1952 г. Апрель *Т. XLVI, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕХАНИЗМ И ТЕОРИЯ ПРОБОЯ ТВЁРДЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

А. С. Зингерман

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1802 году русский академик Василий Владимирович Петров построил «огромную наипаче батарею, состоявшую иногда из 4200 медных и цинковых кружков»[1], дававшую огромное по тому времени напряжение. Такого напряжения не имела тогда ни одна физическая лаборатория мира, кроме лаборатории академика В. В. Петрова. Опыты, проведённые академиком В. В. Петровым с этим напряжением, привели к ряду мировых открытий. В одной из таких серий опытов Петров открыл явление пробоя диэлектрика. В стеклянную трубку, наполненную оливковым «или другим каким прозрачным маслом», вставлялись металлические или угольные электроды. Расстояние между электродами было 2—4 *мм*. После соединения электродов с полюсами батареи Петров наблюдал «между шляпкой одной проволоки и угольком или металлическим маленьким конусом, находящимся на конце другой проволоки, свет в виде искр различной величины и яркости»[2].

Следующую серию опытов академик В. В. Петров провёл в воздухе. Когда он стал сближать два угольных электрода, соединённых с полюсами батареи, между ними вспыхнул «весьма яркий свет». Таким образом, открытие электрической дуги сопровождалось одновременно открытием явления электрического пробоя. Уже в то время академик В. В. Петров знал, что наступление этого явления облегчается заострённой формой электродов и требует «огромной батареи», причём чем больше расстояние между электродами, тем больше должна быть батарея, т. е. напряжение. Таким образом, приоритет открытия явления пробоя диэлектриков принадлежит России и русскому академику Василию Владимировичу Петрову.

Вопрос об электрическом пробое имеет чрезвычайно большое практическое значение, в особенности в нашей стране с её широко раскинутой сетью установок и громадным протяжением линий

высокого напряжения. Великие стройки коммунизма: Куйбышевская, Сталинградская и Каховская ГЭС, сооружаемые по инициативе товарища Сталина, требуют перехода электрических линий передачи энергии на сверхвысокие напряжения. Такой переход придаёт ещё более актуальное значение вопросу о пробое диэлектриков.

Особенно благоприятные условия, созданные в советской стране для развития науки, привели к тому, что советским учёным принадлежит ведущая роль в изучении пробоя твёрдых диэлектриков.

Из предлагаемого обзора взглядов на природу пробоя твёрдых диэлектриков видно, что оригинальные и наиболее плодотворные идеи в этой области были впервые предложены советскими учёными: А. Ф. Иоффе, А. А. Смуровым, Я. И. Френкелем и др. Эти идеи разрабатывались и экспериментально проверялись целым рядом советских исследователей. Ведущая роль принадлежит здесь школе Физико-технического института Академии наук СССР: А. Ф. Иоффе, Н. Н. Семёнову, Н. В. Курчатову, Б. М. Вулу, А. П. Александрову, К. Д. Синельникову, Л. Д. Инге, Б. В. Горелику, И. М. Гольдману и др. Следует отметить также работы А. А. Воробьёва (Томский Физико-технический институт), работы по тепловому пробою В. А. Фока, Г. А. Гринберга, А. М. Залесского и др.

Многочисленные экспериментальные исследования пробоя твёрдых диэлектриков в подавляющем большинстве посвящены изучению макроскопических зависимостей. Исследование элементарных микропроцессов, имеющих место при пробое, чрезвычайно затруднено. Этим в значительной мере объясняется отсутствие общепринятой точки зрения на механизм пробоя. Несмотря на то, что это явление изучается уже сравнительно давно, ни один из предложенных механизмов не только не может считаться установленным и доказанным, но даже в достаточной степени подробно разработанным. Гипотезы, предлагавшиеся разными авторами, по мере накопления экспериментальных фактов либо отпадали, либо подвергались существенным изменениям. Для успешности дальнейших работ в этой области чрезвычайно полезно сделать критический обзор всех попыток решения этого вопроса. Однако предварительно необходимо обрисовать основные характерные черты самого явления, твёрдо установленные опытным путём.

Эти основные черты следующие.

1. Пробой диэлектрика происходит не во всём его объёме, а только в отдельных местах. Поперечное сечение (перпендикулярное к полю) пробитого места очень невелико.

2. Процесс, приводящий к пробою, не развивается одновременно во всей толще диэлектрика, а начинается в одном месте и постепенно (с некоторой скоростью) распространяется в теле диэлектрика по направлению к обоим электродам. Часто наблюдается пробой только части толщи диэлектрика (частичный пробой).

3. Пробитое место диэлектрика характеризуется либо механическим, либо термическим (прожог, расплавление), либо химическим разрушениями, а чаще и тем и другим одновременно.

4. Зависимость между током в твёрдом диэлектрике и приложенным к нему напряжением приведена на рис. 1. При малых напряжениях ток увеличивается пропорционально напряжению (область закона Ома). Дальнейшее повышение напряжения сопровождается более быстрым нарастанием тока (область закона Пуля), принимающим чрезвычайно острую форму, когда напряжение достигает предпробивных значений.

В точке *A* ток продолжает расти при постоянной величине напряжения и его рост продолжается даже в том случае, когда напряжение уменьшается. Таким образом, точка *A* характеризуется нестабильными процессами в диэлектрике, приводящими к чрезвычайно сильному увеличению проводимости диэлектрика. В дальнейшем процесс увеличения проводимости диэлектрика непрерывно продолжает самостоятельно развиваться и приводит к катастрофе, т. е. разрушению диэлектрика. Точка *A* характеризует пробой или начало пробоя диэлектрика.

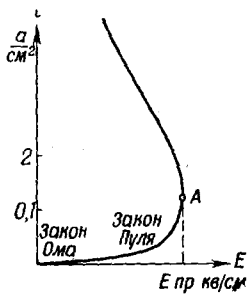

Рис. 1.

Б. М. Вул [8] следующим образом характеризует пробой диэлектрика:

«Наблюдаемый обычно при эксперименте пробой есть последний этап разрушения диэлектрика. Ему предшествует утрата диэлектриком электрической прочности. Наступающее вследствие этого выделение энергии вызывает видимое явление пробоя: образование искровых разрядов в диэлектрике, механическое разрушение, когда пробою подвергается твёрдый диэлектрик. Диэлектрик оказывается пробитым именно потому, что при предельной напряжённости он теряет электрическую прочность, перестаёт быть диэлектриком. Обычно оба этапа — диэлектрическое разрушение и пробой — непосредственно следуют друг за другом и рассматриваются как одно явление».

До точки *A* диэлектрик обладает электрической прочностью, хотя проводимость его непрерывно увеличивается. Увеличение проводимости диэлектрика происходит за счёт передачи диэлектрику электрическим полем определённой энергии.

Постепенное количественное изменение проводимости до точки *A* сменяется скачкообразным в точке *A*. После точки *A* материал не только обладает большей проводимостью, но и новой закономерностью поведения. Например, до точки *A* уменьшение напряжения вызывает уменьшение проводимости, что характерно для непроводниковых материалов; после точки *A* уменьшение напряжения вызывает увеличение проводимости, что свойственно проводни-

ковым материалам. До точки *A* электрическая энергия, подводимая к материалу, переходит главным образом в потенциальную энергию поляризации, в обратимый вид энергии. После точки *A* подводимая электрическая энергия переходит главным образом в необратимый вид энергии—тепловую. Таким образом, передаваемая энергия до точки *A* переходит в одну форму, после точки *A* — в другую. Поэтому точку *A* можно характеризовать как точку изменения некоторых свойств материала. Рассматриваемое явление хорошо иллюстрирует известный закон диалектики о переходе количества в качество[4].

Переход материала в точке *A* из класса непроводников в класс проводников характеризуется потерей электрической прочности. В новом состоянии материала происходит гораздо более интенсивное поглощение электрической энергии, которая вызывает прожог, проплавление, механическое и т. п. разрушение материала. Если ограничить энергию, подводимую к материалу, то указанные последствия могут не наступить, разрушения материала не произойдёт. Это можно наблюдать при испытании, например, некоторых фарфоровых изоляторов (без глазури) очень маломощным трансформатором. При повышении напряжения в точке *A* происходит резкое увеличение тока с резким падением напряжения — изолятор теряет все признаки непроводника. Однако никаких разрушений материала не происходит. Такие кратковременные испытания одного и того же образца могут быть повторены. Но увеличение мощности трансформатора или значительное увеличение длительности испытания вызывает пробой с видимым разрушением материала. После подобного испытания повторить опыт с тем же образцом нельзя; образец уже не обладает электрической прочностью. В обычных условиях ограничение в подводе энергии не имеет места, и за потерей электрической прочности следует пробой. Пробой происходит после точки *A* в новом состоянии материала, тогда, когда он становится проводником.

Сказанное иллюстрируется двумя осциллограммами напряжения, приведёнными на рис. 2. Первая осциллограмма (а) снята с импульсным генератором, имеющим малое сопротивление. После потери изоляцией (слюда, проклеенная компаундной массой) электрической прочности наступает её разрушение. Напряжение после пробоя не восстанавливается. Вторая осциллограмма (б) снята на таком же образце с тем же генератором и дополнительно приключённым большим сопротивлением. Из осциллограммы видно, что после потери электрической прочности, которая характеризуется резким спадом напряжения, оно немедленно восстанавливается. Это указывает на то, что разрушения изоляции не произошло. Разрушение происходит только после ряда, иногда нескольких десятков, резких спадов напряжения, причём величина напряжения, при котором происходят последующие спады, бывает иногда больше, чем при предыдущих.

5. Продолжительность процессов потери электрической прочности и пробоя обычно очень невелика. Время, необходимое для полного пробоя, зависит от толщины диэлектрика, от величины напряжённости поля и других факторов. В некоторых твёрдых диэлектриках толщиной 1 *мм* время, в течение которого развивается процесс пробоя, имеет порядок 10^{-6} сек. При приложении к диэлектрику кратковременных импульсов напряжения пробивное напряжение увеличивается с уменьшением длительности импульса.

6. Пробой твёрдых диэлектриков имеет статистический характер. Как время пробоя, так и напряжение, которое вызывает пробой, для одних и тех же диэлектриков колеблются в более или менее широком диапазоне. Разброс напряжения может иметь величину, достигающую более $\pm 50\%$ от среднего значения.

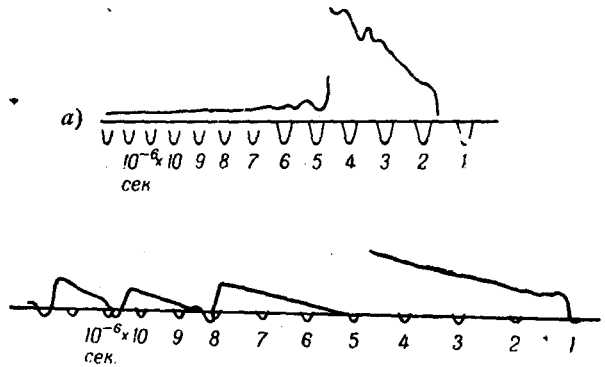

Рис. 2.

7. Средняя напряжённость поля, которая вызывает пробой, для большинства твёрдых диэлектриков имеет величину порядка 10^5—10^6 *в/см*.

Для щёлочно-галоидных кристаллов пробивная напряжённость поля тем выше, чем больше энергия решётки. Эта зависимость имеет приблизительно линейный характер.

8. Существуют три рода пробоя: электрический, тепловой и химический, когда увеличение проводимости обусловлено электрическими, тепловыми или химическими факторами. Последний вид пробоя в этой работе не рассматривается.

Пробивная напряжённость поля зависит от ряда факторов, в том числе от температуры. При тепловом пробое пробивная напряжённость поля уменьшается с ростом температуры. При электрическом пробое влияние температуры на пробивную напряжённость поля ещё окончательно не установлена. Имеющиеся опытные данные разноречивы. Наиболее поздние опыты указывают на увеличение пробивной напряжённости для некоторых диэлектриков с ростом температуры.

2. ТЕОРИЯ УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ А. Ф. ИОФФЕ

Первая теория пробоя твёрдых диэлектриков рассматривала пробой как результат механического разрыва электрическим полем решётки тела (теория Роговского[5]). Эта теория приводила к резким противоречиям с данными опыта. Попытки улучшения этой теории (самим Роговским[5] и Горовиц[6] — теория трещинок) базировались на некоторых произвольных величинах, что давало возможность устранить некоторые противоречия. Однако искусственность положений, лежащих в основе последних теорий, и неспособность механических теорий объяснить основные черты явления делают их неприемлемыми.

Совершенно другой взгляд на природу пробоя твёрдых диэлектриков был развит А. Ф. Иоффе[7]. А. Ф. Иоффе трактует пробой как процесс катастрофически быстрого увеличения проводимости, следствием которого является механическое или термическое разрушение диэлектрика. Таким образом, признаком наступления пробоя является увеличение плотности электрического тока до некоторой критической величины. Напряжённость поля, которая вызывает такое увеличение тока, является пробивной.

Сам механизм пробоя представляется следующим. Пусть диэлектрик находится в однородном электрическом поле, направленном по оси X. Пусть в межэлектродном пространстве в единице объёма и в единицу времени образуется каким-нибудь неударным механизмом n_0 «первичных» ионов. Если l — расстояние, проходимое ионом вдоль поля между двумя ионизующими столкновениями, то число ионизаций, производимых одним ионом на единице длины пути (по направлению поля), равно $\frac{1}{l}$. Далее предполагается, что каждое столкновение иона, ускоренного электрическим полем, ведёт к ионизации. Если в слой dx единичного сечения, находящийся на расстоянии x от первого электрода, в единицу времени вступает n ионов, тогда число ионов dn, образованных в слое, равно

$$dn = \frac{n\,dx}{l}$$

и

$$n = n_0 e^{\frac{x}{l}}.$$

Плотность ионного тока у второго электрода будет

$$i = e\int_0^d n\,dx = en_0 l\left(e^{\frac{d}{l}} - 1\right),$$

где e — заряд иона, а d — расстояние между электродами.

В отсутствии процесса размножения плотность ионного тока

$$i_0 = en_0 d,$$

а следовательно,

$$i = \frac{i_0 l}{d}\left(e^{\frac{d}{l}} - 1\right). \qquad (2,1)$$

Пренебрегая искажением поля, обусловленным наличием ионов, можно считать справедливым соотношение:

$$\frac{l}{d} = \frac{U_i}{U},$$

где U_i — ионизационный потенциал, а U — напряжение, приложенное к диэлектрику. Плотность тока, текущего через диэлектрик, может быть тогда представлена в виде:

$$i = i_0 \frac{U_i}{U}\left(e^{\frac{U}{U_i}} - 1\right).$$

Далее принимается, что пробой наступает при достижении током некоторой, достаточно большой величины, т. е. при условии, что отношение

$$\frac{i}{i_0} = \frac{U_i}{U_k}\left(e^{\frac{U_k}{U_i}} - 1\right) = K$$

равно или превосходит некоторое определённое число. Из последнего соотношения определяется $\frac{U_k}{U_i}$ и отсюда критическое значение напряжённости поля

$$E_k = \frac{U_k}{d}, \qquad (2,2)$$

вызывающего пробой.

Итак, в предложенной Иоффе теории пробоя существенным является наличие некоторого постоянно действующего механизма воспроизведения «первичных» ионов. Мало того, для обеспечения продолжительного самостоятельного тока такой механизм должен быть не внешнего происхождения (например, фотоионизация от постороннего источника), а обусловлен процессами, происходящими в самом диэлектрике. Однако теория Иоффе такого механизма не предусматривает.

Необходимо также отметить, что в теории Иоффе оставалось неясным, следует ли ионизацию ударом понимать как вырывание ионов определённого знака из узлов решётки, или это — ионизация нейтральных молекул или атомов. В первом случае «ионизация» сопровождается разрушением решётки, усиливающимся каждой проходящей лавиной ионов. Но тогда неясно, почему будут вырываться или «ионизоваться» ионы только одного знака. Если же последнее и будет иметь место, то после прохождения лавины останутся «неионизованными» ионы другого знака и постепенно будет накапливаться объёмный заряд, который будет существенно влиять на развитие процесса. В случае ионизации нейтральных частиц продуктом

ионизации будут заряженные частицы обоих знаков. Однако теория совершенно игнорирует частицы другого знака, хотя их роль, если это будут электроны, гораздо более активная.

Проверка на опытах показала, что выводы теории находятся в противоречии с экспериментальными данными.

Малые времена запаздывания пробоя, полученные из опыта, не согласуются с теорией, в которой основную роль играют тяжёлые частицы.

Согласно (2,1) из теории Иоффе следует, что при постоянной напряжённости поля ионизационный ток должен увеличиваться в зависимости от толщины диэлектрика по экспоненциальному закону. Опыты автора теории показали, что при толщинах более 0,1 *мм* такая зависимость не имеет места.

Наконец, из (2,2) следует, что пробивная напряжённость поля увеличивается с уменьшением толщины диэлектрика. Опыты Александрова и Иоффе[8] показали, что при уменьшении толщины диэлектрика до $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ *см* пробивная напряжённость поля не изменяется.

