

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОТЛА*)

Г. Судэк и Э. Кэмпбелл

1. ВВЕДЕНИЕ

Нашей целью является рассмотрение цепной реакции в котле, в котором в результате деления рождаются быстрые нейтроны. Некоторые из этих нейтронов после замедления в замедлителе захватываются другими делящимися ядрами, что приводит к появлению новых нейтронов и развитию цепной реакции. Последнее происходит только тогда, когда лишь небольшая доля нейтронов уходит за границы котла или же поглощается непроизводительно, прежде чем произойдёт деление. Для того чтобы котёл работал при постоянной плотности нейтронов, должно быть достигнуто точное равновесие между интенсивностью потери нейтронов и интенсивностью их возникновения.

Это можно выразить с помощью формул следующим образом: пусть L будет числом нейтронов, уходящих каждую секунду из котла, а A — полное число нейтронов, поглощаемых в одну секунду в котле. Некоторая часть из этих последних, A_f , произведёт акты деления, при каждом из которых возникнет ν нейтронов. Можно написать уравнение баланса:

$$\text{утечка} + \text{поглощение} = \text{возникновению},$$

т. е.

$$L + A = A_f \nu. \quad (1,1)$$

Мы должны подробно исследовать, что происходит с быстрыми нейтронами, возникшими в процессе деления, каким образом они движутся в пространстве и как они замедляются в веществе. Быстрый нейтрон, проходя через замедлитель, например графит, будет сталкиваться с ядрами углерода. Путь нейтрона будет состоять из множества коротких отрезков различной длины.

*) H. Soodak and E. C. Campbell, Elementary Pile Theory. New York—London, 1950. Перевод с английского.

Эти отрезки будут ориентированы более или менее случайно, так как нейтрон может при столкновении либо отклониться на малый угол, либо же претерпеть лобовой удар с большим отклонением и максимальной потерей энергии.

2. ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ

Обычно принято выражать вероятность какого-либо процесса (рассеяния, поглощения, деления), происходящего при прохождении ядерных частиц через вещество, с помощью задания эффективной площади бомбардируемого ядра для этого процесса. Эта величина называется поперечным сечением ядра для этого процесса и обычно обозначается буквой σ . Если представить себе ядра в виде маленьких твёрдых шариков радиуса R , то можно ожидать, что эффективная площадь мишени имеет порядок πR^2 . Так как из других данных известно, что радиусы ядер имеют порядок 10^{-12} см, то неудивительно, что некоторые поперечные сечения для рассеяния нейтронов имеют порядок 10^{-24} см². Эта величина называется «барном».

Точный смысл понятия поперечного сечения следующий: если пучок нейтронов с плотностью I_0 (нейтронов в 1 сек через 1 см²) проходит через область, в которой имеется N ядер в 1 см³, каждое с поперечным сечением рассеяния σ_s , то число процессов рассеяния, происходящих в 1 сек в 1 см³, будет $I_0 N \sigma_0$. Это понятие можно иллюстрировать практически неосуществимым случаем, когда $I_0 = 1$ и $N = 1$. Если в 1 см³ в 1 сек входит 1 нейтрон и в этом объёме имеется только одно ядро, то вероятность того, что он будет рассеян, равна отношению площади мишени ядра ко всему сечению «пучка», т. е. к 1 см². Эта вероятность таким образом численно равна σ_s .

Пусть пучок с потоком 1 нейтрон/сек·см² входит в пластинку из замедлителя; вероятность рассеяния нейтрона на толщине Δx мы обозначим через $\Sigma_s \Delta x$. Вероятность того, что он пройдёт Δx без рассеяния, будет $(1 - \Sigma_s \Delta x)$, а вероятность того, что он пройдёт через n таких толщин, будет $(1 - \Sigma_s \Delta x)^n$. Пусть x будет полной толщиной замедлителя, пересекаемой нейтроном, тогда при стремлении n к бесконечности $\Delta x = \frac{x}{n}$ стремится к нулю и вероятность того, что нейтрон пройдёт, не рассеявшись, через толщину x , будет равна $e^{-\Sigma_s x}$, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y)^{\frac{a}{y}} = e^{-a}.$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что Σ_s связано с поперечным сечением σ_s соотношением $\Sigma_s = N \sigma_s$.

Доля нейтронов, которая пройдёт, не рассеявшись, расстояние x , будет равна $e^{-\Sigma_s x}$. Средняя длина свободного пробега

для рассеяния λ_s определяется как расстояние, которое проходит в среднем нейтрон до рассеяния, т. е.

$$\lambda_s = \int_0^{\infty} x e^{-\Sigma_s x} \Sigma_s dx = \frac{1}{\Sigma_s}. \quad (2,1)$$

В этом интеграле $e^{-\Sigma_s x}$ есть вероятность того, что нейтрон дойдёт до x без рассеяния, а $\Sigma_s dx$ —вероятность того, что он будет рассеян в следующем интервале dx , поэтому произведение этих величин даёт вероятность рассеяния между x и $x+dx$; тогда интеграл даёт среднюю длину свободного пробега рассеяния λ_s , которая равна обратной величине Σ_s —вероятности рассеяния на 1 см пути.

Величина $\Sigma_s = N\sigma_s$ называется «макроскопическим сечением рассеяния» или «сечением рассеяния в 1 см³». Таким же образом можно определить аналогичные величины для других процессов, например для поглощения, обозначая их λ_a , σ_a и Σ_a . Число атомов в 1 см³ N равно числу молей вещества в 1 см³, умножённому на число атомов в 1 моле. Таким образом,

$$N = \frac{\text{плотность (г/см}^3\text{)}}{\text{атомный вес (г/моль)}} \times \text{число Авогадро (атомов/моль)}. \quad (2,2)$$

В случае графита мы получаем:

$$N = \frac{1,6}{12} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 8 \cdot 10^{22}.$$

Так как поперечное сечение для рассеяния тепловых нейтронов в графите равно 4,8 барна, то макроскопическое сечение

$$\Sigma_s = N\sigma_s = 8 \cdot 10^{22} \cdot 4,8 \cdot 10^{-24} = 0,38 \text{ см}^{-1}.$$

Средняя длина свободного пробега λ_s будет равна $1/0,38 = 2,7$ см. То, что в качестве замедлителя обычно употребляется графит, связано частично с его крайне малым поперечным сечением поглощения, которое составляет лишь одну тысячную от поперечного сечения рассеяния, именно $\sigma_a = 0,0048$ барна. Средняя длина свободного пробега для поглощения тепловых нейтронов в графите будет поэтому около 2700 см.

В общем случае и σ_s и σ_a зависят от энергии нейтрона и она должна быть явно задана при задании поперечного сечения. Поперечное сечение поглощения является более чувствительной функцией энергии нейтрона, чем поперечное сечение рассеяния. Для многих веществ, например бора, σ_a обратно пропорционально скорости нейтрона v . Другие вещества обнаруживают явление «резонанса», при котором σ_a достигает очень больших значений для энергий нейтрона, близких к некоторому определённому значению.

3. ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

Рассмотрим быстрый нейтрон ($v \sim 10^9$ см/сек) в большом блоке замедлителя, например графита. Мы должны сейчас исследовать подробно процессы упругих столкновений, в результате которых нейтрон переходит от высоких энергий к низким. Когда энергия нейтрона становится настолько малой, что она делается сравнимой с энергией теплового движения атомов графита, то в дальнейшем нейтрон с одинаковой вероятностью может или получить или потерять энергию. Поэтому в тепловой области он будет сохранять свою энергию постоянной, пока не будет, наконец, захвачен.

Простое применение законов сохранения количества движения и энергии приводит к соотношению, выражающему относитель-

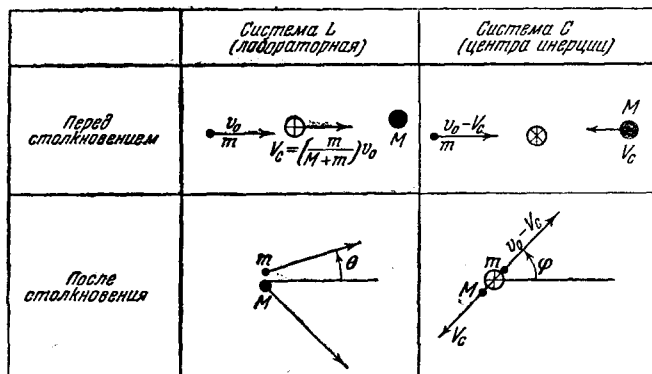


Рис. 1.

ную потерю энергии нейтрона через угол отклонения нейтрона и отношение массы ядра к массе нейтрона.

Однако более удобно рассматривать столкновение с точки зрения наблюдателя, который движется вместе с центром инерции обеих частиц. В этой системе (обозначаемой С) полное количество движения (векторная сумма) частиц перед столкновением равно нулю. Из закона сохранения количества движения следует, что после столкновения полное количество движения опять равно нулю. Это означает, что наблюдатель, который движется вместе с центром инерции, видит, как эти две частицы разлетаются в строго противоположных направлениях. Если, кроме того, столкновение упругое (сохраняется кинетическая энергия), то скорости частиц остаются теми же, которые они имели до столкновения, так как изменение скорости означало бы изменение полной кинетической энергии этих двух частиц. Конечный результат, наблюдаемый в системе С, заключается только в изменении направле-

ний скоростей, но не их величин. В лабораторной системе (обозначаемой L), в которой ядро вначале было в покое, величины скоростей изменяются, а их направления меняются не на противоположные. Для того чтобы определить новую скорость нейтрона в системе L , мы должны произвести обратное преобразование от системы C к системе L .

