

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕДЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

А. И. Ахиезер и Я. Б. Файнберг

СОДЕРЖАНИЕ

I. Медленные волны в волноводах, частично заполненных диэлектриком	322
II. Цепочка эндовибраторов	331
III. Волноводы, нагруженные дисками	339
IV. Спиральные волноводы	348
V. Взаимодействие пучка заряженных частиц с медленными волнами	355
VI. Взаимодействие пучка заряженных частиц с электронной плазмой	360

В последнее время при решении ряда физических и радиотехнических задач широко используются медленные электромагнитные волны, т. е. волны, фазовая скорость распространения которых меньше скорости света в вакууме. Важное значение медленных волн обуславливается возможностью эффективного взаимодействия с ними заряженных частиц. Это взаимодействие используется в ряде приборов (как, например, клистрон, лампа с бегущей волной, многокамерный магнетрон, усилитель с двумя пучками, магнетронный усилитель и др.) для возбуждения и усиления электромагнитных колебаний сверхвысоких частот. Несмотря на большое разнообразие такого рода приборов, физические процессы, происходящие в них, имеют много общего и могут быть разъяснены при рассмотрении общей задачи о взаимодействии заряженных частиц с медленной волной. Важную роль в этом взаимодействии играет эффект Черенкова, состоящий в том, что заряженная частица, равномерно движущаяся в системе, в которой могут распространяться медленные волны, сама способна излучать такие волны, если только её скорость превосходит некоторое критическое значение. При этом излучение имеет место независимо от того, движется ли частица в диэлектрике или в вакууме; в последнем случае нужно только, чтобы искусственно, например специальным расположением металлических

перегородок с отверстиями на пути распространения волны, были созданы такие условия, при которых фазовая скорость волны меньше скорости света в вакууме.

Если с медленными волнами взаимодействует не отдельная частица, а немодулированный пучок заряженных частиц с достаточно малой плотностью, причём скорость пучка превосходит критическое значение скорости в эффекте Черенкова, то состояние пучка становится неустойчивым и имеющиеся в нём флуктуации плотности распространяются в виде волн плотности заряда с нарастающей амплитудой. Такой же характер имеют возбуждающиеся при этом медленные электромагнитные волны. Неустойчивость пучка и возникновение волн с нарастающей амплитудой играют существенную роль в механизме возбуждения и усиления колебаний сверхвысоких частот во всех приборах, где используется взаимодействие электронного пучка с медленными волнами (например, в таких типичных приборах, как лампа с бегущей волной, многокамерный магнетрон и магнетронный усилитель).

В настоящей статье мы сделаем обзор известных методов получения медленных волн, использующих волноводы, частично заполненные диэлектриком, а также периодические структуры, не содержащие диэлектриков (типа цепочки эндовибраторов) и спиральные волноводы; кроме того, мы изложим общие закономерности тех процессов взаимодействия заряженных частиц с медленными волнами, которые играют существенную роль при генерировании и усилении колебаний сверхвысоких частот.

1. МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКОМ

1. Известно, что в обычных однородных волноводах, не содержащих диэлектриков, фазовая скорость распространения волн (вдоль оси волновода) превосходит скорость распространения света в вакууме. Если волновод полностью заполнить диэлектриком, то в области частот $\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon - 1}}$ (ϵ — диэлектрическая

постоянная, ω_0 — граничная частота пустого волновода) фазовая скорость будет меньше скорости света в вакууме c . Однако для понижения фазовой скорости нет необходимости заполнять волновод диэлектриком полностью. Оказывается, что если стенки волновода покрыть слоем диэлектрика, то в области, не занятой диэлектриком, начиная с некоторой критической частоты, фазовая скорость распространения v будет меньше c .

В этом параграфе мы кратко изложим особенности распространения волн в волноводах, частично заполненных диэлектриком^{1,2}. Для простоты ограничимся рассмотрением цилиндрического

волновода, стенки которого покрыты слоем диэлектрика. Диэлектрик будем считать идеальным и изотропным.

Обозначим радиус волновода через b и толщину слоя диэлектрика через $d = b - a$ (рис. 1). Мы будем рассматривать монохроматические волны, распространяющиеся вдоль оси волновода (ось z), и считать, что компоненты поля пропорциональны $e^{i(\omega t - k_z z)}$ (k_z — проекция волнового вектора на ось z). В случае E -волны ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) компоненты поля в цилиндрической

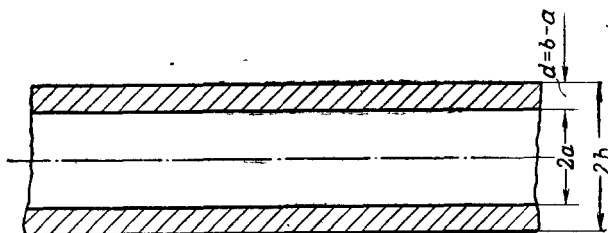


Рис. 1.

системе координат удобно выражать следующими формулами³.

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon \mu k^2 U, & E_r &= \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z}, & E_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial z}, \\ H_z &= 0, & H_r &= i \frac{\varepsilon k}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & H_\varphi &= -i \varepsilon k \frac{\partial U}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (1,1)$$

где функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \varepsilon \mu k^2 U = 0 \quad (1,2)$$

($k = \frac{\omega}{c}$, ε — диэлектрическая постоянная и μ — магнитная проницаемость).

Для H -волн ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) вместо (1,1) имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \varepsilon \mu k^2 U, & H_r &= -\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z}, \\ H_\varphi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial z}, \\ E_z &= 0, & E_r &= i \frac{\mu k}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E_\varphi &= -i \mu k \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

Частные решения уравнения (1,2) имеют следующий вид:

$$U = \begin{cases} U_1 J_n(k_1 r) \cos n\varphi e^{i(\omega t - k_3 z)}, & \text{если } r \leq a, \\ [U'_2 J_n(k_2 r) + U''_2 N_n(k_2 r)] \cos n\varphi e^{i(\omega t - k_3 z)}, & \text{если } a \leq r \leq b, \end{cases} \quad (1,2')$$

где J_n и N_n — функции Бесселя и Неймана, $k_1 = \sqrt{k^2 - k_3^2}$, $k_2 = \sqrt{\epsilon \mu k^2 - k_3^2}$, $k = \frac{\omega}{c}$, n — целое число, U_1 , U'_2 , U''_2 — константы.

Мы будем предполагать, что стенки волновода являются идеально проводящими. Поэтому тангенциальная составляющая электрического поля при $r = b$ должна обращаться в нуль. Кроме того, при $r = a$ должны быть непрерывны тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. Итак, имеют место следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} E_{z,r=a-0} &= E_{z,r=a+0}, & E_{\varphi,r=a-0} &= E_{\varphi,r=a+0}, \\ H_{z,r=a-0} &= H_{z,r=a+0}, & H_{\varphi,r=a-0} &= H_{\varphi,r=a+0}. \end{aligned} \right\} \quad (1,4)$$

Легко убедиться в том, что отдельные E - и H -волны, отвечающие $n \neq 0$, не могут удовлетворять всем этим граничным условиям. Единственным исключением являются аксиально-симметричные E - и H -волны, поля которых порознь могут удовлетворять граничным условиям (1,4). При $n \neq 0$ граничным условиям можно удовлетворить только линейной комбинацией E - и H -волн. Иными словами, раздельное существование E - и H -волн возможно только в случае аксиально-симметричного поля, во всех же остальных случаях в волноводе могут распространяться только суперпозиции E - и H -волн.

В дальнейшем нас главным образом будет интересовать взаимодействие полей с заряженными частицами, движущимися в приосевой области волновода. С этой точки зрения наибольший интерес представляет аксиально-симметричная E -волна, отвечающая $n = 0$, для которой компонента E_z на оси волновода отлична от нуля. (Для волн с $n \neq 0$ E_z , будучи пропорциональной $J_n(k_1 r)$, обращается в нуль на оси волновода.) Мы ограничимся поэтому рассмотрением аксиально-симметричной E -волны (E_0 -волна).

Отличные от нуля компоненты электрического и магнитного полей для E_0 -волны выражаются следующими формулами: в области $r \leq a$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 J_0(k_1 r) e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ E_r &= i \frac{k_3}{k_1} E_0 J_1(k_1 r) e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ H_\varphi &= i \frac{k}{k_1} E_0 J_1(k_1 r) e^{i(\omega t - k_3 z)}; \end{aligned} \right\} \quad (1,5)$$

в области $a \leq r \leq b$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= [A_2 J_0(k_2 r) + B_2 N_0(k_2 r)] e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ E_r &= i \frac{k_3}{k_2} [A_2 J_1(k_2 r) + B_2 N_1(k_2 r)] e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ H_\varphi &= i \varepsilon \frac{k}{k_2} [A_2 J_1(k_2 r) + B_2 N_1(k_2 r)] e^{i(\omega t - k_3 z)}. \end{aligned} \right\} \quad (1,6)$$

Граничные условия (1,4) приводят к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} E_0 J_0(k_1 a) &= A_2 J_0(k_2 a) + B_2 N_0(k_2 a), \\ \frac{1}{k_1} E_0 J_1(k_1 a) &= \frac{\varepsilon}{k_2} [A_2 J_1(k_2 a) + B_2 N_1(k_2 a)], \\ A_2 J_0(k_2 b) + B_2 N_0(k_2 b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1,7)$$

Исключив отсюда постоянные E_0 , A_2 , B_2 , получим уравнение, связывающее k_3 с частотой ω и параметрами волновода ^{1,2},

$$\frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \frac{k_1 \varepsilon}{k_2} = \frac{J_0(k_2 a) N_0(k_2 b) - N_0(k_2 a) J_0(k_2 b)}{J_1(k_2 a) N_0(k_2 b) - N_1(k_2 a) J_0(k_2 b)}. \quad (1,8)$$

Это соотношение даёт возможность определить фазовую скорость волны $v_\varphi = \frac{\omega}{k_3}$ как функцию частоты. Зависимость фазовой скорости от частоты мы будем в дальнейшем называть дисперсионной, а уравнение (1,8) — дисперсионным уравнением *).

Фазовая скорость рассматриваемых нами волн имеет одно и то же значение в области, не занятой диэлектриком, и в слое диэлектрика. Поэтому при достаточно больших значениях диэлектрической постоянной ε и толщины слоя диэлектрика $b - a$ может быть достигнуто существенное понижение фазовой скорости до значений, которые гораздо меньше c .

Если диэлектрик почти полностью заполняет волновод, то фазовая скорость v_φ мало отличается от того значения, которое она имеет в волноводе, полностью заполненном диэлектриком.

*) Мы вывели дисперсионное уравнение для волновода, стенки которого покрыты слоем диэлектрика. Аналогичным образом может быть рассмотрен другой случай частичного заполнения волновода диэлектриком, когда внутри волновода вставлен диэлектрический стержень. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид ³

$$\frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \frac{k_1}{k_2 \varepsilon} = \frac{J_0(k_2 a) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_0(k_2 a)}{J_1(k_2 a) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_1(k_2 a)},$$

где

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon \mu k^2 - k_3^2}, \quad k_2 = \sqrt{k^2 - k_3^2}.$$

В этом последнем случае фазовая скорость распространения волны равняется

$$v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \quad a = 0,$$

где $\omega_0 = \frac{2,405}{b}c$ — критическая частота волновода радиуса b , не содержащего диэлектрика. Если $\omega > \omega_0$ ($\varepsilon - 1$)^{-1/2}, то $v_{\varphi} < c$.

В том случае, если диэлектрик почти полностью заполняет волновод ($a \ll b$), легко исследовать дисперсионное уравнение (1,8). Считая, что k_2 близко к невозмущенному значению $\frac{2,405}{b}$, и пользуясь известными асимптотическими представлениями беселевых функций, справедливыми при малых значениях аргумента ($x \ll 1$),

$$J_0(x) \approx 1, \quad J_1(x) \approx \frac{1}{2}x,$$

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}, \quad N_1(x) \approx -\frac{2}{\pi x}$$

(γ — постоянная Эйлера), мы получим из (1,8) следующее выражение для фазовой скорости, справедливое при $a \ll b$,

$$v_{\varphi} = c \left\{ \varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left[1 + 3,7 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{a^2}{b^2} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (1,9)$$

Эта величина, как и следовало ожидать, превосходит фазовую скорость при полном заполнении волновода диэлектриком; однако в области частот

$$\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon - 1}} \left[1 + 1,85 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{a^2}{b^2} \right] \quad v_{\varphi} < c.$$

Положив $v_{\varphi} = \infty$, мы определим граничную частоту волновода ω_g . Если $a \ll b$, то граничная частота равна

$$\omega_g = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}} \left[1 + 1,85 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{a^2}{b^2} \right]. \quad (1,10)$$

Волны с частотами, меньшими ω_g , не могут распространяться в волноводе. Граничная частота волновода, частично заполненного диэлектриком, всегда лежит между граничной частотой волновода, полностью заполненного диэлектриком, и граничной частотой волновода, не содержащего диэлектрика вовсе:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}} < \omega_g < \omega_0.$$

В том случае, если радиус канала в диэлектрике не мал по сравнению с радиусом волновода, исследование уравнения (1,8) представляет собой сложную задачу². Довольно удобным

оказывается графическое решение уравнения (1,8) (с этой целью нужно вычертить кривую, определяющую зависимость k_2 от k_1 , и найти точки её пересечения с гиперболой

$$k_2^2 - k_1^2 = (\varepsilon - 1) \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2},$$

где λ_0 — длина волны в вакууме).

На рис. 2 представлена³ зависимость фазовой скорости v_φ от длины волны в волноводе $\lambda = \frac{2\pi}{k_3}$ от длины волны в вакууме для $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ и $\varepsilon = 57$.