Опыты Аустена и Уайтхеда[9] над более тонкими слоями слюды показали, что при уменьшении толщины от $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ *см* до $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ *см*, т. е. в три раза, средняя пробивная напряжённость увеличивается незначительно — примерно на 36%.

Несмотря на то, что экспериментальная проверка теории Иоффе показала её несостоятельность, тем не менее теория сыграла значительную роль в развитии взглядов на природу пробоя твёрдых диэлектриков. Вместо механических теорий была предложена идея ударной ионизации. Правда, в таком виде эта идея ещё находилась в противоречии с наблюдаемыми фактами, но в дальнейшем, претерпев некоторые существенные изменения и будучи более полно разработана другими авторами, она оказалась весьма полезной и плодотворной.

3. ИОНИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРИИ А. А. СМУРОВА, А. А. ВОРОБЬЁВА И Е. К. ЗАВАДОВСКОЙ

а) Теория А. А. Смурова

Дальнейшее развитие теория ионизации получила в работах А. А. Смурова[10]. Механизм пробоя твёрдых диэлектриков согласно представлениям Смурова таков.

Под влиянием электрического поля происходит отрыв электронов от атомов — электростатическая ионизация. Такой отрыв электронов вполне возможен, по мнению Смурова, в случае отрицательных ионов, а также в сложных молекулах, в которых электроны движутся по большим орбитам, и значительно облегчён тогда, когда атом находится на границе раздела между диэлектриком и электродом. Этих оторванных электронов может быть доста-

точно для осуществления коротких импульсов тока. При длительном приложении напряжения действует также механизм ударной ионизации, причём ионизуют электроны, а не ионы. Последние по причине гораздо меньшей средней длины свободного пробега и очень большой массы не способны ионизовать.

Электроны, освобождённые из атомов в результате электростатической ионизации, движутся под действием электрического поля к аноду. В головной части такого движущегося электронного облака создаётся интенсивное местное электрическое поле. Это поле делает возможной дальнейшую электростатическую ионизацию (в особенности отрицательных ионов), которая предшествует движению электронного облачка и увеличивает само облачко. Внутри облачка вперемежку находятся как электроны, так и положительные ионы, образовавшиеся при прохождении головной части облачка. Поэтому внутри облачка трудно ожидать появления больших градиентов потенциала, необходимых для электростатической ионизации. Внутри облачка будет происходить только ударная ионизация электронами, ускоренными электрическим полем. Для того чтобы электроны облачка не были притянуты нейтральными атомами, необходимо, чтобы градиент потенциала электрического поля имел достаточную величину. Скорость продвижения облачка от катода к аноду весьма велика, так как она соответствует скорости движения электронов. После прихода первого облачка к аноду образуется столб положительных ионов, в котором продолжает происходить ударная ионизация электронами, непрерывно образующимися в результате электростатической ионизации.

Напряжённость поля, при которой может происходить электростатическая ионизация, определяется Смуровым следующим образом. Смуров вычисляет траекторию движения валентного электрона в атоме, когда атом находится в электрическом поле. Траектория представляет собой сложную винтообразную линию. При увеличении напряжённости поля траектория перемещается и достигает некоторого предельного положения. На этой предельной траектории электрон находится в равновесии, которое в некоторых точках траектории является неустойчивым. Самый ничтожный толчок, полученный электроном извне (например, при тепловом соударении), может его вывести из состояния равновесия, и тогда электрон будет двигаться под действием поля, непрерывно удаляясь от атома. Величина напряжённости поля, обусловливающая переход электрона на предельную траекторию, зависит от ориентации первоначальной орбиты электрона по отношению к направлению поля. Эта напряжённость поля будет наименьшей тогда, когда электрическая сила лежит в плоскости первоначальной траектории. Для этого случая

$$E = 0{,}086\,\frac{e}{\rho^2}\,\frac{Z}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{Z}}\right),$$

где ρ — радиус орбиты электрона, а Z — число валентных электронов. Для водородоподобного атома $Z = 1$, $\rho = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ *см* и

$$E \cong 5 \cdot 10^8 \text{ в/см}$$

при температуре абсолютного нуля.

Если температура диэлектрика выше нуля, то напряжённость поля, необходимая для ионизации, будет меньше, так как часть работы, затраченной на ионизацию, совершается за счёт тепловой энергии электрона. Поскольку тепловая энергия электрона мала по сравнению с работой ионизации, уменьшение критической напряжённости поля, при которой происходит электростатическая ионизация, невелико и порядок величины не меняется.

Другим фактором, могущим изменить критическую напряжённость поля, по мнению Смурова является магнитное поле движущихся электронов. Это поле может возникнуть вследствие изменения орбит электронов под действием внешнего электрического поля даже в тех атомах, в которых магнитные поля движущихся электронов взаимно компенсируются в нормальном состоянии. Зависимость пробивной напряжённости от магнитного поля объясняется влиянием последнего на движение электрона. Магнитное поле в зависимости от его ориентации может вызвать как увеличение, так и уменьшение пробивной напряжённости. Относительное изменение пробивной напряжённости поля, по вычислениям Смурова, равно

$$1 \pm \frac{2{,}5\sqrt{\rho^3}}{c\sqrt{mZ}} H,$$

где H — напряжённость магнитного поля, m — масса электрона, а c — скорость света. Для водородоподобного атома поправка к единице составляет 10^{-9} H. Таким образом влияние магнитного поля мало; оно не меняет порядка величины пробивной напряжённости.

Наконец, Смуров указывает ещё на третий фактор, понижающий пробивную напряжённость поля, — это влияние электрического поля соседних атомов, молекул и ионов, т. е. влияние поля решётки кристалла. Хотя Смуров указывает, что это влияние может быть велико, однако количественно он его не определяет. Это влияние было учтено Ф. Ф. Волькенштейном методами квантовой механики (см. ниже). Оно оказалось очень значительным — способным понизить пробивную напряжённость поля на несколько порядков. Без его учёта градиент потенциала, при котором может произойти электростатическая ионизация, чрезвычайно велик, примерно на три порядка больше полученного из опыта.

Несмотря на то, что Смуров не довёл вычисления до конца, вследствие чего полученные им результаты оказались неприемлемыми, идеи, положенные в основу его теории, сыграли значительную роль. Смуров впервые предложил идею электростатической ионизации,

которая спустя десять лет была более подробно разработана методами квантовой механики. Идея ударной ионизации в твёрдых диэлектриках была также модернизирована Смуровым; в основу этого процесса было положено действие лёгких частиц — электронов, а не тяжёлых ионов. Справедливость этого предположения была подтверждена опытами Гиппеля[11]. Далее, Смуров обратил внимание на необходимость непрерывного образования начальных ионизующих частиц. Представления Смурова в общем более чётки, чем развитые до него, однако они ещё крайне несовершенны. Вопрос о механизме и причинах разрушения диэлектрика автором вовсе не затронут. В связи с этим не разработан механизм прорастания пробоя. Механизм проводимости диэлектрика в процессе пробоя и после его завершения недостаточно разработан и в таком виде неприемлем. Влияние различных факторов на процесс пробоя не выяснено. Наконец, отсутствует строгая математическая теория как отдельных процессов, так и всего явления в целом.

б) Теория А. А. Воробьёва и Е. К. Завадовской

Ионизационная теория пробоя, предложенная Иоффе, обладала в числе других двумя существенными недостатками, которые делали её неприемлемой. Как уже отмечалось выше, роль ионизующего агента в теории Иоффе отводилась ионам, что противоречило экспериментальным данным. Частицы с такой большой массой, как ионы, не в состоянии обеспечить наблюдаемую скорость развития процесса. Это затруднение было устранено Смуровым, который приписал ионизующее действие не тяжёлым частицам — ионам, а лёгким — электронам.

Второй крупный недостаток в теории Иоффе заключается в том, что она приводит к чрезмерно большой напряжённости поля, необходимой для наступления пробоя. Если под ионизацией подразумевать вырывание электрона из нейтрального атома или отрицательного иона в результате удара частицы, то замена иона как ионизующей частицы электроном значительно уменьшает необходимую напряжённость поля. Однако, если принять, что необходимую для ионизации энергию электрон приобретает в течение одного пробега, напряжённость поля должна быть:

$$E = \frac{U_i}{l}.$$

В лучшем случае, если движение электрона совпадает с направлением поля и длина пробега равна расстоянию между соседними атомами в диэлектрике (порядка 10^{-8} *см*), то, учитывая величину ионизационного потенциала (порядка нескольких *эв*), наименьшая напряжённость поля получается порядка 10^8 *в/см*, т. е. примерно на два порядка больше наблюдаемой.

Последнее затруднение стараются устранить в своей теории А. А. Воробьёв и Е. К. Завадовская[13]. Воробьёв и Завадовская считают, что пробой щёлочно-галоидных кристаллов происходит вследствие разрушения решётки ударом электронов. Обозначая через τ время от начала ускорения электрона до момента его столкновения с решёткой, при котором она разрушается, авторы определяют скорость сноса, т. е. среднюю скорость электрона по направлению электрического поля v. По определению авторов

$$v = \frac{e}{m} E\tau,$$

а энергия, полученная электроном от электрического поля,

$$W = \frac{eE^2}{m} \tau^2.$$

Авторы предполагают, что эта энергия тратится на разрушение решётки, и принимают её пропорциональной энергии решётки U

$$\frac{eE^2}{m} \tau^2 = bU.$$

Так как ни величины b и τ, ни зависимость τ от E авторами не определяются, то нет возможности установить согласие теории с результатами опыта. Однако оценку теории можно произвести косвенным путём. Обозначив через l расстояние, которое пробегает электрон между двумя столкновениями, разрушающими решётку, получим

$$l = v\tau = \frac{bU}{eE}.$$

Пользуясь опытными данными для пробивных напряжений и энергии решёток щёлочно-галоидных кристаллов, приведёнными в работе Воробьёва и Завадовской, получим значения для l, принимая для b наименьшее возможное значение, равное единице. Эти значения, а также отношение l к постоянной решётки a приведены в таблице I.

Таблица I

Кристалл	U (*эв*)	E (*в/см*)	l (*см*)	a (*см*)	l/a
KJ	6,4	$0{,}57 \cdot 10^6$	$10{,}8 \cdot 10^{-6}$	$3{,}5 \cdot 10^{-8}$	310
KBr	6,8	$0{,}70 \cdot 10^6$	$9{,}6 \cdot 10^{-6}$	$3{,}3 \cdot 10^{-8}$	290
NaJ	7,05	$0{,}69 \cdot 10^6$	$10{,}3 \cdot 10^{-6}$	$3{,}2 \cdot 10^{-8}$	320
KCl	7,2	$1{,}00 \cdot 10^6$	$7{,}2 \cdot 10^{-6}$	$3{,}1 \cdot 10^{-8}$	230
NaBr	7,55	$0{,}81 \cdot 10^6$	$9{,}5 \cdot 10^{-6}$	$3{,}0 \cdot 10^{-8}$	320
NaCl	7,8	$1{,}5 \cdot 10^6$	$4{,}9 \cdot 10^{-6}$	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$	170
KF	8,4	$1{,}8 \cdot 10^6$	$4{,}66 \cdot 10^{-6}$	$2{,}7 \cdot 10^{-8}$	170
NaF	9,3	$2{,}4 \cdot 10^6$	$3{,}7 \cdot 10^{-6}$	$2{,}3 \cdot 10^{-8}$	160
LiF	10,4	$3{,}1 \cdot 10^6$	$3{,}35 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-8}$	170

Из таблицы видно, что это отношение колеблется от 160 до 320. В действительности это отношение должно быть ещё больше, так как в подсчёте было принято, что всю накопленную энергию электрон передаёт при ударе и что его движение происходит только по направлению поля.

Таким образом, теория Воробьёва и Завадовской базируется на допущении, что электрон пробегает в кристалле без столкновений расстояние, в несколько сот раз большее расстояния между узлами решётки. Такое допущение неприемлемо. Между двумя разрушающими ударами электрон будет испытывать много соударений, при которых часть накапливаемой в поле энергии электрон будет передавать решётке. Это обстоятельство в теории Воробьёва и Завадовской не учтено. Вторым основным недостатком теории Воробьёва и Завадовской является то, что эта теория не может объяснить резкого увеличения тока, наблюдаемого при пробое.

4. ТЕОРИЯ ИОНИЗАЦИИ МЕДЛЕННЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ А. ГИППЕЛЯ

Теория Гиппеля[13] основана на двух предположениях.

Первое предположение состоит в том, что необходимую для ионизации энергию электроны приобретают не за один приём, а в течение нескольких пробегов.

Второе предположение — что энергия, приобретаемая электронами в электрическом поле, при некоторых условиях больше теряемой ими при столкновениях с решёткой. Та напряжённость поля, при которой начинают удовлетворяться эти условия, принята Гиппелем за пробивную.

Так как энергия электронов, при которой начинает удовлетворяться второе условие, невелика — порядка 0,1 — 0,2 *эв*, то теория Гиппеля была названа теорией ионизации медленными электронами.

Суть теории Гиппеля[13] заключается в следующем. В каждом диэлектрике имеется некоторое число свободных электронов, которые могут ускоряться электрическим полем, приложенным к диэлектрику. Столкновения электронов с атомами и молекулами сопровождаются потерей энергии на возбуждение колебательного движения частиц (упругие столкновения) и на оптическое возбуждение или ионизацию (неупругие столкновения). Вероятность P возбуждения колебания частиц и количество энергии Q, затраченной на это, зависят от кинетической энергии электрона и схематически изображаются кривой, приведённой на рис. 3. Кривая должна иметь максимум. Действительно, электроны с очень малой и очень большой энергией при столкновении с частицей передают ей мало энергии: в первом случае — вследствие малого количества энергии, которой обладает электрон, во втором случае — вследствие малой продолжительности времени взаимодействия между электроном и частицей.

Если между двумя столкновениями электрон приобретает в среднем энергию, меньшую величины W_B, соответствующей максимуму кривой рис. 3, то электрон может расходовать энергию, приобретённую в поле, только на раскачку атома. При увеличении напряжённости поля средняя энергия, приобретаемая электроном между столкновениями, увеличивается и превышает W_B, в то же время энергия, расходуемая электроном на раскачку атома, уменьшается. Появляется возможность накопления энергии. Таким образом, если на длине одного пробега l электрон приобретает в среднем энергию, меньшую W_B, то ионизация невозможна. Если же средняя энергия, приобретаемая электроном в течение одного пробега, хотя и меньше W_i — энергии ионизации, но больше W_B, то ионизация возможна. Следовательно, по мнению Гиппеля, критическую напряжённость поля, могущую вызвать ионизацию и, как дальше будет показано, пробой, имеет поле, в котором электрон в течение одного пробега приобретает среднюю энергию, равную W_B, соответствующую максимуму кривой вероятности потери энергии на раскачку атома. В действительности напряжённость поля может быть несколько меньше.

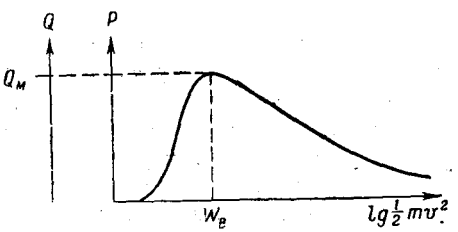

Рис. 3.

При ионизации электрон отрывает от отрицательного иона или нейтрального атома электрон, который в свою очередь вместе с первым ускоряется и ионизует. Постепенно образуется лавина электронов, которая движется от катода к аноду и оставляет по пути положительный объёмный заряд. Вследствие этого связь между структурными элементами диэлектрика (атомами или ионами), существовавшая до ионизации, нарушается и возникает механическое напряжение между ними. Если структура диэлектрика недостаточно эластична, что имеет место при низких температурах, происходит скалывание и появляется трещинка. По мере продвижения лавины электронов к аноду вслед за ней растёт трещинка. Рост трещинки происходит не непрерывно, а скачками, наступающими тогда, когда напряжение, вызывающее скалывание, достигает определённой величины. Последнее зависит от величины и распределения объёмного заряда.

Из предложенного механизма можно сделать следующие заключения:

1. Критическая пробивная напряжённость поля приближённо равна

$$E = \frac{W_B}{l},$$

причём единственным условием наступления пробоя является начало ионизации.

2. В диэлектриках с кристаллической решёткой должны существовать предпочтительные направления пробоя, а именно те направления, по которым сила связи между частицами меньше и, следовательно, вероятность потери энергии на раскачку меньше.

3. Сила тока, сопровождающая пробой, должна расти по экспоненциальному закону, характерному для процесса образования лавины.

4. Для начала пробоя необходимо ограниченное число начальных свободных электронов. Воспроизводства начальных электронов не требуется.

5. Основными активными агентами ионизации являются медленные электроны.

Доказательство справедливости своей теоремы Гиппель видит в следующем.

В твёрдом или жидком диэлектрике частицы находятся достаточно близко друг к другу. Электрон находится под воздействием не только поля собственного атома, но и поля соседних атомов. Ионизационный потенциал гораздо меньше, чем в случае изолированного атома. Он примерно такой же, как потенциал возбуждения. Начало свечения диэлектрика может быть принято в первом приближении за начало ионизации. Поэтому для диэлектриков с кристаллической структурой напряжённость электрического поля, при которой начинается свечение диэлектрика, умноженная на постоянную решётки, должна быть пропорциональна частоте излучения. Эта закономерность подтверждается опытами автора.