Пусть нейтрон движется вправо со скоростью v_0 , энергией E_0 и массой m . Ядро имеет скорость, равную нулю, и массу M . Скорость центра инерции будет:

$$V_C = \left(\frac{m}{M+m} \right) v_0.$$

В системе C нейтрон движется вправо со скоростью

$$v_0 - V_C = \left(\frac{M}{m+M} \right) v_0,$$

и ядро движется влево со скоростью

$$V_C = \left(\frac{m}{m+M} \right) v_0.$$

Полное количество движения тогда будет равно нулю, так как

$$m \frac{M}{M+m} v_0 - M \frac{m}{M+m} v_0 = 0.$$

После столкновения нейтрон вылетает в системе C под углом φ , а ядро под углом $180^\circ + \varphi$. В системе L нейтрон вылетает под углом θ и имеет скорость v , являющуюся векторной суммой скорости нейтрона в системе C и скорости центра инерции. Особенно интересны два случая:

при слабом столкновении

$$\varphi = 0, \quad v = v_0 \text{ и } E = E_0;$$

в случае лобового удара

$$\varphi = 180^\circ, \quad v = \left(\frac{M-m}{M+m} \right) v_0 \text{ и } E = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E_0.$$

Очевидно, что в последнем случае нейтрон теряет при столкновении максимальную энергию. Для случая углерода

$$E = \left(\frac{12-1}{12+1} \right)^2 E_0 = 0,72 E_0.$$

Таким образом, при столкновении нейтрона с ядром углерода нейтрон может потерять до 28% своей первоначальной энергии. Это означает, что при таком столкновении нейтрон, обладающий энергией 1 Мэв, может потерять до 0,28 Мэв, а нейтрон с энергией 1 эв может потерять до 0,28 эв. Так как максимальная

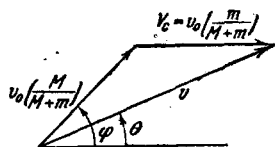


Рис. 2.

относительная потеря постоянна, то удобно пользоваться для вычислений логарифмической шкалой энергии. Из рис. 2 можно получить, с помощью теоремы косинуса:

$$v^2 = v_0^2 \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 + v_0^2 \left(\frac{m}{M+m} \right)^2 + 2v_0^2 \left(\frac{M}{M+m} \right) \left(\frac{m}{M+m} \right) \cos \varphi, \quad (3,1)$$

и отношение энергии нейтрона после столкновения E к его первоначальной энергии E_0 равно:

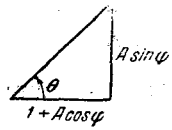
$$\frac{E}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} = \frac{v^2}{v_0^2} = \frac{M^2 + m^2 + 2m M \cos \varphi}{(M+m)^2}. \quad (3,2)$$

Вводя отношения масс $A = \frac{M}{m}$ и величину $r = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$, можно преобразовать (3,2) к виду:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2} \cos \varphi. \quad (3,3)$$

Наименьшее значение E получается при $\varphi = 180^\circ$, когда $\cos \varphi = -1$, а $E = rE_0$, тогда как при $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ и $E = E_0$.

Угол отклонения в системе C связан, согласно рис. 2, с соответствующим углом θ в системе L уравнением



$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \theta &= \frac{\cos \varphi + \frac{1}{A}}{\sin \varphi}, \\ \cos \theta &= \frac{1 + A \cos \varphi}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \varphi}}. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Можно заметить, что если $A \gg 1$, то $\varphi = \theta$ и системы C и L почти тождественны.

Для того чтобы получить усреднённые свойства нейтронов, замедляющихся в замедлителе, необходимо знать, как именно вероятность рассеяния в системе C зависит от угла φ . Из теории и из эксперимента следует, что для энергий нейтронов, с которыми мы будем иметь дело (энергии, меньшие чем 10 Мэв), и для малых A рассеяние в системе C с хорошим приближением можно считать сферически симметричным.

Это означает, что дифференциальное поперечное сечение $d\sigma_s$ для нейтронов, рассеянных внутри телесного угла $d\Omega$, будет $(\sigma_s / 4\pi) d\Omega$, где σ_s — постоянная. Так как элемент телесного угла, заключённого между φ и $\varphi + d\varphi$, есть

$$2\pi \sin \varphi d\varphi = -2\pi d(\cos \varphi),$$

то все значения $\cos \varphi$ имеют равную вероятность. Нетрудно видеть, что так как E/E_0 есть линейная функция от $\cos \varphi$, то все значения E/E_0 от 1 до r одинаково вероятны. Вероятность PdE , что нейтрон при одном столкновении потеряет энергию от начального значения E_0 до конечного значения, лежащего в интервале от E до $E + dE$, равна поэтому dE , делённому на полный интервал значений энергии $E_0 - rE_0$, которые он может иметь после столкновения. Таким образом:

$$PdE = \frac{dE}{E_0 - rE_0}.$$

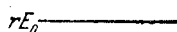
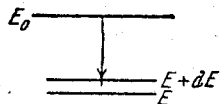


Рис. 3.

Теперь мы в состоянии вычислить величину, называемую «средней логарифмической потерей энергии при одном столкновении» и обычно обозначаемую через ξ . Удобство этой величины ξ связано с тем, что она не зависит от энергии нейтрона. По определению,

$$\xi = \overline{\ln E_0 - \ln E} = \overline{\ln \frac{E_0}{E}},$$

т. е.

$$\xi = \int_{rE_0}^{E_0} \ln \frac{E_0}{E} \cdot PdE = \int_{rE_0}^{E_0} \ln \frac{E_0}{E} \frac{dE}{E_0 - rE_0}. \quad (3,5)$$

Пусть

$$\frac{E}{E_0} = x.$$

Тогда

$$\xi = \frac{1}{1-r} \int_1^r \ln x \, dx,$$

или

$$\xi = 1 + \frac{r}{1-r} \ln r, \quad (3,6)$$

где

$$r = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2.$$

Удобное приближённое выражение, имеющее точность до 1% для $A > 10$, имеет вид:

$$\xi = \frac{2}{A + \frac{2}{3}}. \quad (3,7)$$

Для $A=1$ ($r=0$) и для $A=\infty$ ($r=1$) эта функция неопределённа. Мы можем, однако, определить её для этих двух значений переходом к пределу. Это даёт $\xi=1$ для $A=1$ и $\xi=0$ для $A=\infty$.

Первый случай соответствует использованию в качестве замедлителя водорода. Значение $\xi=1$ для этого случая означает, что в среднем энергия нейтрона при столкновениях с ядрами водорода уменьшается в e раз при каждом столкновении; это означает, что энергия после столкновения составляет только 37% от первоначальной.

С другой стороны, если A очень велико, то $\xi=0$. Нейтрон практически не теряет энергии при упругом столкновении с тяжёлым ядром, например с U^{238} .

Хотя в системе C рассеяние сферически симметрично, это в общем случае не имеет места в системе L . Отклонение от сферической симметрии измеряется средним значением $\cos \theta$, где среднее берётся по всем возможным столкновениям. Используя уравнение (3,4), получаем:

$$\begin{aligned}\overline{\cos \theta} &= \frac{1}{4\pi} \int \cos \theta \, d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1 + A \cos \varphi}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \varphi}} \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 + Ax}{\sqrt{1 + A^2 + 2Ax}} \, dx, \\ \text{или} \quad \overline{\cos \theta} &= \frac{2}{3A}.\end{aligned}\tag{3,8}$$

Когда A очень велико, то $\overline{\cos \theta}$ очень мал и распределение по углам отклонения изотропно. Это согласуется с предыдущим результатом для $A \gg 1$. В этом случае системы L и C совпадают. Нейтроны, сталкиваясь с тяжёлыми ядрами, одинаково часто рассеиваются вперёд (положительный $\cos \theta$) и назад (отрицательный $\cos \theta$). В случае водорода ($A=1$) $\overline{\cos \theta} = \frac{2}{3}$ и рассеяние происходит преимущественно вперёд в системе L , хотя оно и остаётся сферически симметричным в системе C .

Если мы знаем значение ξ (уравнение 3,6) для замедлителя, мы можем очень легко вычислить среднее число столкновений, которое должен претерпеть нейтрон, чтобы уменьшить свою энергию от 2 Мэв до тепловой ($1/30 \text{ эв}$). Число столкновений равно полной потере логарифма энергии, делённой на среднюю

потерю ξ в одном столкновении. Это даёт для среднего числа столкновений

$$\frac{\ln 2 \cdot 10^6 - \ln \frac{1}{30}}{\xi} = \frac{\ln 6 \cdot 10^7}{\xi} = \frac{18}{\xi}. \quad (3,9)$$

Некоторые численные примеры даны в табл. I.

Таблица I

Замедлитель	A	ξ	Число столкновений, соответствующее потере энергии от 2 Мэв до $\frac{1}{30} \text{ эв}$, равное $18/\xi$
Водород	1	1	18
Дейтерий	2	0,725	25
Углерод	12	0,158	114
Бериллий	9	0,209	86

4. ПЛОТНОСТЬ ЗАМЕДЛЕНИЯ

Рассмотрим блок замедлителя, объём которого настолько велик, что мы можем пренебречь утечкой из него нейтронов. Представим себе, что в каждом кубическом сантиметре в каждую секунду рождается q нейтронов с энергией E_0 . Нас будет интересовать распределение нейтронов по энергии. При этом мы предположим, что пространственное распределение изотропно. Тогда в процессе замедления (если только в замедлителе нет поглощения нейтронов) в 1 см^3 в 1 сек будет замедляться до любого значения энергии E q нейтронов. Величина q называется плотностью замедления. Если существует поглощение, то из интервала dE будет уходить меньше нейтронов, чем приходило в этот интервал, и q будет функцией энергии E . В общем случае $q(E)$ определяется как количество нейтронов, замедляемых в 1 сек . в 1 см^3 от энергии, большей чем E , до энергии, меньшей чем E .