Таким образом, в волноводах, частично заполненных диэлектриком, фазовая скорость распространения волн может быть

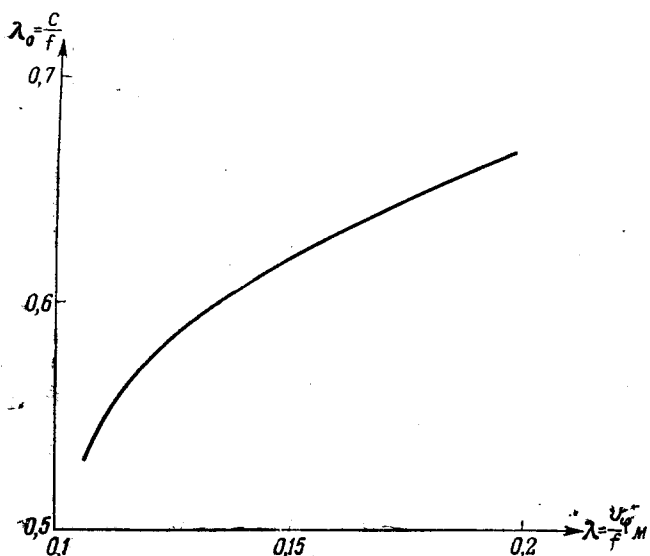


Рис. 2.

понижена до значений, меньших скорости света в вакууме. Поэтому поля таких волноводов могут эффективно взаимодействовать с заряженными частицами.

Остановимся несколько подробнее на вопросе о топографии полей. Следует различать два случая, в зависимости от того, будет ли величина $k_1 = \sqrt{k^2 - k_3^2}$ вещественной или мнимой.

Так как $k_3 = \frac{\omega}{v_\varphi}$, то $k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{v_\varphi^2}}$ будет вещественным,

если $v_\varphi > c$. В этом случае в области, свободной от диэлектрика, ($r \leq a$) — составляющая электрического поля вдоль оси волновода, пропорциональная $I_0(k_1 r)$, достигает максимума на оси волновода.

Если $v_\varphi < c$, то k_1 будет мнимым и E_z при $r \leq a$ будет пропорционально $I_0(|k_1| r)$, где I_0 — модифицированная функция Бесселя. В этом случае E_z представляет собой монотонно возрастающую функцию r , принимающую минимальное значение на оси

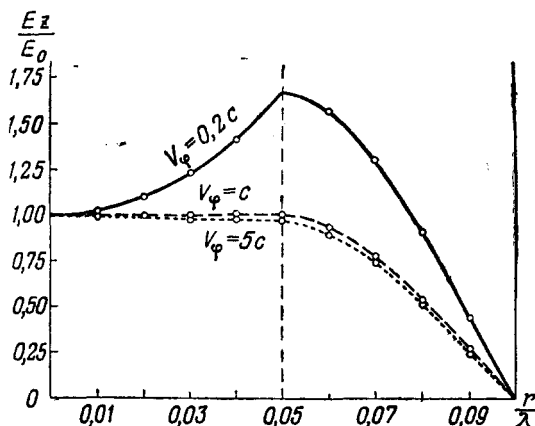


Рис. 3.

волновода. Заметим в связи с этим, что взаимодействие частиц с полем будет наиболее эффективным не при их движении вдоль оси волновода, а при движении вблизи границы с диэлектриком.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда $v_\varphi = c$. При этом $k_1 = 0$ и E_z при $r \leq a$ вовсе не зависит от r . На рис. 3 приведена зависимость E_z от r при $v_\varphi = 5c$, $v_\varphi = c$ и $v_\varphi = 0,2c$ (в первом случае $\epsilon = 31,82$, во втором $\epsilon = 32,8$ и в третьем $\epsilon = 57,25$, отношение радиуса канала к длине волны в вакууме равняется $5 \cdot 10^{-2}$, $\frac{b}{a} = 2$).

Заметим, что константы A_2 и B_2 , входящие в формулы (1,6), могут быть при $v_\varphi < c$ выражены следующим образом через E_0 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_2}{E_0} &= \frac{\pi}{2} k_2 a \left\{ \frac{k_2}{|k_1|^\epsilon} I_1(|k_1| a) N_0(k_2 a) - \right. \\ &\quad \left. - I_0(|k_1| a) N_1(k_2 a) \right\}, \\ \frac{B_2}{E_0} &= \frac{\pi}{2} k_2 a \left\{ I_0(|k_1| a) J_1(k_2 a) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_2}{|k_1|^\epsilon} J_0(k_2 a) I_1(|k_1| a) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1,11)$$

2. Определим теперь поток энергии в волноводе, стенки которого покрыты слоем диэлектрика. Пользуясь полученными выше выражениями для составляющих полей, легко вычислить плотность потока энергии вдоль оси волновода p . Мы получим следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{E_0^2}{8\pi} c \frac{kk_3}{k_1^2} J_1^2(k_1 r), \quad r \leq a, \\ p &= \frac{E_0^2}{8\pi} c \frac{\epsilon k k_3}{k^2} \left[\frac{A_2}{E_0} J_1(k_2 r) + \frac{B_2}{E_0} N_1(k_2 r) \right]^2, \quad a \leq r \leq b, \end{aligned} \right\} \quad (1,12)$$

где $\frac{A_2}{E_0}$ и $\frac{B_2}{E_0}$ определяются формулами (1,11). На рис. 4 приведена ¹ зависимость

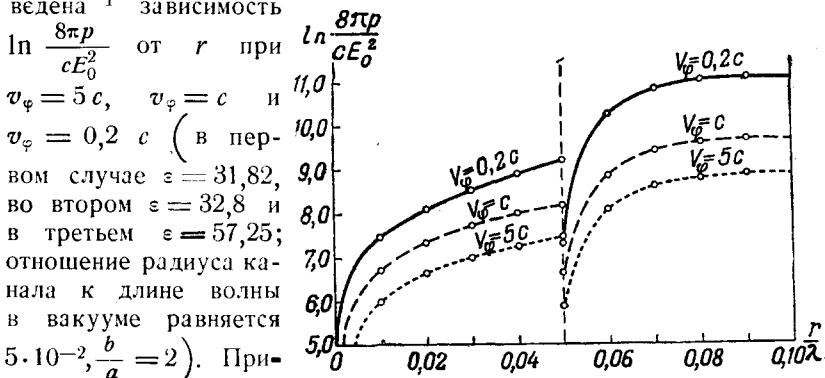


Рис. 4.

ведённые кривые показывают, что практически вся электромагнитная энергия протекает в области, занятой диэлектриком.

Полный поток энергии через сечение волновода выражается довольно сложной формулой (см.²). Мы приведём поэтому выражение для полного потока только в предельном случае $a \ll b$. В этом случае

$$P = 2\pi \int_0^b p r dr = 5,83 \cdot 10^{-3} E_0^2 c k k_3 b^4 \left[1 - 7,4 \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{a^2}{b^2} \right] \frac{\epsilon p_2}{c \epsilon k} \quad (1,13)$$

(поле E_0 выражено здесь в единицах CGSE).

Это соотношение показывает, что с увеличением диэлектрической постоянной сильно возрастает поток энергии. Уменьшение фазовой скорости также приводит к росту P .

Резюмируя^{1,2}, мы можем сказать, что частичное заполнение волновода диэлектриком даёт возможность, варьируя толщину

слоя диэлектрика и величину диэлектрической постоянной, понижать фазовую скорость распространения волн до сколь угодно малых значений. Преимуществом этого метода получения медленных волн является также понижение граничной частоты волновода (по сравнению с волноводом того же радиуса, не содержащим диэлектрика). Недостатками метода является большой поток мощности в диэлектрике, потери энергии в диэлектрике и, кроме того, возможность зарядки поверхности диэлектрика, особенно при движении заряженных частиц вблизи поверхности диэлектрика. Последнее обстоятельство приводит к искажению электрического поля и к запырению волновода.

Недостаток, связанный с возможностью зарядки поверхности диэлектрика, повидимому, можно устранить, покрыв диэлектрик слоем металла, толщина которого меньше глубины скин-слоя.

3. Эффективность изложенного метода получения медленных волн может быть значительно увеличена при использовании анизотропных диэлектриков с малыми потерями⁴.

Если волновод полностью заполнен анизотропным диэлектриком с диэлектрической постоянной ε_z вдоль оси z и ε_r по радиусу, то уравнения Максвелла имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) &= i k \varepsilon_z E_z, \\ k_3 H_\varphi &= k \varepsilon_r E_r, \\ i k_3 E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} &= i k H_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1,14)$$

Исключив отсюда H_φ и E_r , получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left(k^2 \varepsilon_z - k_3^2 \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} \right) E_z = 0. \quad (1,15)$$

В случае E_0 -волны компоненты поля выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 J_0(k_1 r), \\ E_r &= i \frac{k_3}{k_1} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} E_0 J_1(k_1 r), \\ H_\varphi &= i \frac{k}{k_1} \varepsilon_z E_0 J_1(k_1 r) \end{aligned} \right\} \quad (1,16)$$

(множителя $e^{i(\omega t - k_3 z)}$ мы здесь не выписываем).

Полный поток мощности вдоль оси волновода, заполненного анизотропным диэлектриком, равняется

$$P_{\text{аниз}} = \frac{c E_0^2}{8} \frac{1}{k_1^2} \frac{k k_3}{\varepsilon_r} J_1^2(k_1 b) b^3. \quad (1,17)$$

Сравним это выражение с выражением для потока мощности в волноводе, заполненном изотропным диэлектриком, считая, что ω , v_φ и E_0 в обоих случаях одинаковы. В случае изотропного диэлектрика поток мощности равен

$$P_{\text{изотр}} = \frac{cE_0^2}{8} \frac{kk_3}{k_1^2} \varepsilon J_1^2(k_1 b) b^2.$$

Из условия равенства фазовых скоростей следует, что

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z}\right).$$

Если $\omega \approx \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon_z}}$, то $\varepsilon \approx \varepsilon_z$. Отношение потока энергии в анизотропном диэлектрике к потоку в изотропном диэлектрике равно

$$\frac{P_{\text{аниз}}}{P_{\text{изотр}}} \approx \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r}.$$

Таким образом, если $\varepsilon_r \gg \varepsilon_z$, то это отношение значительно меньше единицы. Можно показать, что потери в стенках волновода при заполнении его анизотропным диэлектриком уменьшаются в том же отношении.

II. ЦЕПОЧКА ЭНДОВИБРАТОРОВ

Для получения медленных волн не обязательно заполнять волновод диэлектриком. Медленные волны могут быть получены также в волноводах, не содержащих диэлектриков, если на пути распространения волны расположены металлические перегородки с отверстиями. В этом параграфе мы рассмотрим получение медленных волн в линейных периодических структурах, представляющих собой совокупности идентичных, связанных друг с другом через отверстия, элементарных ячеек-эндовибраторов, расположенных вдоль общей оси. Такую структуру можно рассматривать также как волновод, нагруженный дисками с отверстиями для связи *).

Пусть система рассматриваемых нами эндовибраторов образуется вращением вокруг оси z периодической кривой с периодом l . Полость получающегося тела вращения должна быть односвязной, а в остальном форма образующей в интервале $0 \leq z \leq l$ произвольна. Мы будем рассматривать аксиально-симметричную волну (E_0 -волна) с отличными от нуля компонентами E_z , E_r , H_φ , причём эти величины не зависят от угла φ . Благодаря периодич-

*) Метод получения медленных электромагнитных волн в периодических структурах был предложен В. В. Владимирским в 1946 г.⁵. Ниже излагается содержание работы⁵.

ности структуры все компоненты поля должны удовлетворять следующему условию:

$$F(r, z + l) = e^{i\psi} F(r, z), \quad (2,1)$$

где ψ — разность фаз между колебаниями в двух соседних ячейках-эндовибраторах. Эта величина зависит от частоты ω и для волн, распространяющихся в направлении положительных z , лежит в интервале $(0, \pi)$.

Фазовая скорость волны v_φ связана с ψ соотношением

$$v_\varphi = \frac{\omega l}{\psi}. \quad (2,2)$$

Чтобы убедиться, что эта величина может быть сделана меньше c , достаточно показать, что через цепочку эндовибраторов могут проходить достаточно малые частоты. В связи с этим мы рассмотрим вопрос о полосе пропускания частот цепочкой эндовибраторов. Для оценки ширины этой полосы нет необходимости полностью решать уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями. Как показал В. В. Владимирский⁵, достаточно воспользоваться некоторыми экстремальными свойствами собственных частот⁶. С этой целью введём в рассмотрение функцию $U = rH_\varphi$. Она удовлетворяет уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$. Предполагая стенки эндовибраторов идеально проводящими, мы имеем граничное условие $E_t = 0$, которое, как легко видеть, сводится к равенству нулю нормальной производной от функции U :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

Разделим рассматриваемую нами систему связанных эндовибраторов на отдельные ячейки бесконечно тонкими плоскостями, перпендикулярными к оси z и расположенными на расстояниях l друг от друга. При этом на границе раздела эндовибраторов будет выполняться условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$. Обозначим через ω_s^e ($s = 1, 2, \dots$) последовательность собственных частот отдельной ячейки-эндовибратора. Для всей цепочки эндовибраторов каждое из этих значений будет N -кратно вырождено (N — число ячеек в цепочке). При введении связи через отверстия вырождение снимается и из каждой частоты ω_s^e возникает целая полоса частот $\omega_s(\psi)$, где ψ — введённая выше разность фаз между колебаниями в соседних эндовибраторах (для волн, распространяющихся в положительном направлении оси z , ψ принимает значения $\pi \frac{p}{N}$, где p — целое

число, изменяющееся от нуля до N). Как известно, при введении связи собственные значения возрастают (см.⁶, теорема 4). Отсюда следует, что для распространения E_0 -волны вдоль цепочки эндовибраторов необходимо, чтобы собственная частота эндовибраторов, получающихся разделением цепочки идеально проводящими плоскостями, была ниже частоты распространяющихся волн.

Оценим теперь верхнюю границу получающейся при введении связи полосы частот. Для этого представим себе, что цепочка разделена на отдельные ячейки идеально магнитными перегородками. Это значит, что на границе между ними выполняется условие $H_t = 0$, т. е. $U = 0$. На остальной поверхности эндовибраторов сохраняется условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$. Собственные частоты этих ячеек ω_s^m будут выше собственных частот ω_s^e (см.⁶, теорема 5).

Каждое из значений ω_s^m будет N -кратно вырождено. Если ввести связь, то вырождение снимается, причём собственная частота уменьшается (см.⁶, теорема 2). Отсюда следует, что для распространения E_0 -волны вдоль цепочки необходимо, чтобы частота отдельных эндовибраторов, получающихся разделением цепочки идеально магнитными перегородками, была выше частоты распространяющихся волн.

