1950 г. Апрель *Т. XLIII, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ДИФФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ ОТ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В. А. Фок

Основанный на принципе Гюйгенса приближённый метод вычисления диффракции позволяет, как известно, находить поле волны, огибающей тонкий непрозрачный экран; поле это выражается через интегралы Френеля.

В случае же, когда огибаемое тело обладает конечной кривизной (радиус кривизны велик по сравнению с длиной волны), вопрос о приближённых формулах для поля в области геометрической границы тени на достаточно большом расстоянии от тела оставался открытым; в частности, не было выяснено, применимы ли в этом случае, те выражения для поля через интегралы Френеля, которые можно построить по аналогии со случаем бесконечно тонкого экрана.

В настоящей работе мы покажем на примере диффракции от шара, что и для тел с конечной кривизной главный член в выражении для поля позади тела выражается через интегралы Френеля. Этот член не зависит (как и в случае обычной диффракции Френеля) от материала тела, огибаемого волной. Но к главному члену присоединяется добавочный, составляющий как бы фон, на котором расположены полосы френелевской диффракции, и этот добавочный член (а следовательно, и фон) уже зависит от электрических свойств огибаемого волной тела.

1. ИСХОДНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МНОЖИТЕЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ

Мы будем исходить из диффракционных формул, выведенных в нашей работе [1]. Мы должны здесь резюмировать основные результаты этой работы. Поле от точечного источника (диполя), расположенного на некотором расстоянии от поверхности шара, выражается через две функции U и W, представляющие решения уравнения колебаний:

$$\Delta U + k^2 U = 0 \qquad (1.01)$$

и имеющие точечную особенность вида

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} + U^0, \tag{1.02}$$

где R есть расстояние от источника, а U^0 остаётся конечным при $kR \to 0$.

Уравнения, определяющие U и W, отличаются друг от друга видом предельных условий, которых мы здесь выписывать не будем.

Пусть r, ϑ, φ — сферические координаты с началом в центре шара и с полярной осью, проходящей через диполь. Величина $s = a\vartheta$, где a — радиус шара, будет расстоянием от источника до точки наблюдения, считаемым по дуге шара. Высоту источника над поверхностью шара обозначим через h_1, а высоту точки наблюдения через h_2. Введём параметр

$$m = \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}, \tag{1.03}$$

который будем предполагать большим, и положим

$$x = \sqrt[3]{\frac{k}{2a^2}}\, s = m\frac{s}{a} = m\vartheta; \tag{1.04}$$

$$y_1 = \frac{kh_1}{m}; \qquad y_2 = \frac{kh_2}{m}. \tag{1.05}$$

Комплексную диэлектрическую постоянную вещества шара обозначим через η, причём будем считать $|\eta| \gg 1$. Наконец, положим

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta+1}}; \qquad q_1 = im\sqrt{\eta - 1}. \tag{1.06}$$

В нашей работе показано, что вблизи поверхности шара (на расстояниях, малых по сравнению с его радиусом) функции U и W выражаются через множитель ослабления V по формулам

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa\sin\frac{s}{a}}} \cdot V(x, y_1, y_2, q), \tag{1.07}$$

$$W = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa\sin\frac{s}{a}}} \cdot V(x, y_1, y_2, q_1). \tag{1.08}$$

Множитель ослабления V может быть представлен при $y_1 < y_2$ в виде контурного интеграла

$$V(x, y_1, y_2, q) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_C e^{ixt} F(t, y_1, y_2, q)\, dt, \tag{1.09}$$

где функция F может быть написана в виде:

$$F = w_1(t - y_2)\left\{v(t - y_1) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t - y_1)\right\}, \quad (1.10)$$

или же в виде:

$$F = \frac{i}{2} w_1(t - y_2)\left\{w_2(t - y_1) - \frac{w_2'(t) - qw_2(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t - y_1)\right\}. \quad (1.11)$$

Здесь $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — комплексные функции Эйри, представляющие решения дифференциального уравнения

$$w''(t) = tw(t) \quad (1.12)$$

и имеющие при больших отрицательных t асимптотические выражения

$$\left.\begin{aligned} w_1(t) &= e^{i\frac{\pi}{4}}(-t)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}, \\ w_2(t) &= e^{-i\frac{\pi}{4}}(-t)^{-\frac{1}{4}} e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