В основе этой аргументации лежит утверждение автора о том, что электрон с энергией ниже W_B, соответствующей максимуму потерь на раскачку, возбуждать не может. Это утверждение не очевидно и нуждается в более подробном рассмотрении.

Отложим по оси ординат напряжённость электрического поля, а по оси абсцисс — энергию W, которую электрон приобретает в поле в течение одного пробега (рис. 4). Зависимость между этими величинами изображается прямой линией, обозначенной на рис. 4 буквой E. На том же рисунке дана зависимость между энергией Q, теряемой электроном на раскачку атома при каждом соударении, и энергией электрона W. Для Q и W выбран одинаковый масштаб. Кроме этого проведём на рисунке прямую A под углом 45°.

Допустим, что диэлектрик находится в поле с напряжённостью E_1 и в течение каждого пробега электрон приобретает энергию W_1. После первого соударения у электрона останется энергия W_1', равная длине отрезка B_1A_1. После второго пробега энергия электрона

будет $W_2 = W_1 + W'_1$, а после второго соударения — W'_2, измеряемая длиной отрезка B_2A_2. После третьего пробега электрон будет обладать энергией $W_3 = W_1 + W'_2$, а после третьего соударения — $W'_3 = B_3A_3$. Нетрудно видеть, что после каждого очередного соударения энергия электрона будет либо больше, либо меньше W' и будет стремиться к последнему значению. W' определяется пересечением кривой Q с прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку A_1. Когда энергия электрона станет равной W', электрон будет в равновесном состоянии: в среднем при каждом соударении электрон будет терять на раскачку атома столько энергии, сколько он в среднем приобретает в течение

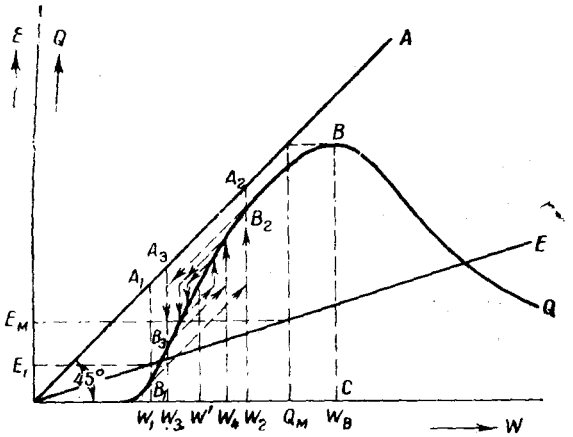

Рис. 4.

одного пробега. С увеличением напряжённости поля увеличивается энергия, которую электрон приобретает в течение одного пробега, и следовательно, энергия равновесного состояния. При некоторой величине напряжённости поля равновесное состояние становится невозможным. Это, очевидно, будет тогда, когда остаток энергии после каждого соударения будет непрерывно увеличиваться.

Наибольшая энергия $Q_м$, которую электрон может передать атому при столкновении, равна CB — ординате у максимума кривой Q. Та напряжённость поля $E_м$, при которой электрон набирает такую энергию в течение одного пробега, является предельной, при которой ещё возможно равновесное состояние. Однако это равновесное состояние не будет устойчивым. Все равновесные состояния, при которых средняя энергия электрона меньше $Q_м$, являются устойчивыми. Следовательно, всем значениям напряжён-

ности поля ниже $E_м$ соответствует равновесное состояние, в котором электрон не может приобрести большой энергии, достаточной для возбуждения. При значении $E \geqslant E_м$ не может быть равновесного состояния; после каждого пробега энергия электрона будет непрерывно увеличиваться. Таким образом, критическая напряжённость поля, при которой начинается возбуждение, будет равна $E_м$ и $aE_м = h\nu$. В этой формуле a — постоянная решётки, h — постоянная Планка, а ν — частота начального свечения. Эта зависимость, как было указано, подтверждена опытами Гиппеля.

Если кривая Q изображает суммарные потери на раскачку и возбуждение, то аналогичными рассуждениями можно показать, что при напряжённости поля, соответствующей максимуму, начнутся ионизационные процессы. Эта напряжённость поля будет больше, чем напряжённость, соответствующая началу возбуждения. Можно поэтому согласиться с доводами автора, что эксперименты подтверждают теорию начала ионизации. Однако это не может служить подтверждением того, что начало ионизации обязательно ведёт к пробою. Последнее подтверждается другими косвенными экспериментальными данными. Представление о ионизации как об единственном условии возникновения пробоя приводит к заключению о независимости пробивной напряжённости поля от толщины диэлектрика. Это положение приближённо подтверждается экспериментом.

Вторым аргументом в пользу справедливости своей теории Гиппель считает экспериментальные данные о существовании предпочтительных направлений пробоя в диэлектриках с кристаллической решёткой. В кристалле каменной соли ближайший одноимённый ион расположен по диагонали квадрата (расстояние между ними $d = \sqrt{2}\,a$), затем по диагонали куба ($d = \sqrt{3}\,a$) и по ребру куба ($d = 2a$). Чем ближе расположены частицы, тем ниже потенциальный барьер между ними, тем меньше сила связи и тем ниже максимум потерь на раскачку, а следовательно (см. рис. 4), тем меньше $E_м$. Поэтому в кристаллах каменной соли следует ожидать сначала появления пробоев в направлении плоской диагонали. При повышении напряжения должны возникать пробои в направлении диагонали куба и затем, при ещё более высоком напряжении, — по всем направлениям. Эти ожидания оправдываются экспериментами Гиппеля.

Однако опыты Вальтера и Инге[14] не подтверждают данных Гиппеля. По данным этих авторов направление распространения пробоя в кристаллах зависит от характера поля и температуры. В кристаллах каменной соли при низких температурах и положительном постоянном напряжении пробой распространяется преимущественно по диагонали куба.

Следует также отметить, что предпочтительность пробоя в направлении ближайшей частицы вытекает и из других ионизацион-

ных теорий и не является исключительным признаком справедливости теории ионизации медленными электронами.

Предложенный Гиппелем механизм пробоя не был им математически разработан. Математическая теория в применении к щёлочно-галоидным кристаллам была предложена Зигером и Теллером [15]. Авторы, исходя из механизма Гиппеля, принимают, что для возникновения пробоя необходимо начало ионизации. Условия, при которых потеря энергии электроном на раскачку атомов достигает максимальной величины, являются критическими для начала ионизации. Из силы взаимодействия электрона с ионом авторы определяют максимальную энергию, которую электрон передаёт ионам при пробеге единицы пути. Приравнивая эту энергию энергии, полученной электроном в поле за время пробега единицы пути, авторы определяют напряжённость поля, соответствующую началу ионизации. При вычислениях авторы вынуждены сделать некоторые предположения и приближения и получают следующую окончательную формулу:

$$E = \frac{\eta \pi^2 m e \nu}{h} \left(\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} \right), \qquad (4,1)$$

причём $\eta = 0{,}74$, если пользоваться приближением Бора, и $\eta = 1{,}82$, если пользоваться приближением Борна. Последнее приближение, по мнению авторов, менее законно. В (4,1) m — эффективная масса электрона, e — заряд электрона, ν — частота остаточных лучей, h — постоянная Планка, ε — диэлектрическая постоянная реального кристалла, ε' — диэлектрическая постоянная кристалла в предположении неподвижности ионов. ε' принимается авторами равной корню квадратному из коэффициента преломления лучей с частотой, лежащей на нижней границе инфракрасной области.

Так как вычисление эффективной массы электрона очень сложно, то Зигер и Теллер подставляют в формулу обычное значение m_0 и определяют пробивную напряжённость поля, пользуясь при этом приближением Борна, хотя считают его менее законным. Сравнивая вычисленное значение напряжённости с полученным из опытов Гиппеля, авторы находят отношение между эффективной и обычной массой электрона. Это отношение лежит в пределах от 1,2 до 3,3. Зигер и Теллер считают, что такое отношение лежит в разумных пределах для щёлочно-галоидных кристаллов. Сами авторы считают теорию не очень точной и нуждающейся в ревизии. Фрелих [16] указал на некоторые ошибки, допущенные Зигером и Теллером в их выводе и делающие эту теорию неприемлемой.

Совершенно другая формула была предложена Францем [17] для определения напряжённости поля, при котором имеет место рав-

новесное состояние. Эта формула была выведена автором следующим образом. Сначала Франц нашёл распределение импульсов электронов по направлениям, учитывая действие электрического поля и соударений. Затем, используя это распределение, он определяет среднее приращение энергии электрона и приравнивает его средней потере энергии при соударениях. В результате, после некоторых приближений, автор получает следующую формулу для напряжённости поля при равновесном состоянии:

$$E_{\text{р}} = \frac{2\pi^2 W \sqrt{3mkT}}{Mva}, \tag{4,2}$$

где W — энергия электрона в *эв*, при которой потери на раскачку являются наибольшими, M и v — масса и скорость атомов диэлектрика, k — постоянная Больцмана, T — температура, остальные обозначения прежние. Так как энергия электронов, соответствующая наибольшим потерям на раскачку, не известна, то формула не может быть использована непосредственно для проверки теории Гиппеля.

При выводе последней формулы Францем было принято, что энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле, полностью тратится при соударении. Поэтому (4,2) верна только для равновесных состояний. Последнее имеет место для энергий электрона $W < Q_{\text{м}}$ (рис. 3). При энергии электрона $W > Q_{\text{м}}$ равновесного состояния не может быть. Поэтому формула (4,2) должна иметь предел применимости, который, однако, автором не устанавливается. Ни вывод формулы, ни сама формула не дают возможности установить этот предел. Его можно установить, как это будет видно из дальнейшего изложения, сопоставлением (4,2) с другой формулой, выделенной Францем. Следующие из этого сопоставления результаты вызывают сомнение в справедливости самой формулы.

Кроме указанного выше, Францем был предложен второй метод определения пробивной напряжённости поля, исходя из идеи накопления энергии. Этот метод заключается в следующем [17].

Между двумя ионизациями электрон может испытать несколько упругих ударов. Вероятность того, что электрон наберёт энергию, необходимую для ионизации, не испытывая ни одного упругого соударения, равна

$$e^{-\theta}, \tag{4,3}$$

где

$$\theta = \int_0^{R_i} \varkappa\, dt,$$

представляет собой наивероятнейшее число соударений при ускорении, $\varkappa$ есть вероятность столкновения за единицу времени, $R_i = \frac{2\pi P_i}{h}$, P_i — импульс электрона, соответствующий энергии ионизации, h — постоянная Планка. Так как

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2\pi eE}{h},$$

то

$$E = \frac{h}{2\pi e^{\theta}} \int_0^{R_i} \varkappa \, dR.$$

Приближённое вычисление интеграла приводит к следующей окончательной формуле:

$$E = \frac{\pi^3 WkT}{\theta M v^2 a}. \qquad (4,4)$$

По мнению Франца, θ обозначает вероятное число соударений электрона до ионизации и колеблется в пределах от 3 до 10. Точное определение значения θ очень сложно, и автор принимает $\theta = 5$. Подставляя значения постоянных $M = 5 \cdot 10^{-23}$, $v = 4 \cdot 10^5$, $a = 3 \cdot 10^{-8}$ и выражая W в *эв*, автор получает для E следующее выражение:

$$E \approx 2 \cdot 10^4 W \frac{T}{\theta}.$$

Приняв $\theta = 5$, он получает пробивную напряжённость поля для каменной соли при обычных температурах ($T = 300$) равной

$$E \approx W \cdot 10^6 \; в/см.$$

Эта величина в несколько раз больше экспериментальной.

Выше было показано (рис. 4), что критическое значение энергии электрона W, при которой уже возможно начало ионизации, равно $Q_м$. Эту критическую энергию электрон приобретает в поле с напряжённостью $E_м$. Следовательно, область напряжённости поля, в которой справедлива формула (4,2), характеризуется значением

$$E_р \geqslant E_м.$$

Так как

$$E_м < E_i,$$

то

$$E_р < E_i, \qquad (4,5)$$

где E_i — напряжённость поля, вызывающая ионизацию. Формула (4,4) справедлива для всех значений E. Положив в (4,4) $W = W_i$ — энергии ионизации, получим

$$E_i = \frac{\pi^3 W_i kT}{\theta M v^2 a}. \tag{4,6}$$

Подставляя (4,2) и (4,6) в (4,5), Франц получает соотношение

$$kT > 12\,\theta^2 m v^2, \tag{4,7}$$

характеризующее область применимости (4,2). Отсюда автор делает вывод, что при $kT < 12\,\theta^2 m v^2$ пробивная напряжённость поля определяется по (4,4), а при $kT > 12\,\theta^2 m v^2$ — по (4,2). С таким выводом автора трудно согласиться. При подстановке (4,2) в неравенство (4,5) нельзя полагать $W = W_i$ в правой и левой части неравенства, как это сделал Франц. В (4,2) необходимо положить $W = Q_м$; тогда

$$kT > 12\theta^2 m v^2 \left(\frac{Q_м}{W_i}\right) = \theta, \tag{4,8}$$

при этом $Q_м < W_i$.

Далее, неравенства (4,7) или (4,8) вовсе не дают условий, при которых следует применять (4,2) или (4,4) для определения пробивной напряжённости поля. Они определяют условия, при которых возможно или невозможно равновесное состояние. Поэтому во всех случаях пробивная напряжённость поля может быть определена по (4,4), если в ней принять $W = W_i$. При $kT > \theta$ пробивная напряжённость поля может быть определена и по (4,2), если в ней принять $W = Q_м$.

Если даже воспользоваться неравенством Франца (4,5) и принять, как это он делает, $\theta = 5$, то для каменной соли получим $T > 325°$ С, т. е. равновесное состояние возможно только при температуре выше нормальной; вывод несколько неожиданный. Некоторые возражения вызывает также вывод (4,4). Если θ обозначает среднее число соударений между двумя ионизациями, то формула (4,3) неверна и $\varkappa$ не может иметь смысла, который ей придаёт автор — вероятность соударений в единицу времени. $\varkappa$ должна тогда обозначать число соударений за единицу времени. Если же $\varkappa$ имеет смысл, который ей придаёт автор, то формула (4,3) верна, но тогда θ имеет другой смысл и обозначает вероятность соударения за время ускорения электрона до ионизации и не может быть больше единицы. В последнем случае для каменной соли $T > 13°$ С, что не вызывает недоумения, но пробивная напряжённость будет в 5 раз больше вычисленной ранее и на порядок больше экспериментальной.

Математическая теория для ионных кристаллов, базирующаяся на предположениях Гиппеля, также была предложена Калленом [18].

Согласно теории Борна и Кармана Каллен описывает колебательные движения ионов волнами. Колебания ионов лежат в двух областях: «оптической» и «акустической», а в каждой области колебания подразделяются на две группы поперечных и одну группу продольных. Таким образом, всех волн $6N$, где N — число ячеек в кристалле (объём ячейки $2a^3$, a — постоянная решётки).

Смещение ионов в процессе колебаний от положения равновесия автор рассматривает как поляризацию с соответствующей плотностью заряда. Только для продольных колебаний эта плотность отлична от нуля.

Так как существенное значение имеют «оптические» колебания, то автор пренебрегает «акустическими» и, кроме того, принимает, что все N продольных «оптических» колебаний имеют одну частоту ν, равную частоте наиболее длинной волны.

Полагая, что относительное смещение разноимённых соседних ионов равно разности амплитуд их колебаний, автор определяет напряжённость электрического поля, связанную с этой поляризацией.

Поскольку в зоне проводимости очень мало электронов, Каллен пренебрегает взаимодействием электронов между собой и определяет энергию взаимодействия электрона с решёткой как взаимную энергию поля электрона с полем поляризации. Это взаимодействие Каллен рассматривает как возмущение и определяет квантовомеханическими методами вероятность передачи энергии, равной $h\nu$, за одну секунду. Если энергия электрона меньше чем $h\nu$, то передача энергии от электрона решётке невозможна, возможен только обратный процесс. Если энергия электрона больше чем $h\nu$, то вероятность передачи электроном энергии $h\nu$ решётке больше, чем вероятность её получения.

Количество энергии B, которую электрон с энергией W передаёт решётке в единицу времени, оказывается равным

$$B = C\sqrt{\frac{h\nu}{W}}\left[\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{h\nu}{W}}}{1-\sqrt{1-\frac{h\nu}{W}}} - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{h\nu}{W}}+1}{\sqrt{1+\frac{h\nu}{W}}-1}\right],$$

где

$$C = \frac{\pi\sqrt{2m}(ee^*)^2}{Ma^3\sqrt{h\nu}}.$$

Здесь e^* — эффективный заряд иона, меньший его действительного заряда, вследствие смещения электронных орбит и электронной поляризации, вызванной в свою очередь смещением ионов, m — эффективная масса электрона, $M = \frac{M_+ M_-}{M_+ + M_-}$ — приведённая масса ионов.

Таким образом $\frac{B}{C}$ является только функцией $\frac{h\nu}{W}$ и $\frac{h\nu}{kT}$ и имеет пологие максимумы в зависимости от $\frac{h\nu}{W}$ при разных значениях $\frac{h\nu}{kT}$.

