} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \frac{1}{N^2}. \tag{Д.1}$$

Мы подсчитываем среднее значение этой величины для вакуума при условиях $g > g_{\text{крит}}$, $p = p'$ и получаем:

$$\langle 0 | \{\psi_V^+(\mathbf{p}), \psi_V(\mathbf{p})\} | 0 \rangle = \sum_{|z\rangle} |\langle 0 | \psi_V(\mathbf{p}) | z \rangle|^2 \langle z | \eta | z \rangle. \tag{Д.2}$$

В формуле (Д.2) суммирование производится по полной системе состояний. Можно, например, суммировать по всем физическим состояниям и учесть вклад от физических состояний V-частиц, состояний $|V_{-\lambda}\rangle$ и состояний рассеяния $|N, \vartheta\rangle$. Согласно результатам раздела II вклад этих состояний можно представить в виде

$$\langle 0 | \{\psi_V^+(\mathbf{p}),\ \psi_V(\mathbf{p})\} | 0 \rangle = 1 + \sum_{\mathbf{k}} |\beta(\mathbf{k})|^2 - \frac{1}{|h'(-\lambda)|} =$$

$$= 1 + \sum_{\mathbf{k}} |\beta(\mathbf{k})|^2 + \frac{1}{h'(-\lambda)}. \qquad (\text{Д.3})$$

Если не вводить неопределённую метрику, правая часть положительна и превышает единицу. Это, кстати, является обычным доказательством того, что N^2 есть положительное число, меньшее единицы [2]. В рассматриваемом случае последний член отрицателен, причём ни из каких общих соображений не вытекает, что правая часть (Д.3) должна иметь определённый знак. Мы дадим строгое доказательство того, что эта величина даёт правильное значение, определяемое (33). Доказательство существенным образом опирается на тот факт, что функция $h(z)$, определяемая по (36) и продолженная в комплексную плоскость в виде

$$h(z) = z\left[1 + \frac{g^2}{2V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)\, z}{\omega^3(\omega - z)}\right], \qquad (\text{Д.4})$$

имеет нули только на действительной оси. Действительно, положив $z = x + iy$, получим

$$\operatorname{Im}\frac{h(z)}{z} = \frac{g^2}{2V}\operatorname{Im}\sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)\, z}{\omega^3(\omega - z)} = \frac{g^2}{2V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{f^2(\omega)\, y}{\omega^2[(\omega - x)^2 + y^2]}. \qquad (\text{Д.5})$$

Последнее выражение всегда отлично от нуля, если $y \neq 0$.

Более того, после перехода к пределу $V \to \infty$, функция $h(z)$ преобразуется в аналитическую функцию вида

$$h(z) = z\left[1 + \gamma z \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega) \frac{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\, d\omega}{\omega^2(\omega - z)}\right] \qquad (\text{Д.4а})$$

(где введено обозначение $\gamma = \frac{g^2}{4\pi^2}$), однозначную в комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от точки μ до положительной бесконечности. Мнимая часть функции $h(z)$ в этой части действительной оси разрывна, так как в верхней и нижней полуплоскости $h(z)$ имеет противоположные знаки, тогда как её действительная часть непрерывна. Двузначности $h(z)$ соответствует то обстоятельство, что точка $z = \mu$ является точкой ветвления для квадратных корней типа $h(z)$ (сравни явную форму функции $h(z)$ для частного вида $f(\omega)$, приведённую в дополнении II).

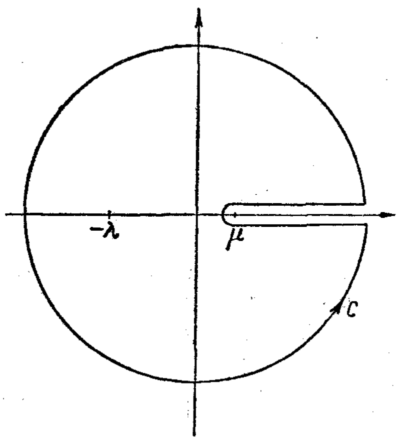
Эти свойства функции $h(z)$ позволяют сделать двумя способами оценку интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{h(z)},$$

взятого вдоль пути, изображённого на рисунке. Прежде всего мы замечаем, что

$$\sum_{\mathbf{k}} |\beta(\mathbf{k})|^2 = \gamma \int_{\mu}^{\infty} f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}\,d\omega\left[h^2(\omega) + \left(\frac{\pi\gamma}{\omega}f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}\right)^2\right]^{-1} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega}{h(\omega-i\varepsilon)}. \quad \text{(Д.6)}$$

Далее, мы разбиваем путь C на две части. Одна из них, C_1, начинается в точке $z=R-i\varepsilon$, где R произвольно велико, а положительное ε произвольно мало, идёт дальше ниже действительной



оси, на расстоянии ε от неё, описывает полуокружность радиуса ε около точки $z=\mu$ в отрицательном направлении, продолжается над действительной осью на расстоянии ε и заканчивается в точке $z=R+i\varepsilon$. Вторая часть пути C_R — это окружность достаточно большого радиуса R, небольшая часть которой около действительной оси опущена.