В формулу (1.10) входит также одна из функций $u(t)$, $v(t)$, определяемых равенствами

$$w_1(t) = u(t) + iv(t); \quad w_2(t) = u(t) - iv(t). \quad (1.14)$$

При вещественных t обе функции $u(t)$, $v(t)$ вещественны. При всех значениях t мы имеем:

$$w_1\left(te^{i\frac{2}{3}\pi}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} w_2(t); \quad w_1\left(te^{i\frac{4}{3}\pi}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} v(t). \quad (1.15)$$

Контур C в интеграле (1.09) охватывает в положительном направлении первую четверть плоскости комплексной переменной t (в первой четверти расположены все полюсы подинтегральной функции). В качестве контура C мы можем взять, например, ломаную линию, идущую от $\infty e^{i\frac{2}{3}\pi}$ до 0 и от 0 до ∞.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ

Множитель ослабления V был исследован нами в наших предыдущих работах [1, 2], во-первых, в освещённой области, где вступает в силу отражательная формула, соответствующая геометрической оптике, во-вторых, в области тени, где имеет место убывание амплитуды поля по показательному закону, и, наконец, в переходной области вблизи поверхности шара (область полутени). Область конуса тени оставалась, однако, неисследованной, и вывод приближённых формул для этой области составляет цель настоящей работы.

Под конусом тени мы разумеем конус, касательный к шару и имеющий вершину в источнике. Уравнение конуса тени может быть написано в виде

$$\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}=\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\vartheta}, \tag{2.01}$$

или после перехода к переменным x, y_1, y_2 и пренебрежения малыми величинами

$$\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=x. \tag{2.02}$$

Таким образом, нам надлежит исследовать множитель ослабления V для случая, когда величины x, y_1, y_2 весьма велики, разность же

$$\xi=x-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2} \tag{2.03}$$

остаётся конечной. Заметим, что положительным значениям ξ соответствует теневая, а отрицательным значениям — освещённая область.

В интеграле (1.09) для V мы можем разуметь под F одно из двух выражений (1.10) или (1.11), которые тождественно равны друг другу. Разобьём контур C в интеграле (1.09) на два участка: участок от $\infty e^{i\frac{2\pi}{3}}$ до 0 обозначим через C_1, а участок от 0 до ∞ через C_2. На первом участке мы будем пользоваться для F выражением (1.11), а на втором участке — выражением (1.10). Мы можем тогда написать

$$V=\Phi+\Psi, \tag{2.04}$$

где

$$\Phi=\sqrt{\frac{x}{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{i}{2}\int\limits_{C_1} e^{ixt}w_1(t-y_2)\,w_2(t-y_1)\,dt+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{C_2} e^{ixt}w_1(t-y_2)\,v(t-y_1)\,dt\right\}, \tag{2.05}$$

$$\Psi=-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\times$$
$$\times\left\{\frac{i}{2}\int\limits_{C_1} e^{ixt}\,\frac{w_2'(t)-qw_2(t)}{w_1'(t)-qw_1(t)}\,w_1(t-y_1)\,w_1(t-y_2)\,dt+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{C_2} e^{ixt}\,\frac{v'(t)-qv(t)}{w_1'(t)-qw_1(t)}\,w_1(t-y_1)\,w_1(t-y_2)\,dt\right\}. \tag{2.06}$$

Интегралы, входящие в Φ, не зависят от параметра q, который входит только в Ψ. Следовательно, Φ не зависит от электрических свойств тела, дающего диффракцию; от них зависит только Ψ. Мы увидим, что Φ соответствует френелевской части диффракции, а Ψ — тому фону, на который налагается френелевская диффракционная картина.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА Φ

В выражении (2.05) для Φ мы можем заменить интегрирование по C_1 интегрированием от $-\infty$ до 0. Пользуясь соотношением $w_2 = w_1 - 2iv$, мы получим:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{3.01}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\pi}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{0} e^{ixt} w_1(t-y_2)\, w_1(t-y_1)\, dt, \tag{3.02}$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} w_1(t-y_2)\, v(t-y_1)\, dt. \tag{3.03}$$

Вычислим сперва интеграл Φ_2. Для этого воспользуемся следующим интегральным представлением для $w_1(t-y_2)$:

$$w_1(t-y_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{(t-y_2)z - \frac{1}{3}z^3}\, dz, \tag{3.04}$$

где контур Γ состоит из участков от $-i\infty$ до 0 и от 0 до ∞. Заметим, что на контуре Γ будет $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$. После подстановки (3.04) в (3.03) мы можем выполнить интегрирование по t при помощи формулы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z+ix)t} v(t-y_1)\, dt = \exp\left\{y_1(z+ix) + \frac{1}{3}(z+ix)^3\right\}, \tag{3.05}$$