Далее Каллен определяет энергию, которую электрон приобретает в электрическом поле в единицу времени. Эта энергия равна

$$A = \frac{e^2 E^2 \tau}{m},$$

где τ — время релаксации; оно зависит от напряжённости поля и энергии электрона.

Время релаксации определяется Калленом следующим образом:

$$\tau = \frac{v}{\frac{dv}{dt}},$$

где v — средняя направленная по полю скорость электрона, а $\frac{dv}{dt}$ — среднее направленное ускорение.

Это среднее ускорение автор определяет как разность в приращении направленной скорости в единицу времени под действием поля и торможения вследствие столкновений с решёткой. Эту разность автор усредняет по всем возможным направлениям скорости и возможным отклонениям электрона после столкновения, учитывая при этом вероятность соответствующих скоростей и отклонений. Для $\frac{1}{\tau}$ получается следующая зависимость:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{C}{h\nu}\left(\frac{1}{2}\frac{B}{C}\frac{h\nu}{W} + \sqrt{\frac{h\nu}{W}}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\sqrt{1 - \frac{h\nu}{W}} + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\sqrt{1 + \frac{h\nu}{W}}\right].$$

Из этого выражения видно, что $\frac{h\nu}{C\tau}$ является также функцией только $\frac{h\nu}{W}$ и $\frac{h\nu}{kT}$.

Таким образом, приобретаемая электроном в электрическом поле в единицу времени энергия зависит от энергии электрона, от температуры и, в квадратичной степени, — от напряжённости поля.

Энергия, теряемая электроном в единицу времени при соударениях с решёткой, зависит также от температуры и энергии электрона, но не зависит от напряжённости поля. Следовательно, существует равновесная напряжённость поля, при которой теряемая энергия равна приобретаемой.

Приравнивая A к B, Каллен находит равновесную напряжённость поля

$$E = E_0 \sqrt{\frac{h\nu}{C\tau}\,\frac{B}{C}}\,,$$

где $E_0 = \frac{\sqrt{2}\,\pi m e e^{*2}}{M a^3 h\nu}$.

Отношение $\frac{E}{E_0}$ также зависит только от $\frac{h\nu}{W}$ и $\frac{h\nu}{kT}$. Зависимости $\frac{E}{E_0}$ от $\frac{h\nu}{W}$ при разных значениях $\frac{h\nu}{kT}$ имеют максимумы (рис. 5).

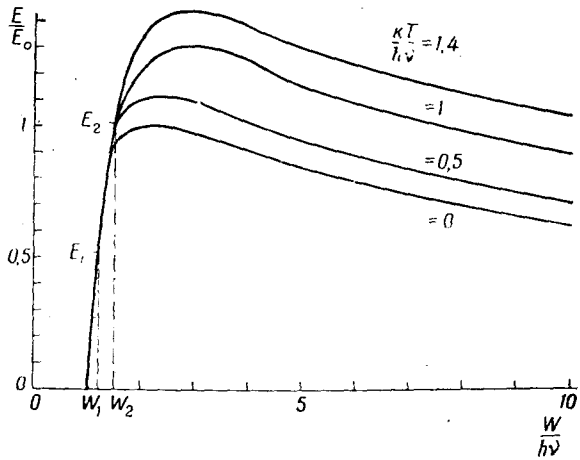

Рис. 5.

Обозначим значение E, соответствующее максимуму $\frac{E}{E_0}$ при определённой температуре T, через $E_{пT}$. Пусть энергия электрона W_1 и соответствующая ему равновесная напряжённость поля E_1. Если действительная напряжённость поля E_2 больше чем E_1, то баланс энергии для электрона положителен, его энергия увеличится до значения W_2, соответствующего напряжённости E_2. Если E_2 больше $E_{пT}$, то равновесное состояние невозможно и электрон будет непрерывно набирать энергию и может ионизовать. Каллен, согласно предположению Гиппеля, принимает, что напряжённость поля $E_{пT}$, соответствующая максимуму кривой $\frac{E}{E_0}$, равна пробивной.

При $T = 0$ отношение $\frac{E_{пT}}{E_0}$ оказывается равным единице, следовательно, E_0 есть пробивная напряжённость поля при температуре абсолютного нуля.

По этим формулам Каллен, приняв $m = m_0$, вычислил пробивные напряжённости для ионных кристаллов. Эти данные, впервые опубликованные в работе Гиппеля[19], приведены в таблице II.

Таблица II

Кристалл	Пробивная напряжённость поля (в 10^6 *в/см*), вычисленная Калленом по теории			Экспериментальные данные
	Гиппеля		Фрелиха	
	данные Гиппеля	данные Каллена		
RbI	1,64	0,52	—	0,49
RbBr	2,00	0,73	0,19	0,63
KI	2,19	0,57	—	0,57
RbCl	2,14	1,12	0,24	0,83
KBr	2,45	0,85	0,23	0,70
KCl	2,9	1,20	0,33	1,00
NaBr	3,34	0,98	0,47	0,81
NaCl	3,60	1,57	0,57	1,50
NaF	5,48	3,57	—	2,40
KF	—	2,96	—	1,60
LiF	—	8,8	—	2,8

Для большинства кристаллов теория Гиппеля по данным этих вычислений даёт величины, превышающие экспериментальные в 2—4 раза. Такое несогласие опыта с теорией Гиппель объясняет рядом причин. Прежде всего тем обстоятельством, что Каллен пользовался методом возмущений в области, где его применимость является незаконной. Далее, Каллен предположил наличие совершенной ионной решётки, в то время как в действительности гетерополярный характер ионных кристаллов очень быстро уменьшается с увеличением размеров ионов. Поэтому полярное нарушение потенциала и связь между электроном и решёткой преувеличены. Кроме того, нельзя идентифицировать максимум в кривой потерь с пробивной напряжённостью. Вторичные электроны получают некоторую энергию от ионизующих, и существует заметная вероятность передачи энергии от решётки электронам. Поэтому пробой может произойти при напряжённости поля несколько ниже максимальной. Впрочем, неопределённость из-за наличия у электронов некоторой начальной энергии не может быть заметной вследствие очень пологой формы кривой у максимума, как показал Каллен. С другой стороны, вычисления Зейтца[20] для неполярной решётки показали,

что максимум лежит при заметно бо́льших энергиях и имеет величину, которой нельзя пренебречь. Поэтому, по мнению Гиппеля, нельзя ожидать хорошего совпадения вычисленных величин с экспериментальными при современном положении знания, учитывая к тому же сложность явлений и ряд упрощений, которые приходится делать при расчётах.

Позже Калленом[18] были опубликованы другие данные, приведённые в той же таблице II. Последние величины гораздо меньше тех, которые были опубликованы Гиппелем. Новые данные Каллена для пробивной напряжённости ионных кристаллов, если не считать LiF, как видно из таблицы II, превышают экспериментальные данные не более чем на 60%; для большинства же приведённых кристаллов не более чем на 30%. Очень резкое несогласие теоретического и опытного значений пробивной напряжённости поля для LiF можно объяснить, как полагает автор, наличием большого числа аномальных гомогенных связей у LiF, не учтённых теорией. Учёт этих связей должен сблизить теоретическую величину с экспериментальной.

Учитывая ряд упрощений и приближений, принятых Калленом в выводах, следует признать, что данные его теории довольно удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Всё же предсказанные его теорией пробивные напряжённости всегда больше экспериментальных. Автор полагает, что превышение теоретических величин над экспериментальными следует объяснить наличием флуктуации в энергиях электронов, не учтённых теорией.

Принятый Калленом критерий пробивной напряжённости, предложенный Гиппелем, означает, что пробой происходит тогда, когда средняя энергия электрона будет соответствовать максимуму кривой. Однако в действительности из-за статистического распределения электронов по энергиям часть из них будет иметь энергию больше, а часть меньше указанной. Таким образом для наступления пробоя не обязательно, чтобы все электроны обладали энергией, не меньшей указанной. При напряжённости поля меньше максимальной также будут электроны, обладающие энергией, не меньшей указанной, и могущие, следовательно, ионизовать. Зейтц[20] показал, что при величине напряжённости поля, на 80% меньшей теоретического пробивного значения, имеется хотя бы один электрон, способный ионизовать. Зейтц показал, что если электрон пробегает в кристалле по направлению поля при пробивной напряжённости расстояние, равное 1 *см*, то он производит лавину электронов в количестве 10^5. Для разрушения диэлектрика необходимо приблизительно 10^{13} таких лавин. Такое количество электронов с энергией, не меньшей, чем W_B (рис. 3), может быть обеспечено в зависимости от функции распределения электронов и при средней энергии электрона, меньшей W_B. Превышение величины пробивной напряжённости, полученной из теории Каллена, над экспериментальной показывает, что

критерий Гиппеля обеспечивает количество ионизующих электронов, большее необходимого. Более того, различная величина превышения для различных кристаллов указывает на сугубую формальность критерия. Действительно, критерий Гиппеля, собственно, указывает на достоверность наличия электронов, способных ионизовать при напряжённости поля, соответствующей максимуму кривой. Однако это ещё не означает, что при этом ионизация будет достаточно эффективной для обеспечения пробоя. Возможно, что для этого достаточна менее эффективная или, наоборот, требуется более эффективная ионизация. Эффективность ионизации зависит от величины лавины, т. е. толщины диэлектрика и его природы, и от числа ионизующих начальных электронов, т. е. от функции

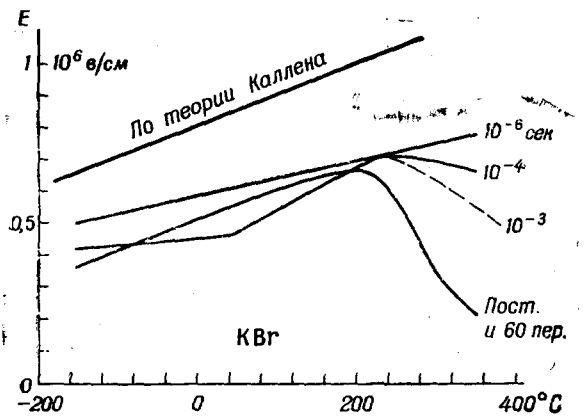

Рис. 6.

распределения электронов по энергиям. Эти обстоятельства теорией не учитываются.

Формальность гиппелевского критерия особенно хорошо видна при рассмотрении зависимости пробивной напряжённости поля от температуры. Согласно теории Каллена-Гиппеля пробивная напряжённость поля для ионных кристаллов растёт с температурой. Имеющиеся экспериментальные данные разноречивы. Так, опыты Мальмлоу [21] показали независимость пробивной напряжённости поля для KBr от температуры. Опыты Астена и Уайтхеда [9] показали, что пробивная напряжённость поля для KBr растёт с температурой, сначала медленно, затем при температуре около 20° С резко возрастает и, наконец, снова растёт более медленно. Гиппель [19] пробивал KBr постоянным и 60-периодным напряжением и постоянным напряжением со скоростью подъёма за время 10^{-3}, 10^{-4} и 10^{-6} сек. до пробоя (рис. 6). В последнем случае получилась растущая с температурой линейная зависимость; во всех других случаях про-

бивная напряжённость поля сначала растёт с температурой, а потом падает. Такую же кривую с максимумом получил Гиппель при пробое NaCl постоянным напряжением.

Можно согласиться с предположениями Гиппеля, что при медленном повышении напряжения сказывается высоковольтная поляризация или другие подобные явления; не позволяющие правильно определить действительную напряжённость поля. При быстром подъёме напряжения за время 10^{-6} сек. имеют место наиболее чистые условия и зависимость пробивной напряжённости поля от температуры линейна, как этого требует теория Каллена. Однако экспериментальная прямая для этого случая лежит значительно ниже теоретической и, главное, она более пологая. Более крутой характер теоретической прямой иллюстрирует формализм гиппелевского критерия, не учитывающего увеличение с температурой числа электронов, способных ионизовать.

5. ТЕОРИЯ ИОНИЗАЦИИ БЫСТРЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ Г. ФРЕЛИХА

Фрелих[22] исходит из тех же положений, что и Гиппель. Между этими двумя теориями разница только в критерии. В то время как Гиппель считает, что ионизационной способностью обладают электроны с энергией, соответствующей максимуму кривой потерь (порядка 0,1—0,2 *эв*), Фрелих считает, что ионизовать могут электроны, имеющие энергию не ниже энергии ионизации (порядка нескольких *эв*). Поэтому теорию Фрелиха принято называть теорией ионизации быстрыми электронами.

Суть теории Фрелиха заключается в следующем. При помещении диэлектрика в электрическое поле свободные электроны, имеющиеся в диэлектрике, приобретают энергию. Среднее количество этой энергии подсчитывается Фрелихом следующим образом. Плотность тока, отнесённая к одному электрону, равна

$$i = ev,$$

где v — средняя направленная по полю скорость электрона. Эта скорость определяется через время релаксации τ — время, в течение которого компонента импульса электрона уменьшается в e раз. Тогда плотность тока равна

$$i = \frac{e^2E\tau}{m},$$

и энергия, приобретаемая электроном в секунду, будет

$$A = iE = \frac{e^2E^2\tau}{m},$$

где m — масса электрона.

Время релаксации τ определяется Фрелихом методами квантовой механики и для щёлочно-галоидных кристаллов оно пропорцио-

нально энергии электрона в степени $\frac{3}{2}$. В результате

$$A = K_1 E^2 W^{\frac{3}{2}},$$

где K_1 — постоянная величина.

С другой стороны, электроны теряют энергию на раскачку атомов и ионов решётки при столкновении с ними. Количество энергии, передаваемой решётке в единицу времени, равно:

$$B = h\nu\left(\Phi_{e(W)} - \Phi_{a(W)}\right),$$

где ν — частота колебания элементов решётки, $\Phi_{e(W)}$ — вероятность передачи энергии $h\nu$ решётке электроном, обладающим энергией W, $\Phi_{a(W)}$ — вероятность передачи энергии электрону решёткой.

Фрелих вычисляет Φ для щёлочно-галоидных кристаллов методами квантовой механики и находит окончательное выражение для B:

$$B = \text{const}\, W^{-\frac{1}{2}}. \tag{5,1}$$

Условие равновесного состояния будет при

$$A = B, \tag{5,2}$$

откуда можно получить величину энергии электрона при равновесном состоянии

$$W_{\text{р}} = \frac{\text{const}}{E}. \tag{5,3}$$

Если обозначить энергию ионизации через W_i и положить в (5,3)

$$W_{\text{р}} = W_i, \tag{5,4}$$

то пробивная напряжённость поля может быть определена отношением

$$E_{\text{пр}} = \frac{\text{const}}{W_i}. \tag{5,5}$$

Из (5,3) следует, что при любом поле равновесное условие возможно. Однако Фрелих пытается общими рассуждениями доказать, что равновесное состояние может иметь место не при любом значении энергии электрона $W_{\text{р}}$, а только когда $W_{\text{р}} > W_i$. Тогда

$$E < E_{\text{пр}}.$$

Если же $W_{\text{р}} \leqslant W_i$, то

$$E \geqslant E_{\text{пр}},$$

равновесное состояние невозможно, и наступает пробой.

Доказательства Фрелиха сводятся к следующему:

Допустим, что при каком-нибудь поле E электрон имеет при равновесном состоянии среднюю энергию $W_{\text{р}}$. Обладая этой энергией, электрон дополнительно ускоряется полем и накапливает энергию. Накопленную сверх $W_{\text{р}}$ энергию электрон должен передать решётке, так как это есть условие равновесного состояния.

Рассмотрим первый случай: напряженность поля мала, т. е. $E < E_{пр}$. Энергия электрона при равновесном состоянии $W_р > W_i$. Основные столкновения будут неупругими, так как их вероятность в 100 раз больше вероятности упругих. После ионизации ионизующий или освобождённый электрон обладает энергией $W_р - W_i > 0$, которая передаётся решётке, и этим удовлетворяются условия равновесного состояния.

Второй случай: напряжённость поля больше $E_{пр}$, энергия электрона при равновесном состоянии $W_р < W_i$. Так как напряжённость поля велика, то суммарная накопленная энергия электрона будет W_i и электрон в состоянии ионизовать. После ионизации энергия электрона будет $W \approx 0$. Решётка энергии не получает, и условия равновесного состояния не удовлетворяются.

Следовательно, по Фрелиху неравновесное состояние имеет место только тогда, когда $W_р \leqslant W_i$. $W_р = W_i$ характеризует критические условия для наступления пробоя и (5,5) даёт критическую пробивную напряжённость.

Вышеприведённые рассуждения Фрелиха не безупречны.

Во втором случае Фрелих считает, что электрон накапливает в поле энергию $W_i - W_р$, что является, собственно, недоказанным. Возможно, что накапливаемая энергия будет меньше этой величины, тогда ионизация невозможна, решётке будет передаваться энергия и будут удовлетворены условия равновесного состояния. Однако допустим, что накапливаемая электроном энергия равна $W_i - W_р$; в этом случае также возможно равновесное состояние, если теряемая электроном на ионизацию энергия равна накапливаемой. Следует заметить, что вопрос о существовании энергетического равновесного состояния при наличии процессов ионизации вообще не является существенным, так как для развития пробоя необходимы только ионизующие процессы. Последнее условие является необходимым, но ещё недостаточным. Если при ионизации имеет место равновесное электронное состояние, т. е. если захваченные электроны компенсируются освобождёнными ионизацией, то пробой не может развиваться. Для наступления пробоя число свободных электронов должно непрерывно расти, т. е. электронное состояние диэлектрика должно быть неуравновешенным. Наличие как раз этого существенного условия Фрелихом не доказано.