В стационарных условиях число нейтронов, уходящих из интервала dE , должно быть равно числу нейтронов, входящих в него. Число уходящих нейтронов равно числу рассеянных, т. е. $n(E) dE \cdot v \Sigma_s$, где $n(E) dE$ — число нейтронов в 1 см^3 , имеющих энергию в интервале между E и $E + dE$, а $v \Sigma_s$ есть вероятность рассеяния, отнесённая к 1 сек . Это число равно числу нейтронов, входящих в этот интервал, в результате рассеяния нейтронов

от больших энергий. Рассмотрим те из них, которые входят из интервала dE' , лежащего где-то между E и E/r . (Нейтроны с энергией, большей E/r , не могут перейти в dE .)

Число нейтронов, рассеянных внутри интервала dE из области больших энергий, равно интегралу по dE' от числа актов

$\frac{E}{r}$ — рассеяния в dE' (штрих относится к значению энергии E'), равного

$$E' \text{ — } dE' \quad \cdot n(E') v' \Sigma'_s dE',$$

$E \text{ — } dE$ умноженному на вероятность того, что потеря энергии будет как раз такая, чтобы перевести нейтрон из dE' в dE . Эта вероятность равна

$$\frac{dE}{E' - E'r}.$$

Рис. 4.

Уравнение баланса можно записать в виде:

$$n(E) v \Sigma_s dE = \int_E^{E/r} n(E') dE' v \Sigma'_s \frac{dE}{E' - E'r}. \quad (4,1)$$

Это уравнение удовлетворяется, если положить $n(E) v \Sigma_s = c/E$, где c — постоянная, что может быть проверено прямой подстановкой:

$$\int_E^{E/r} \frac{c}{E'} \frac{dE}{E' - E'r} = \frac{c}{E} = n(E) v \Sigma_s. \quad (4,2)$$

Величина c может быть выражена через плотность замедления $q(E)$.

Перейдем к вычислению $q(E)$. Число нейтронов (в 1 сек в 1 см³), замедленных ниже E и рассеянных из интервала dE' , равно числу актов рассеяния в dE' ,

$$n(E') v' \Sigma'_s dE',$$

умноженному на долю нейтронов из dE' , которые теряют энергию, большую чем $E' - E$, и попадают в заштрихованную область на рис. 5. Эта доля равна

$$\frac{E - E'r}{E' - E'r}.$$

Интегрируя по E' от E до E/r , мы получим:

$$q(E) = \int_E^{E/r} n' v' \Sigma'_s dE' \frac{E - E'r}{E' - E'r}, \quad (4,3)$$

что подстановкой $n(E') v \Sigma_s' = c/E'$ сводится к

$$q = c \left[1 + \frac{r}{1-r} \ln r \right]. \quad (4,4)$$

Выражение в скобках есть ξ — средняя логарифмическая потеря энергии на одно столкновение. Как мы и ожидали, q не зависит от энергии, и постоянная $c = q/\xi$. Уравнение для «потока» имеет вид:

$$n(E) v = \frac{q}{\xi \Sigma_s} \frac{1}{E}. \quad (4,5)$$

Этот же результат может быть получен более простым, но менее строгим путём, с помощью схемы, предложенной Ферми. Представим себе, что нейтрон замедляется не скачками, а непрерывно. Пусть плотность замедления равна q . Какую величину имеет $n(E) dE$, если каждую секунду в dE входит и из dE уходит q нейтронов? Ответ зависит от того, какое время требуется в среднем нейтрону, чтобы пересечь этот интервал. Если нейтрон задерживается в рассматриваемом интервале t секунд, то число нейтронов в интервале будет равно qt . Величина t может быть выражена как произведение среднего числа столкновений, претерпеваемых нейтроном dE (равного $\frac{1}{\xi} \frac{dE}{E}$), и интервала между двумя последовательными столкновениями (равного λ_s / v). Мы получим тогда

$$n(E) dE = qt = q \frac{1}{\xi} \frac{dE}{E} \frac{\lambda_s}{v} \quad (4,6)$$

или, так как $\lambda_s = 1/\Sigma_s$,

$$n(E) v = \frac{q}{\xi \Sigma_s} \frac{1}{E}, \quad (4,7)$$

что совпадает с (4,5). Величина $\xi \Sigma_s$ называется замедляющей способностью замедлителя. Так как $\Sigma_s = N \sigma_s$ есть вероятность того, что нейтрон претерпит столкновение на пути в 1 см., а ξ — средняя логарифмическая потеря энергии на одно столкновение, то замедляющая способность равна логарифмической потере энергии (уменьшению $\ln E$) на 1 см пути. Хороший замедлитель, таким образом, должен иметь относительно высокое значение $\xi \Sigma_s$.

Заметим, что «поток» нейтронов $n(E) v$ в энергетическом интервале dE обратно пропорционален энергии.

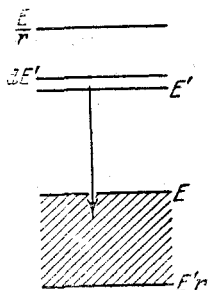


Рис. 5.

5. ЗАМЕДЛЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГЛОЩЕНИЯ

В предыдущих вычислениях предполагалось, что поглощение отсутствует, благодаря чему плотность замедления q была постоянной. Теперь мы рассмотрим случай, когда замедлитель поглощает нейтроны с эффективным сечением Σ_a которое, в общем случае, есть функция энергии. Плотность замедления $q(E)$ уменьшается с уменьшением E . Уменьшение q ($dq = \frac{dq}{dE} \cdot dE$) равно числу нейтронов в 1 см^3 , поглощаемых в 1 сек в интервале dE , т. е. $n(E) v \Sigma_a dE$. Мы имеем поэтому

$$n(E) v \Sigma_a = \frac{dq}{dE}. \quad (5,1)$$

Уравнение баланса (4,1) можно переписать в виде

$$n(E) v \Sigma_s dE = \frac{q}{\xi} \frac{dE}{E}.$$

Это выражение надо теперь изменить так, чтобы учесть поглощение в замедлителе. Оно выражает баланс между числом нейтронов (в 1 сек в 1 см^3), ушедших из dE в результате рассеяния, и числом нейтронов, пришедших в этот интервал в результате рассеяния от больших энергий. В нашем случае потеря нейтронов в dE происходит как вследствие рассеяния, так и вследствие поглощения. Мы можем поэтому написать:

$$n(E) v (\Sigma_s + \Sigma_a) dE = \frac{q(E)}{\xi} \frac{dE}{E}. \quad (5,2)$$

После умножения обеих частей (5,2) на $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a}$ и использования (5,1) мы получим простое дифференциальное уравнение для $q(E)$

$$\frac{dq}{dE} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \frac{q(E)}{\xi E}, \quad (5,3)$$

которое можно проинтегрировать в пределах от E до E_0 и получить:

$$\ln \frac{q(E_0)}{q(E)} = \frac{1}{\xi} \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \frac{dE}{E}.$$

Решая относительно $q(E)$, получаем:

$$\frac{q(E)}{q(E_0)} = e^{-\frac{1}{\xi} \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \frac{dE}{E}}. \quad (5,4)$$

В случае обращения Σ_a в нуль уравнение (5,4) сводится к уравнению (4,7), которое было получено без учёта отсутствия поглощения. Если Σ_a и Σ_s известны как функции энергии E , то можно вычислить $q(E)$. Так как Σ_s обычно является медленно меняющейся функцией энергии, то можно определить подходящее среднее значение $\bar{\Sigma}_s$ и вынести его из-под интеграла, получив:

$$\frac{q(E)}{q(E_0)} = e^{-\frac{1}{\xi \bar{\Sigma}_s} \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{1 + \Sigma_a / \Sigma_s} \frac{dE}{E}} \quad (5,5)$$

Смысл этой формулы легко понять, если ещё определить среднее значение Σ_a . Однако, поскольку Σ_a , вообще говоря, быстро изменяющаяся функция энергии (особенно в случае резонансного поглощения), то эта операция в реальных вычислениях не производится. Интеграл от dE/E даёт $\ln E_0/E$, и уравнение (5,5) сводится к

$$\frac{q(E)}{q(E_0)} = e^{-\frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \bar{\Sigma}_s} \ln \frac{E_0}{E} \cdot \frac{1}{1 + \bar{\Sigma}_a / \bar{\Sigma}_s}} \quad (5,6)$$

Как было отмечено раньше, $\xi \Sigma_s$ — замедляющая способность — равна среднему уменьшению $\ln E$ на 1 см пути. Множитель $X = \frac{1}{\xi \bar{\Sigma}_s} \ln \frac{E_0}{E}$, таким образом, есть среднее расстояние, проходимое нейтроном во время замедления от E_0 до E . Как и раньше, часть нейтронов, которая замедлилась от энергии, большей E , до энергии, меньшей E , равна:

$$\frac{q(E)}{q(E_0)} = e^{-\bar{\Sigma}_a X} \quad (5,7)$$

если $\bar{\Sigma}_a / \bar{\Sigma}_s \ll 1$. Множитель $\frac{1}{1 + \bar{\Sigma}_a / \bar{\Sigma}_s}$ есть мера самозащиты поглотителя. Для сильно разбавленного поглотителя число атомов замедлителя настолько больше числа атомов поглотителя, что этот множитель очень близок к единице.