справедливой при $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$. В результате мы получим:

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\, e^{-\frac{i}{3}x^3 + ixy_1} \cdot \int_{\Gamma} e^{ixz^2 - (x^2 + y_2 - y_1)z}\, dz. \tag{3.06}$$

Последний интеграл легко берётся, и мы получаем окончательно:

$$\Phi_2 = e^{i\omega(x)}, \tag{3.07}$$

где

$$\omega(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x(y_1+y_2) + \frac{(y_2-y_1)^2}{4x}. \tag{3.08}$$

Как показано в нашей работе[1], величина ω есть фаза падающей волны, приближённо равная

$$\omega = k(R-s), \tag{3.09}$$

где R и s означают те же величины, что и в разделе 1. Таким образом интеграл Φ_2 соответствует падающей волне.

Переходим к вычислению интеграла Φ_1. Пользуясь интегральным представлением (3.04) для обоих множителей $w_1(t-y_2)$ и $w_1(t-y_1)$ и производя интегрирование по t, мы приходим к двойному контурному интегралу, в котором после замены переменных одно интегрирование может быть выполнено. В результате получается

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i}\int\limits_C e^{i\omega(z)}\frac{dz}{\sqrt{z}(z-x)}, \tag{3.10}$$

где контур C идёт от положительно-мнимой бесконечности, пересекает вещественную ось справа от точки $z=x$ и затем идёт по лучу $\arg z = -\frac{\pi}{6}$.

Вычет интеграла (3.10) в точке $z=x$ равен, согласно (3.07), величине Φ_2. Поэтому, если мы обозначим через C' контур, идущий аналогично C, но пересекающий вещественную ось слева от точки $z=x$, мы получим:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i}\int\limits_{C'} e^{i\omega(z)}\frac{dz}{\sqrt{z}(z-x)}. \tag{3.11}$$

При помощи этих формул можно приближённо выразить функцию Φ через интегралы Френеля. Для этого применим способ стационарной фазы, учитывая, однако, что дробь $1/(z-x)$ не будет медленно меняющейся функцией.

Приравнивая нулю производную от фазы $\omega(z)$, мы приходим к уравнению

$$z^4 - 2z^2(y_1+y_2) + (y_1-y_2)^2 = 0, \tag{3.12}$$

корни которого равны

$$z = \pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2}. \tag{3.13}$$

Из этих четырёх корней нас интересует только наибольший положительный корень

$$z_0 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}, \tag{3.14}$$

так как он лежит ближе всего к контуру C. Обозначим через C_0 контур, аналогичный C или C', но пересекающий вещественную ось в точке $z = z_0$. Применяя обозначение (2.03), положим

$$x - z_0 = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = \xi. \tag{3.15}$$

Если $\xi < 0$, то контур C_0 эквивалентен C и интеграл по нему даст Φ_1. Если же $\xi > 0$, то контур C_0 эквивалентен C' и интеграл по нему даст Φ.

Вблизи $z = z_0$ мы имеем:

$$\omega(z) = \omega_0 - \mu^2 (z - z_0)^2, \tag{3.16}$$

где

$$\omega_0 = \omega(z_0) = \frac{2}{3} y_1^{3/2} + \frac{2}{3} y_2^{3/2}, \tag{3.17}$$

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}. \tag{3.18}$$

Для приближённого вычисления интеграла

$$I = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{C_0} e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z}(z - x)} \tag{3.19}$$

заменяем величину $\sqrt{z}$ постоянным значением $\sqrt{z_0}$, а функцию $\omega(z)$ выражением (3.16). Положив

$$z = z_0 + pe^{-i\frac{\pi}{4}}, \tag{3.20}$$

мы можем интегрировать по p от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получается

$$I = \sqrt{\frac{x}{z_0}} e^{i\omega_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2 p^2} \frac{dp}{p - \xi e^{i\frac{\pi}{4}}}. \tag{3.21}$$

Последний интеграл выражается через интегралы Френеля, причём он имеет разные аналитические выражения при $\xi > 0$ и при $\xi < 0$, а именно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2 p^2} \frac{dp}{p - \xi e^{i\frac{\pi}{4}}} = \begin{cases} f(\mu\xi) & \text{при } \xi > 0, \quad (3.22) \\ -f(-\mu\xi) & \text{при } \xi < 0, \quad (3.23) \end{cases}$$