В первом случае Фрелих показал наличие ионизационных процессов, поэтому вопрос об энергетическом состоянии вообще никакого значения не имеет. Чтобы доказать невозможность пробоя, необходимо было установить наличие равновесного электронного состояния. Однако Фрелих не делает никаких попыток доказать это, он ограничивается замечанием, что если в этом случае существуют ионизующие процессы, то должны, повидимому, существовать и обратные процессы.

Таким образом, положения Фрелиха о наличии неравновесного энергетического состояния только при $W_p \leqslant W_i$ и о том, что это является условием пробоя, нельзя считать доказанными.

Сравнение формулы Фрелиха (5,3), выражающей зависимость равновесной энергии электрона от напряжённости поля, с соответствующими формулами Франца (4,2) и (4,4) показывает их резкую противоречивость. В то время, как по формуле Фрелиха (5,3) равновесная энергия электрона обратно пропорциональна напряжённости поля, по формулам Франца (4,2) и (4,4) эта зависимость прямая. Это расхождение происходит оттого, что Франц учитывает действие медленных электронов и считает, что зависимость между энергией электрона W и потерей энергии B изображается левой ветвью кривой, приведённой на рис. 2. Фрелих же учитывает действие быстрых электронов, и зависимость между W и B изображается у него правой ветвью, как это следует из (5,1). Максимум кривой является крайним равновесным состоянием, и потеря энергии на раскачку, подсчитанная Фрелихом по (5,1), меньше энергии, накапливаемой электроном в поле, т. е. $B < A$. Условие Фрелиха (5,2) несовместимо с (5,4). В пользу такого вывода говорит также окончательная формула Фрелиха (5,5). Согласно этой формуле пробивная напряжённость поля должна быть тем меньше, чем больше энергия ионизации атомов диэлектрика — результат совершенно неожиданный и противоречащий опытным данным. В таблице II приведены пробивные напряжённости, подсчитанные Калленом, исходя из представлений Фрелиха. Как видно из таблицы, эти величины меньше экспериментальных от 2 до 8 раз.

6. МЕХАНИЗМ ПРОВОДИМОСТИ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Ионизационные теории электрического пробоя твёрдого диэлектрика, рассмотренные выше, исходили из положения, что начало ионизации является одновременно началом развития процесса, ведущего к пробою. Выше уже было замечено, что начало ионизации нельзя отождествлять с началом пробоя. Для осуществления пробоя необходимо ещё, чтобы процесс ионизации стал нестабильным и самостоятельным. Второе условие может быть, на первый взгляд, заменено другим приближённым условием, заключающимся в следующем.

Развитие ионизационных процессов в диэлектрике приводит к увеличению в нём числа свободных электронов. Последние, в свою очередь, вызывают увеличение тока. Нестабильный процесс ионизации, развивающийся в усиливающемся темпе, должен вызвать резкое увеличение силы тока. Если при незначительном увеличении напряжённости поля плотность тока в диэлектрике резко увеличивается на несколько порядков (от величины,

характерной для обычной проводимости диэлектрика при малых напряжённостях, до величины, имеющей место при пробое), то можно признать, что эти условия почти адекватны условиям пробоя. Градиенты, при которых происходит резкое увеличение тока на несколько порядков, можно принять за пробивные.

Собственно, такой подход к оценке пробивных условий был принят ещё в работах Иоффе. Такая оценка пробивных условий приводит фактически к новой трактовке природы пробоя. Действительно, пробой может тогда рассматриваться как процесс резкого увеличения проводимости диэлектрика под воздействием электрического поля. Пробой есть результат предельного увеличения проводимости диэлектрика в сильном электрическом поле. Такой взгляд на природу электрического пробоя открывает возможность разработки квантовомеханических теорий электрического пробоя.

Прежде чем излагать квантовомеханические теории пробоя, необходимо, хотя бы кратко, пояснить механизм проводимости твёрдого тела с точки зрения квантовой механики. Для этого необходимо рассмотреть поведение заряженных частиц в твёрдом теле. Электрический ток в диэлектрике всегда состоит из двух составляющих: из ионной и электронной

$$i = i_{и} + i_{э}.$$

Зависимости этих составляющих от температуры и напряжённости электрического поля диаметрально противоположны. Ионный ток очень сильно растёт с увеличением температуры и сравнительно медленно при повышении напряжённости электрического поля. Электронный ток, наоборот, едва заметно возрастает от нагревания и резко увеличивается при повышении напряжённости. Поэтому в первую очередь нас будет интересовать природа электронного тока.

Каждый диэлектрик имеет правильное или неправильное кристаллическое строение. На состояние каждого электрона влияют все атомы, ионы или молекулы, находящиеся в узлах решётки, и все прочие электроны. Рассмотрим сначала состояние электрона в изолированном атоме.

Электрон в системе изолированного атома обладает кинетической и потенциальной энергией. Последняя равна

$$V(x_i) = \frac{e^2}{r} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где r — расстояние от электрона до центра ядра.

Для ядра, находящегося в начале координат, эта потенциальная функция показана на рис. 7,*а*.

Состояние электрона описывается уравнением Шредингера

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + [V(x) - W_0]\,\varphi = 0,$$

где

$$g = \frac{8\pi^2 m}{h^2},$$

и W_0 — полная энергия электрона. Это уравнение имеет решения при дискретных значениях энергии

$$W_{0_1},\ W_{0_2},\ W_{0_3}, \ldots,\ W_{0_n},$$

которым соответствуют функции

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3, \ldots,\ \varphi_n,$$

причём функции φ имеют следующий физический смысл: $|\varphi_k(x)|^2$ есть вероятность того, что электрон с энергией W_{0_k} находится в точке x. Ради простоты мы ограничились одномерной моделью. Электрон, обладающий энергией W_{0_n} или $W_{0_m} < 0$, принуждён всегда оставаться внутри атома. Максимальное расстояние, на которое электрон может удалиться, это x_n или x_m, так как при боль-

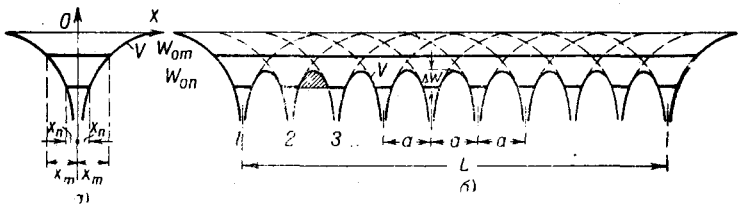

Рис. 7.

шем расстоянии его кинетическая энергия становится отрицательной, что невозможно. Для удаления электрона за пределы атома необходимо ему сообщить энергию ΔW, причём ΔW должно удовлетворять выражению $W_0 + \Delta W \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь состояние электрона в кристалле. Одним из методов, которым определяют состояние электрона в кристаллическом теле, есть метод «самосогласованного поля» Блоха. Этот метод исходит из следующего представления. Валентные электроны оторваны от атомов, коллективизированы и принадлежат всем атомам. Они образуют одно общее, так называемое «самосогласованное» поле, потенциал которого является периодической функцией координат с периодом a, равным расстоянию между узлами решётки кристалла. Этот потенциал представляет собой потенциал эквивалентного поля с энергией, равной энергии взаимодействия всех электронов между собой. Остающиеся атомы без валентных электронов образуют положительное периодическое поле. Таким образом, отдельный электрон движется в общем периодическом поле (поле атомов без валентных электронов в «самосогласованном» поле), независимо от других электронов. Потенциальная энергия электрона V является суммой потенциаль-

ных энергий электрона в положительном поле каждого ядра и отрицательном «самосогласованном» поле электронов. На достаточном расстоянии от границ кристалла потенциальная энергия V является периодической функцией координат с периодом, равным a, как это видно из рис. 7,*б*, соответствующего одномерной модели кристалла. Практически можно принять, что нарушение периодичности будет иметь место только у крайних ядер. Потенциальная энергия электрона в кристалле меньше, чем в изолированном атоме. Вследствие этого электроны, которые имеют прежнюю энергию W_{0_m}, могут свободно перемещаться по всему кристаллу.

Действительно, в любом месте кристалла эти электроны обладают положительной кинетической энергией. В классической механике такие электроны называются свободными. Электроны, обладающие энергией W_{0_n}, с точки зрения классической механики попрежнему не могут удаляться за пределы атома. Эти электроны классическая механика называет связанными, так как для перехода в соседний атом электрону необходимо преодолеть потенциальный барьер. Для этого электрону нужно сообщить дополнительную энергию ΔW.

Согласно квантовой механике электроны с энергией W_{0_n}, лежащей ниже потенциального барьера, имеют возможность просочиться через барьер и попасть в соседний атом. Такой процесс просачивания электрона сквозь потенциальный барьер, как известно, носит название «туннельного эффекта». Вероятность такого события зависит от ширины и высоты барьера, т. е. от заштрихованной на рис. 7,*б* площади. Чем меньше эта площадь, тем больше вероятность просачивания электронов. Таким образом квантовая механика не делит (в указанном выше смысле) электроны на связанные и свободные. Все электроны обладают относительной свободой в различной степени.

Электроны имеют возможность, оставаясь на том же энергетическом уровне, просачиваться через потенциальный барьер от одного атома к другому. Местонахождение электронов несущественно и, вообще говоря, неизвестно. Можно себе представить, что около одного атома на разных уровнях находится несколько валентных электронов (по принципу Паули на одном уровне не может быть более двух электронов), в то же время другие атомы будут оголены. Вероятность просачивания электронов через барьеры одинакова по всем направлениям. Поэтому такое просачивание не может создать направленного движения электронов, которое составляет электрический ток, и приводит к равномерному распределению электронов по всем атомам. Электрический ток получится при асимметричной функции вероятности, которая зависит от распределения электронов по уровням энергии.

Влияние кристаллической решётки на состояние электрона не ограничивается сказанным выше. Более того, это влияние отражается на энергетических уровнях электронов, что гораздо более существенно.

В уравнении Шредингера V есть теперь периодическая функция координат. Для учёта пограничных условий на решение уравнения Шредингера накладывается дополнительное условие (условие Кармана-Борна), требующее, чтобы решение $\varphi(x)$ было периодичной функцией координат с периодом, равным L, где L — размер кристалла.

Решение этого уравнения Шредингера с учётом периодичности $V(x)$ (с периодом a) и $\varphi(x)$ (с периодом L), имеющее физический смысл, приводит к изменению энергетических уровней электрона. Если в изолированном атоме электрон имел дискретные энергетические уровни W_{0_s}, то в решётке каждый уровень поднимается и распадается на N дискретных уровней, образующих зону, причём N — число ядер в кристалле: $N = \frac{L}{a}$ (в одномерной модели).

$$W_s = W_{0_s} + \alpha_s + 2\beta_s \cos \frac{2\pi}{N} j,$$

где s — номер зоны, j — номер уровня в зоне $\left(j = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm \frac{N}{2}\right)$, α — высота, на которую поднимается соответствующий уровень, а β — величина, характеризующая ширину зоны.

Изменение энергетических уровней показано на рис. 8.

Ширина зоны равна

$$W_{\text{макс}_s} - W_{\text{мин}_s} = 4\beta_s .$$

Для пространственной решётки

$$W_s = W_{0_s} + \alpha_s + 2\beta_s \left(\cos \frac{2\pi}{N} j_1 + \cos \frac{2\pi}{N} j_2 + \cos \frac{2\pi}{N} j_3\right)$$

$$j_i = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm \frac{N}{2}.$$

Верхняя граница зоны $W_{\text{макс}} = W_{0_s} + \alpha_s + 6\beta_s$;

нижняя граница зоны $W_{\text{мин}} = W_{0_s} + \alpha_s - 6\beta_s$;

ширина зоны $W_{\text{макс}} - W_{\text{мин}} = 12\beta_s$.

Расщепление каждого уровня на подуровни обусловлено наличием узлов в кристаллической решётке, а число подуровней — числом узлов или граничными условиями. Группировка уровней в зоны обусловлена периодичностью потенциальной функции, ширина зоны зависит от степени взаимодействия двух соседних атомов.

Таким образом зоны с уровнями энергии, на которых могут находиться электроны (зоны с «разрешёнными» уровнями), отделены друг от друга полосами, называемыми «запрещёнными», т. е. участками с такими значениями энергии, которые электроны не могут иметь. В каждой зоне имеется N уровней.

Согласно принципу Паули на каждом уровне может находиться не более двух электронов, учитывая их спин. Таким образом, в каждой зоне может находиться не более $2N$ электронов. Нас интересуют валентные электроны, поскольку они обусловливают проводимость. Возможны три случая.

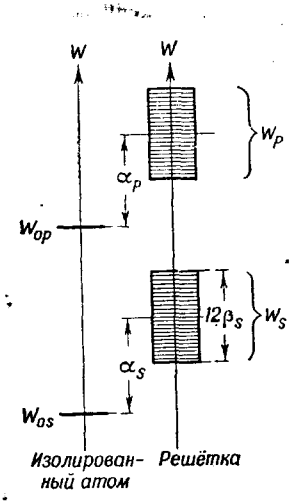

Рис. 8.

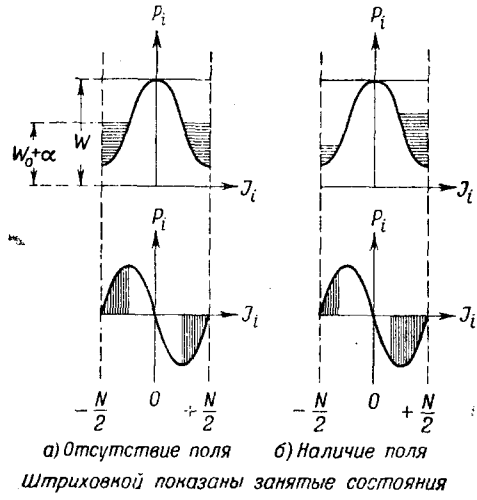

Рис. 9.

Первый случай — число электронов в зоне меньше, чем $2N$. Электроны занимают только часть уровней. При температуре абсолютного нуля электроны занимают наиболее низкие уровни. Верхние уровни в зоне остаются свободными. Каждому уровню энергии

$$W = W(j_1, j_2, j_3)$$

соответствует импульс

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(j_1, j_2, j_3).$$

При симметричном относительно j распределении энергии импульсы также будут симметрично расположены. Это распределение показано на рис. 9,*а*.

При наложении электрического поля электроны перераспределяются по уровням так, что число электронов с положительными значениями j превышает число электронов с отрицательными

значениями, или наоборот. Распределение скоростей электронов по направлениям несимметрично. В одну сторону движется большее число электронов, чем в другую. Роль поля сводится к тому, что оно заставляет электроны занять некоторые свободные уровни и освободить другие. Такое распределение показано на рис. 9,*б*.

Второй случай — зона полностью заполнена электронами, но с этой зоной соприкасается вышележащая пустая зона. При наложении поля электроны из нижней зоны переходят и занимают часть уровней в верхней зоне.

Третий случай — зона полностью заполнена электронами, но вышележащая пустая зона отделена от нижней запрещённым участком. Наложение электрического поля не может вызвать асимметрию в распределении электронов по уровням и не может, следовательно, вызвать направленной скорости электронов.

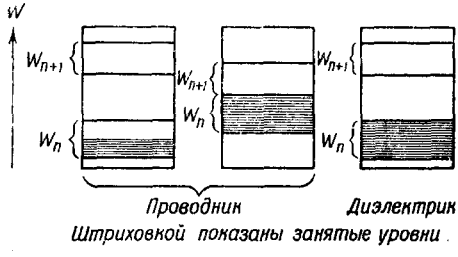

Рис. 10.

Первые два случая характерны для проводника, третий — для диэлектрика. Это различие между проводником и диэлектриком иллюстрируется рис. 10.

Чтобы диэлектрик стал проводящим, необходимо, с точки зрения классической механики, связанный электрон поднять с уровня, лежащего в потенциальной яме (уровень W_{0_n}, рис. 7,*б*), на уровень, лежащий выше потенциальных барьеров (на уровень W_{0_m}, рис. 7,*б*), и сделать его свободным. Для этого необходимо затратить некоторую энергию. С точки зрения квантовой механики для создания проводимости диэлектрика необходимо электрон перевести с нижней заполненной нормальной зоны на верхнюю пустую зону проводимости. Этот процесс связан с затратой энергии. Электроны, попавшие в пустую зону, могут получить асимметричное распределение. Вследствие освобождения части уровней в нижней зоне в ней также теперь возможно асимметричное распределение. Число освободившихся уровней в нижней зоне *) в точности равно числу занятых уровней в верхней зоне. Обе зоны могут находиться ниже потенциальных барьеров, так как согласно воззрениям квантовой механики, как уже было указано, проводимость определяется только асимметричным распределением.

*) Незаполненные места в нижней зоне часто принято называть дырками. Отсюда термины — дырочный ток, дырочная проводимость. Нам кажется, что эти термины едва ли можно признать удачными.