Итак, собственные частоты цепочки $\omega_s(\psi)$ (s — номер «полосы» частот) удовлетворяют неравенству

$$\omega_s^e \leq \omega_s(\psi) \leq \omega_s^m. \quad (2,3)$$

Можно показать, что границы этого неравенства достигаются в случае эндовибраторов, обладающих плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси z ⁵.

Определим, в каких пределах внутри s -полосы частот изменяется фазовая скорость волны. Заметим для этого, что границам полосы пропускания частот соответствуют значения ψ , равные $\psi = 0$ и $\psi = \pi$. Поэтому на нижней границе фазовая скорость равна

$$v_\varphi = \frac{\omega_s^e l}{0} = \infty.$$

На верхней границе s -полосы пропускания фазовая скорость равна

$$v_{\varphi \min} = \frac{\omega_s^m l}{\pi}. \quad (2,4)$$

Это — минимальное значение фазовой скорости распространения волны в s -полосе. При достаточно малых l $v_{\varphi \min}$ может быть гораздо меньше c .

Мы нашли пределы, в которых изменяется фазовая скорость волн, принадлежащих к определённой полосе частот, могущих распространяться в цепочке связанных эндовибраторов.

Часто, однако, этого недостаточно. Весьма важно знать точную дисперсионную зависимость, т. е. зависимость фазовой скорости от частоты.

Эта задача может быть решена, если известна зависимость частоты от ψ в пределах определённой полосы частот.

Определение дисперсионной зависимости представляет собой чрезвычайно сложную математическую задачу. Мы изложим здесь приближённые методы решения этой задачи, причём начнём с простейшего случая малой связи между эндовибраторами*).

Рассмотрим два эндовибратора с идеально проводящими стенками. Эндовибраторы сообщаются друг с другом через малое круглое отверстие радиуса a в бесконечно тонкой плоской стенке; размеры отверстия предполагаются малыми по сравнению с размерами стенки и длиной волны; линейные размеры эндовибраторов — одного порядка с длиной волны. Если отверстие заполнить идеально проводящей перегородкой, то мы получим два несвязанных эндовибратора, собственные колебания которых считаются известными. Каждый из эндовибраторов имеет ряд собственных частот, но при малой связи заметные резонансные явления имеют место только для близких частот. Поэтому мы будем рассматривать по одному собственному колебанию в каждом эндовибраторе (ради простоты мы предполагаем, что вырождение отсутствует).

Связь через отверстия вызывает сильное возмущение поля вблизи отверстий. Однако это возмущение ограничивается небольшой областью вблизи отверстия и не распространяется на весь объём эндовибраторов. Поэтому оно вызывает лишь небольшое изменение частоты, являющееся интегральным эффектом. Мы можем, следовательно, определить изменение частоты, пользуясь теорией возмущений и считая, что граничные условия подверглись малому возмущению.

Пусть E_1, H_1 и E_2, H_2 — поля в несвязанных эндовибраторах. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E_\alpha &= ik_\alpha H_\alpha, & \operatorname{div} H_\alpha &= 0, \\ \operatorname{rot} H_\alpha &= -ik_\alpha E_\alpha, & \operatorname{div} E_\alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

где $\alpha = 1, 2$, $k_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{c}$ и ω_α — собственные частоты обоих эндовибраторов.

Проинтегрировав по частям выражение $\operatorname{rot} E \operatorname{rot} E_1^*$ по объёму первого эндовибратора V_1 (E — поле, возникающее при нали-

*) Этот случай был изучен В. В. Владимирским⁷ (см. также^{8,9}). Ниже излагается содержание работы⁷.

ции связи между эндовибраторами), найдём:

$$\int_{V_1} (\mathbf{E}_1^t \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1^* - \mathbf{E}_1^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}) dV + \\ + \int_{S_1} ([\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1^*]_n - [\mathbf{E}_1^* \operatorname{rot} \mathbf{E}]_n) ds = 0 \quad (2,6)$$

(S_1 — поверхность, ограничивающая первый эндовибратор).

Воспользовавшись (2,5) и замечая, что поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}$ удовлетворяют граничным условиям

$$E_{1t} = 0 \text{ на поверхности } S_1,$$

$$E_t = 0 \text{ на поверхности } S_1 - S'$$

(S' — плоская поверхность, закрывающая отверстие), получим:

$$(k^2 - k_1^2) \int_{V_1} \mathbf{E} \mathbf{E}_1^* dV + ik_1 \int_{S'} [\mathbf{E} \mathbf{H}_1^*]_{n_1} ds = 0. \quad (2,7)$$

Аналогичным образом получим второе уравнение:

$$(k^2 - k_2^2) \int_{V_2} \mathbf{E} \mathbf{E}_2^* dV + ik_2 \int_{S'} [\mathbf{E} \mathbf{H}_2^*]_{n_2} ds = 0 \quad (2,8)$$

(n_1 и n_2 — внешние нормали к S_1 и S_2). Здесь $k = \frac{\omega}{c}$ и ω — частота связанных эндовибраторов. Эти уравнения ещё не содержат никаких пренебрежений. Для приближённого определения частоты мы подставим сюда приближённое значение поля $\mathbf{E}$. В качестве исходного приближения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ мы примем $q_1 \mathbf{E}_1$ и $q_1 \frac{k}{k_1} \mathbf{H}_1$ в объёме первого эндовибратора и $q_2 \mathbf{E}_2$ и $q_2 \frac{k}{k_2} \mathbf{H}_2$ в объёме второго эндовибратора, где q_1 и q_2 — некоторые константы. Так как возмущение полей ограничено небольшой областью, прилегающей к отверстию, то этим исходным приближением можно воспользоваться для вычисления объёмных интегралов в (2,7) и (2,8). Считая, что поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ нормированы согласно условию

$$\int_{V_1} |\mathbf{E}_1|^2 dV = \int_{V_2} |\mathbf{E}_2|^2 dV = 1, \quad (2,9)$$

получим:

$$\int \mathbf{E} \mathbf{E}_1^* dV = q_1, \quad \int \mathbf{E} \mathbf{E}_2^* dV = q_2. \quad (2,10)$$

Перейдём теперь к вычислению поверхностных интегралов в (2,7) и (2,8). Исходное приближение обращает, очевидно, поверхностные интегралы в нуль, так как в них входят только тангенциальные составляющие полей, а E_{1t} и E_{2t} обращаются в нуль на поверхности S' . Замечая, что тангенциальная составляю-

шая $\mathbf{H}_\alpha$ регулярна как на поверхности S' , так и в окрестности порядка длины волны λ , мы можем разложить $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ под знаком интеграла в ряд по степеням координат (что касается составляющей E_t , то она должна быть регулярной на поверхности S' , за исключением краёв отверстия, где она имеет интегрируемую особенность). Таким образом мы получим разложение поверхностных интегралов в ряд по степеням $\frac{a}{\lambda}$, где a — радиус отверстия*).

Вводя декартову систему координат с началом координат в центре отверстия и осью z , направленной вдоль нормали $\mathbf{n}_1$, и ограничиваясь в разложении $\mathbf{H}_1$ двумя первыми членами, получим:

$$\left. \begin{aligned} ik_1 \int_{S'} [\mathbf{E}\mathbf{H}_1^*]_{n_1} ds &= ik_1 \int_{S'} [\mathbf{E}\mathbf{H}_1^*(0)]_{n_1} ds - \\ &- ik_1 \int_{S'} \left(E_x x \frac{\partial H_{1x}^*}{\partial x} + E_x y \frac{\partial H_{1y}^*}{\partial y} - \right. \\ &\left. - E_y x \frac{\partial H_{1x}^*}{\partial x} - E_y y \frac{\partial H_{1y}^*}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (2,11)$$

где все производные от $\mathbf{H}_1^*$ взяты в начале координат.

Так как размеры отверстия малы по сравнению с длиной волны, то можно считать, что в окрестности отверстия поле $\mathbf{E}$ в первом приближении имеет электростатический характер и определяется из следующей электростатической задачи. Вдали от отверстия $E_x \rightarrow 0$, $E_y \rightarrow 0$, а компонента E_z стремится к $q_1 E_{1z}(0)$ в верхнем полупространстве и к $q_2 E_{2z}(0)$ в нижнем полупространстве. В плоскости $z = 0$ выполняется условие $E_t = 0$ всюду, кроме отверстия. Легко видеть, что первый интеграл, входящий в (2,11), обращается в нуль в электростатическом приближении. Его нельзя, однако, отбрасывать, так как он содержит малый параметр $\frac{a}{\lambda}$ в меньшей степени, чем второй интеграл. В первый интеграл нужно, следовательно, подставить более точное значение поля $\mathbf{E}$. Это можно сделать, преобразовав предварительно первый интеграл. Замечая, что нулевое приближение $q_1 \mathbf{E}_1$,

*) Если расстояние l , на котором расположены ближайшие к отверстию изгибы разделяющей стенки или другие особенности, заметно меньше λ , то мы получим разложение не по степеням $\frac{a}{\lambda}$, а по степеням $\frac{a}{l}$; эту величину, так же как и $\frac{a}{\lambda}$, мы считаем малой по сравнению с единицей.

$q_1 \frac{k}{k_1} \mathbf{H}_1$ точно удовлетворяет первому уравнению Максвелла и граничному условию $E_t = 0$ на поверхности S' , можно преобразовать первый интеграл из поверхностного в объемный:

$$\begin{aligned} ik_1 \int_{S'} [\mathbf{E} \mathbf{H}_1^*(0)]_{n_1} ds &= ik_1 \int_{S'} [(\mathbf{E} - q_1 \mathbf{E}_1), \mathbf{H}_1^*(0)]_{n_1} ds = \\ &= -kk_1 \int_V (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) \mathbf{H}_1^*(0) dv, \end{aligned} \quad (2,12)$$

где $\mathbf{H}_0 = q_1 \frac{k}{k_1} \mathbf{H}_1(0)$.

При удалении от отверстия подинтегральная функция в (2,12) быстро убывает. Поэтому главную роль играет область вблизи отверстия. В этой области магнитное поле $\mathbf{H}$ имеет, очевидно, магнитостатический характер, так как $a \ll \lambda$. Оно может быть приближенно определено из следующей магнитостатической задачи. Требуется найти магнитное поле $\mathbf{H} = \text{grad } \chi$, где χ — магнитный потенциал, удовлетворяющий уравнению $\Delta \chi = 0$ и граничному условию $\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0$ на поверхности проводника. Вдали от отверстия должно выполняться условие $\mathbf{H} \rightarrow q_1 \frac{k}{k_1} \mathbf{H}_1(0)$ в верхнем полупространстве и условие $\mathbf{H} \rightarrow q_2 \frac{k}{k_2} \mathbf{H}_2(0)$ в нижнем полупространстве.

Решив эти статические задачи и вычислив интегралы (2,11), (2,12), получим из (2,7) и (2,8) следующую систему уравнений для определения q_1 , q_2 и $k^{7,9}$:

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - k_1^2) q_1 - \frac{2}{3} k_1^2 a^3 (|\mathbf{E}_1|^2 q_1 - \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* q_2) + \\ + \frac{4}{9} k_1^2 a^3 (|\mathbf{H}_1|^2 q_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2^* q_2) &= 0, \\ (k^2 - k_2^2) q_2 - \frac{2}{3} k_2^2 a^3 (|\mathbf{E}_2|^2 q_2 - \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 q_1) + \\ + \frac{4}{9} k_2^2 a^3 (|\mathbf{H}_2|^2 q_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1^* q_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,13)$$

Изложенный метод может быть легко обобщен на тот случай, когда имеется не два, а любое число эндовибраторов⁷. Рассмотрим, следуя В. В. Владимирскому⁷, цепочку одинаковых цилиндрических эндовибраторов радиуса b и длины l , которые соприкасаются основаниями цилиндров. Связь между соседними эндовибраторами осуществляется через круглые отверстия радиуса a , центры которых лежат на оси системы. Мы ограничимся рассмотрением самой низкой частоты электрических волн цилиндра.

В этом случае неравные нулю компоненты поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{J_0(k_0 r)}{\sqrt{\pi b^2 l J_1^2(\rho_1)}}, \\ H_\varphi &= -i \frac{J_1(k_0 r)}{\sqrt{\pi b^2 l J_1^2(\rho_1)}}, \end{aligned} \right\} \quad (2,14)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя, ρ_1 — первый корень функции J_0 и $k_0 = \frac{\rho_1}{b}$.

Уравнения (2,13) приводят к бесконечной системе уравнений

$$(k^2 - k_0^2) q_n - \alpha k_0^2 (2q_n - q_{n-1} - q_{n+1}) = 0, \quad (2,15)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3\pi J_1^2(\rho_1)} \frac{a^3}{b^2 l}.$$

Эта величина характеризует связь между эндовибраторами и пропорциональна третьей степени радиуса отверстия. Система уравнений (2,15) допускает решение в виде бегущей волны

$$q_n = q_0 e^{in\psi}, \quad (2,16)$$

где ψ — разность фаз между колебаниями соседних эндовибраторов. Подставляя (2,16) в (2,15), получим:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \alpha (1 - \cos \psi). \quad (2,17)$$

Это и есть дисперсионное уравнение рассматриваемой нами задачи.

Согласно (2,2) фазовая скорость при распространении волн в цепочке равна

$$v_\varphi = \frac{\omega_0 l}{\psi} [1 + \alpha (1 - \cos \psi)]. \quad (2,18)$$

Фазовая скорость изменяется от ∞ при $\psi = 0$ до $\frac{\omega_0 l}{\pi} (1 + 2\alpha)$ при $\psi = \pi$.

Групповая скорость волны равна

$$v_g = l \frac{d\omega}{d\psi} = l \omega_0 \alpha \sin \psi = \frac{2}{3\pi} \frac{\rho_1}{J_1^2(\rho_1)} \frac{a^3}{b^3} c \sin \psi. \quad (2,19)$$

Она пропорциональна кубу отношения $\frac{a}{b}$. На границах полосы пропускания v_g обращается в нуль.