До сих пор мы рассматривали только однородную смесь атомов замедлителя и поглотителя. Мы получаем дополнительные возможности, если поглотитель, вместо того чтобы быть распределённым равномерно, собран в «блоки». Выгодность такого распределения в графитово-урановом котле связана с тем, что резонансные нейтроны очень быстро поглощаются U^{238} . Собирая уран в блоки, можно увеличить долю нейтронов, избегающих такой «резонансной утечки», и они могут быть поглощены U^{235} , вызывая деление. Если резонансный нейтрон входит в блок урана, то он поглощается тонким внешним слоем U, который действует, как

фильтр, отсеивающий такие нейтроны. Нейтроны с более высокой энергией замедляются ураном незначительно, поэтому ясно, что резонансное поглощение на один атом урана значительно меньше в системе с блоками, чем в случае однородной смеси.

По типам котлы разделяются на котлы с медленными, быстрыми или промежуточными нейтронами, смотря по тому, имеет ли место поглощение, когда нейтроны находятся в замедленной, быстрой или промежуточной области энергии.

В каждом отдельном случае важно знать, какая доля нейтронов находится в различных интервалах энергии. Это зависит от того, как поперечное сечение изменяется с энергией.

Из уравнения (5, 7) можно видеть, что важной характеристикой, определяющей, в какой области энергии поглощаются нейтроны, является отношение среднего макроскопического сечения поглощения к замедляющей способности замедлителя. Если это отношение мало (высокая замедляющая способность), то нейтрону нет необходимости проходить большой путь для того, чтобы его энергия достигла малого значения, и на этом коротком пути у него имеется мало шансов быть поглощённым. В этом случае большинство нейтронов может достичь тепловых энергий до того, как они будут поглощены. В другом крайнем случае, если замедлителя нет вообще, нейтроны будут поглощены (если они вообще будут поглощены) при высоких значениях энергии.

6. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФфуЗИИ

Теперь мы вернёмся к задаче о распределении нейтронов в пространстве, знание которого необходимо, если мы хотим вычислить утечку из котла или его критический размер.

Допустим, что мы имеем дело с веществом, характеризуемым макроскопическим сечением поглощения Σ_a , макроскопическим сечением рассеяния Σ_s и постоянной размножения k , где k — число нейтронов, возникающих на один поглощённый нейтрон. В этом случае число нейтронов, поглощённых в секунду в одном кубическом сантиметре вещества, будет $n\nu\Sigma_a$, тогда как число нейтронов, возникающих в секунду, будет $n\nu\Sigma_s k$. Величина $n\nu$ обычно называется «потокотом нейтронов». Её смысл легко понять, если заметить, что $n\nu$ равно общей длине пути, проходимого в секунду всеми нейтронами в 1 см^3 . Поскольку Σ_a есть вероятность поглощения нейтрона на пути в 1 см , то произведение $n\nu\Sigma_a$ есть число нейтронов, поглощаемых в секунду в 1 см^3 .

Если мы временно забудем, что эти нейтроны родились быстрыми, то уравнение баланса (1,1), написанное для 1 см^3 , будет иметь вид:

$$n\nu\Sigma_s k = n\nu\Sigma_a + L$$

или

$$-L + (k-1)\Sigma_a nv = 0. \quad (6,1)$$

Задача состоит в том, чтобы получить выражение для утечки L на единицу объёма, как функцию от потока nv и его пространственного изменения.

Мы можем вычислить число нейтронов, которые проходят в секунду сверху через элементарную площадку dS , нормаль к которой направлена по оси z , как показано на рис. 6. Число таких нейтронов, выходящих из элемента объёма dV , равно числу столкновений в секунду в dV ,

$$nv \Sigma_s dV,$$

умноженному на вероятность того, что рассеянная частица движется в таком направлении, чтобы пересечь dS ,

$$\frac{|\cos \theta| dS}{4\pi r^2},$$

и умноженному на вероятность того, что частица пройдёт расстояние r , не рассеявшись,

$$e^{-r/\lambda_s}.$$

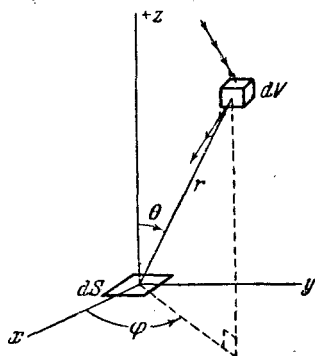


Рис. 6.

Для того чтобы найти полный ток $I_+ dS$, мы должны проинтегрировать ещё по всему объёму, лежащему выше dS . Тогда мы получим:

$$I_+ dS = dS \int nv \Sigma_s e^{-r/\lambda_s} \frac{|\cos \theta|}{4\pi r^2} dV.$$

В полярных координатах $dV = r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi$, так что:

$$I_+ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} nv \Sigma_s e^{-\frac{r}{\lambda_s}} \frac{|\cos \theta|}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi. \quad (6,2)$$

Теперь мы должны сделать какие-то предположения относительно зависимости nv от координат x , y и z , подставить соответствующее выражение в интеграл (6,2) и провести интегрирование. Благодаря множителю e^{-r/λ_s} в подинтегральном выражении, главный вклад в интеграл происходит от значений nv в области, отстоящей от начала на несколько длин свободного пробега. Поэтому можно разложить $nv(x, y, z)$ в ряд Маклорена до

членов второго порядка:

$$nv(x, y, z) = nv_0 + x \left(\frac{\partial nv}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial nv}{\partial y} \right)_0 + z \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_0 + \\ + \frac{1}{2!} \left\{ x^2 \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial x^2} \right)_0 + y^2 \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial y^2} \right)_0 + z^2 \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} \right)_0 + 2xy \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial x \partial y} \right)_0 + \right. \\ \left. + 2xz \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial x \partial z} \right)_0 + 2yz \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial y \partial z} \right)_0 \right\}. \quad (6,3)$$

Индекс 0 означает, что производные должны быть взяты в начале координат. Выразим x , y и z в полярных координатах r , θ и φ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Интегрирование может быть проведено элементарно. Мы получаем:

$$J_+ = \frac{nv_0}{4} + \frac{\lambda_s}{6} \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_0 + \\ + \frac{\lambda_s^2}{16} \left\{ \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial y^2} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} \right)_0 \right\}. \quad (6,4)$$

Аналогично может быть вычислена плотность тока J_- , обуславливаемая частицами, проходящими через dS снизу (отрицательные z). В этом случае подынтегральное выражение то же самое и различие состоит только в том, что интегрирование по φ происходит в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до π .

Производя интегрирование, мы получаем:

$$J_- = \frac{nv_0}{4} - \frac{\lambda_s}{6} \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_0 + \\ + \frac{\lambda_s^2}{16} \left\{ \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial y^2} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} \right)_0 \right\}. \quad (6,5)$$

Члены с x , y , xy , xz и yz не дают ничего, потому что интеграл по φ от этих членов обращается в нуль.

Полная плотность тока J в направлении $+z$ будет иметь вид:

$$J = J_- - J_+ = -\frac{\lambda_s}{3} \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_0. \quad (6,6)$$

Это выражение правильно до членов второго порядка.

Условие применимости формулы (6,6) заключается в том, чтобы члены третьего и более высоких порядков в выражении (6,4) давали бы вклад в J , который был бы мал по сравнению с вкладом от членов первого порядка.

Если элемент поверхности dS ориентирован так, что нормаль к нему составляет углы α , β , γ с осями x , y , z , а не направлена по оси z , то выражение для полного тока через dS переписется в виде:

$$JdS = -\frac{\lambda_s}{3} dS \left[\left(\frac{\partial nv}{\partial x} \right)_0 \cos \alpha + \left(\frac{\partial nv}{\partial y} \right)_0 \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_0 \cos \gamma \right]. \quad (6,7)$$

Это выражение можно записать короче, используя дифференциальный векторный оператор grad (иногда обозначаемый ∇). Вектор grad (nv) имеет компоненты $\partial nv/\partial x$, $\partial nv/\partial y$ и $\partial nv/\partial z$ в направлениях x , y и z , соответственно. Если dS —вектор с величиной, равной площади площадки, и направленный нормально к ней, то формулу (6,7) можно написать в виде:

$$\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\lambda_s}{3} d\mathbf{S} \cdot \text{grad}(nv), \quad (6,7a)$$

или

$$\mathbf{J} = -\frac{\lambda_s}{3} \text{grad}(nv). \quad (6,7b)$$

Следует заметить, что выражения для J_+ или J_- содержат члены второго порядка. Приближение, в котором в выражении (6,4) выписываются только первые два члена, справедливо только тогда, когда изменение grad (nv) при перемещении в среде на отрезок λ_s мало по сравнению с самим grad (nv) .

Это условие обычно не удовлетворяется в области размерами порядка длины свободного пробега вблизи границы между двумя разнородными средами или вблизи тяжелого поглотителя.

При выводе формулы (6,6) мы предположили, что не существует корреляции между направлением движения нейтрона до и после столкновения. Фактически мы неявно предположили, что рассеяние сферически симметрично ($\overline{\cos \theta} = 0$) в лабораторной системе. Как было указано выше (в разделе 3), это справедливо только для столкновений с тяжелыми ядрами. Для ядер с массой A , $\overline{\cos \theta} = \frac{2}{3A}$ и можно ввести поправку, учитывающую такое преобладание рассеяния вперед. Для этого вместо средней длины рассеяния λ_s надо пользоваться новой [величиной, называемой средней длиной переноса λ_l , определяемой формулой

$$\lambda_l = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\cos \theta}}. \quad (6,8)$$

Если рассеяние направлено преимущественно вперед, то $\overline{\cos \theta}$ положителен и средняя длина переноса больше, чем средняя

длина рассеяния. Это легко понять, так как это означает, что в среднем нейтрон будет передвигаться, при данном числе столкновений, на большие расстояния, если существует такая корреляция между направлениями движения до и после столкновения.