Барьеры не представляют абсолютного препятствия для передвижения электронов, так как всегда имеется вероятность просачивания электрона сквозь барьер (туннельный эффект). Ток складывается из электронного тока зоны проводимости и электронного тока нормальной зоны. Проводимость будет тем больше, чем больше электронов перешло из нормальной заполненной зоны в пустую.

Перевод электронов из нормальной зоны в зону проводимости может быть совершён воздействием света за счёт энергии светового кванта или нагреванием за счёт тепловой энергии.

7. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ

а) Теория безэлектродного пробоя

Потенциальная функция внутри кристалла представляет собой периодическую функцию с периодом a. Поскольку, с точки зрения квантовой механики, проводимость диэлектрика определяется переходом электронов из нормальной зоны в зону проводимости,

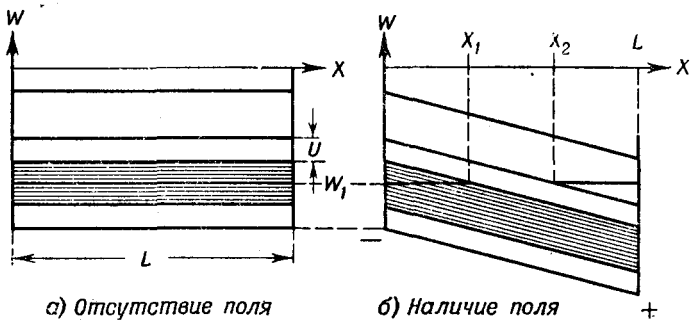

Рис. 11.

а не просачиванием электронов сквозь потенциальный барьер, периодичность потенциальной функции в дальнейшем является несущественной. Эта периодичность была использована для определения группировки уровней по зонам. Для дальнейших рассуждений можно поэтому заменить периодическую функцию средним её значением, постоянным по всему объёму кристалла (рис. 11,a).

Наложение электрического поля на диэлектрик уменьшает потенциальную энергию электрона на величину Eex. В уравнении Шредингера добавится ещё один член

$$-\frac{1}{g}\frac{d^3\varphi}{dx^3}+[V(x)-Eex-W]\,\varphi=0.$$

Если допустить, что член Eex мало меняется на расстоянии a, то это уравнение будет иметь решение при значении

$$W = Eex + W_0 + \alpha + 2\beta\cos\frac{2\pi}{N}j.$$

Энергетические уровни являются теперь линейной функцией координаты и изображаются наклонными линиями, как это показано на рис. 11,*б*. Чем больше напряжённость поля, тем больше наклон уровней, а следовательно, и зон. Это не значит, конечно, что полная энергия электрона является теперь функцией координаты, энергия электрона остаётся и при наличии поля постоянной. Это означает лишь, что электрон с определённой энергией может находиться только в ограниченной области кри-

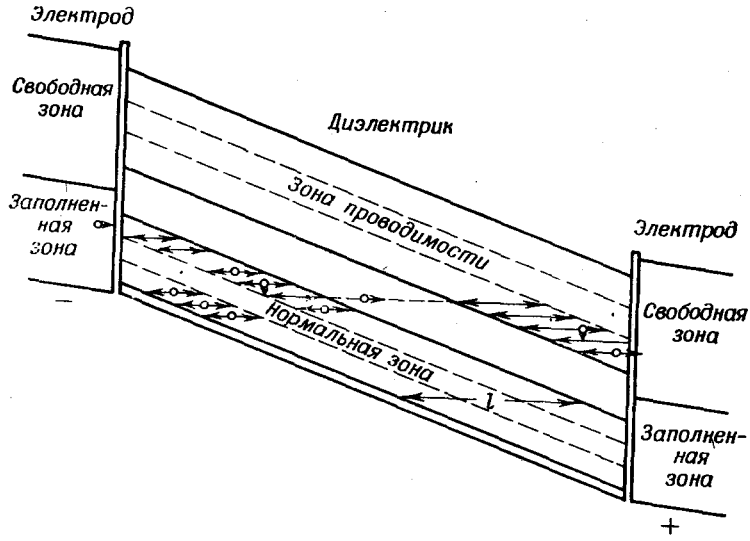

Рис. 12.

сталла. Электрон, например, с энергией W_1 может находиться во всей области кристалла при отсутствии поля, при наличии же поля только в областях $0 - x_1$, и $x_2 - L$. На языке волновой механики это значит, что модуль волновой функции φ_1, соответствующий энергии W_1, остаётся периодичным не во всей области кристалла, а только в областях $0 - x_1$ и $x_2 - L$, в области $x_1 - x_2$ он практически равен нулю. Энергия W при наличии поля перестаёт быть однозначно связанной с определённой зоной, она может соответствовать разным зонам. Если нижняя зона является нормальной (заполненной), а верхняя есть зона проводимости (пустая), то при наличии поля возможен переход электрона из первой во вторую зону без затраты энергии (вдоль прямой $x_1 - x_2$).

Однако при таком переходе электрону необходимо преодолеть запрещённый участок $x_1 - x_2$. Ширина этого участка равна

$$x_2 - x_1 = \frac{U}{Ee},$$

где U — ширина запрещённого участка, равная $W_{\text{мин}\,n+1} - W_{\text{макс}\,n}$. Чем больше напряжённость поля E, тем меньше ширина запрещённого участка.

Вероятность просачивания электрона через запрещённый участок тем больше, чем у́же участок. Эта вероятность равна[23]

$$P = e^{-\frac{\pi^2 ma}{h^2}\frac{U^2}{eE}}.$$

Внутри зоны электроны совершают колебательные движения по направлению поля на длине, равной $\frac{1}{3}l$ (рис. 12) с частотой

$$\nu = \frac{eEa}{h}.$$

Если принять, что диэлектрик состоит из двухвалентных атомов, то число валентных электронов в единице объёма

$$Z = \frac{2}{a^3},$$

где a — постоянная решётки, равная расстоянию между атомами. При каждом колебании число электронов, просачивающихся через 1 $см^3$ поверхности из нормальной зоны в зону проводимости, равно ZP. В течение секунды это число составляет

$$n = Z\nu P. \tag{7,1}$$

Выражение

$$\nu P = \frac{eaE}{h}\, e^{-\frac{\pi^2 ma}{h^2}\frac{U^2}{eE}} \tag{7,2}$$

может быть трактовано, как вероятность электростатической ионизации в единицу времени.

Плотность тока равна

$$i = eZ\nu P = \frac{2e^2E}{ha^2}\, e^{-\frac{\pi^2 ma}{h^2}\frac{U^2}{eE}}. \tag{7,3}$$

Принимая $a = 3\cdot 10^{-8}$ $см$ и $U = 4$ $эв$, получим плотность тока в амперах

$$i = 10^{11} E\, 10^{-\frac{8\cdot 10^7}{E}}\, a. \tag{7,4}$$

При $E = 4\cdot 10^6 \quad 5\cdot 10^6 \quad 6\cdot 10^6$ $в/см$,

$i = 4\cdot 10^{-3} \quad 5\cdot 10 \quad 3\cdot 10^4$ a.

При изменении напряжённости поля от $4\cdot 10^6$ до $6\cdot 10^6$ $в/см$ плотность тока возрастает в $7\cdot 10^6$ раз, достигая значения тысяч ампер на 1 $см^3$. Рост тока чрезвычайно резкий и он достигает значений, имеющих место при пробое.

Формула (7,4), полученная Зинером, по мнению Цернуши[24] не точна, вследствие того, что Зинер сделал неверное допущение при выводе. Зинер принял зависимость волновой функции электрона от $(W - Eex)$ при наличии поля такую же, как от W при отсутствии поля, что, по мнению Цернуши, неверно. Цернуши поступил иначе: он заменил плавное распределение потенциала внешнего поля ступенчатым. Полученные Цернуши формулы уже в начале вывода требуют сложных численных расчётов для определения постоянных. Поэтому имеется возможность сравнить полученные им результаты с результатами Зинера только для $U = 5$ *эв*. Для этого значения U токи по формуле Цернуши получаются, примерно, в 1,5 раза меньше, чем по формуле Зинера; порядок величины получается тот же.

Формула (7,2) была также получена Францем[17] при условии, что потенциал ионизации (или ширина зоны) не превосходит 3—4 *эв*.

Формула $n = Z\nu P$ верна только при двух предположениях:

1) концентрация электронов в нормальной зоне остаётся постоянной. Это имеет место при условии немедленного поступления электронов из электрода в нормальную зону на место тех электронов, которые просочились из этой зоны в зону проводимости, и 2) электроны, просочившиеся в зону проводимости, немедленно уходят дальше во второй электрод, так что зона проводимости остаётся всё время пустой. Механизм подобной проводимости можно себе представить в виде следующей схемы. При отсутствии поля электрон способен передвигаться по кристаллу вдоль зоны в любом направлении, причём вследствие хаотичности этого движения нет электрического тока. При наложении на кристалл электрического поля электрон запирается полем в определённой области кристалла шириной $\frac{1}{3} l$ (рис. 12). В этой области электрон совершает вдоль поля, а следовательно, и вдоль кристалла, колебательное движение. При каждом колебании электрон имеет вероятность P просочиться через запрещённый участок в зону проводимости. Если ему это удаётся, то на его место из верхнего уровня той же зоны падает электрон, на место которого поступает электрон из ещё выше расположенного уровня и так далее. В конечном счёте на освободившееся место в нормальной зоне поступает электрон из электрода. Электрон, просочившийся в зону проводимости, может перейти, свободно падая с уровня на уровень, в конечном счёте во второй электрод, поскольку большинство уровней этой зоны свободны.

Если поверхность кристалла не соприкасается с одной стороны с такой средой, в которой имеется достаточно большое число «свободных» электронов, откуда они могут поступать в неограниченном количестве в нормальную зону кристалла, а с

другой стороны, со средой, куда электроны могут свободно в неограниченном количестве поступать из зоны проводимости, то формула (7,1) неверна. Действительно, допустим, что из электрода в зону проводимости электроны вовсе не поступают. Тогда при первом колебании из нормальной зоны через поверхность в 1 $см^2$ в зону проводимости просочится

$$n_1 = ZP$$

электронов. Концентрация электронов в нормальной зоне уменьшится и будет равна

$$Z - n_1 = Z\ (1 - P).$$

При втором колебании из нормальной зоны будет уже просачиваться меньшее число электронов, равное

$$n_2 = Z\ (1 - P)\ P.$$

Если бы из зоны проводимости в нормальную зону не происходило обратное просачивание электронов, то нормальная зона постепенно беднела бы электронами. В последнем случае число электронов, поступающее за секунду через поверхность в 1 $см^2$ в верхнюю зону, будет

$$n' = Z\ [1 - (1 - P)^{\nu}].$$

При отсутствии электрического поля электроны находятся только в нормальной зоне. При наложении электрического поля электроны попадают в зону проводимости только просачиванием через запрещённый участок. Если принять, что электрон может находиться только в одной из этих двух зон, то вероятность его присутствия в зоне проводимости равна вероятности просачивания через запрещённый участок, т. е. P. Следовательно, вероятность просачивания электрона через запрещённый участок из зоны проводимости в нормальную равна вероятности его присутствия в нормальной зоне, т. е. $1 - P$. Тогда число электронов, просачивающихся из зоны проводимости в нормальную при втором колебании, равно

$$n_{п \to н} = n_1\ (1 - P) = ZP\ (1 - P).$$

Таким образом, после первого колебания при отсутствии электродов устанавливается равновесное состояние с концентрациями в нормальной зоне

$$Z_н = Z\ (1 - P),$$

и в зоне проводимости

$$Z_п = ZP.$$

При каждом последующем колебании в обоих направлениях будет просачиваться одинаковое число электронов, равное

$$n_{обм} = Z\ (1 - P)\ P.$$

Хотя состав электронов в зоне проводимости будет всё время обновляться, однако, никакого тока не будет. Ток, плотность

которого определяется формулой (7,3), будет существовать только в момент наложения электрического поля в течение времени

$$t = \frac{1}{\nu} = \frac{h}{aeE} \cong 10^{-14} \text{ сек.}$$

Такой кратковременный импульс тока не может вызвать пробоя. Теория пробоя внутрикристаллического происхождения может объяснить пробой только при наличии электродов. В то же время опыт показывает, что часто имеет место частичный пробой, пробой некоторого слоя внутри диэлектрика, непосредственно не соприкасающегося с электродами. Таким образом, при отсутствии электродов рассмотренный механизм может только обеспечить наличие некоторого числа электронов в зоне проводимости при наличии поля, т. е. образование полем «свободных» электронов.

б) Теория пробоя электродного происхождения

Когда диэлектрик зажат между двумя электродами, возможно просачивание электронов непосредственно из отрицательного электрода в зону проводимости диэлектрика и из нормальной зоны диэлектрика в положительный электрод.

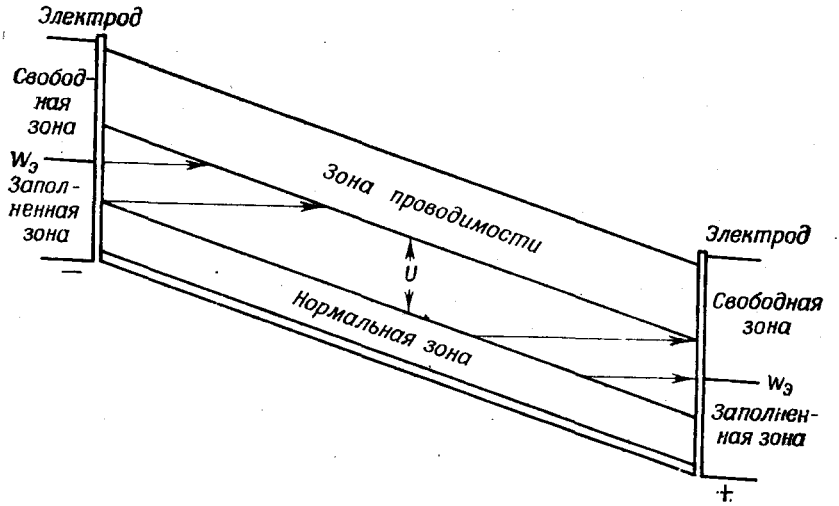

Рис. 13.

Верхний уровень зоны электрода, заполненный электронами $W_э$, лежит, примерно, на середине между нижним уровнем зоны проводимости $W_{мин.п}$ и верхним уровнем нормальной зоны $W_{макс.н}$. Обозначим разность этих уровней или ширину запрещённого участка через U

$$U = W_{мин.п} - W_{макс.н}.$$

Из катода непосредственно в зону проводимости диэлектрика могут переходить электроны, обладающие энергией, большей чем $W_э - \frac{1}{2U}$ (рис. 13); из нормальной зоны непосредственно в анод могут переходить электроны с энергией, лежащей в интервале $W_э$ и $W_э + \frac{1}{2U}$.

Электрон с энергией $W_э$ должен просачиваться через туннель, в два раза более короткий, чем туннель, через который просачивается электрон с энергией $W_э + \frac{1}{2U}$ (рис. 13). Высота запрещённого участка для первого электрона равна $\frac{1}{2U}$, а для второго—U. Вероятность просачивания первого электрона будет

$$P_1 = e^{-\frac{\pi^2 ma}{4h^2}\frac{U^2}{eE}},$$

а второго

$$P_2 = e^{-\frac{\pi^2 ma}{h^2}\frac{U^2}{eE}} = P_1^{\frac{1}{4}}.$$

Число электронов в металле, которые могут просочиться за секунду через 1 *см*² поверхности электродов, равно[25]

$$n \cong \frac{e^2 E^2}{8\pi h\delta},$$

где δ — высота потенциального барьера, через который просачивается электрон. δ равно разности минимального уровня зоны проводимости и уровня энергии, на котором находится электрон в металле.

Для первых электронов $\delta = \frac{U}{2}$, для вторых $\delta = U$. Следовательно, наибольшая плотность тока равна

$$i = enP_1 = \frac{e^3E^2}{4\pi hU} e^{-\frac{\pi^2 ma}{4h^2}\frac{U^2}{eE}}.$$

Выражая U в *эв*, E — в *в/см* и i — в *а/см*², получим

$$i = 3{,}1\cdot 10^{-6}\frac{E^2}{U}\, 10^{-1{,}25\cdot 10^6 \frac{U^2}{E}}\ a/см^2$$

При $U = 2$ *эв*		При $U = 4$ *эв*		При $U = 6$ *эв*	
E (*в/см*)	i (*а/см*²)	E (*в/см*)	i (*а/см*²)	E (*в/см*)	i (*а/см*²)
$6\cdot 10^5$	$2\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^6$	$6\cdot 10^{-4}$	$5\cdot 10^6$	10^{-2}
$2\cdot 10^6$	$2\cdot 10^4$	$4\cdot 10^6$	10^2	10^7	10^3

Изменение напряжённости поля в два раза приводит к резкому увеличению тока на несколько порядков. Ток достигает значения тысячи *а/см*² при напряжённости поля порядка $10^6 - 10^7$ *в/см*.

Возможность пробоя электродного происхождения была рассмотрена Фаулером [26]. Проникновение электронов из катода в диэлектрик Фаулер рассматривал, как результат холодной эмиссии. Фаулер вывел формулу для количества электронов, вырываемых полем, без учёта периодического потенциала решётки. Согласно этой формуле ток холодной эмиссии очень мал и не превосходит 10^{-5} *а/см*^{2} при $E = 10^7$ *в/см*. Это побудило Фаулера считать, что холодная эмиссия не может служить основным процессом при пробое твёрдых диэлектриков. Холодная эмиссия может только поставлять электроны, которые начинают развивать ионизационные процессы, приводящие к пробою.