Выражение (2,18) для фазовой скорости показывает, что при малых расстояниях между стенками, разделяющими эндовибраторы, фазовая скорость может принимать значения, меньшие скорости света в вакууме. Однако при уменьшении l , иначе говоря, с увеличением числа разделяющих стенок, возрастают потери

энергии в стенках, а следовательно, увеличивается затухание волн, распространяющихся в цепочке. Затухание волн может быть уменьшено увеличением радиуса отверстия, так как при этом возрастает групповая скорость, а вместе с ней и длина затухания (длина затухания представляет собой расстояние, на котором амплитуда бегущей волны уменьшается в e раз; она равна $2 \frac{Qv_g}{\omega}$, где Q — добротность системы¹⁰). Поэтому представляет значительный интерес нахождение дисперсионной зависимости для цепочки с не малой связью между отдельными эндовибраторами, иначе говоря, случай, когда $a \gtrsim l$. В этом случае обычно говорят не о цепочке эндовибраторов, а о волноводе, нагруженном дисками с отверстиями^{1,2}. К изучению такого волновода мы теперь и перейдем*).

III. ВОЛНОВОДЫ, НАГРУЖЕННЫЕ ДИСКАМИ

1. Рассмотрим, прежде всего, тот, согласно^{11, 12}, случай, когда волновод нагружен дисками, расположенными достаточно близко друг к другу, так что выполняется условие

$$l \ll \lambda_b, \quad (3,1)$$

где $\lambda_b = \frac{1}{k_3}$ — длина волны в волноводе¹¹. Диски, так же как в предыдущем разделе, будем предполагать бесконечно тонкими. Так как $l \ll \lambda_b$, то можно считать, что поля в области $a \leq r \leq b$ (b — радиус волновода) между смежными дисками практически не зависят от координаты z (рис. 5). При этом, однако, поле медленно меняется при переходе от одной ячейки к другой. Иными словами, мы предполагаем, что зависимость полей от координаты

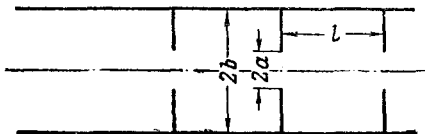


Рис. 5.

z в области $a \leq r \leq b$ имеет вид $e^{-ik_3 \bar{z}}$, где $\bar{z}$ представляют собой z -координаты середин ячеек. Если z -координаты дисков равны $(2n+1) \frac{l}{2}$ (n — целое число), то $\bar{z} = nl$.

В области $r \leq a$ поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 J_0(k_1 r) e^{i(\omega t - k_3 z)} \\ E_r &= iE_0 \frac{k_3}{k_1} J_1(k_1 r) e^{i(\omega t - k_3 z)} \\ H_\varphi &= iE_0 \frac{k}{k_1} J_1(k_1 r) e^{i(\omega t - k_3 z)} \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

*) Методы решения краевых задач в сложных волноводных системах и эндовибраторах разрабатывались Г. В. Кисунько, П. Е. Краснушкиным, Я. Н. Фельдом и др.

Мы предположим, что в области $a \leq r \leq b$ составляющая E_z имеет вид

$$E_z = qE_0 Z_0(kr) e^{i(\omega t - k_z \bar{z})}, \quad (3,3)$$

где функция

$$Z_0(kr) = N_0(kb) J_0(kr) - J_0(kb) N_0(kr)$$

выбрана таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию $E_z = 0$ на поверхности волновода; q — некоторая константа. Обратим внимание на то обстоятельство, что аргументом функции Z_0 является kr , а не $k_1 r$. Это связано с тем, что E_z в пределах одной ячейки не зависит от координаты z .

Найдём теперь E_r и H_φ . Для определения H_φ воспользуемся уравнением Максвелла

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = i k E_z.$$

Так как мы рассматриваем аксиально-симметричное поле, то

$$\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = 0 \text{ и}$$

$$H_\varphi = i q E_0 Z_1(kr) e^{i(\omega t - k_z \bar{z})}, \quad (3,4)$$

где

$$Z_1(kr) = N_0(kb) J_1(kr) - J_0(kb) N_1(kr).$$

Легко видеть, что в рассматриваемом нами приближении, когда E_z в пределах ячейки не зависит от z , $E_r = 0$. Действительно, из уравнений Максвелла следует, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = i k E_r.$$

Так как в пределах ячейки H_φ не зависит от z , то

$$E_r = 0. \quad (3,5)$$

Таким образом, в области $a \leq r \leq b$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= q E_0 Z_0(kr) e^{i(\omega t - k_z \bar{z})}, \\ E_r &= 0, \\ H_\varphi &= i q E_0 Z_1(kr) e^{i(\omega t - k_z \bar{z})}. \end{aligned} \right\} \quad (3,6)$$

Мы должны теперь «сшить» решения (3,2) и (3,6) на границе раздела областей, т. е. при $r = a$. Строго говоря, сделать это невозможно, так как поля в областях $r < a$ и $a < r < b$ по-разному зависят от z . Мы «сошьём» поле в средних точках ячеек, т. е. при $z = \bar{z}$. При таком «сшивании» компоненты E_z и H_φ будут, очевидно, непрерывны только в среднем, так как равенство полей будет иметь место только в серединах ячеек.

Исключив константы q и E_0 из соотношений

$$E_0 J_0(k_1 a) = q E_0 Z_0(ka), \quad E_0 \frac{k}{k_1} J_1(k_1 a) = q E_0 Z_1(k_1 a),$$

получим следующее уравнение, связывающее $k_1 = \sqrt{k^2 - k_3^2}$ и k :

$$\begin{aligned} \Phi(k_1 a) &\equiv \frac{1}{k_1 a} \frac{J_1(k_1 a)}{J_0(k_1 a)} = \\ &= \frac{1}{ka} \frac{J_1(ka) N_0(kb) - N_1(ka) J_0(kb)}{J_0(ka) N_0(kb) - N_0(ka) J_0(kb)} \equiv \alpha(ka, kb). \end{aligned} \quad (3,7)$$

Подчеркнём, что это дисперсионное уравнение справедливо, строго говоря, только в случае близко расположенных дисков ($k_3 l \ll 1$). Действительно, мы вывели уравнение (3,7) из условия непрерывности полей только в средних точках ячеек. Если расстояние между дисками мало, то поля в средней и крайней точках ячейки в области $r < a$ будут мало отличаться друг от друга. В этом случае условие непрерывности полей будет приближённо выполняться во всех точках ячейки. Тем не менее, дисперсионным уравнением (3,7) можно пользоваться для грубых расчётов вплоть до $k_3 l \sim \pi$.

Мы предполагали, что в области $r \leq a$ поле имеет вид бегущей волны с одним определённым значением волнового вектора k_3 . Такое предположение приближённо справедливо только в случае больших отверстий¹², когда $a \gg l$. Это связано с тем, что в действительности поле имеет вид суперпозиций ряда волн, распространяющихся с различными фазовыми скоростями. Только такой суперпозицией волн можно точно удовлетворить граничным условиям. Можно показать¹², что волны, накладывающиеся на рассматриваемую нами основную волну (с волновым вектором k_3), затухают при изменении r от $r = a$ до $r = 0$ и проникают на расстояние порядка l . Если поэтому $a \gg l$, то влияние этих вторичных волн незначительно и мы можем пользоваться в области $r < a$ представлением поля в виде (3,2).

2. Перейдём теперь к анализу дисперсионного уравнения (3,7). Рассмотрим сперва тот случай, когда $ka \ll 1$ и $kb \ll 1$, т. е. случай очень длинных волн. При этом

$$\alpha(ka, kb) \approx \frac{1}{(ka)^2 \ln \frac{b}{a}} \gg 1.$$

Из дисперсионного уравнения легко заключить, что k_1 должно быть вещественным, причём $k_1 a \gg 1$. Это следует из того, что функция $\Phi(k_1 a)$, равная α , при чисто мнимых k_1 заключена в пределах $(0, 1/2)$, а при вещественных k_1 определяется следующими

асимптотическими соотношениями:

$$\Phi(k_1 a) \approx \frac{1}{2}, \text{ если } k_1 a \ll 1,$$

$$\Phi(k_1 a) \approx \frac{1}{k_1 a} \operatorname{ctg}\left(k_1 a - \frac{\pi}{4}\right), \text{ если } k_1 a \gg 1.$$

Так как $k_1 a \gg 1$, то $a^2 k_3^2 = a^2 k^2 - a^2 k_1^2 \approx -a^2 k_1^2$, т. е. k_3 — чисто мнимая величина. Это значит, что волновод в области частот $ka \ll 1$ ведёт себя как аттенуатор.

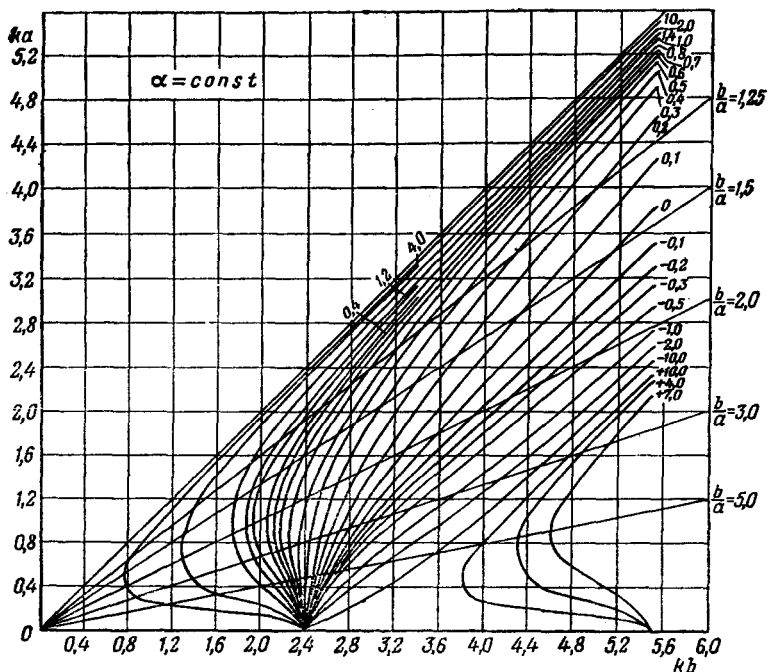


Рис. 6.

Когда с возрастанием k величина kb достигает значения 2,405, являющегося первым корнем функции Бесселя J_0 , дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{J_1(k_1 a)}{k_1 a J_0(k_1 a)} = \frac{J_1(ka)}{ka J_0(ka)},$$

из которого следует, что $k_1 = k$, т. е. $k_3 = 0$. Иначе говоря, нижняя граница полосы пропускания волновода, нагруженного

дисками, совпадает с нижней границей волновода без дисков того же радиуса.

С дальнейшим ростом ka функция $\alpha(kb)$ уменьшается и стремится к нулю (см. рис. 6¹¹, на котором изображено семейство кривых $\alpha(kb) = \text{const}$). Как следует из дисперсионного уравнения, при $\alpha \rightarrow 0$ величина k_1 становится чисто мнимой, причём $|k_1|a \gg 1$.

Так как значение ka , обращающее α в нуль, порядка единицы (см. рис. 6), то $k_3a \sim |k_1|a \gg 1$. Отсюда следует, что $\frac{v_\varphi}{c} \cong \frac{ka}{k_3a} \ll 1$. Таким образом, мы видим, что в волноводе, нагруженном дисками, могут распространяться волны, фазовая

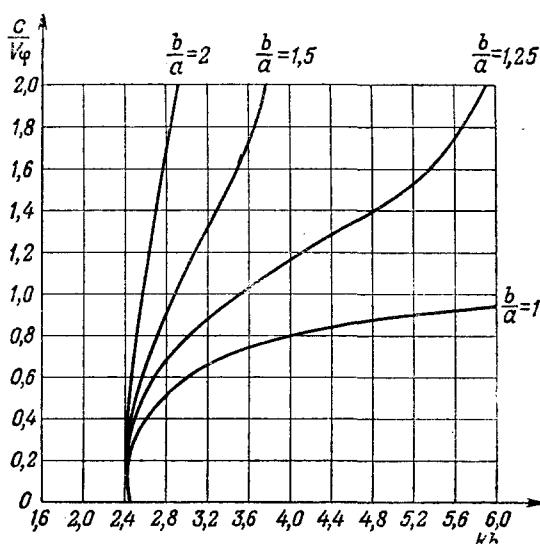


Рис. 7.

скорость которых меньше скорости света. На рис. 7 представлена зависимость $\frac{v_\varphi}{c}$ от kb при различных значениях $\frac{b}{a}$.

3. Как мы уже указывали выше, дисперсионное уравнение (3,7) справедливо в случае волновода, нагруженного бесконечно тонкими дисками, расстояние между которыми достаточно мало. Мы изложим теперь метод, дающий возможность принципиально определять зависимость фазовой скорости от частоты при любых расстояниях между дисками и конечной толщине дисков¹³.

Предполагая поле аксиально-симметричным, будем исходить из следующих выражений для компоненты E_z :

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_0(\chi_m r) e^{i(\omega t - \beta_m z)}, \quad r \leq a, \\ E_z &= \sum_{s=0}^{\infty} Z_0(\Gamma_s r) (b_s \cos \gamma_s z + d_s \sin \gamma_s z), \quad a \leq r \leq b, \end{aligned} \right\} \quad (3,8)$$

где

$$\chi_m^2 = k^2 - \beta_m^2, \quad \Gamma_s = k^2 - \gamma_s^2, \\ Z_0(\Gamma_s r) = J_0(\Gamma_s r) N_0(\Gamma_s b) - N_0(\Gamma_s r) J_0(\Gamma_s b)$$

(при таком выборе Z_0 выполняется граничное условие $E_z = 0$ при $r = b$).