Аналогично, можно определить поперечное сечение переноса σ_t и макроскопическое сечение переноса Σ_t формулами:

$$\sigma_t = \sigma_s (1 - \overline{\cos \theta}) \quad (6,8a)$$

и

$$\Sigma_t = \Sigma_s (1 - \overline{\cos \theta}). \quad (6,8b)$$

В случае графита $\overline{\cos \theta} = \frac{2}{3A} = \frac{2}{3 \cdot 12} = 0,056$ и поэтому длина переноса в графите $\lambda_t = 2,70 / (1 - 0,056) = 2,86$ см.

Мы можем также написать выражение для полного тока через площадку dS ,

$$J dS = - \frac{\lambda_t}{3} (nv)' dS, \quad (6,9)$$

где производная $(nv)'$ берётся вдоль направления, перпендикулярного dS .

Предположим теперь, что поток нейтронов $nv(x, y, z)$ известен. Мы хотим вычислить число нейтронов, уходящих из элемента объёма $dV = dx dy dz$, расположенного в точке (x, y, z) . Рассмотрим прежде всего нейтроны, уходящие через две грани $dx dy$, перпендикулярные направлению z . Мы имеем:

Рис. 7.

$$\begin{aligned} L_z dV &= (J_{z+dz} - J_z) dx dy = \\ &= - \frac{\lambda_t}{3} \left\{ \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial nv}{\partial z} \right)_z \right\} dx dy = \\ &= - \frac{\lambda_t}{3} \frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} dx dy dz. \end{aligned}$$

Аналогичным путём можно получить для числа нейтронов, уходящих через грани, перпендикулярные направлениям x и y ,

$$L_x dV = - \frac{\lambda_t}{3} \frac{\partial^2 nv}{\partial x^2} dV, \quad L_y dV = - \frac{\lambda_t}{3} \frac{\partial^2 nv}{\partial y^2} dV,$$

или для полного числа нейтронов, уходящих из единичного объёма:

$$L = L_x + L_y + L_z = - \frac{\lambda_t}{3} \left[\frac{\partial^2 nv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 nv}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} \right]. \quad (6,10)$$

Обычно это выражение записывают сокращённо следующим образом:

$$L = - \frac{\lambda_t}{3} \Delta nv, \quad (6,11)$$

где дифференциальный оператор $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ есть оператор Лапласа в декартовых координатах.

Из знака уравнения (6,11) можно заключить, что существует суммарная утечка нейтронов из элемента объёма, если Δnv отрицательно, так как в этом случае L положительно (рис. 8). Нейтроны диффундируют из места с высокой плотностью нейтронов в направлении к месту, где плотность нейтронов меньше. Уравнение

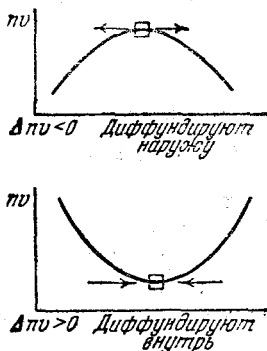


Рис. 8.

(6,11) можно получить, взяв дивергенцию векторного уравнения (6,76), что даёт, как и раньше,

$$L \operatorname{div} J = -\frac{\lambda_t}{3} \operatorname{div} \operatorname{grad} nv = -\frac{\lambda_t}{3} \Delta nv.$$

7. РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Наше уравнение баланса (1,1) принимает теперь вид:

$$-\frac{\lambda_t}{3} \Delta (nv)_i + nv \Sigma_a = Q$$

(утечка + поглощение = возникновению),

где Q есть число нейтронов, возникающих в 1 сек в 1 см³, которое может быть также функцией координат. Таким образом, мы получаем:

$$\frac{\lambda_t}{3} \Delta nv - nv \Sigma_a + Q = 0. \quad (7,1)$$

Для того чтобы избежать усложнений, мы предположим, что все нейтроны имеют тепловые энергии и что все источники испускают только тепловые нейтроны. В действительности тепловые нейтроны возникают лишь в результате замедления быстрых нейтронов. Мы сначала рассмотрим случай ($Q = 0$), когда внутри рассматри-

ваемого объема нейтроны не возникают. У нас, например, может быть источник нейтронов, расположенный снаружи графитового блока, а нас интересует распределение потока нейтронов внутри графита. Математически эта задача аналогична задаче о распределении температуры внутри тела при заданных граничных условиях. В случае диффузии нейтронов граничные условия определяют, какие решения или комбинации решений уравнения (7,1) соответствуют задаче. При $Q=0$ уравнение (7,1) можно записать в виде

$$\Delta nv - K^2 nv = 0, \quad (7,1a)$$

где мы положили

$$K^2 = \frac{3 \Sigma_a}{\lambda_1}.$$

Для удобства в табл. II мы приведем решения уравнения

$$\Delta u - \alpha^2 u = 0 \quad (7,1b)$$

в системах координат, отвечающих различным формам поверхности. Решение для $\alpha^2 > 0$ должно быть отнесено к таким потокам в среде, которые не могут поддерживать цепную реакцию, решения для $\alpha^2 < 0$, как это легко видеть, отвечают средам, в которых может развиваться цепная реакция.

Таблица II

Форма границы	Переменные	Решения для $\alpha^2 > 0$	Решения для $\alpha^2 < 0$ ($\beta = i\alpha$)
Плоскость  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$e^{\pm \alpha x}$ или $\frac{\sinh}{\cosh} \alpha x$	$e^{\pm i\beta x}$ или $\frac{\sin}{\cos} \beta x$
Цилиндр  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$e^{\pm \alpha_1 z} \times \begin{cases} I_0(\alpha_2 r) \\ K_0(\alpha_2 r) \end{cases}$ где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha^2$	$e^{\pm i\beta_1 z} \times \begin{cases} J_0(\beta_2 r) \\ Y_0(\beta_2 r) \end{cases}$ где $\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta^2$
Сфера  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$	 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{1}{r} e^{\pm \alpha r}$ или $\frac{1}{r} \times \left\{ \frac{\sinh}{\cosh} \alpha r \right.$	$\frac{1}{r} e^{\pm i\beta r}$ или $\frac{1}{r} \times \left\{ \frac{\sin}{\cos} \beta r \right.$

Функции I_0 , K_0 , J_0 и Y_0 суть бесселевы функции нулевого порядка, определение которых и таблицы даны в книге Ватсона «Теория бесселевых функций» (Москва, 1949 г.)^{*)} Общее решение

^{*)} См. также Карман и Био, Математические методы в инженерном деле, гл. 2, где дана сводка свойств этих функций, или Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. (Прим. перев.)

в любом случае получается с помощью линейной комбинации решений, приведённых в таблице. Например, для сферического случая общее решение имеет вид:

$$nv = A \frac{e^{-ar}}{r} + B \frac{e^{-ar}}{r},$$

где A и B — произвольные постоянные.

Случай 1. Для простоты мы сперва рассмотрим случай полупространства, заполненного веществом, на единственной границе которого ($x=0$) равномерно распределены источники, дающие Q_0 нейтронов в 1 сек на 1 см². Благодаря симметрии nv не зависит от y и z , а $\Delta(nv)$ сводится к $\frac{d^2}{dx^2}(nv)$. Уравнение удовлетворяется, если

$$\frac{d^2(nv)}{dx^2} - K^2 nv = 0 \quad (x > 0), \quad (7,2)$$

где мы положили $Q=0$ и ввели опять $K^2 = 3\Sigma_a/\lambda_t$. Общее решение этого уравнения будет

$$nv = ae^{-Kx} + be^{-Kx}, \quad (7,3)$$

где произвольные постоянные a и b определяются граничными условиями. Первое условие состоит в том, что nv повсюду конечно. Это даёт $b=0$, так как в противном случае $nv \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow \infty$. Другое граничное условие состоит в том, что при $x=0$ поток J равен $\frac{1}{2} Q_0$, так как только половина возникающих нейтронов уходит вправо. Это определяет постоянную a . Мы получаем, с помощью (6,6):

$$J(0) = \frac{1}{2} Q_0 = -\frac{\lambda_t}{3} \left[\frac{d}{dx}(nv) \right]_{x=0} = \frac{\lambda_t}{3} Ka,$$

откуда

$$a = \frac{3}{2\lambda_t K} Q_0.$$

Решение задачи имеет вид:

$$nv = \frac{3}{2\lambda_t K} Q_0 e^{-Kx}. \quad (7,4)$$

Легко видеть, что поток нейтронов в среде убывает экспоненци-

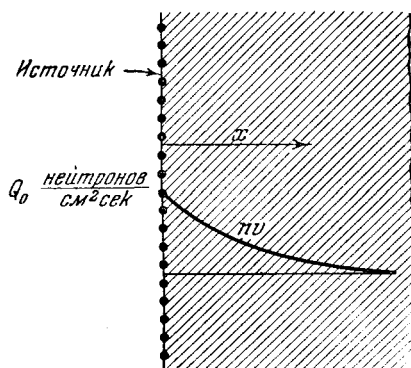


Рис. 9.

ально с расстоянием от плоского источника. Поток, как говорят, затухает; при этом он уменьшается в e раз на расстоянии $L = 1/K$.