Однако Волькенштейн [27] показал, что пренебрежение периодическим полем решётки приводит к значительно меньшей вероятности просачивания электронов, вследствие чего Фаулер получил очень малые токи.

Приведённая теория пробоя электродного происхождения предполагала температуру равной абсолютному нулю (повышение температуры не отражается на порядке величины) и не учитывала искажения энергетического спектра граничной поверхностью (так называемые поверхностные уровни Тамма).

Механизмом электростатической ионизации можно, как видно, объяснить большое нарастание тока при увеличении напряжённости поля примерно в два раза. Однако это нарастание тока не столь резкое, чтобы оправдать применение приведённого выше приближённого критерия условия пробоя. К тому же величина градиента хотя и имеет порядок величины, полученной из опыта, но всё же в несколько раз больше неё.

8. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ

а) Теория пробоя, как результата Штарк-эффекта, Ф. Ф. Волькенштейна

При выводе влияния наложенного на диэлектрик электрического поля на энергетические уровни было принято, что в пределах атома, т. е. на расстоянии a, поле меняется незначительно и его можно считать постоянным. Это вызывает подъём кратера каждого атома пропорционально его расстоянию от электрода и приводит к наклонению энергетических зон. В действительности электрическое поле не только поднимает, но и искажает форму кратера, что вызывает смещение каждого уровня на величину ΔW и расщепление некоторых уровней.

Если верхний уровень нормальной зоны сместился на величину $\Delta W_н$, а нижний уровень зоны проводимости на величины $\Delta W_п$, причём $\Delta W_н > \Delta W_п$, то высота запрещённого участка уменьшится

на величину $\Delta U = \Delta W_н - \Delta W_п$. ΔU зависит от напряжённости поля. Ширина запрещённого участка будет равна

$$U(E) = U_0 - \Delta U(E),$$

где U_0 — ширина запрещённого участка при отсутствии электрического поля.

Когда ΔU становится равным U_0, обе зоны соприкасаются. Напряжённость поля, при которой это происходит, может быть принята за пробивную.

Из имеющейся эмпирической зависимости для ΔU от E можно оценить величину пробивной напряжённости поля. Она достигает значения $4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^7$ *в/см*. Эта величина на один-два порядка больше экспериментальной. Поэтому Волькенштейн[28], разработавший эту теорию, при более детальных расчётах приходит к выводу, что этот эффект не играет существенной роли при пробое, он только облегчает электростатическую ионизацию.

б) Тепловая теория ионизации Я. И. Френкеля

Изложенные выше теории электростатической ионизации исходят из представления, что каждый электрон окружён положительными ионами. Френкель[29] исходит из другого представления. Он считает, что каждый электрон окружён нейтральными атомами. Поведение электрона должно рассматриваться как в изолированном атоме, находящемся в среде с диэлектрической проницаемостью ε. Поэтому электрон при отсутствии внешнего электрического поля не может просачиваться через потенциальный барьер, который является бесконечным, и приписан к своему атому. При наложении внешнего электрического поля потенциальная функция изменяется, как это показано на рис. 14 пунктирными линиями. Электрон может теперь просочиться через потенциальный барьер за пределы атома. Вероятность этого зависит от ширины барьера $A'B'$ и высоты его BC'. Чем ниже и у́же барьер, тем больше вероятность просачивания электрона.

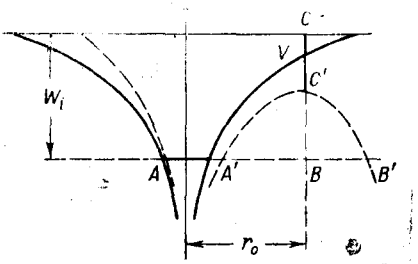

Рис. 14.

При отсутствии внешнего поля вероятность отрыва электрона, имеющего тепловую энергию kT, равна

$$P_0 = e^{-\frac{W_i}{2kT}},$$

где W_i — энергия ионизации, равная BC. При наличии поля энергия

ионизации уменьшается на величину CC' и будет равна

$$\frac{e^2}{\varepsilon r_0} + eEr_0.$$

r_0 можно определить из условия

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{e^2}{\varepsilon r} + eEr\right)\Big|_{r=r_0} = 0.$$

Отсюда

$$r_0 = \sqrt{\frac{e}{\varepsilon E}}$$

и

$$cc' = \Delta W = 2e\sqrt{\frac{eE}{\varepsilon}}.$$

Следовательно, вероятность просачивания электрона или ионизации атома при наличии поля будет

$$P = e^{-\frac{W_i - \Delta W}{2kT}} = e^{-\frac{W_i - 2e\sqrt{eE/\varepsilon}}{2kT}}. \qquad (8,1)$$

Подставляя (8,1) в (7,1), получим плотность тока

$$i = \frac{2e^2E}{ha^2}\, e^{-\frac{W_i - 2e\sqrt{eE/\varepsilon}}{2kT}}. \qquad (8,2)$$

Принимая $a = 3{,}10^{-8}$ *см*, $W_i = 4$ *эв*, $T = 300°$ Ц, $\varepsilon = 6$ и выражая E в *в/см*, получим для плотности тока в *а/см*^{2}

$$i \cong 10^{11} E\, 10^{-34{,}4 + 2{,}6\cdot 10^{-3}\sqrt{E}}.$$

При $E =$	4	5	$6\cdot 10^6$ *в/см*,
$i =$	$2{,}5\cdot 10^{-12}$	$1{,}6\cdot 10^{-11}$	$6\cdot 10^{-11}$ *а/см*^{2}.

Формула Франкеля даёт крайне незначительную плотность тока и слабое его нарастание.

9. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ

Относительно всех теорий электростатической ионизации можно заметить, что ни одна из них не может объяснить развитие пробоя в отдельных местах диэлектрика и его распространение от одного электрода к другому. Согласно этим теориям пробой должен развиваться одновременно во всей толще диэлектрика. Если учесть к тому же случаи безэлектродных пробоев, то следует признать, что, повидимому, имеется другой механизм, действующий более эффективно, чем механизм электростатической ионизации.

Электроны могут, согласно воззрениям квантовой механики, передвигаться по кристаллу, просачиваясь сквозь потенциальные барьеры, отделяющие атомы друг от друга, оставаясь при этом на том же энергетическом уровне. При этих передвижениях возможны

столкновения между электронами и передача энергии одним электроном другому. Электрон, передающий энергию, опускается на более низкий свободный энергетический уровень, а электрон, получающий энергию, переходит на более высокий свободный энергетический уровень. Если электрон, отдающий энергию, находится до столкновения в зоне проводимости и остаётся в ней после столкновения, а электрон, получающий энергию, находится до столкновения в нормальной зоне, а после столкновения переходит в зону проводимости, то в результате такого столкновения одним «свободным» электроном становится больше. Это явление аналогично процессу ударной ионизации в классической механике и носит такое же название. После таких актов зона проводимости обогащается электронами, а нормальная зона — свободными уровнями. Оба эти обстоятельства способствуют увеличению проводимости.

Ионизация возможна в том случае, когда ионизующий электрон обладает энергией не менее $W_{\text{мин.п}} + U$, где $W_{\text{мин.п}}$ — наинизший уровень энергии в зоне проводимости, а U — ширина запрещённого участка.

При отсутствии электрического поля такие явления в диэлектрике практически не имеют места, так как количество электронов в зоне проводимости при обычной температуре ничтожно мало. Из нормальной зоны в зону проводимости электроны могут перейти или вследствие облучения диэлектрика, или вследствие его нагрева. Однако, так как ширина запрещённого участка в диэлектриках обычно велика, порядка нескольких электрон-вольт, то для перевода незначительного числа электронов из нижней в верхнюю зону диэлектрик требуется нагревать до температуры плавления.

Наличие электрического поля облегчает этот процесс. Электрическое поле наклоняет энергетические зоны. Это вызывает три причины, способствующие рассматриваемому процессу.

1. Наклон зон даёт возможность, как это было выяснено в предыдущем параграфе, некоторому числу электронов просочиться из нормальной зоны в зону проводимости. Эти электроны могут положить начало процессу ионизации.

2. Электрон, находящийся на одном из самых низких уровней энергии зоны проводимости (положение *1* на рис. 15), ионизовать не может. Находясь на каком-нибудь уровне, электрон совершает колебания, размах которых равен $\frac{1}{3}l$, при этом от столкновения электрон может упасть на более низкий свободный уровень (обозначенный на рис. 15 цифрой *2*), расположенный правее. С этого уровня электрон может упасть на ещё более низкий уровень — *3*, расположенный ещё правее. В некоторых положениях на последнем уровне энергия электрона превышает $W_{\text{мин.п}}$ на величину, бо́льшую U, и ионизация возможна. Ионизующий электрон перейдёт при этом на более низкий уровень *4*, но останется в зоне проводимости.

Ионизуемый электрон из положения *Б* перейдёт на уровень *5*, в зону проводимости.

3. Электроны, находящиеся в нормальной зоне и не могущие ионизовать при отсутствии поля, при наличии поля также способны ионизовать. Это может произойти следующим образом. На свободный уровень *6*, находящийся в верхней части нормальной зоны, может при столкновении упасть электрон с уровня *7*, после чего уровень *7* освобождается. На этот уровень упадёт электрон с уровня *8*, а на *8* с уровня *9*. Последний уровень находится уже достаточно низко в нормальной зоне. Если теперь столкнутся два электрона, находящихся, например, на уровнях *10* и *11*, то один из них упадёт на уровень *9*, передав часть энергии другому электрону, который поднимется за счёт этой энергии в зону проводимости на уровень *12*.

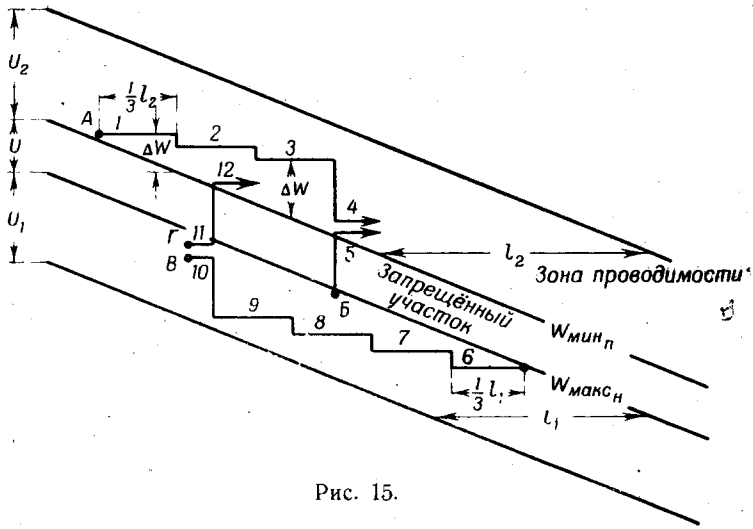

Рис. 15.

Ионизация электронами, находящимися как в зоне проводимости, так и в нормальной зоне, тем более вероятна, чем больше наклон зон и чем меньше U. Такая ионизация возможна только тогда, когда либо ширина нормальной зоны U_1, либо ширина зоны проводимости U_2 больше, чем U. Кроме того необходимо, чтобы электрон находился на верхних уровнях зоны проводимости, или был свободен один из нижних уровней в нормальной зоне. При наклонных зонах имеется возможность для электронов, находящихся на нижних уровнях зоны проводимости, по ступенчатому пути перебраться на верхний уровень. Аналогичным путём в нормальной зоне может освободиться нижний уровень *).

*) В этих случаях часто говорят, что в зоне путешествует и ионизует дырка, так как свободный уровень аналогичен дырке, из которой ушёл электрон.

Рассмотренный выше механизм ударной ионизации относится к абсолютно идеальным кристаллам. Не только наличие примесей, но и нарушение структуры решётки имеет существенное значение. Если в узлах решётки вместо одного элемента находится один или несколько элементов другого рода (например, вместо иона—атом, или наоборот), то периодичность поля нарушается. Так как периодичность поля, как было указано выше, обусловливает зональность уровней, то нарушение периодичности вызывает изменение нормального распределения зон. В запрещённом участке появляются локальные уровни, как это схематически показано на рис. 16. При ударе электрон может попасть на локальный уровень, для чего необходимо ему сообщить энергию ΔW, меньшую U. Из локального уровня вторым ударом электрон попадает на более высокий уровень или в зону проводимости. Так как вероятность ионизации в очень сильной степени (экспоненциально) зависит от ΔW и эта вероятность тем больше, чем меньше ΔW, то наличие локальных уровней требует гораздо меньшего градиента поля для ионизации.

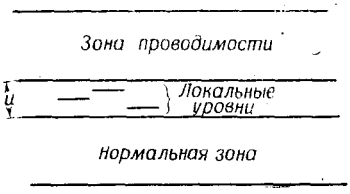

Рис. 16.

Структурные нарушения решётки или наличие примесей являются совершенно случайными. Поэтому наличие тех или иных локальных уровней также является случайным. Это может объяснить развитие пробоя в отдельных местах диэлектрика и статистический разброс пробивной напряжённости поля.

10. ТЕПЛОВОЙ ПРОБОЙ

При приложении к диэлектрику напряжения меньше пробивного через диэлектрик течёт электрический ток и в диэлектрике выделяется энергия. Количество энергии, которое выделяется в единицу времени в единице объёма диэлектрика, равно

$$W_1 = \gamma E^3,$$

причём

$$\gamma = Ae^{-\frac{B}{T}}; \qquad (10,1)$$

γ представляет собой проводимость диэлектрика, B — постоянный коэффициент, а A — величина, мало зависящая от температуры.

Выделение энергии в диэлектрике вызывает увеличение температуры и увеличение, вследствие этого, его проводимости. Увеличение проводимости приводит к увеличению энергии, выделяемой в диэлектрике, что в свою очередь ещё больше увеличивает проводимость, и т. д. Такой процесс вызывает непрерывный рост тем-

пературы, если параллельно ему не происходит обратный процесс отдачи диэлектриком тепла окружающей среде. Количество энергии W_2, отдаваемое диэлектриком, также растёт с увеличением его температуры

$$W_2 = C(T - T_0),$$

где T_0 — температура окружающей среды, равная начальной температуре диэлектрика, а C — постоянный коэффициент, зависящий от условий отвода тепла. На рис. 17 приведены зависимости W_1 и W_2 от температуры при постоянной напряжённости поля. Прямая W_2 может пересекаться с кривой W_1 в двух точках, как это видно из рис. 17. Точки пересечения соответствуют равновесному состоянию.

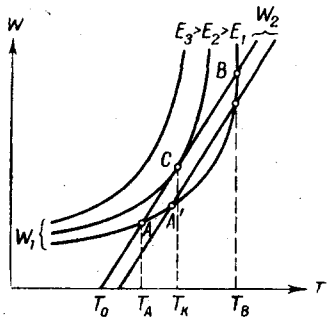

Рис. 17.

Нижняя точка A характеризует устойчивое равновесие, в то время как верхняя точка B соответствует неустойчивому равновесию. Действительно, допустим, что напряжённость поля равна E_1 и начальная температура равна T_0. При приложении напряжения к диэлектрику выделяемая в нём энергия больше отдаваемой, диэлектрик будет постепенно нагреваться до температуры T_A. При температуре T_A наступает равновесное состояние, и дальнейший нагрев диэлектрика прекращается. Если по какой-либо случайной причине температура диэлектрика станет больше T_A, то отдаваемая диэлектриком энергия становится больше выделяемой, и диэлектрик начнёт охлаждаться до температуры T_A. Допустим теперь, что температура диэлектрика T_B. Случайные отклонения температуры в ту или другую сторону от T_B вызывают непрерывное увеличение этих отклонений и удаление состояния от точки B. Случайное уменьшение температуры вызывает дальнейшее охлаждение диэлектрика до температуры T_A, случайное увеличение температуры вызывает превышение выделяемой в диэлектрике энергии над теряемой и беспредельное повышение температуры. При достаточном удалении точки B от A состояние B естественным образом наступить не может. Увеличение напряжённости электрического поля E или начальной температуры T_0 приводит к сближению точек A и B. При определённых значениях E и T_0 точки A и B совпадают — точка C на рис. 17. Нетрудно видеть, что точка C является критической точкой. При случайном незначительном повышении температуры выше T_k наступает неустойчивое состояние, при котором температура диэлектрика может беспредельно увеличиться и вызвать его тепловое разру-

шение (расплавление, прожог). Если прямая W_2 и кривая W_1 не имеют ни одной общей точки (при определённых значениях T_0 и E), равновесное состояние невозможно; выделяемая в диэлектрике энергия всегда больше отводимой, и температура диэлектрика беспредельно растёт.

Таким образом условия касания прямой W_2 с кривой W_1 являются критическими для наступления теплового пробоя. Эти условия частично выражаются следующим дифференциальным уравнением, которое характеризует энергетическое состояние внутри диэлектрика:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \gamma (\operatorname{grad} \varphi)^2 = 0, \qquad (10,2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Первый член уравнения даёт количество энергии, отводимой из единицы объёма в единицу времени, второй член — количество выделяемой энергии.