Пользуясь уравнениями Максвелла, получим следующие выражения для компонент E_r и H_φ :

$$\left. \begin{aligned} E_r &= i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_m}{\chi_m} a_m J_1(\chi_m r) e^{i(\omega t - \beta_m z)}, \quad r \leq a, \\ E_r &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s}{\Gamma_s} Z_1(\Gamma_s r) (b_s \sin \gamma_s z - d_s \cos \gamma_s z), \quad a \leq r \leq b, \\ H_\varphi &= ik \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\chi_m} j_1(\chi_m r) e^{i(\omega t - \beta_m z)}, \quad r \leq a, \\ H_\varphi &= ik \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_s} Z_1(\Gamma_s r) (b_s \cos \gamma_s z + d_s \sin \gamma_s z), \quad a \leq r \leq b, \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

где

$$Z_1(\Gamma_s r) = J_1(\Gamma_s r) N_0(\Gamma_s b) - N_1(\Gamma_s r) J_0(\Gamma_s b).$$

На поверхности дисков, т. е. при $z = \pm \frac{l}{2}$ (рис. 8), E_r должно

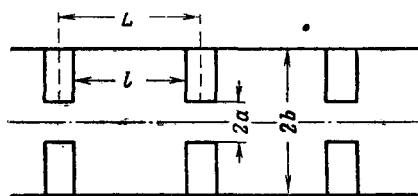


Рис. 8.

обращаться в нуль. Отсюда следует, что величина γ_s , входящая

в аргумент $\cos \gamma_s z$ в выражении для E_r , может принимать значения $(2s-1)\frac{\pi}{l}$, а величина γ_s , входящая в аргумент $\sin \gamma_s z$, — значения $\frac{2s\pi}{l}$. Таким образом, поле в области $a \leq r \leq b$ может быть представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sum_{s=0}^{\infty} Z_0(\Gamma_s r) b_s \cos \frac{2\pi s}{l} z + \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} Z_0(\Gamma_s r) d_s \sin \frac{(2s-1)\pi z}{l}, \\ H_\varphi &= ik \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_s} Z_1(\Gamma_s r) b_s \cos \frac{2\pi s}{l} z + \\ &\quad + ik \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_s} Z_1(\Gamma_s r) d_s \sin \frac{(2s-1)\pi z}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (3,10)$$

где

$$\Gamma_s^2 = k^2 - \left(\frac{2\pi s}{l} \right)^2,$$

для членов, содержащих $\cos \frac{2\pi s}{l} z$, и

$$\Gamma_s^2 = k^2 - \frac{(2s-1)^2 \pi^2}{l^2},$$

для членов, содержащих $\sin \frac{(2s-1)\pi}{l} z$.

Рассмотрим теперь подробнее поле в области $r \leq a$. Из условия периодичности изучаемой нами структуры следует, что любая компонента поля распространяющейся волны может быть представлена в виде

$$f(z, r) = e^{-i\beta_0 z} f_0(z, r),$$

где $f_0(z, r)$ — периодическая функция z с периодом L (см. рис. 8), а β_0 — вещественная величина, заключенная в пределах $\left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)^{14}$. Отсюда легко заключить, что

$$\beta_m = \beta_0 + \frac{2\pi m}{L}. \quad (3,11)$$

Полученные нами выражения для полей должны быть «сшиты» на границе двух областей, т. е. при $r=a$. Такое «сшивание» означает, что должна быть непрерывна компонента E_z при $r=a$ и $|z| \leq \frac{L}{2}$ (если $\frac{l}{2} \leq |z| \leq \frac{L}{2}$, то $E_{z,r=a} = 0$) и компонента H_φ при $r=a$ и $|z| \leq \frac{l}{2}$ (на внутренней поверхности дисков,

т. е. при $\frac{l}{2} \leq |z| \leq \frac{L}{2}$, имеет место скачок H_φ , связанный с по-
верхностными токами).

Итак, имеют место следующие соотношения:

$$E_{z_{r=a}} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-i\beta_m z} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} B_s \cos \frac{2\pi s}{l} z + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \sin \frac{(2s-1)\pi}{l} z, & \text{если } |z| \leq \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{l}{2} \leq |z| \leq \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (3,12)$$

$$H_{\varphi_{r=a}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i \frac{k}{\gamma_m} A_m \frac{J_1(\gamma_m a)}{J_0(\gamma_m a)} e^{-i\beta_m z} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} i \frac{k}{\Gamma_s} B_s \frac{Z_1(\Gamma_s a)}{Z_0(\Gamma_s a)} \cos \frac{2\pi s}{l} z +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} i \frac{k}{\Gamma_s} D_s \frac{Z_1(\Gamma_s a)}{Z_0(\Gamma_s a)} \sin \frac{(2s-1)\pi}{l} z, \quad (3,13)$$

где

$$A_m = a_m J_0(\chi_m a), \quad B_s = b_s Z_0(\Gamma_s a), \quad D_s = d_s Z_0(\Gamma_s a).$$

Умножая (3,12) последовательно на $\cos \frac{2\pi s}{l} z$ и $\sin \frac{(2s-1)\pi}{l} z$ и интегрируя по z в пределах от $z = -\frac{L}{2}$ до $z = \frac{L}{2}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} B_0 l &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m C_{0m}, \\ \frac{1}{2} B_s l &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m C_{sm}, \\ \frac{1}{2} D_s l &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m S_{sm}, \end{aligned} \right\} \quad (3,14)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{sm} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos \frac{2\pi s}{l} z e^{-i\beta_m z} dz = \\
 &= L \left[\frac{\sin \left(\beta_m + \frac{2\pi s}{l} \right) \frac{L}{2}}{\left(\beta_m + \frac{2\pi s}{l} \right) L} + \frac{\sin \left(\beta_m - \frac{2\pi s}{l} \right) \frac{L}{2}}{\left(\beta_m - \frac{2\pi s}{l} \right) L} \right], \\
 S_{sm} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{l} z e^{-i\beta_m z} dz = \\
 &= iL \left[\frac{\sin \left(\beta_m + \frac{(2s-1)\pi}{l} \right) \frac{L}{2}}{\left(\beta_m + \frac{(2s-1)\pi}{l} \right) L} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \left(\beta_m - \frac{(2s-1)\pi}{l} \right) \frac{L}{2}}{\left(\beta_m - \frac{(2s-1)\pi}{l} \right) L} \right].
 \end{aligned} \tag{3,15}$$

Умножая, далее, (3,13) на $\cos \frac{2\pi s z}{l}$ и $\sin \frac{(2s-1)\pi z}{l}$ и интегрируя по z в пределах от $z = -\frac{l}{2}$ до $z = \frac{l}{2}$, получим, используя (3,14), следующую бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов A_m :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \left[\frac{k}{\Gamma_s} \frac{Z_1(\Gamma_s a)}{Z_0(\Gamma_s a)} C_{sm} - \frac{k}{\gamma_m} \frac{J_1(\gamma_m a)}{J_0(\gamma_m a)} C'_{sm} \right] = 0, \tag{3,16}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \left[\frac{k}{\Gamma_s} \frac{Z_1(\Gamma_s a)}{Z_0(\Gamma_s a)} S_{sm} - \frac{k}{\gamma_m} \frac{J_1(\gamma_m a)}{J_0(\gamma_m a)} S'_{sm} \right] = 0, \tag{3,17}$$

где C'_{sm} и S'_{sm} получаются из C_{sm} и S_{sm} заменой L на l . Приравняв нулю детерминант бесконечной системы (3,16) и (3,17), получим дисперсионное уравнение, связывающее β_0 с частотой и параметрами системы.

Как показывают расчёты¹³, в этом детерминанте достаточно ограничиться тремя строками и столбцами, соответствующими $m=0, -1, +1$ и $s=0, 1$ в уравнении (3,16) и $s=1$ в уравнении (3,17), чтобы получить достаточно хорошее приближение.

Легко видеть, что изложенный только что метод приводит в случае близко расположенных тонких дисков к дисперсионному

уравнению (3,7). Действительно, если $l \ll \lambda$ и $a \gtrsim l$, то из всех уравнений (3,16) можно сохранить только одно уравнение, отвечающее $s=0$. Остальные уравнения содержат множитель $\frac{l}{\lambda}$ и поэтому в рассматриваемом приближении автоматически удовлетворяются. (Если $l \ll \lambda$ и $a \gtrsim l$, то $|\Gamma_s| \sim \frac{2\pi s}{l}$, $|\chi_m| \sim \frac{2\pi m}{l}$, $m, s \neq 0$ и все коэффициенты при A_m в уравнениях с $s \neq 0$, пропорциональные $\frac{k}{\Gamma_s} \frac{Z_1(\Gamma_s a)}{Z_0(\Gamma_s a)} - \frac{k}{\chi_m} \frac{J_1(\chi_m a)}{J_0(\chi_m a)}$, будут порядка $\frac{l}{\lambda} \ll 1$.)

Перепишав уравнение (3,16) с $s=0$ в виде ($C'_{sm} \approx C_{sm}$, $C_{0m} \approx 0$ при $m \neq 0$)

$$W_0 A_0 C_{00} = 0,$$

где

$$W_0 \equiv \frac{Z_0(ka)}{Z_1(ka)} - \frac{k}{k_1} \frac{J_1(k_1 a)}{J_0(k_1 a)},$$

получим соотношение

$$W_0 = 0,$$

совпадающее с уравнением (3,7) ($k_1 = \sqrt{k^2 - k_3^2}$, $k_3 = \beta_0$).

Мы видим, таким образом, что дисперсионное уравнение (3,7) справедливо в случае очень близко расположенных тонких дисков с не очень малыми отверстиями a .

Заметим, что представление полей при $r < a$ в виде одной бегущей волны справедливо, если $a \gg l$, так как только в этом случае амплитуды добавочных бегущих волн, пропорциональные $J_0(|\chi_m| r)$, убывают от границы раздела областей ($r=a$) к оси как $e^{-\frac{r}{l}}$.

Резюмируя, можно сказать, что волновод, нагруженный дисками, является эффективным методом получения медленных волн в области фазовых скоростей $v_\varphi \sim c$, так как при этом благодаря сравнительно редкому расположению дисков значительно уменьшается затухание волн. Кроме того, в этом случае аксиальная составляющая поля в области $r < a$ мало меняется (нарастает) с радиусом.

IV. СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНОВОДЫ

1. Медленные электромагнитные волны могут быть получены также при помощи спирального волновода, представляющего собой открытую проводящую спираль (рис. 9). Если вдоль спирали распространяется волна со скоростью, близкой к c , то фазовая скорость волны вдоль оси спирали будет меньше c . Грубо гово-

ря, она пропорциональна шагу спирали и обратно пропорциональна радиусу спирали.

Методу получения медленных волн с помощью спиральных волноводов посвящено большое число работ^{15, 16, 17, 18}. Мы изложим в этом параграфе основные результаты этих работ.

Рассмотрим в этом разделе распространение аксиально-симметричных волн в достаточно густой спирали^{15, 16, 17, 18}. Составляющие поля E_z и H_z в этом случае при $v_\varphi < c$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_z &= [AI_0(k_1r) + BK_0(k_1r)] e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ H_z &= [CI_0(k_1r) + DK_0(k_1r)] e^{i(\omega t - k_3 z)}, \end{aligned}$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя и $k_1 = \sqrt{k_3^2 - k^2}$. Поле внутри спирали

($r \leq r_0$) не может, очевидно, содержать K_0 , так как при $r=0$ $K_0(k_1r)$ обращается в бесконечность. Поле вне спирали не должно содержать I_0 , так как I_0 — монотонно возрастающая функция, стремящаяся при $r \rightarrow \infty$ к бесконечности. Поэтому компоненты E_z , H_z внутри спирали (область I) имеют вид



Рис. 9.

$$\left. \begin{aligned} E_{zI} &= E_0 I_0(k_1r) e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ H_{zI} &= C_1 I_0(k_1r) e^{i(\omega t - k_3 z)} \end{aligned} \right\} \quad (4,1)$$

(E_0 — амплитуда E_z на оси спирали). Вне спирали (область II) E_z и H_z равны:

$$\left. \begin{aligned} E_{zII} &= C_2 K_0(k_1r) e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ H_{zII} &= C_3 K_0(k_1r) e^{i(\omega t - k_3 z)}. \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

Остальные компоненты поля могут быть определены с помощью уравнений Максвелла. В результате мы получим:

В области I:

$$\left. \begin{aligned} E_{zI} &= E_0 I_0(k_1r), \\ E_{rI} &= iE_0 \frac{k_3}{k_1} I_1(k_1r), \\ H_{\varphi I} &= iE_0 \frac{k}{k_1} I_1(k_1r), \\ H_{zI} &= C_1 I_0(k_1r), \\ E_{\varphi I} &= -iC_1 \frac{k}{k_1} I_1(k_1r), \\ H_{rI} &= iC_1 \frac{k_3}{k_1} I_1(k_1r). \end{aligned} \right\} \quad (4,3)$$

В области II

$$\left. \begin{aligned} E_{zII} &= C_2 K_0(k_1 r), \\ E_{rII} &= -i C_2 \frac{k_3}{k_1} K_1(k_1 r), \\ H_{\varphi II} &= -i C_2 \frac{k}{k_1} K_1(k_1 r), \\ H_{zII} &= C_3 K_0(k_1 r), \\ E_{\varphi II} &= i C_3 \frac{k}{k_1} K_1(k_1 r), \\ H_{rII} &= -i C_3 \frac{k_3}{k_1} K_1(k_1 r) \end{aligned} \right\} \quad (4,4)$$

(в этих формулах мы опустили множитель $e^{i(\omega t - k_z z)}$).