где

$$f(\alpha) = e^{-i\alpha^2 - i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\alpha^2} d\alpha. \tag{3.24}$$

Легко видеть, что

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = e^{-i\alpha^2}. \tag{3.25}$$

Вводя обычные интегралы Френеля

$$C+iS=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\alpha e^{i\alpha^2}d\alpha, \tag{3.26}$$

мы можем написать

$$f(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e^{-i\alpha^2-i\frac{\pi}{4}}}\left\{\left(\frac{1}{2}-C\right)+i\left(\frac{1}{2}-S\right)\right\}. \tag{3.27}$$

Асимптотическое выражение для $f(\alpha)$, справедливое при больших положительных значениях α, имеет вид:

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{i}{2\alpha^3}+\cdots\right). \tag{3.28}$$

Выражая интеграл I через $f(\alpha)$ и помня, что этот интеграл представляет при $\xi>0$ функцию Φ, а при $\xi<0$ функцию $\Phi_1=\Phi-\Phi_2$, где Φ_2 определено (3.07), мы получаем окончательно:

$$\Phi=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1y_2}}e^{i\omega_0}\cdot\mu f(\mu\xi) \qquad (\text{при } \xi>0), \tag{3.29}$$

$$\Phi=e^{i\omega(x)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1y_2}}e^{i\omega_0}\cdot\mu f(-\mu\xi) \qquad (\text{при } \xi<0). \tag{3.30}$$

Эти выражения справедливы при условии, что оба числа $\sqrt{y_1}$ и $\sqrt{y_2}$ весьма велики (величина μ^2 будет порядка меньшего из этих чисел). Что касается величины ξ, то она может быть как конечной, так и малой, причём произведение $\mu\xi$ может быть любым (большим, конечным или малым) числом. Если ξ весьма мало (причём оно может быть любого знака), то оба выражения для Φ практически совпадают. Это видно из приближённых равенств

$$\frac{\mu^2x}{\sqrt{y_1y_2}}=1+\frac{\xi}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}\sim 1, \tag{3.31}$$

$$\omega(x)\sim\omega_0-\mu^2\xi^2 \tag{3.32}$$

в соединении с формулой (3.25). При $\xi=0$ совпадение обоих выражений для Φ будет строгим.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА Ψ

Обратимся теперь к выводу приближённых формул для интеграла Ψ. Нас интересует значение интеграла для того же случая, для которого мы вычисляли интеграл Φ, а именно, для случая, когда величины $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$ (и, следовательно, μ^2) весьма велики, величина же $\xi=x-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}$ конечна. При этих условиях главным участком интегрирования будет тот, где переменная t

конечна. Но при конечном t и больших y_1 и y_2, стоящее в (2.06) под интегралом произведение функций w_1 на показательную функцию будет равно

$$e^{ixt}w_1(t-y_1)\,w_1(t-y_2)=$$

$$=\frac{i}{\sqrt[4]{y_1y_2}}\,e^{i\omega_0}\cdot e^{i\xi t}\left(1+\frac{it^2}{4\mu^3}+O\left(\frac{1}{\mu^4}\right)\right), \tag{4.01}$$

где мы для краткости воспользовались обозначением (3.17).

Подставляя это выражение в интеграл Ψ, мы получим:

$$\Psi=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1y_2}}\,e^{i\omega_0}\left\{g(\xi)-\frac{i}{4\mu^3}\,g''(\xi)+O\left(\frac{1}{\mu^4}\right)\right\}, \tag{4.02}$$

где

$$g(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{i}{2}\int\limits_{\infty e^{i\frac{2}{3}\pi}}^{0}e^{i\xi t}\,\frac{w_2'(t)-qw_2(t)}{w_1'(t)-qw_1(t)}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\xi t}\,\frac{v'(t)-qv(t)}{w_1'(t)-qw_1(t)}\,dt\right\}. \tag{4.03}$$

Пользуясь свойствами функций Эйри (1.15) легко проверить, что если

$$t=t'e^{i\frac{2\pi}{3}}, \tag{4.04}$$

то

$$\frac{i}{2}\,\frac{w_2'(t)-qw_2(t)}{w_1'(t)-qw_1(t)}=\frac{v'(t')-qe^{i\frac{2}{3}\pi}\,v(t')}{w_2'(t')-qe^{i\frac{2}{3}\pi}\,w_2(t')}. \tag{4.05}$$