Длина L называется «диффузионной длиной». Её определение

$$L^2 = \frac{1}{K^2} = \frac{\lambda_t}{3 \Sigma_a} = \frac{1}{3 \Sigma_a \Sigma_t} = \frac{\lambda_t \lambda_a}{3}. \quad (7,5)$$

С точностью до множителя $\sqrt{3}$ диффузионная длина есть среднее геометрическое между средней длиной переноса и средней длиной поглощения. Для графита.

$$L = \sqrt{\frac{2,86 \cdot 2700}{3}} \sim 50 \text{ см}; \quad K = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ см}^{-1}.$$

Случай 2. Аналогичным путём мы можем решить задачу о распределении нейтронов в бесконечной среде с одним точечным источником интенсивности Q_0 нейтронов в секунду. В этом случае nv есть функция расстояния r от источника. В сферических координатах оператор Лапласа равен

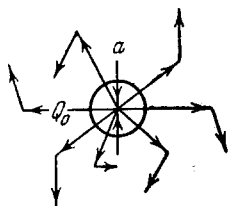


Рис. 10.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r};$$

остальные члены зависят только от производных по азимуту и полярному углу. Если мы примем, что функция nv сферически симметрична, то эти члены ничего

не дают. Мы тогда должны решить уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2} (nv) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} (nv) - K^2 nv = 0 \quad (r > 0) \quad (7,6)$$

с граничными условиями: (А) полный ток нейтронов через маленькую сферу радиуса a , окружающую источник, равен в пределе Q_0 , когда радиус сферы стремится к нулю; (В) функция nv везде конечна.

Два решения этого уравнения суть:

$$\frac{C}{r} e^{-Kr} \quad \text{и} \quad \frac{D}{r} e^{Kr}.$$

Вторая функция не удовлетворяет условию (В) при $r \rightarrow \infty$. Мы могли бы пытаться отбросить и первое решение, на том основании, что оно обращается в бесконечность при $r = 0$. Однако такое заключение неверно, ибо уравнение без источников (7,6) неприменимо к точке $r = 0$, в которой расположен источник.

Граничное условие (А) можно записать в виде:

$$Q_0 = \lim_{a \rightarrow 0} 4 \pi a^2 J(a) = \lim_{a \rightarrow 0} 4 \pi a^2 \left[-\frac{\lambda_t}{3} \frac{d}{dr} (nv) \right]_{r=a}$$

или, подставляя

$$nv = C \frac{e^{-Kr}}{r},$$

мы получим:

$$Q_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{\lambda_t}{3} C \left(-\frac{K e^{-Ka}}{a} - \frac{e^{-Ka}}{a^2} \right) 4 \pi a^2 \right] = \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{4 \pi C \lambda_t}{3} (aK + 1) e^{-Ka} \right] = \frac{4 \pi C \lambda_t}{3}.$$

Полное решение имеет, таким образом, вид

$$nv = \frac{3 Q_0}{4 \pi \lambda_t} \frac{e^{-Kr}}{r}. \quad (7,7)$$

Физический смысл диффузионной длины $L = 1/K$ становится ясным, если мы используем решение (7,7) для точечного источника (тепловых нейтронов) в бесконечной среде. Можно определить средний квадрат $\overline{r^2}$ расстояния от источника, проходимого нейтроном (до поглощения). Мы получаем:

$$\overline{r^2} = \frac{\int r^2 n v dV}{\int n v dV} = \frac{\int_0^\infty r^2 \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} 4 \pi r^2 dr}{\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} 4 \pi r^2 dr} = \frac{6 L^4}{L^2} = 6 L^2.$$

Интеграл берётся с помощью формулы

$$\int_0^\infty x^n e^{-\frac{x}{L}} dx = n! L^{n+1} \quad (n - \text{любое положительное целое число}).$$

Таким образом, квадрат диффузионной длины L равен $1/6$ от среднего квадрата расстояния, проходимого нейтроном, от той точки источника, в которой нейтрон становится тепловым, до точки, в которой он поглощается.

Случай 3. Рассмотрим теперь распределение нейтронов в плоском слое материала, бесконечном в направлении осей y и z , но имеющем конечную толщину t в направлении x . Плоскости $x=0$ и $x=t$ суть границы слоя. Уравнение, которое надо решать, есть то же уравнение (7,2), но с другими граничными условиями. Пусть полная плотность тока нейтронов в направлении положительной оси x при $x=0$ задана и равна I_0 . Граничное условие при $x=0$ будет тогда $J(0)=I_0$. На границе $x=t$, которая отделяет вещество от пустого пространства, приближённым граничным условием будет обращение в нуль потока нейтронов на этой границе. Более точное условие можно получить следующим образом. Все нейтроны, продиффундировавшие за границу $x=t$,

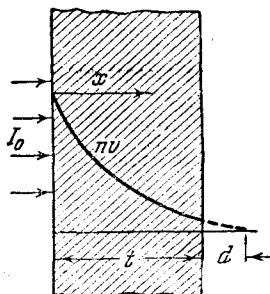
не могут вернуться в среду в результате рассеяния. Пустое пространство играет, таким образом, роль идеального поглотителя. Граничным условием (С) будет условие, что плотность тока J_+ в направлении $-x$ обращается на границе в нуль. Тогда

$$J_+(t) = \left[\frac{nv}{4} + \frac{\lambda_t}{6} \frac{d}{dx} (nv) \right]_{x=t} = 0, \quad (7,8)$$

откуда мы получаем:

$$\left[\frac{nv}{d(nv)} \right]_{x=t} = -\frac{2}{3} \lambda_t.$$

Если мы предположим, что внутри среды nv можно выразить, вблизи $x=t$ (для $x < t$), линейной функцией, обращающейся в нуль при $x=t+d$ (на расстоянии d за границей среды), то



$$nv(x) = nv(t) \left[1 - \frac{x-t}{d} \right], \quad (7,9)$$

откуда:

$$\left[\frac{nv}{d(nv)} \right]_{x=t} = -d$$

или

$$d = \frac{2}{3} \lambda_t. \quad (7,10)$$

Таким образом, граничное условие (С) эквивалентно следующему: нейтронный поток в среде с плоской границей (с вакуумом) меняется таким образом, что линейно, экстраполированное распределение обращается в нуль на расстоянии $d = \frac{2}{3} \lambda_t$ за границей. Это расстояние называется экстраполированной границей. Более строгое рассмотрение задачи приводит к значению

$$d = 0,71 \lambda_t. \quad (7,11)$$

Следует заметить, что уравнение (7,9) в действительности не представляет собой потока вне среды. Можно также пользоваться в этой задаче псевдограничным условием $nv=0$, если мы введём фиктивную границу среды при $x=t'=t+d$. Так как уравнение диффузии для потока нейтронов (7,1) несправедливо на расстоянии нескольких длин свободного пробега от поверхности, величина потока, вычисленная с помощью этого уравнения, будет неточной. Однако оказывается, что вычисления критических

размеров котла без оболочки, с помощью условия обращения в нуль потока нейтронов на расстоянии $d = 0,71 \lambda_t$ от границы, оказывается достаточно точным. В дальнейшем удобно пользоваться граничным условием $nv = 0$. При пользовании этим условием необходимо, однако, помнить, что все размеры должны быть исправлены для учёта экстраполированной границы (7,11).

Решение для случая 3 выписывается теперь непосредственно. Оно равно линейной комбинации функции (7,3) с произвольными постоянными a и b , выбранными так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Это даёт:

$$I_0 = J(0) = -\frac{\lambda_t}{3} \left[\frac{d}{dx} (nv) \right] = -\frac{\lambda_t}{3} (-aK + bK),$$

$$nv(t') = ae^{-Kt'} + be^{Kt'} = 0,$$

где t' — экстраполированная толщина. Мы получаем тогда, решая уравнение для b ,

$$b = -ae^{-2Kt'}.$$

Подставляя это значение b , получим:

$$I_0 = \frac{\lambda_t K a}{3} (1 + e^{-2Kt'}) \quad \text{или} \quad a = \frac{3I_0}{\lambda_t K} \frac{1}{1 + e^{-2Kt'}}.$$

Уравнение (7,3) принимает вид:

$$\begin{aligned} nv &= ae^{-Kx} + be^{Kx} = a(e^{-Kx} - e^{-2Kt'} e^{Kx}) = \\ &= ae^{-Kt'} [e^{K(t'-x)} - e^{-K(t'-x)}] = 2ae^{-Kt'} \operatorname{sh} K(t' - x), \end{aligned}$$

где введён гиперболический синус: $\operatorname{sh} z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Полное решение, таким образом, равно:

$$nv = \frac{3I_0}{\lambda_t K \operatorname{ch} Kt'} \operatorname{sh} K(t' - x). \quad (7,12)$$

При $t' \rightarrow \infty$ это решение стремится к (7,4) с $I_0 = \frac{Q}{2}$.

Случай 4. Решение задачи о диффузии нейтронов в среде, представляющей собой ряд пластин из различного материала, может быть проведено по методу случая 3. Единственное различие состоит в граничных условиях, налагаемых на плоскостях, разделяющих две различные среды. На этих границах мы должны требовать непрерывности потока нейтронов $nv(x)$ и плотности тока $J(x)$. Физический смысл этих условий очевиден. Если поток нейтронов не будет непрерывен, это будет означать, что нейтроны будут рождаться или уничтожаться на бесконечно тонкой границе; с другой стороны, если существует скачок в величине

нейтронного тока, он будет быстро сглажен диффузией нейтронов от мест с большим потоком к местам с малым потоком. Мы можем тогда в качестве граничных условий для каждой из границ написать:

$$(A) \quad nv_I = nv_{II},$$

$$(B) \quad -\frac{\lambda_I}{3} (nv_I)' = -\frac{\lambda_{II}}{3} (nv_{II})'. \quad (7,13)$$

Допустим, что необходимо решить задачу о нахождении потока нейтронов внутри среды, состоящей из n плоских слоёв, при условии, что полная плотность нейтронов при $x=0$ равна I_0 .

Мы опишем только сущность метода решения задачи, не проводя вычислений подробно. В каждом из n слоёв (обозначаемых 1, 2 и т. д.) мы будем иметь решение вида (7,3):

$$nv_i = a_i e^{-K_i x} + b_i e^{K_i x}$$

с двумя произвольными постоянными. Всего будет иметься $2n$ произвольных постоянных ($a_1 b_1, a_2 b_2$ и т. д.), которые должны быть определены с помощью граничных условий. Мы должны иметь, таким образом, для их определения $2n$ независимых уравнений.