Перейдём теперь к выводу дисперсионного уравнения, связывающего k_3 и k . Так как тангенциальная составляющая электрического поля вдоль витков спирали равна нулю, то справедливо соотношение*)

$$E_{\varphi I} \cos \psi + E_{zI} \sin \psi = 0, \quad r = r_0, \quad (4,5)$$

где ψ — угол намотки (см. рис. 8). Из непрерывности E_z и E_{φ} следует, что при $r = r_0$

$$\left. \begin{aligned} E_{zI} &= E_{zII}, \\ E_{\varphi I} &= E_{\varphi II}. \end{aligned} \right\} \quad (4,6)$$

Так как отсутствует ток в направлении, перпендикулярном спирали, то тангенциальная составляющая магнитного поля вдоль витков спирали непрерывна, т. е.

$$H_{\varphi I} \cos \psi + H_{zI} \sin \psi = H_{\varphi II} \cos \psi + H_{zII} \sin \psi, \quad r = r_0. \quad (4,7)$$

Подставив в эти граничные условия выражения для полей (4,3) и (4,4) и исключив константы, получим дисперсионное уравнение

$$(k r_0 \operatorname{ctg} \psi)^3 = (k_1 r_0)^2 \frac{I_0(k_1 r_0) K_0(k_1 r_0)}{I_1(k_1 r_0) K_1(k_1 r_0)}. \quad (4,8)$$

2. Рассмотрим подробнее два предельных случая, когда $k_1 r_0 \ll 1$ и когда $k_1 r_0 \gg 1$. Воспользовавшись асимптотическими выражениями функций Бесселя при малых значениях аргумента $I_0(x) \approx 1$, $I_1(x) \approx \frac{1}{2} x$, $K_0(x) \approx -\ln \frac{x}{2}$, $K_1(x) \approx \frac{1}{x}$ ($x \ll 1$), получим в случае $k_1 r_0 \ll 1$ следующее выражение для фазовой скорости:

$$v_{\varphi} = c \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \psi}{2 \ln \frac{k_1 r_0}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad k_1 r_0 \ll 1. \quad (4,9)$$

*) Здесь предполагается, что возможна замена спирали эквивалентной цилиндрической поверхностью, проводящей ток только в направлении спирали.

Это выражение показывает, что если $k_1 r_0 \ll 1$, то имеет место дисперсия, причём ход дисперсии нормален. Поэтому групповая скорость меньше фазовой. Если $k_1 r_0 \rightarrow 0$, то $v_\varphi \rightarrow c$.

В случае $k_1 r_0 \gg 1$ справедливы выражения

$$I_0(k_1 r_0) \approx I_1(k_1 r_0) \approx (2\pi k_1 r_0)^{-\frac{1}{2}} e^{k_1 r_0},$$

$$K_0(k_1 r_0) \approx K_1(k_1 r_0) \approx \left(\frac{2}{\pi} k_1 r_0\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k_1 r_0},$$

воспользовавшись которыми получим:

$$\frac{k}{k_1} \operatorname{ctg} \psi = 1.$$

При густой намотке $\operatorname{ctg} \psi \gg 1$, поэтому $k_1 = \sqrt{k_3^2 - k^2} \gg k$ и, следовательно, $k_1 \approx k_3$. Таким образом, фазовая скорость равняется

$$v_\varphi = c \frac{k}{k_3} = c \cdot \operatorname{tg} \psi \ll c, \quad k_1 r_0 \gg 1. \quad (4,10)$$

Эта формула имеет простой смысл: отношение фазовой скорости к скорости света в вакууме равно отношению путей, проходимых волной вдоль спирали и вдоль её оси.

Заметим, что в случае $k_1 r_0 \ll 1$ поле медленно нарастает с ростом r от оси спирали к её поверхности и медленно спадает вне спирали. В случае $k_1 r_0 \gg 1$ поле быстро нарастает от оси спирали к её поверхности и быстро спадает вне спирали.

Отличительной и весьма существенной особенностью спирального волновода является отсутствие граничной частоты.

Мы рассмотрели предельные случаи $k_1 r_0 \ll 1$ и $k_1 r_0 \gg 1$. График, изображающий дисперсионную зависимость в общем виде, представлен на рис. 10.

3. Воспользовавшись граничными условиями (4,5) и (4,6), выразим коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 через E_0 . Мы получим следующие выражения для полей:

В области I ($r \leq r_0$):

$$\left. \begin{aligned} E_{z1} &= E_0 I_0(k_1 r), \\ E_{r1} &= i \frac{k_3}{k_1} E_0 I_1(k_1 r), \\ H_{\varphi 1} &= i \frac{k}{k_1} E_0 I_1(k_1 r), \\ H_{z1} &= -i \frac{k_1}{k} \operatorname{tg} \psi \frac{I_0(k_1 r_0)}{I_1(k_1 r_0)} E_0 I_0(k_1 r), \\ E_{\varphi 1} &= -\operatorname{tg} \Psi \frac{I_0(k_1 r_0)}{I_1(k_1 r_0)} E_0 I_1(k_1 r), \\ H_{r1} &= \frac{k_3}{k} \operatorname{tg} \Psi \frac{I_0(k_1 r_0)}{I_1(k_1 r_0)} E_0 I_1(k_1 r). \end{aligned} \right\} \quad (4,11)$$

В области II ($r \geq r_0$):

$$\left. \begin{aligned} E_{zII} &= \frac{I_0(k_1 r_0)}{K_0(k_1 r_0)} E_0 K_0(k_1 r), \\ E_{rII} &= -i \frac{k_3}{k_1} \frac{I_0(k_1 r_0)}{K_0(k_1 r_0)} E_0 K_1(k_1 r), \\ H_{\varphi II} &= -i \frac{k}{k_1} \frac{I_0(k_1 r_0)}{K_0(k_1 r_0)} E_0 K_1(k_1 r), \\ H_{zII} &= i \frac{k_1}{k} \operatorname{tg} \psi \frac{I_0(k_1 r_0)}{K_1(k_1 r_0)} E_0 K_0(k_1 r), \\ E_{\varphi II} &= -\operatorname{tg} \psi \frac{I_0(k_1 r_0)}{K_1(k_1 r_0)} E_0 K_1(k_1 r), \\ H_{rII} &= \frac{k_3}{k} \operatorname{tg} \psi \frac{I_0(k_1 r_0)}{K_1(k_1 r_0)} E_0 K_1(k_1 r) \end{aligned} \right\} \quad (4,12)$$

(мы опустили множитель $e^{i(\omega t - k_3 z)}$).

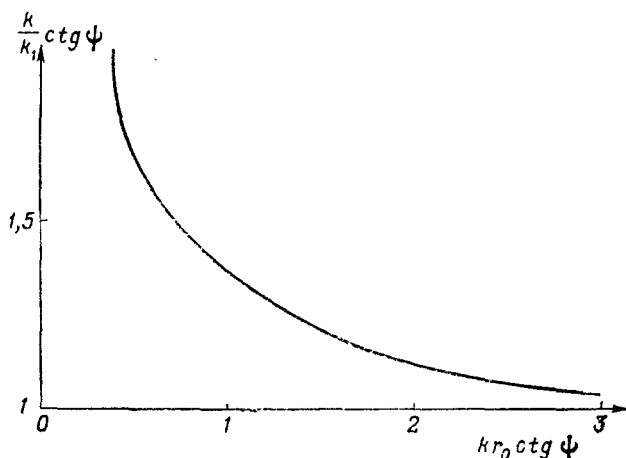


Рис. 10.

Вычислим теперь полный поток электромагнитной энергии в направлении оси волновода:

$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]_z ds = \frac{c}{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{r_0} (E_{rI} H_{\varphi I}^* - E_{\varphi I} H_{rI}^*) r dr + \right. \\ \left. + \int_{r_0}^{\infty} (E_{rII} H_{\varphi II}^* - E_{\varphi II} H_{rII}^*) r dr \right\}. \quad (4,13)$$

Воспользовавшись формулами (4,10) и (4,11), получим

$$P = \frac{c}{8\pi} E_0^2 r_0^2 \frac{k k_3}{k_1^2} \left\{ \left(1 + \frac{I_0 K_1}{I_1 K_0} \right) (I_1^2 - I_0 I_2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{I_0}{K_0} \right)^2 \left(1 + \frac{I_1 K_0}{I_0 K_1} \right) (K_0 K_2 - K_1^2) \right\}, \quad (4,14)$$

где I_i , K_i — значения соответствующих функций Бесселя при значении аргумента, равном $k_1 r_0$. Здесь первое слагаемое в фигурных скобках определяет поток энергии внутри волновода, а второе слагаемое — вне волновода.

При малых значениях $k_1 r_0$ почти весь поток энергии сосредоточен вне спирали. С ростом $k_1 r_0$ увеличивается поток энергии внутри спирали и уменьшается вне её. При этом полный поток уменьшается и при заданном значении r_0 достигает минимума вблизи $k_1 r_0 \approx 1,2$. (Поток энергии вне спирали достигает минимума также вблизи $k_1 r_0 \approx 1,2$.) Такая зависимость потока от $k_1 r_0$ связана с тем, что при $k_1 r_0 \ll 1$ поля медленно убывают вне спирали, а при $k_1 r_0 \gg 1$ быстро возрастают от оси к её поверхности и быстро спадают вне спирали.

4. Мы видели выше, что значительная часть потока энергии проходит вне спирали. Чтобы перераспределить поток энергии и уменьшить долю потока вне спирали, можно окружить спираль металлическим цилиндром, коаксиальным со спиралью¹⁷. При этом изменяются также дисперсионные свойства спирали. В частности, оказывается, что уменьшается фазовая скорость волны по сравнению с открытой спиралью с теми же параметрами.

Мы приведём здесь дисперсионное уравнение для спирали в цилиндрическом волноводе, которое выводится таким же способом, как и уравнение для открытой спирали¹⁷ (при выводе уравнения нужно учесть, что на поверхности цилиндра выполняются граничные условия $E_{z\Pi} = 0$, $E_{\varphi\Pi} = 0$):

$$(k r_0 \operatorname{ctg} \psi)^2 = (k_1 r_0)^2 \frac{I_0(k_1 r_0) K_0(k_1 r_0)}{I_1(k_1 r_0) K_1(k_1 r_0)} \eta(k_1 r_0, k_1 R), \quad (4,15)$$

где

$$\eta(k_1 r_0, k_1 R) = \frac{1 - \frac{I_0(k_1 r_0) K_0(k_1 R)}{I_0(k_1 R) K_0(k_1 r_0)}}{1 - \frac{I_1(k_1 r_0) K_1(k_1 R)}{I_1(k_1 R) K_1(k_1 r_0)}}$$

(R — радиус цилиндра).

Если $k_1 r_0 \ll 1$ и $k_1 R \ll 1$, то из (4,15) следует, что

$$v_\varphi = c \left(1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \psi \left[1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \right]}{2 \ln \frac{R}{r_0}} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в этом случае v_φ не зависит от частоты и определяется только параметрами спирали; групповая скорость при этом совпадает с фазовой.

Если

$$k_1 r_0 \gg 1, \text{ то } v_\varphi = c \operatorname{tg} \psi.$$

Это соотношение совпадает с формулой (4,10), справедливой в случае открытой спирали. Такое совпадение объясняется тем, что поля при $k_1 r_0 \gg 1$ быстро спадают вне спирали, и поэтому внешний цилиндр не оказывает влияния на топографию поля.

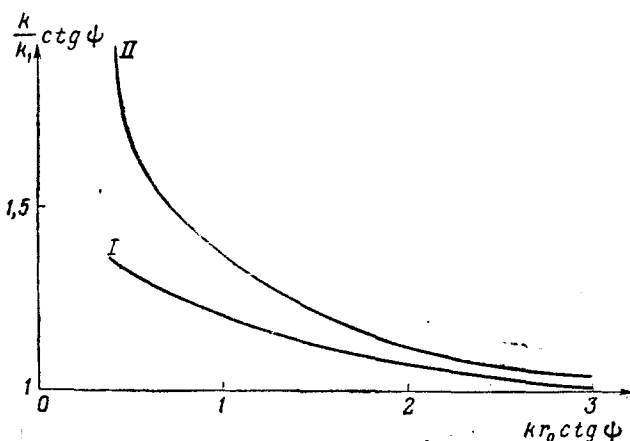


Рис. 11.

Фазовая скорость при $k_1 r_0 \gg 1$, так же как и в случае $k_1 r_0 \ll 1$, не зависит от частоты.

На рис. 11 представлена зависимость $\frac{k}{k_1} \operatorname{ctg} \psi$ от $k r_0 \operatorname{ctg} \psi$ для открытой спирали (кривая II) и для спирали в цилиндрическом волноводе (кривая I), если $\frac{R}{r_0} = 2$. Мы видим, что наличие цилиндра приводит к понижению фазовой скорости, причём это понижение особенно значительно в области длинных волн.

Вычисление показывает, что поток энергии в спирали, окружённой цилиндром, меньше, чем в открытой спирали при заданных частоте, радиусе спирали и напряжённости поля на оси волновода.

Метод получения медленных волн с помощью спирали является эффективным в области малых фазовых скоростей.

V. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА ЗАРЯЖЁННЫХ ЧАСТИЦ С МЕДЛЕННЫМИ ВОЛНАМИ

1. Перейдём теперь к изучению взаимодействия заряжённых частиц с медленными волнами. Заметим прежде всего, что равномерно движущаяся в периодической структуре заряжённая частица может при известных условиях излучать электромагнитные волны.

Известно, что при равномерном движении заряда в диэлектрике имеет место излучение, если только скорость заряда превосходит фазовую скорость волн в безграничном диэлектрике (эффект Черенкова)^{19, 20, 21}. Можно показать²², что наличие диэлектрика не является необходимым условием излучения. Если фазовая скорость распространения волны в сложном волноводе, не содержащем диэлектрика, меньше скорости света в вакууме, то равномерно движущаяся в такой структуре заряжённая частица также будет излучать электромагнитные волны, если только скорость частицы превосходит некоторое критическое значение.

Это явление, которое можно назвать сложным эффектом Черенкова, играет важную роль в механизме генерирования и усиления медленных волн с помощью пучков заряжённых частиц.

Излучение частицы можно трактовать^{19a, 22} как резонанс между собственными колебаниями периодической структуры и вынуждающей силой, связанной с движущейся заряжённой частицей. Собственные частоты системы ω_λ определяются совокупностью параметров $\lambda \equiv \gamma, s$, один из которых (γ) является непрерывным и заключён в пределах $-\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{l}$, где l — период структуры; остальные параметры (s) являются дискретными и служат для обозначения «полосы» пропускания частот. Вынуждающая сила характеризуется спектром частот $\Omega_{\gamma n} \equiv \left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right)v$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и v — скорость частицы. Условие резонанса, являющееся условием излучения, имеет поэтому вид

$$\omega_\lambda \equiv \omega_{\gamma s} = \Omega_{\gamma n} = \left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right)v.$$

В неограниченном вакууме $\omega = \gamma c$, $\Omega_{\gamma n} = \gamma v \cos \theta$ (θ — угол между направлением распространения волны и скоростью частицы, $n=0$); так как $v < c$, то условие резонанса выполняться не может. В неограниченном диэлектрике $\omega_\lambda = \frac{c\gamma}{\sqrt{\epsilon}}$ (ϵ — диэлектрическая проницаемость) и условие резонанса приводит к известному условию излучения Черенкова

$$\cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\epsilon}} \leq 1.$$

В периодических структурах условие резонанса может выполняться при самых различных комбинациях величин γ, n, s .