Подстановка (4.04) приводит первый интеграл в (4.03) к интегралу по вещественной положительной оси. Опуская штрих при t, мы получаем:

$$g(\xi)=e^{-i\frac{\pi}{12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{\xi t}{2}(\sqrt{3}+i)}\cdot\frac{v'(t)-qe^{i\frac{2}{3}\pi}\,v(t)}{w_2'(t)-qe^{i\frac{2}{3}\pi}\,w_2(t)}\,dt+$$

$$+e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int^{\infty}e^{i\xi t}\cdot\frac{v'(t)-qv(t)}{w_1'(t)-qw_1(t)}\,dt. \tag{4.06}$$

При возрастании t функция $v(t)$ в числителе быстро убывает, тогда как функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ в знаменателе столь же быстро возрастают. Поэтому оба интеграла сходятся весьма быстро и могут быть вычислены по квадратурам. Функция $g(\xi)$ допускает разложение в ряд Тейлора по степеням ξ; коэффициенты этого ряда также могут быть вычислены по квадратурам. При больших положительных значениях ξ функция $g(\xi)$ имеет асимптотическое выражение

$$g(\xi)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\xi}, \tag{4.07}$$

которое сводится к одному члену, не зависящему притом от q. Остаток будет порядка $e^{i\xi t_1}$, где t_1 — первый корень уравнения

$$w_1'(t)-qw_1(t)=0. \tag{4.08}$$

При больших отрицательных ξ асимптотическое выражение для $g(\xi)$ имеет вид:

$$g(\xi)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\xi}+\frac{\sqrt{-\xi}}{2}\cdot\frac{q+i\frac{\xi}{2}}{q-i\frac{\xi}{2}}e^{-\frac{i}{12}\xi^3}. \tag{4.09}$$

При подстановке этого выражения в (4.02) нужно иметь в виду, что эта формула для Ψ применима в том случае, когда поправочный член, соедржащий в знаменателе μ^2, будет мал по сравнению с главным. Чтобы оба выражения (4.02) и (4.09) были применимы, необходимо выполнение условия

$$1\ll\xi^2\ll\mu \qquad (\xi<0). \tag{4.10}$$

5. МНОЖИТЕЛЬ ОСЛАБЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНУСА ТЕНИ

В предыдущих параграфах мы нашли приближённые выражения для интегралов Φ и Ψ, сумма которых даёт множитель ослабления $V(x, y_1, y_2, q)$. Составляя сумму, получаем при $\xi\geqslant 0$

$$V=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1y_2}}e^{i\omega_0}\left\{\mu f(\mu\xi)-g(\xi)+\frac{i}{4\mu^2}g''(\xi)\right\} \tag{5.01}$$

и при $\xi\leqslant 0$

$$V=e^{i\omega(x)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1y_2}}e^{i\omega_0}\left\{\mu f(-\mu\xi)+g(\xi)-\frac{i}{4\mu^2}g''(\xi)\right\}. \tag{5.02}$$

Эти выражения справедливы при условии, что определяемый из равенства

$$\mu^2=\frac{\sqrt{y_1y_2}}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} \tag{5.03}$$

параметр μ весьма велик, величина же

$$\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \tag{5.04}$$

конечна или мала.

Напомним геометрический смысл этих величин. Согласно формулам (1.03) — (1.05) мы имеем:

$$\mu^2 = \sqrt[6]{\frac{2k^2}{a}} \cdot \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}, \tag{5.05}$$

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{k}{2a^2}} \left(s - \sqrt{2ah_1} - \sqrt{2ah_2}\right). \tag{5.06}$$

Таким образом, большие значения μ соответствуют малым длинам волн и относительно большим расстояниям от поверхности тела (последние должны быть всё же малы по сравнению с радиусами его кривизны). Величина ξ пропорциональна считаемому вдоль (точнее, параллельно) поверхности тела расстоянию от геометрической границы тени (конуса тени). При $\xi < 0$ величина $\mu^2 \xi^2$ приближённо равна разности фаз отражённой и падающей волны. Значение $\xi = 0$ соответствует границе тени, положительные значения ξ соответствуют области тени, а отрицательные — освещённой области.

Наши формулы дают переход от света к тени на относительно больших расстояниях от поверхности тела. Так как функции f и g и их производные по своим аргументам будут при конечных значениях аргументов порядка единицы, то при больших значениях μ главным членом в (5.01) будет член $\mu f(\mu\xi)$. Этот член пропорционален интегралу Френеля. Он представляет быстро меняющуюся функцию от ξ, так как аргумент в интеграле Френеля есть $\mu\xi$, где μ — большое число. Таким образом, главный член в выражении для V даёт диффракцию Френеля. Но на эту диффракционную картину налагается фон, представленный функцией $g(\xi)$, которая по сравнению с главным членом меняется медленно. Этот фон зависит от материала диффрагирующего тела (поскольку $g(\xi)$ зависит от q), тогда как френелевский член от него не зависит.