Так как имеется по два граничных условия (типа А и Б) на каждой из $n-1$ границ и по одному граничному условию на каждой из внешних границ, то мы имеем как раз требуемое число линейных уравнений. Полное решение, представляющее поток нейтронов в любой точке внутри среды, сводится, таким образом, к решению $2n$ линейных уравнений с $2n$ неизвестными.

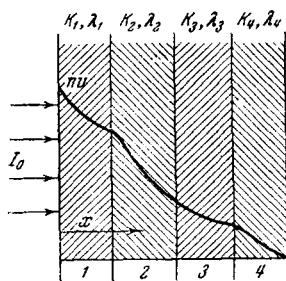


Рис. 12.

8. АЛЬБЕДО

Не все нейтроны, которые падают, например, на графитовый блок, остаются в графите. Некоторые из них рассеиваются в графите назад и выходят через ту же грань блока, через которую они влетели. Отношение обратного тока J_+ к прямому J_- называется альбедо A или коэффициентом отражения среды. По определению,

$$A = \frac{J_+}{J_-} = \frac{\frac{nv_0}{4} + \frac{\lambda_t}{6} (nv)'_0}{\frac{nv_0}{4} - \frac{\lambda_t}{6} (nv)'_0} = \frac{1 + \frac{2}{3} \lambda_t \left(\frac{nv'}{nv} \right)_0}{1 - \frac{2}{3} \lambda_t \left(\frac{nv'}{nv} \right)_0}, \quad (8,1)$$

где выражения для J_+ и J_- получаются из формулы (6,5), если в ней взять только первые два члена и подставить λ_t вместо λ_s . В этом случае альbedo будет функцией свободной длины переноса и логарифмической производной потока нейтронов.

В одномерном случае в бесконечно толстом слое поток нейтронов

$$nv \sim e^{-Kx},$$

а следовательно, логарифмическая производная равна

$$\left(\frac{nv'}{nv}\right)_0 = -K,$$

что даёт

$$A = \frac{1 - \frac{2}{3} \lambda_t K}{1 + \frac{2}{3} \lambda_t K}. \quad (8,2)$$

В случае графита альbedo для бесконечно толстого слоя можно определить, используя значения $\lambda_t = 2,86$ и $K = 0,02$. Тогда

$$A = \frac{1 - 0,0375}{1 + 0,0375} = 0,93.$$

Это означает, что 93% нейтронов, падающих на толстый (бесконечный) блок графита, отражается и лишь 7% поглощается графитом.

Для слоя конечной толщины t nv определяется формулой (7,12):

$$nv = C \operatorname{sh} K(t-x); \quad (nv)' = -KC \operatorname{ch} K(t-x).$$

Подстановка в формулу (8,1) даёт:

$$A = \frac{1 - \frac{2}{3} \lambda_t K \operatorname{cth} Kt}{1 + \frac{2}{3} \lambda_t K \operatorname{cth} Kt}. \quad (8,3)$$

При $Kt \rightarrow \infty$ $\operatorname{cth} Kt \rightarrow 1$, и выражение (8,3) сводится к выражению для случая бесконечной толщины (8,2).

Из формулы (8,3) видно, что для того чтобы альbedo среды было велико, величина $K\lambda_t$ должна быть мала. Иначе говоря, это означает, что средняя длина переноса должна быть мала, по сравнению с диффузионной длиной в рассматриваемой среде.

Альbedo, определённое выше, зависит как от ядерных постоянных веществ, образующих котёл, так и от его формы. Это можно проще всего увидеть в случае отражателя, имеющего сферическую симметрию (полость). Поток нейтронов для $r > R$, определяемый формулой (7,7), в этом случае будет:

$$nv = C \frac{e^{-Kr}}{r},$$

откуда мы получаем:

$$\left(\frac{nv'}{nv}\right)_{r=R} = -K - \frac{1}{R}.$$

Подстановка в формулу (8,1) даёт для альбедо выражение,

$$A = \frac{1 - \frac{2}{3} \lambda_t \left(K + \frac{1}{R}\right)}{1 + \frac{2}{3} \lambda_t \left(K + \frac{1}{R}\right)}. \quad (8,4)$$

Тот факт, что альбедо для сферической полости меньше альбедо для плоского слоя, можно объяснить следующим образом. Нейтроны, которые диффундируют из полости внутрь среды, имеют тем меньшую вероятность рассеяться назад в полость, чем быстрее они диффундируют в среде, так как вероятность рассеяния назад (даже в отсутствие поглощения), грубо говоря, пропорциональна телесному углу, под которым видна полость из точки, где находится нейтрон.

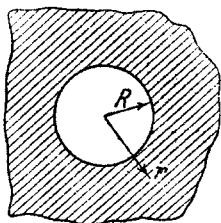


Рис. 13.

Альбедо для среды непосредственно связано со средним числом случаев пересечения заданной плоскости, расположенной в среде.

Для того чтобы продиффундировать через границу, нейтрон должен пересечь её нечётное число раз. Пусть вероятность того, что нейтрон пересечёт границу 1, 3, 5, ... раз, равна $p(1)$, $p(3)$, $p(5)$... Тогда, если альбедо равно A :

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - A, \\ p(3) &= A(1 - A), \\ p(5) &= A^2(1 - A), \\ &\dots \end{aligned}$$

или в общем случае:

$$p(2i+1) = A^i(1 - A) \text{ для любого } i.$$

Сумма вероятностей равна:

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ нечётно}} p(n) &= 1 - A + A(1 - A) + A^2(1 - A) + \dots \\ &= (1 - A)(1 + A + A^2 + A^3 + \dots) \\ &= \frac{1 - A}{1 - A} = 1, \end{aligned}$$

где геометрическая прогрессия суммируется при $A < 1$.

Среднее число пересечений $\bar{n}$ равно:

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \sum np(n) = p(1) + 3p(3) + 5p(5) + \dots \\ &= 1 - A + 3A(1 - A) + 5A^2(1 - A) + \dots \\ &= (1 - A)(1 + 3A + 5A^2 + \dots) = 1 + 2A + 2A^2 + 2A^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{2A}{1 - A} = \frac{1 + A}{1 - A}.\end{aligned}$$

Для графита (бесконечной толщины)

$$A = 0,93 \quad \text{и} \quad \bar{n} = \frac{1 + 0,93}{1 - 0,93} = 27.$$

Таким образом, надо ожидать, что нейтрон, диффундирующий в толстом слое графита, пересекает заданную плоскость в среднем 27 раз.

9. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЗАМЕДЛЕНИЯ

В разделах 4 и 5 замедление нейтронов рассматривалось только с точки зрения потери ими энергии; распределение же нейтронов в пространстве в процессе замедления не рассматривалось вовсе. В действительности плотность замедления q является функцией не только энергии E , но и координат x, y, z . Это обстоятельство оказывается весьма существенным для цепных реакторов, так как если нейтрон после своего рождения продиффундирует слишком далеко, оставаясь быстрым, то он может вовсе не стать тепловым до ухода из котла, и поэтому оказаться не способным к возбуждению нового деления.

Член, описывающий рождение $Q(E_0)$, где E_0 — начальная энергия нейтрона, возникшего во время акта деления, пропорционален потоку тепловых нейтронов nv_T . Мы предположим, что на каждый поглощенный нейтрон возникает в среднем — k новых нейтронов. Поскольку число нейтронов, поглощенных в секунду в кубическом сантиметре, равно $nv_T \Sigma_a$, то число нейтронов, возникающих в секунду в кубическом сантиметре, равно $nv_T \Sigma_a k$. Если бы у нас было равномерное распределение потока тепловых нейтронов в пространстве и поглощение в процессе замедления отсутствовало, то все эти нейтроны достигли бы тепловых скоростей. В этом случае мы бы получили $Q(E_T) = Q(E_0)$. Однако это уравнение несправедливо для реального котла, в результате во-первых, поглощения в процессе замедления и, во-вторых, утечки в процессе замедления. Первая причина обсуждалась в разделе 5; здесь мы рассмотрим вторую. Нетрудно видеть, что в котле с цепной реакцией поток тепловых нейтронов не является

постоянным, а имеет более высокое значение в центре котла и более низкое у его границ. Благодаря этому возникает непрерывный поток нейтронов, направленный от центра к границе котла, где они уходят наружу, а потому размножение нейтронов в цепном реакторе должно быть таким, чтобы компенсировать как эти потери, так и потери, обусловленные непродуктивным поглощением в самом котле.

Кроме того, будут существовать ещё потери и быстрых нейтронов, в особенности тех, которые рождаются вблизи границ котла. Однако, поскольку поток тепловых нейтронов у границ котла невелик, то и количество быстрых нейтронов, возникающих в этой области, будет также мало. Во всяком случае потоки как быстрых, так и медленных нейтронов будут малы вблизи границ

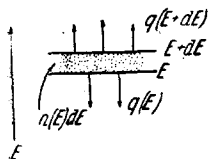


Рис. 14.

котла. В общем случае, если мы исследуем пространственное распределение нейтронов различных энергий, возникающих от точечного источника, то мы найдём, что чем меньше энергия нейтронов, тем больше их распределение будет размыто в пространстве. Дадим точное выражение этому факту. Нетрудно видеть, что каждый точечный источник быстрых нейтронов (возникающих при делении) приводит к появлению распределённого источника тепловых нейтронов. В стационарном состоянии число нейтронов в интервале энергии от E до $E + dE$, выходящих из 1 см^3 в секунду, равно: $-\frac{\lambda_t}{3} \Delta n(E) v dE$.