Однако одного этого уравнения недостаточно, так как равновесное состояние имеет место не только при касании, но и при сечении кривой W_1 прямой W_2. Положение прямой W_2 зависит от начальной температуры T_0. Принимая начальную температуру диэлектрика равной температуре окружающей среды, можно начальные условия свести к пограничным.

Пограничные условия, при которых (10,2) уже не имеет решения, дают искомые критические условия. Соотношение между напряжённостью поля E и пограничной температурой T_0, удовлетворяющей критическим условиям, даёт связь между пробивной напряжённостью поля и начальной температурой диэлектрика.

Решение (10,2) возможно только численным интегрированием, которое было выполнено В. А. Фоком[30]. Если, однако, вместо (10,1) для зависимости между проводимостью диэлектрика и температурой принять выражение

$$\gamma = \gamma_0 e^{bT},$$

то в некоторых простых случаях (10,2) решается до конца.

Изложенная теория теплового пробоя является наиболее полной и строгой. Она была разработана В. А. Фоком[30]. В случаях, когда отвод тепла производится только по толщине диэлектрика к электродам, пробивное напряжение равно

$$U_{пр} = \sqrt{\frac{33,6\,\lambda}{\gamma_0 b}}\, f e^{-\frac{b}{2}T_0},$$

где f — известная функция, зависящая от соотношения толщин и теплопроводимостей электродов и диэлектрика.

В последней формуле все величины выражаются в практических единицах. Из этой формулы видно, что тепловой пробой возможен только в том случае, когда проводимость увеличивается

с увеличением температуры. В противном случае равновесное состояние возможно при любой начальной температуре. Если проводимость электрода велика по сравнению с проводимостью диэлектрика, а толщина электрода мала по сравнению с толщиной диэлектрика, то $f \cong 1$ и напряжение при тепловом пробое не зависит от толщины диэлектрика. При малых толщинах диэлектрика d зависимость между пробивным напряжением и толщиной диэлектрика довольно хорошо выражается параболой

$$U_{пр} \sim \sqrt{d}.$$

В теории Фока было принято, что всё тепло отводится по направлению к электродам. Это имеет место только в идеально однородных диэлектриках. Практически диэлектрики всегда имеют более или менее резко выраженные неоднородности. В случае наличия нитевидной примеси с проводимостью большей, чем проводимость диэлектрика, интенсивное выделение энергии будет происходить в примеси. Отвод тепла будет происходить параллельно электродам. Точное решение этой задачи наталкивается на значительные математические трудности, поэтому имеются только приближённые решения. Наиболее точное решение дано Роговским[31] и Дрейфусом[32]. Зависимость пробивного напряжения от толщины диэлектрика, полученная Роговским, при радиусе примеси, значительно меньшем толщины диэлектрика, имеет следующий вид

$$U_{пр} = K d^{3/4},$$

где K — коэффициент, зависящий от теплопроводимости диэлектрика и радиуса примеси. Чем больше радиус примеси, тем меньше K.

Таким образом при тепловом пробое пробивное напряжение пропорционально толщине диэлектрика в степени n

$$U_{пр} = K d^n,$$

причём n лежит в пределах от $n = 0{,}5$ до $n \cong 1$ в зависимости от степени и характера неоднородности диэлектрика.

В теориях Фока, Роговского и Дрейфуса предполагается, что пробой происходит лишь тогда, когда равновесное состояние диэлектрика становится неустойчивым. Некоторые диэлектрики могут разрушаться при температурах ниже тех, при которых могло бы наступить указанное критическое состояние, т. е. при $T_п < T_к$ (рис. 17). В этих случаях пробивной является та напряжённость поля, при которой $T_а = T_п$.

Тепловые процессы медленные. Поэтому для теплового пробоя требуется сравнительно длительное время. Для определения этого времени необходимо добавить к (10,2) третий член, выражающий

энергию, затрачиваемую на нагрев диэлектрика

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \gamma (\operatorname{grad} \varphi)^2 - C\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \qquad (10,3)$$

где C — теплоёмкость диэлектрика.

Имеются только приближённые решения этого уравнения. Несколько методов приближённых решений разработаны Г. А. Гринбергом, М. И. Конторовичем и Н. П. Лебедевым[33].

Изложенная выше теория теплового пробоя исходила из положения о необходимости совпадения точек A и B (рис. 17) для наступления пробоя. Однако уже при достаточно близком расположении этих точек, вследствие случайных флуктуаций, температура отдельных мест может стать несколько больше T_B. Таким образом наступление неустойчивого состояния имеет некоторую вероятность уже при приближении к критическим условиям. Чем ближе условия к критическим, тем больше вероятность пробоя. При критических условиях она близка к единице. Сама неоднородность диэлектрика и её характер (величина, форма, расположение, природа) влияют на величину наклона прямой W_2 и, следовательно, на положение точек A и B. Поскольку это влияние зависит от случайных причин, то сами критические условия могут в определённых пределах варьировать для одного и того же диэлектрика. Указанные два обстоятельства приводят к тому, что пробивное напряжение при тепловом пробое имеет некоторый разброс.

Тепловой пробой твёрдого диэлектрика, как видно из изложенного, зависит от частных условий (формы, начальной температуры и т. п.). Теория теплового пробоя, проверенная в частных случаях, хорошо согласуется с экспериментальными данными[34,35].

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый выше анализ всех предложенных механизмов пробоя твёрдых диэлектриков даёт возможность сделать следующее заключение.

Несомненно, что наступлению пробоя предшествует очень сильное увеличение электрического тока, текущего через диэлектрик, в результате воздействия электрического поля. Можно наметить три механизма, способствующих увеличению проводимости диэлектрика, находящегося в электрическом поле: термическая, электростатическая и ударная ионизация.

На рис. 18 приведены зависимости плотности тока в твёрдом диэлектрике, обязанного различным механизмам проводимости, от напряжённости электрического поля. Из рисунка видно, что раньше всех вступает в силу механизм термической ионизации. Этот механизм играет основную роль до градиентов несколько ниже 10^6 *в/см*. Интересно отметить, что до нескольких киловольт на *см* ток термической ионизации практически подчиняется закону Ома. Термическая ионизация может привести к токам, предшествую-

щим пробою, при градиентах порядка 10^8 *в/см*. При градиентах несколько ниже, чем 10^6 *в/см* превалирующее значение начинает приобретать второй механизм — электростатическая ионизация. Этот механизм может также привести к сильным токам, предшествующим пробою, при градиентах порядка 10^7 *в/см*. Однако пробой происходит при меньших градиентах, порядка 10^6 *в/см*, и токи, предшествующие пробою, вызываются механизмом ударной ионизации, который вступает в действие почти непосредственно вслед за механизмом электростатической ионизации. Что увеличение проводимости в области градиентов, лежащей между областью закона Ома и пробивными градиентами, не вызывается механизмом ударной ионизации, следует из такого факта. Если из тока в диэлектрике при его освещении вычесть темновой ток, то получится ток, обусловленный только фотоэлектронами. Этот ток строго следует закону Ома даже при таких сильных полях, при которых темновой ток отклоняется от закона Ома. Из этого можно сделать заключение, что отклонения темнового тока от закона Ома вызваны не ударной ионизацией, а каким-то другим механизмом, так как в противном случае было бы непонятно, почему фотоэлектроны не могут участвовать в ударной ионизации наравне с темновыми.

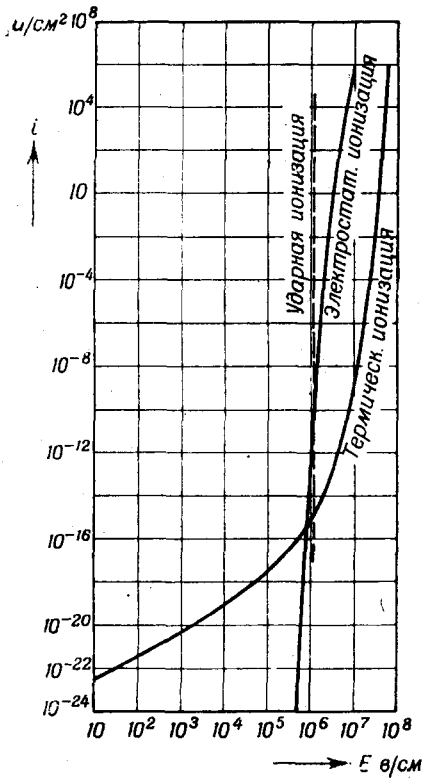

Рис. 18.

Для начала процесса ударной ионизации необходимо наличие «свободных» электронов или электронов в зоне проводимости. Наличие таких начальных электронов обеспечивается механизмом термической или электростатической ионизации, действие которых предшествует ударной ионизации.

Рассмотрим более подробно процесс ударной ионизации с классической точки зрения. Имеющийся свободный электрон ускоряется электрическим полем и при столкновении с нейтральной частицей отрывает электрон. Оторванный электрон вместе с ионизовавшим

ускоряются, опять ионизуют и т. д. В результате ряда таких последовательных актов число свободных электронов увеличивается по экспоненциальному закону. Эти электроны образуют лавину, движущуюся к аноду. Если имеется один начальный электрон, то образуется одна лавина. Одна лавина даёт один импульс тока. Для непрерывного прохождения электрического тока необходимо образование последовательных лавин, а для этого необходимо после или во время прохождения каждой лавины образование нового или новых начальных электронов. Непрерывное прохождение тока требует непрерывного образования начальных электронов. При пробое газа начальные электроны образуются фотоионизацией излучением, сопровождающим образование лавины. В твёрдом диэлектрике непрерывное образование начальных электронов обеспечивается термической или электростатической ионизацией. Интенсивность такого процесса должна быть невелика, на несколько порядков меньше, чем интенсивность процесса ударной ионизации.

В начале развития лавины процесс имеет нестабильный характер. Однако по мере его развития начинают формироваться и усиливаться факторы, тормозящие дальнейшее развитие процесса. После прохождения лавины электронов остаётся остов положительно заряженных частиц*), плотность которых растёт почти также по экспоненциальному закону. Этот положительный объёмный заряд тормозит движение части электронов.

Замедляющее действие положительного объёмного заряда увеличивается с ростом лавины и действует стабилизирующим образом на развитие процесса ионизации. Стабилизация здесь понимается в том смысле, что, начиная с какого-то момента, плотность положительного заряда в остове или интенсивность ионизации становятся постоянными.

Дальнейшие процессы, относящиеся к последней стадии пробоя, ещё совершенно не ясны. Относительно этих процессов можно сделать ряд предположений. Электроны, замедленные положительным объёмным зарядом, улавливаются и образуют либо отрицательные ионы, либо нейтрализуют положительные ионы в ионных кристаллах. В первом и во втором случаях нарушается нормальное распределение сил между частицами. Это может вызвать в отдельных местах диэлектрика столь большие местные напряжения, что происходит смещение группы частиц и образование микроскопических трещин.

Возможно другое предположение. Замедленные электроны не могут ионизовать при столкновениях с тяжёлыми частицами, но способны передавать им энергию, приводящую их в колебательное движение. Таким образом, отдельные места диэлектрика могут нагреться

*) Это верно и для случая ионных кристаллов. В этом случае ионизация выражается в отрыве электрона от отрицательного иона. После прохождения лавины электронов остаётся остов нескомпенсированных положительных ионов решётки.

до высокой температуры, при которой происходит расплавление или прожог этих мест.

В ионных кристаллах нейтрализация положительных ионов приводит к образованию атомов металла, а это может привести к образованию металлических мостиков, закорачивающих промежуток между электродами и расплавляемых током короткого замыкания. Возможны и другие предположения.

С точки зрения квантовой механики процесс пробоя может быть трактован следующим образом. Для начала ионизации также необходимо наличие некоторого числа электронов в зоне проводимости. Ионизация происходит при соударении электрона, находящегося в зоне проводимости, с электроном, находящимся в нормальной зоне. В результате этого электрон из нормальной зоны переходит в зону проводимости. Нормальная зона постепенно беднеет электронами, зона проводимости, наоборот, пополняется. Этот процесс, имеющий вначале нестабильный характер, адэкватен процессу образования лавины при классической трактовке.

По мере накопления электронов в зоне проводимости начинается обратный процесс — переход электронов из зоны проводимости в нормальную. Этот обратный переход является стабилизирующим процессом. Здесь под стабилизацией следует понимать установление постоянного распределения электронов по зонам, между которыми происходит обмен электронами. Переход электрона из зоны проводимости в нормальную зону возможен при передаче энергии тяжёлой частице электроном, находящимся в зоне проводимости.

В результате такой передачи энергии диэлектрик разогревается до расплавления или прожога. Так как такой процесс облегчён и наиболее вероятен там, где имеются локальные уровни, то он развивается в местах с неоднородностями. Различие между классической и квантовомеханической трактовкой процесса заключается в том, что, с точки зрения квантовой механики, переход электрона с одной зоны в другую не сопровождается пространственным перемещением электрона. Поэтому накопление электронов в зоне проводимости не означает сосредоточение электронов в каком-нибудь определённом месте и в этом смысле это не адэкватно образованию лавины. Поэтому квантовая механика не может объяснить механическое разрушение диэлектрика перемещением частиц. Для непрерывности процесса, с точки зрения квантовой механики, не требуется непрерывная поставка начальных электронов. Они нужны только для начала процесса.

Взгляды на природу электрического пробоя твёрдого диэлектрика, развитые здесь, в сущности являются более глубокой трактовкой идеи, впервые предложенной Смуровым. На эту идею в своё время не было обращено должного внимания. Однако диалектическое развитие учения о природе электрического пробоя снова привело к этой идее, причём на новом уровне идея, естественно, подверглась более полной и глубокой разработке.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Шателен, Русские электротехники. Госэнергоиздат, 1949.
2. А. А. Елисеев, Василий Владимирович Петров. Госэнергоиздат, 1949.
3. Б. М. Вул, ЖТФ **2**, 1 (1932).
4. Ф. Энгельс, Диалектика природы. Госполитиздат. 1948 г.
5. W. Rogowski, Arch. El. **18**, 123 (1927).
6. Горовиц, ЖРФХО **59**, 369, 533 (1927); Горовиц и Пинес, ЖРФХО **59**, 541 (1927).
7. А. Ф. Иоффе, УФН **8**, 141 (1928).
8. А. П. Александров и А. Ф. Иоффе, ЖТФ **3**, 33 (1933).
9. A. F. W. Austen a. S. Whitehead, Proc. Roy. Soc. **176A**, 33 (1940).
10. А. А. Смуров, Вестник эксп. и теор. электротехн. **1**, 239, 279 (1928); Электротехника высокого напряжения и передача энергии, изд. 2-е, ГОНТИ, 1931, стр. 212—214, 233—262.
11. A. Hippel, Zeits. f. Physik. **67**, 707 (1931).
12. А. А. Воробьёв и Е. К. Завадовская, ДАН **81**, 375 (1951).
13. A. Hippel, Journ. Appl. Phys. **8**, 815 (1937); Trans. Farad. Soc. **42A**, 78 (1946).
14. А. П. Александров, А. Ф. Вальтер, Б. М. Вул и др., Физика диэлектриков, 1932, стр. 453.
15. R. Seeger a. E. Teller, Phys. Rev. **54**, 515 (1938).
16. H. Fröhlich, Phys. Rev. **56**, 349 (1939); R. Seeger a. E. Teller, Phys. Rev. **56**, 352 (1939).
17. W. Franz, Zeits. f. Physik. **113**, 607 (1939).
18. B. Callen, Phys. Rev. **76**, 1394 (1949).
19. A. Hippel a. P. S. Alger, Phys. Rev. **76**, 127 (1949).
20. F. Seitz, Phys. Rev. **76**, 1377 (1949).
21. G. Malmlow a. F. Seitz, Phys. Rev. **71**, 125 (1947).
22. H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. **A160**, 230 (1937); **172**, 94 (1939); **178**, 493 (1939); **188**, 521 (1947); Phys. Rev. **56**, 349 (1939).
23. C. Zener, Proc. Roy. Soc. **A145**, 523 (1934).
24. F. Cernuschi, Proc. Cambr. Phil. Soc. **32**, 276 (1936).
25. Бете и Зоммерфельд, Электронная теория металлов. ОНТИ, 1938, стр. 114.
26. R. H. Fowler, Proc. Roy. Soc. **A141**, 56 (1933).
27. Ф. Ф. Волькенштейн, Электропроводность полупроводников, Гостехиздат, 1947, стр. 291.
28. Ф. Ф. Волькенштейн, ЖТФ **5**, 583 (1935); Электропроводность полупроводников, стр. 302.
29. Я. И. Френкель, ЖЭТФ **8**, 1292 (1937).
30. В. А. Фок, Труды ЛФТЛ **5**, 52 (1928).
31. W. Rogowski, Arch. El. **19**, 71 (1927).
32. Dreyfus, Bull. Schweiz. El. Ver. № 7 и 12 (1924); El. u. Maschin. 133 (1926).
33. Г. А. Гринберг, М. И. Конторович и Н. П. Лебедев, ЖТФ **10**, 199 (1940).
34. А. М. Залесский, Сборник Лен. электромех. инст. 1 (3), 117 (1934).
35. А. Ф. Вальтер, Электр. изоляция, вып. 3, 3 (1940).