2. Изучению взаимодействия пучков заряженных частиц с медленными волнами посвящено значительное число работ^{24, 25, 26, 27, 28}. В этих работах показано, что если невозмущенная скорость немодулированного пучка превосходит некоторое критическое значение, то возникающие в пучке флуктуации плотности заряда распространяются в виде волн с нарастающей амплитудой. При этом возбуждаются электромагнитные волны также с нарастающей амплитудой^{24—28}.

Чтобы разъяснить это явление, рассмотрим прежде всего простейший случай. Пусть в неограниченном однородном диэлектрике в направлении оси z движется бесконечно широкий плоскопараллельный пучок электронов, невозмущенное состояние которого определяется скоростью v_0 и плотностью заряда ρ_0 ; эти величины мы считаем постоянными и не зависящими от координат. (Для того чтобы существовало такое состояние, будем предполагать, что наряду с электронным имеется также ионный пучок с плотностью заряда $-\rho_0$ и скоростью v_0 .)

Частицы пучка подчиняются уравнению движения

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

и уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{w} (\rho + \rho_0) = 0,$$

где $\mathbf{w}$ — возмущенная скорость частиц пучка, ρ — отклонение плотности заряда от равновесного значения ρ_0 и $\mathbf{E}$ — электрическое поле.

Мы будем рассматривать малые отклонения от невозмущенного состояния, т. е. предполагать, что $\rho \ll \rho_0$ и $|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0| \ll v_0$. Считая, что $\mathbf{w}$ параллельно $\mathbf{v}_0$, получим следующие линеаризованные уравнения движения и непрерывности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} E_x, \quad (5,1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 v + v_0 \rho) = 0, \quad (5,2)$$

где $v = w - v_0$. К этим уравнениям мы присоединим линеаризованные уравнения для векторного и скалярного потенциалов

$$\left. \begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} (\rho_0 v + v_0 \rho), \\ \Delta \varphi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5,3)$$

где ε — диэлектрическая постоянная и $u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ — скорость распространения волн в диэлектрике.

Уравнения (5,1), (5,2), (5,3) представляют собой полную систему уравнений, описывающих взаимодействие пучка с диэлектриком. Решение этих уравнений ищем в виде плоских волн $e^{i(\omega t - \mathbf{g}\mathbf{r})}$.

Мы получим, очевидно, следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \left[-(\gamma^2 + \gamma_0^2) + \frac{\omega^2}{u^2} \right] \varphi &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ A_x &= \frac{\varepsilon \omega}{c \gamma} \varphi, \\ (\omega - v_0 \gamma) v &= \frac{1}{\gamma} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{u^2} \right) \frac{e}{m} \varphi, \\ (\omega - v_0 \gamma) \rho &= \rho_0 \gamma v, \\ E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{i}{\gamma} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{u^2} \right) \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (5,4)$$

где γ — проекция $\mathbf{g}$ на ось x , $\gamma_0^2 = g^2 - \gamma^2$. Исключив из этих уравнений φ , ρ и v , получим дисперсионное уравнение, связывающее ω и γ :

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - u^2 \gamma^2} + \frac{\Omega^2}{(\omega - v_0 \gamma)^2} = 1 \quad (5,5)$$

(здесь $\omega_0 = \gamma_0 u$ и $\Omega^2 = \frac{4\pi e \rho_0}{\varepsilon m}$). Считая γ заданным, мы будем рассматривать (5,5) как уравнение, определяющее ω .

Переходя к исследованию уравнения (5,5), будем предполагать плотность пучка достаточно малой, т. е. считать достаточно малой величину Ω . Мы будем искать корень уравнения (5,5), близкий к $\omega = \gamma v_0$. Полагая

$$\omega = v_0 \gamma + \eta,$$

где $|\eta| \ll v_0 \gamma$, получим следующее выражение для η :

$$\eta = - \frac{i\Omega}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2 (v_0^2 - u^2)} - 1}}. \quad (5,6)$$

Это выражение показывает, что если $\Omega \ll \gamma v_0$, то корень, близкий к γv_0 , действительно существует. Далее мы видим, что если u — вещественная величина, что соответствует области прозрачности диэлектрика, то при $v_0 > u$ величина η может стать чисто мнимой (если $v_0 < u$, то η всегда, т. е. при всех значениях γ , вещественна). Отсюда можно заключить²⁷, что если невозмущенная скорость пучка v , превосходит фазовую скорость распространения волн в бесконечном диэлектрике, то состояние пучка, характеризующееся постоян-

ными ρ_0 и v_0 , будет неустойчивым и возникающие в пучке флуктуации плотности и скорости будут распространяться в виде волн с растущей экспоненциально со временем амплитудой. При этом наряду с волнами плотности заряда будут распространяться электромагнитные волны также с нарастающей амплитудой.

Мы видим, что условие неустойчивости пучка и возникновения волн плотности заряда и электромагнитных волн с нарастающей амплитудой совпадает с условием черенковского излучения отдельной заряженной частицей.

3. Формула (5,6) становится неприменимой, если γ равно

$$\tilde{\gamma} = \frac{\omega_0}{\sqrt{v_0^2 - u^2}},$$

так как при этом η обращается в бесконечность.

Исследуем более подробно случай, когда $\gamma = \tilde{\gamma}$, чему соответствует частота, равная

$$\tilde{\omega} = v_0 \tilde{\gamma} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_0^2}}}. \quad (5,7)$$

Полагая в уравнении (5,5) $\gamma = \tilde{\gamma}$ и $\omega = \tilde{\omega} + \xi$, получим следующее уравнение для определения ξ :

$$\xi^4 + \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_0^2}}} \xi^3 - \Omega^2 \xi^2 - \frac{2\omega_0 \Omega^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_0^2}}} \xi - \Omega^2 \omega_0^2 = 0.$$

Так как $\Omega \ll \omega_0$, то в этом уравнении можно пренебречь первым, третьим и четвертым членами. В результате мы получим:

$$\xi = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2^{\frac{4}{3}}} \left(1 - \frac{u^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{6}} \omega_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (5,8)$$

Таким образом, если проекция волнового вектора на ось x равна $\tilde{\gamma}$, то мнимая часть частоты пропорциональна не $\frac{\Omega}{\omega_0}$, а $\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Заметим, что если уравнение (5,5) рассматривать как уравнение для определения γ при заданной частоте ω , то, полагая $\omega = \tilde{\omega}$, мы получим следующее выражение для мнимой части γ :

$$\kappa = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{4}{3}}} \frac{\omega_0}{u} \left(\frac{u}{v_0}\right)^{\frac{1}{3}} \left[1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (5,9)$$

Максимальное значение этой величины как функции v_0 равно

$$\chi_{\text{макс}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4} \frac{\omega_0}{u} \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5,10)$$

(оно достигается при $\frac{v_0}{u} = \sqrt{2}$).

Легко понять физический смысл частоты $\tilde{\omega}$, соответствующей максимальной неустойчивости пучка. Если отдельная частица движется в диэлектрике со скоростью v_0 , превосходящей скорость распространения волны u , то возникает черенковское излучение, которое можно трактовать как резонанс между собственными колебаниями поля в диэлектрике и вынуждающей силой, обусловленной движущейся частицей. Частота собственных колебаний равна $g u$, а частота вынуждающей силы равна $v_0 \gamma$. Приравнивая эти величины и замечая, что $g = \sqrt{\gamma_0^2 + \gamma^2}$, мы получим частоту $\tilde{\omega}$, которой соответствует волна с наибольшим нарастанием амплитуды.

Заметим, что в области частот, где диэлектрическая постоянная комплексна, т. е. в области непрозрачности диэлектрика, уравнение (5,5) имеет комплексные корни при всех сколь угодно малых значениях невозмущенной скорости v_0 ; иначе говоря, невозмущенное состояние пучка неустойчиво при всех значениях v_0 .

4. Мы рассмотрели случай неограниченного диэлектрика и бесконечно широкого пучка частиц, однако полученные выводы остаются в силе также для ограниченных пучков²⁴⁻²⁸.

Рассмотрим²⁷, например, цилиндрический волновод, заполненный диэлектриком, через который в направлении оси волновода проходит пучок заряженных частиц. Чтобы не усложнять расчёта, предположим, что пучок заполняет всё пространство внутри волновода. В этом случае мы должны попрежнему исходить из уравнений (5,1), (5,2), (5,3), к которым следует присоединить только граничное условие $E_z = 0$ на границе волновода. Величины ρ , v , φ , E_z мы будем искать в виде $e^{i(\omega t - \gamma z)} f(r)$, причём функция f удовлетворяет уравнению

$$\Delta_r f + \gamma_0^2 f = 0, \quad (5,11)$$

где Δ_r — двумерный лапласиан в плоскости x, y и γ_0 — граничный волновой вектор, равный $\frac{\omega_0}{u}$ (ω_0 — граничная частота волновода). Учитывая (5,11), мы получим из уравнений (5,1), (5,2), (5,3) соотношения

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + 2\gamma v_0 \omega - \gamma^2 v_0^2 + \Omega^2) \rho &= \frac{e}{m} \rho_0 \gamma_0^2 \varphi, \\ \left(-\frac{\omega^2}{u^2} + \gamma^2 + \gamma_0^2 \right) \varphi &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \end{aligned}$$

которые приводят к дисперсионному уравнению (5,5). Величина ω_0 , входящая в него, означает теперь граничную частоту волновода.

Заметим, что волны плотности заряда и скорости в волноводах без диэлектрика исследовались в работе Рамо²³, в которой выведено дисперсионное уравнение (5,5) для случая $u = c$.

Неустойчивость пучка и возникновение волн плотности заряда и электромагнитных волн с нарастающей амплитудой могут иметь место не только при движении пучка в диэлектрике. Эти явления возникают также при движении пучка частиц в волноводах медленных волн, не содержащих диэлектрика, если только невозмущённая скорость пучка превосходит некоторое критическое значение (для цепочки эндовибраторов с очень малыми отверстиями эта скорость пропорциональна $\sqrt{\alpha}$, где α определяется формулой (2,15)).

С такой точки зрения может быть объяснён механизм возбуждения колебаний в многокамерном магнетроне. То обстоятельство, что в многокамерном магнетроне мы имеем дело не с линейной, а с круговой, замкнутой цепочкой эндовибраторов, не меняет сущности явления: бесконечная линейная цепочка представляет собой, так сказать, спрямлённый многокамерный магнетрон. Замкнутость цепочки приводит к тому, что постоянная распространения ψ может принимать только дискретные значения, равные $\psi_n = \frac{2\pi}{N} n$, где N — общее число камер, а n — целое число, не превосходящее N . Как следует из формулы (5,7), максимальный рост амплитуды будет у колебания, для которого $\psi = \gamma l$ равно

$$\tilde{\psi} = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{v_0^2 - u^2}}$$

(u — критическая скорость).

VI. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА ЗАРЯЖЁННЫХ ЧАСТИЦ С ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМОЙ

1. Известно, что в электронной плазме могут распространяться продольные электрические волны, частота которых равна^{29, 30}

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + u^2 \gamma^2}, \quad \text{где } \omega_0 = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (n_0 — \text{равновесная плотность электронов плазмы}),$$

γ — волновой вектор и $u = \left(\frac{3T}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$ — средняя тепловая скорость электронов (T — температура, выраженная в эргах). Формально такого же типа дисперсионная зависимость имеет место в волноводе, заполненном диэлектриком, с фазовой скоростью распространения волн, равной u (при этом ω_0 представляет собой граничную частоту волновода). Поэтому возникает вопрос, не будет ли подчиняться взаимодействию пучка электронов с плазмой тем же закономерностям, что и взаимодействие пучка

заряженных частиц с медленными волнами в волноводах, заполненных диэлектриком, и в цепочках эндовибраторов. Оказывается²⁷, что действительно во многих отношениях взаимодействие пучка заряженных частиц с плазменными колебаниями аналогично взаимодействию пучка с медленными волнами в сложных волноводах, в частности, имеет место неустойчивость пучка и возникновение волн плотности заряда и электрических продольных волн с нарастающей амплитудой. Однако в отличие от диэлектриков и сложных волноводов, при движении через которые пучок становится неустойчивым при скоростях, превосходящих фазовую скорость распространения волн, неустойчивость пучка в плазме имеет место при всех значениях невозмущенной скорости пучка. Неустойчивость пучка и возникновение волн с нарастающей амплитудой становятся особенно значительными, если скорость пучка превосходит среднюю тепловую скорость электронов плазмы²⁷.

2. Рассмотрим^{27, 31} неограниченную однородную плазму, в которой в направлении оси z движется бесконечно широкий плоскопараллельный пучок электронов. Невозмущенное состояние пучка характеризуется постоянными и не зависящими от координат скоростью v_0 и плотностью заряда ρ_0 . Состояние плазмы определяется функцией распределения $F(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$, которая при больших частотах колебаний, когда можно пренебречь ролью парных соударений, удовлетворяет следующему кинетическому уравнению²⁹:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{w} \nabla_{\mathbf{r}} F + \frac{e}{m} \mathbf{E} \nabla_{\mathbf{w}} F = 0.$$

Здесь $\mathbf{w}$ — скорость электронов плазмы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий их положение, и $\mathbf{E}$ — самосогласованное электрическое поле, действующее в плазме. Мы будем рассматривать состояния плазмы, близкие к равновесному состоянию, и состояния пучка, близкие к невозмущенному состоянию. Обозначая через $f(z, w, t)$ отклонение функции распределения от равновесной максвелловской функции $f_0(w)$, где w — проекция скорости электронов плазмы на ось z (в изучаемом нами случае неограниченной плазмы и бесконечно широкого пучка достаточно, как легко видеть, рассматривать только эту проекцию скорости), получим следующее уравнение для определения f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0. \quad (6,1)$$

Электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f dw + 4\pi \rho, \quad (6,2)$$

где $e \int_{-\infty}^{\infty} f dw$ — некомпенсированная ионами плотность заряда

электронов плазмы, а ρ — отклонение плотности пучка от невозмущенного значения ρ_0 . (Мы предполагаем при этом, что равновесный электронный заряд $e \int f_0 dw$ и невозмущенный заряд пучка компенсируются зарядом ионов.)