Полученные здесь формулы для множителя ослабления должны при удалении в ту и в другую сторону от конуса тени переходить в выведенные нами ранее формулы для теневой и для освещённой областей. Проверим это. В области тени мы должны получить убывание амплитуды по показательному закону, а в освещённой области — отражательную формулу. Так как в формуле (5.01) и в асимптотическом выражении (4.07) для $g(\xi)$ члены, убывающие при больших положительных ξ, по показательному закону, вследствие их малости, не учитываются, то мы должны в нашем приближении получить в области тени нуль. В самом деле, из асимптотического выражения (3.28) для функции Френеля $f(\alpha)$

следует:

$$\mu f(\mu\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\frac{1}{\xi}-\frac{i}{2\mu^2\xi^3}\right). \tag{5.07}$$

С другой стороны, формула (4.07) даёт:

$$g(\xi)-\frac{i}{4\mu^2}g''(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\frac{1}{\xi}-\frac{i}{2\mu^2\xi^3}\right), \tag{5.08}$$

т. е. то же самое выражение. Таким образом, при больших положительных ξ выражение (5.01) для V действительно обращается в нашем приближении в нуль.

Рассмотрим теперь большие отрицательные значения ξ. В формуле (5.02) первый член асимптотического выражения (4.09) для $g(\xi)$ сокращается с $\mu f(-\mu\xi)$, а второй член (содержащий показательную функцию) даёт:

$$V=e^{i\omega(x)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1y_2}}e^{i\omega_0}\cdot\frac{\sqrt{-\xi}}{2}\cdot\frac{q+i\frac{\xi}{2}}{q-i\frac{\xi}{2}}e^{-\frac{i}{12}\xi^3}. \tag{5.09}$$

С другой стороны, как показано в нашей работе[1], в освещённой области имеет место отражательная формула

$$V=e^{i\omega}\cdot\left(1-\frac{q-ip}{q+ip}\cdot\sqrt{\frac{p}{p+p_1}}e^{2ip_1p^2}\right) \tag{5.10}$$

(формула (4.31) указанной работы). Здесь $\omega=\omega(x)$, величина p (пропорциональная косинусу угла падения) определяется из уравнения

$$\sqrt{y_1+p^2}+\sqrt{y_2+p^2}=2p+x, \tag{5.11}$$

а величина p_1 равна

$$p_1=2p+x-\frac{1}{x}(y_1+y_2). \tag{5.12}$$

В том приближении, в каком справедлива формула (5.09),

$$p=-\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{16\mu^2}\sim-\frac{\xi}{2}, \tag{5.13}$$

$$p_1=2\mu^2+\xi-\frac{2\mu^2\xi}{x}\sim 2\mu^2. \tag{5.14}$$

Пользуясь этими приближёнными равенствами, нетрудно проверить, что формула (5.09) представляет приближённый вид отражательной формулы (5.10).

Таким образом, формулы (5.01) и (5.02), выведенные для области, близкой к конусу тени, смыкаются с формулами, справедливыми в областях, примыкающих с обеих сторон к конусу тени и выведенными в наших предыдущих работах.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу выведенных здесь формул.

Как исходное выражение для V, так и приближённые формулы допускают при соответствующем изменении выражения для фазы падающей волны, переход к случаю плоской волны. Этот переход сводится к тому, что мы увеличиваем x и $\sqrt{y_2}$ до бесконечности, оставляя их разность конечной. Но, как показано в наших работах [2] и [3], в случае плоской волны наши исходные формулы справедливы не только для шара, но и для тела произвольной формы. Поэтому выведенные здесь приближённые формулы, содержащие интегралы Френеля, можно считать доказанными также и для тела произвольной формы. Представляется также весьма вероятным, что полученная здесь картина диффракции (диффракция Френеля, на которую налагается фон) имеет место, по крайней мере качественно, и на больших расстояниях от тела. При этом следует ожидать, что фон становится слабее по мере удаления от тела.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли, ЖЭТФ **19**, 916 (1949).
2. В. А. Фок, Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела, Известия АН СССР, сер. физ. **10**, 171 (1946).
3. В. А. Фок, Законы отражения Френеля и законы диффракции, УФН **36**, 308 (1948).