Совершая предельный переход $\varepsilon\to 0$, при котором вклад в C_1 от полуокружности становится сколь угодно малым, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1}\frac{dz}{h(z)} = -2i\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\int_{\mu}^{\infty}\frac{dz}{h(z-i\varepsilon)} = -2\pi i\sum_{\mathbf{k}}|\beta(\mathbf{k})|^2. \quad \text{(Д.7)}$$

При этом предельном переходе вторая часть C, т. е. C_R, превращается в полную окружность C_R. Соответствующий интеграл легко оценивается с помощью асимптотического представления функции $h(z)$ (сравни замечания, сделанные перед написанием уравнения (43)); оценка даёт:

$$\int_{C_R} \frac{dz}{h(z)} = 2\pi i \frac{1}{N^2}. \tag{Д.8}$$

Следовательно, мы получили:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{h(z)} + \sum_{\mathbf{k}} |\beta(\mathbf{k})|^2 = \frac{1}{N^2}. \tag{Д.9}$$

С другой стороны, наличие у функции $h(z)$ только действительных нулей и знание вычетов функции $h(z)^{-1}$ в полюсах $z=0$ и $z=-\lambda$ позволяют непосредственно взять интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{h(z)} = 1 + \frac{1}{h'(-\lambda)}. \tag{Д.10}$$

Следовательно,

$$1 + \sum_{\mathbf{k}} |\beta(\mathbf{k})|^2 + \frac{1}{h'(-\lambda)} = \frac{1}{N^2}. \tag{Д.11}$$

Уравнения (Д.11) и (Д.3), взятые совместно, дают искомый результат (Д.1). Если константа взаимодействия меньше своего критического значения, подинтегральное выражение в (Д.9) не имеет полюса при $z=-\lambda$ и последний член в (Д.10) должен быть опущен. Остальные матричные элементы как коммутаторов, так и антикоммутаторов могут быть рассмотрены аналогичным путём.

ДОПОЛНЕНИЕ II

В частном случае отсутствия обрезания $f(\omega)=1$, $1/N=0$ и функция $h(z)$ (сравни (Д.4а)) может быть представлена в компактной форме:

$$h(\omega \pm i\varepsilon) = \omega + \gamma \left[\omega + \frac{\pi\mu}{2} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\omega^2-\mu^2}\left(\log\frac{\omega+\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\mu} \mp i\pi\right)\right], \tag{Д.12}$$

если $\omega > \mu$ и $\varepsilon > 0$,

$$h(-\lambda) = -\lambda + \\ + \gamma\left[-\lambda + \frac{\mu\pi}{2} + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\log\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}{\mu}\right], \quad (Д.13)$$

если $\lambda > \mu$.

Отвлекаясь от мнимой части, входящей в формулу (Д.12), оба эти случая могут быть представлены тождественными формулами, если для выражения, стоящего под знаком логарифма, взять его абсолютное значение. Для третьего интервала действительной оси имеем:

$$h(\omega) = \omega + \\ + \gamma\left[\omega - \sqrt{\mu^2 - \omega^2}\arcsin\frac{\omega}{\mu} + \frac{\pi}{2}\frac{\omega^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2}}\right], \quad (Д.14)$$

если $-\mu < \omega < \mu$.

Из последних уравнений можно найти корни уравнения

$$h(-\lambda) = 0 \quad (Д.15)$$

как в случае слабой, так и в случае сильной связи. Для слабой связи из (Д.13) можно найти, что

$$\lambda \approx \frac{\mu}{2}e^{1/\gamma}, \quad \text{если} \quad \gamma \ll 1, \quad (Д.16)$$

причём в этом случае исключается возможность разложения в степенной ряд любого вида*). В случае сильной связи использование уравнения (Д.14) приводит к следующему выражению для корня:

$$-\omega \equiv \lambda \approx \frac{4}{\pi}\frac{\mu}{\gamma}, \quad \text{если} \quad \gamma \gg 1, \quad (Д.17)$$

причём здесь имеется возможность разложения в степенной ряд по γ^{-1}.

---

*) Это обстоятельство представляет некоторый интерес в связи с тем, что ряд попыток получить степенной ряд с конечным радиусом сходимости в некоторых ренормируемых теориях поля с помощью теории возмущений окончился неудачей. См., например, C. A. Hurst, Proc. Cambr. Phil. Soc. **48**, 625 (1952); W Thirring, Helv. Phys. Acta **26**, 33 (1953); A. Petermann, Phys. Rev. **89**, 1160 (1953); R. Utiyama and T. Imamura, Progr. Theor. Phys. **9**, 431 (1953).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. T. D. Lee, Phys. Rev. **95**, 1329 (1954).
2. Это было показано впервые Швингером (не опубликовано), а затем и ещё несколькими авторами. Сравни H. Umezaha and S. Kamefuchi, Progr. Theor. Phys. **6**, 543 (1951); G. Källén, Helv. Phys. Acta **25**, 417 (1952); H. Lehmann, Nuovo Cimento **11**, 342 (1954); M. Gell-Man and F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954). Доказательство этой теоремы содержится в работе Ли[1] (дополнение II).
3. G. Källén, Helv. Phys. Acta **25**, 417 (1952).
4. Неопределённая метрика была уже давно использована в квантовой теории поля. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A 180**, 1 (1942) в случае, который весьма близок к нашему. См. также W. Pauli, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 (1943). Результат Фейнмана (Phys. Rev. **76**, 749 (1949), особенно стр. 756, неявно предполагает использование неопределённой метрики. Сравни W. Pauli, Progr. Theor. Phys. **5**, 526 (1950). Неопределённая метрика использовалась также в квантовой электродинамике при рассмотрении скалярных фотонов. См. S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. **53**, 681 (1950) и K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).
5. C. Møller, Dan. Mat. Fys. Medd. **23**, № 1 (1945); **22**, № 19 (1946).