Частицы пучка подчиняются уравнению движения

$$\frac{\partial \mathbf{w}_p}{\partial t} + (\mathbf{w}_p \nabla) \mathbf{w}_p = \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

и уравнению непрерывности

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{w}_p (\rho + \rho_0) = 0$$

($\mathbf{w}_p$ — возмущенная скорость пучка). Предполагая, что $\mathbf{w}_p$ параллельно $\mathbf{V}_0$, и считая, что $\mathbf{w}_p$ мало отличается от $\mathbf{V}_0$, получим следующие линеаризованные уравнения движения и непрерывности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{e}{m} E, \quad (6,3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 v + v_0 \rho) = 0, \quad (6,4)$$

где $v = w_p - v_0$.

Уравнения (6,1), (6,2), (6,3), (6,4) представляют собой полную систему уравнений, определяющих малые возмущения плазмы и пучка.

Линеаризованные уравнения (6,1) — (6,4) допускают решения, содержащие z и t в виде $e^{i(\omega t - \gamma z)}$, где γ и ω — константы. Мы докажем, что среди этих решений имеются решения, которые при вещественном γ характеризуются комплексным ω и отрицательной мнимой частью. Наличие таких нарастающих решений показывает, что исходное состояние пучка является неустойчивым и что возникающие в плазме и пучке флуктуации поля и плотности зарядов будут распространяться в виде волн с нарастающей амплитудой.

Решения в виде плоских монохроматических волн (с комплексной частотой) определяются согласно (6,1), (6,3), (6,4) следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} f &= i \frac{e}{m} E \frac{\frac{df_0}{dw}}{\omega - \gamma w}, \quad E = \text{const } e^{i(\omega t - \gamma z)}, \\ v &= -i \frac{e}{m} \frac{E}{\omega - \gamma v_0}, \\ \rho &= -i \gamma \frac{e \rho_0}{m} \frac{E}{(\omega - \gamma v_0)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6,5)$$

Подстановка (9,5) в (6,2) приводит к соотношению, связывающему ω и γ :

$$-\frac{4\pi e^2}{m\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(w) dw}{\omega - \gamma w} + \frac{\Omega^2}{(\omega - \gamma v_0)^2} = 1, \quad (6,6)$$

где $\Omega = \left(\frac{4\pi e^2 \rho_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ — ленгмюровская частота для пучка и $f_0(w) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mw^2}{2T}}$ — равновесная функция распределения электронов плазмы (n_0 — плотность электронов, T — температура, выраженная в эргах).

Исследование дисперсионного уравнения (6,6) представляет собой нашу основную задачу.

3. Вводя вместо w новую переменную $y = \left(\frac{m}{2T}\right)^{\frac{1}{2}} w$, перепишем (6,6) в виде

$$\left. \begin{aligned} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega \omega_0^2}{\gamma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{z - y} - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \frac{m}{T} + \\ + \frac{\Omega^2}{(\omega - \gamma v_0)^2} = 1, \end{aligned} \right\} \quad (6,7)$$

где $\omega_0 = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ — ленгмюровская частота плазмы и

$$z = \frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{m}{2T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Входящий сюда интеграл

$$J(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{z - y}$$

можно представить в виде

$$J(z) = \sqrt{\pi} z e^{-z^2} \int_0^1 e^{\xi z^2} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi - \pi i e^{-z^2} Sg \operatorname{Im} z. \quad (6,8)$$

Это соотношение очень полезно для дальнейших исследований, так как в нём можно сделать предельный переход к вещественным z .

Отметим два предельных случая соотношения (6,8).

Если $|z| \gg 1$ и $\operatorname{Im} z \rightarrow -0$, то

$$J(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{z} \left(1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots\right) + \pi i e^{-z^2}. \quad (6,9)$$

Если $|z| \ll 1$, то

$$J(z) = 2\sqrt{\pi}z - \pi i S g \operatorname{Im} z. \quad (6,10)$$

Используя (6,8), можно представить дисперсионное уравнение (6,7) в следующем виде:

$$\frac{1}{a^2 \gamma^2} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{u\gamma} \right)^2 e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{u\gamma} \right)^2} \int_0^1 e^{\frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{u\gamma} \right)^2 y} y^{-\frac{1}{2}} dy + \right. \\ \left. + i \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega}{u\gamma} e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{u\gamma} \right)^2} - 1 \right\} + \frac{\Omega^2}{(\omega - \gamma v_0)^2} = 1, \quad (6,11)$$

где $a = \left(\frac{T}{4\pi n_0 e^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ и $u = \left(\frac{3T}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$ (u — средняя тепловая скорость электронов плазмы).

4. Перейдём теперь к исследованию дисперсионного уравнения.

Предполагая плотность пучка достаточно малой, т. е. считая достаточно малой величину Ω , будем искать корень уравнения (6,11), близкий к $\omega = \gamma v_0$. Полагая в (6,11)

$$\omega = \gamma v_0 + \varepsilon,$$

где $|\varepsilon| \ll \gamma v_0$, получим следующее выражение для $\frac{\Omega^2}{\varepsilon^2}$:

$$\frac{\Omega^2}{\varepsilon^2} \approx 1 - \frac{1}{a^2 \gamma^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{v_0}{u} \right)^2 e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{v_0}{u} \right)^2} \int_0^1 e^{\frac{3}{2} \left(\frac{v_0}{u} \right)^2 y} y^{-\frac{1}{2}} dy + \right. \\ \left. + i \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{v_0}{u} e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{v_0}{u} \right)^2} - 1 \right]. \quad (6,12)$$

Это выражение показывает, что если $\Omega \ll \gamma v_0$, то корень, близкий к $\omega = \gamma v_0$, действительно существует, причём так как в уравнение (6,12) входит квадрат ε , то всегда существует корень с $\operatorname{Im} \omega < 0$, соответствующий волне с нарастающей амплитудой.

Таким образом, мы доказали, что флуктуации поля и плотности распространяются в виде волн с нарастающей амплитудой и что исходное состояние пучка является неустойчивым при всех скоростях v_0 .

Выражение (6,12) может быть значительно упрощено в двух предельных случаях:

$$v_0 \ll u \text{ и } v_0 \gg u.$$

В том случае, если $v_0 \ll u$, мы получим на основании (6,10)

$$\frac{\Omega^2}{\varepsilon^2} \approx 1 + \frac{1}{a^2 \gamma^2} - i \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \gamma^2} \frac{v_0}{u}, \quad v_0 \ll u, \quad (6,13)$$

откуда

$$\varepsilon \approx -\frac{\Omega}{\sqrt{1+(a\gamma)^{-2}}} \left[1 + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{v_0}{u} \frac{(a\gamma)^{-2}}{1+(a\gamma)^{-2}} \right], \quad \text{Im } \omega < 0.$$

Мы видим, что при $v_0 \ll u$ смещение частоты по отношению к γv_0 является в основном вещественным и по порядку величины равно Ω . Мнимая часть частоты, равная

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{v_0}{u} \Omega \frac{(a\gamma)^{-2}}{[1+(a\gamma)^{-2}]^{\frac{3}{2}}},$$

достигает максимума при $a\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, что соответствует частоте

$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_0}{u} \omega_0$, максимальное значение Γ равняется

$$\Gamma_{\text{макс}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} \frac{v_0}{u} \Omega, \quad v_0 \ll u. \quad (6,14)$$

Оно значительно меньше Ω .

Рассмотрим теперь предельный случай $v_0 \gg u$. Используя формулу (6,9), представим (6,12) в виде

$$\frac{\Omega^2}{\varepsilon^2} \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 v_0^2} \left[1 + \frac{u^2}{v_0^2} + O\left(\frac{u^4}{v_0^4}\right) \right] - i \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{v_0}{u} e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{v_0}{u}\right)^2}. \quad (6,15)$$

Пренебрегая членами $O\left(\frac{u^4}{v_0^4}\right)$, получим:

$$\varepsilon = -i \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2 (v_0^2 - u^2)} - 1 + i\eta}}, \quad (6,16)$$

где $\eta = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{v_0}{u (a\gamma)^2} e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{v_0}{u}\right)^2}$. Так как $\eta \ll 1$, то мы можем заменить (6,16) приближённым выражением

$$\varepsilon \approx -i \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2 (v_0^2 - u^2)} - 1}}. \quad (6,17)$$

Таким образом, отклонение от частоты $\omega = \gamma v_0$ при $v_0 \gg u$ является почти чисто мнимым.

Заметим, что при $v_0 \gg u$ дисперсионное уравнение может быть приближённо представлено в виде

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - u^2 \gamma^2} + \frac{\Omega^2}{(\omega - \gamma v_0)^2} = 1, \quad (6,18)$$

причём мы пренебрегли в левой части этого равенства слагаемым

$i \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{\omega}{u\gamma} e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{u\gamma}\right)^2}$, содержащим экспоненциальный фактор, так как

$$\left(\frac{\omega}{u\gamma}\right)^2 \approx \left(\frac{v_0}{u}\right)^2 \gg 1.$$

Уравнение (6,18) имеет такой же вид, как и дисперсионное уравнение (5,5), характеризующее взаимодействие пучка заряжённых частиц с медленными волнами в сложных волноводах и диэлектриках, причём роль фазовой скорости играют средняя тепловая скорость электронов плазмы и роль граничной частоты волновода — ленгмюровская частота плазмы ω_0 . Интересно заметить, что уравнение (6,18) (без слагаемого, содержащего экспоненциальный множитель) может быть получено, если описывать плазму чисто гидродинамически и считать при этом давление равным $mu^3 n$, где n — плотность электронов.

5. В то время как при малых скоростях пучка ($v_0 \ll u$) мнимая часть ω очень невелика и составляет по порядку величины $\frac{v_0}{u} \Omega$, при скоростях, превосходящих u , мнимая часть ω может принимать гораздо большие значения. Согласно (5,7) и (5,8), если волновой вектор и частота становятся равными

$$\tilde{\gamma} = \frac{\omega_0}{\sqrt{v_0^2 - u^2}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_0^2}}},$$

мнимая часть частоты равна

$$\Gamma = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{4}{3}}} \left(1 - \frac{u^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{6}} \omega_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, в области скоростей, превосходящих среднюю тепловую скорость электронов плазмы, при $\gamma = \tilde{\gamma}$ и $\omega = \tilde{\omega}$ мнимая часть частоты пропорциональна не $\frac{v_0}{u} \frac{\Omega}{\omega_0}$, как это имеет место в области малых скоростей, а $\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}}$. Отсюда следует, что не-

устойчивость пучка и возникновение волн с нарастающей амплитудой становятся особенно существенными в области скоростей, превосходящих u . Эти результаты справедливы, если в уравнении (6,18) не учитывать слагаемого с экспоненциальным фактором i , кроме того, не рассматривать парных столкновений в плазме *).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. G. Bruck and E. Wicher, Journ. Appl. Phys. **18**, 766 (1947).
2. L. Pincherle, Phys. Rev. **66**, 118 (1944).
3. Луи де Бройль, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. Госиниздат, Москва, 1948, стр. 18.
4. R. B. R. Shersby-Harbie, Nature, **162**, 890 (1948).
5. В. Владимировский, ДАН **52**, 219 (1946).
6. Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. I.
7. В. Владимировский, ЖТФ **17**, 1277 (1947).
8. В. Бродский, Изв. АН СССР, сер. физич. **10**, 17 (1946).
9. H. Bethe, Phys. Rev. **66**, 163 (1944).
10. J. Slater, Rev. of Modern Phys. **20**, 485 (1948).
11. L. Chu and W. Hansen, Journ. Appl. Phys. **18**, 996 (1947).
12. L. Brillouin, Journ. Appl. Phys. **19**, 1023 (1948).
13. W. Wilkinshaw, Journ. Appl. Phys. **20**, 634 (1949).
14. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. II.
15. J. Pierce, Proc. Inst. Rad. Eng. **35**, 121 (1947).
16. С. Коган, ДАН **56**, 867 (1949).
17. Л. Лошаков и Е. Ольдерогге, Радиотехника **3**, 11 (1948).
18. R. Phillips, Quarterly of Applied Mathematics **8**, 229 (1950).
19. И. Тамм и И. Франк, ДАН **14**, 108 (1937).
- 19a. В. Гинзбург, Journ. of Physics **2**, 441 (1940).
20. В. Гинзбург, ДАН **56**, 253 (1947).
21. В. Гинзбург и И. Франк, ДАН **56**, 699 (1947).

*) Феноменологически столкновения в плазме можно учесть, если добавить в (6,1) член $\frac{1}{\tau} f$, где τ — среднее время между двумя столкновениями. Уравнение (6,18) приобретает при этом вид

$$\frac{\omega_0^2}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - u^2 \gamma^2} + \frac{\Omega^2}{(\omega - \gamma v_0)^2} = 1.$$

Смещение частоты равняется

$$\epsilon = -i \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\left(\gamma v_0 - \frac{1}{\tau}\right)^2 - u^2 \gamma^2} - 1}};$$

оно всегда, при всех v_0 , имеет отрицательную мнимую часть.

22. А. Ахиезер, Г. Любарский, Я. Файнберг, ДАН **73**, 55 (1950).
 23. S. Ramo, Phys. Rev. **56**, 276 (1939).
 24. J. Pierce, Proc. Inst. Rad. Eng. **35**, 111 (1947).
 25. В. Лопухин, УФН **36**, вып. 4 (1948).
 26. Л. Лошаков, ЖТФ **19**, 578 (1949).
 27. А. Ахиезер и Я. Файнберг, ДАН **64**, 555 (1949).
 28. J. Pierce, The Bell System Techn. Journ. **29**, № 1, 2, 3, 4 (1950).
 29. А. Власов, ЖЭТФ **8**, 291 (1938).
 30. А. Власов, Учёные записки МГУ (физика) **75**, вып. 1 (1945).
 31. Bohm and Gross, Phys. Rev. **75**, 1864 (1949).
-