Если пренебречь поглощением в процессе замедления, то этот поток будет равен $Q(E) dE$, т. е. избытку нейтронов, входящих в интервал dE , над количеством нейтронов, выходящих из этого интервала.

Поэтому мы имеем:

$$Q(E) dE = q(E + dE) - q(E) = \frac{\partial q}{\partial E} dE,$$

где $q(E)$ — опять плотность замедления. Мы можем теперь написать:

$$-\frac{\lambda_t}{3} \Delta n(E) v dE = \frac{\partial q}{\partial E} \cdot dE \quad (9,1)$$

и, подставляя $n(E) v = q / \xi \Sigma_s E$ (формула (4,7)), мы получаем:

$$\frac{\lambda_t}{3} \frac{1}{\xi \Sigma_s E} \Delta q + \frac{\partial q}{\partial E} = 0. \quad (9,2)$$

Это уравнение можно написать в упрощённом виде, если мы введём величину τ , определённую формулой

$$d\tau = \frac{\lambda_t}{3 \xi \Sigma_s} dE \quad (9,3)$$

Тогда уравнение (9,2) примет вид:

$$\Delta q + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0. \quad (9,4)$$

Заметим, что q есть функция координат и энергии, которая входит в уравнение через τ . При интегрировании уравнения (9,3) мы выбираем постоянную интегрирования таким образом, чтобы для тепловых энергий $\tau = 0$. Тогда $\tau(E_T) = 0$. Это даёт нам формулу для определения $\tau(E)$:

$$\tau(E) = \int_{E_{th}}^E \frac{\lambda_t}{3 \xi \Sigma_s} \frac{dE}{E} = \int_{E_{th}}^E \frac{1}{3 \xi \Sigma_s \Sigma_t} \frac{dE}{E}. \quad (9,5)$$

Величина τ , которая играет основную роль в теории замедления, называется «фермиевским возрастом» или просто «возрастом». Такое название связано с тем, что эта величина входит в уравнение (9,4) аналогично тому, как входит время в уравнение теплопроводности, хотя, конечно, она не имеет ничего общего со временем.

Уравнение (9,5) можно проинтегрировать, если мы введём некоторые усреднённые значения λ_t и Σ_s . Тогда:

$$\tau(E) = \frac{\bar{\lambda}_t}{3} \left[\ln \frac{E}{E_T} \right].$$

Как мы видели при выводе уравнения (5,7), величина в скобках есть среднее расстояние X (измеряемое вдоль зигзагообразного пути нейтрона), проходимое нейтроном во время замедления от E до E_T . Поэтому τ может быть написано в форме

$$\tau(E) = \frac{\bar{\lambda}_t}{3} X.$$

Можно видеть, что $\tau(E)$ имеет размерность квадрата длины и в основном пропорционально логарифму энергии нейтрона.

Если заметная часть нейтронов поглощается во время замедления, то уравнение (9,1) становится неприменимым. В этом случае следует добавить ещё член — $n(E) v \Sigma_a dE$ для того, чтобы учесть поглощение, происходящее в интервале энергии $(E, E+dE)$. Мы имеем тогда:

$$\frac{\lambda_t}{3} \Delta n(E) v - n(E) v \Sigma_a + \frac{\partial q'}{\partial E} = 0, \quad (9,6)$$

где $q'(E)$ — плотность замедления при наличии поглощения. Подставляя:

$$q'(E) = n(E) v \xi \Sigma_s E \quad \text{и} \quad d\tau = \frac{\lambda_t}{3 \xi \Sigma_s} \frac{dE}{E}.$$

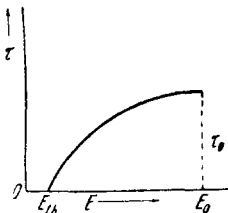


Рис. 15.

Мы получаем, как и раньше,

$$\Delta q' - \frac{3 \Sigma_a}{\lambda_t} q' + \frac{\partial q'}{\partial \tau} = 0.$$

$$+ \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{3 \Sigma_a}{\lambda_t} d\tau$$

Если мы умножим это уравнение на $e^{-\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{3 \Sigma_a}{\lambda_t} d\tau}$ и положим:

$$q(E) = q'(E) e^{-\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{3 \Sigma_a}{\lambda_t} d\tau}, \quad (9,7)$$

то получим:

$$\Delta q + (\partial q / \partial \tau) = 0,$$

уравнение, совпадающее с аналогичным уравнением (9,4). Смысл подстановки (9,7) можно понять, если мы найдём решение для $q'(E)$ и выразим интеграл через E , а не через τ . Окончательное выражение будет иметь вид:

$$q'(E) = q(E) e^{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \frac{dE}{E}}, \quad (9,8)$$

что с точностью до множителя $\frac{1}{1 + \Sigma_a / \Sigma_s}$ под интегралом совпадает с более строгим выражением (5,4), полученным Вигнером.

Из этого выражения видно, что влияние поглощения в процессе замедления на плотность замедления q сводится к умножению этой величины на множитель:

$$p(E) = e^{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \frac{dE}{E}}, \quad (9,9)$$

который зависит только от энергии и не меняет зависимости q от координат. Величина $p(E_x)$ представляет собой вероятность того, что нейтрон достигнет тепловых энергий не будучи поглощённым (вероятность избежать резонансного захвата).

Чтобы решить уравнение (9,4) для $q(x, y, z, \tau)$, мы попробуем искать решение в следующем виде:

$$q = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \epsilon \tau}.$$

Подставляя это выражение в уравнение, мы находим, что оно является решением при условии, что:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \epsilon = 0.$$

Решение можно написать в виде

$$q = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \cdot e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \tau}, \quad (9,10)$$

где α, β, γ — произвольны. Так как уравнение (9,4) линейно, то любая линейная комбинация таких решений также является решением.

Мы можем теперь с помощью метода интеграла Фурье найти такую линейную комбинацию, которая удовлетворит заданным граничным условиям.

В частности, если у нас есть точечный источник, расположенный в точке $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ и испускающий в секунду Q_0 нейтронов, имеющих одну и ту же энергию E_0 (отвечающую $\tau = \tau_0$), то граничные условия имеют вид:

$$q(x, y, z, \tau_0) = Q_0 \delta(x, y, z),$$

где $\delta(x, y, z)$ есть «дельта-функция», которая равна нулю везде, кроме начала, и для которой $\int \delta(x, y, z) dV = 1$, если область интегрирования содержит начало координат. Можно показать, что при таких граничных условиях решение уравнения (9,4), полученное наложением (точнее, интегрированием по α, β, γ) решений вида (9,10), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} q(x, y, z, \tau) &= Q_0 \frac{e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4(\tau_0 - \tau)}}}{[4\pi(\tau_0 - \tau)]^{3/2}} = \\ &= \frac{Q_0}{[4\pi(\tau_0 - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(\tau_0 - \tau)}}, \end{aligned} \quad (9,11)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Для каждой энергии (соответствующей некоторому значению τ), $q(r)$ представляется гауссовой кривой ошибок, ширина и высота которой зависят от τ (или от энергии). Ширина (отвечающая уменьшению ординаты в e раз) равна $2\sqrt{\tau_0 - \tau}$.

На рис. 16 эта функция изображена схематически для двух значений энергии. Как мы видим, для больших энергий $q(r)$ -распределение имеет высокий и узкий максимум; в случае же малых энергий этот максимум низкий и размытый. Это соответствует нашей физической картине: нейтроны, претерпевшие очень мало столкновений и потерявшие лишь очень малую долю своей первоначальной энергии, могут быть обнаружены почти исключительно вблизи начала координат; нейтроны же, потерявшие большую часть энергии, распределяются в широкой области, так как они сделали в среднем значительно больше столкновений и прошли большой путь.

Физический смысл величины τ_0 становится более ясным, если мы вычислим средний квадрат расстояния от источника для нейтронов,

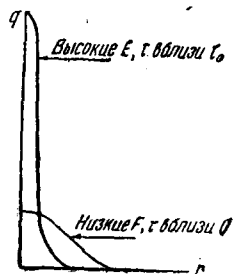


Рис. 16.

вступающих в область тепловых энергий (для которой $\tau_0 = 0$). Мы получаем:

$$\bar{r}^2 = \frac{\int r^2 q_{th}(r) dV}{\int q_{th}(r) dV} = \frac{\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{4\tau_0}} 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\tau_0}} 4\pi r^2 dr} = 6\tau_0, \quad (9,12)$$

где τ_0 — возраст нейтронов деления. Возраст нейтронов деления может быть измерен экспериментально в различных веществах с помощью детектора из индиевой фольги, покрытой кадмием, которая становится радиоактивной (β -распад с периодом 54 мин.), когда на неё падают нейтроны с резонансной энергией индия (1,4 эв). Зависимость активности фольги от её положения в системе даёт распределение нейтронов, из которого с помощью формулы (9,12) можно вычислить возраст.

Уравнение (9,4) и результаты, основанные на нём, содержат предположение, что замедление нейтронов происходит непрерывным образом, а не в виде дискретного процесса. Хотя такое описание и неточно, однако оно пригодно для таких замедлителей, как графит, для которых ξ мало. Для нейтронов, замедляющихся в воде, форма распределения далека от гауссовой кривой, так как уже при одном столкновении с атомом водорода нейтрон может потерять большую часть своей первоначальной энергии. В этом случае картина непрерывного замедления оказывается непригодной.

10. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОТЛА

В котле с цепной реакцией, работающем на постоянном уровне плотности нейтронов, должен существовать баланс между возникновением нейтронов, с одной стороны и утечкой и поглощением — с другой. Это условие должно удовлетворяться для каждого элемента объёма котла и для каждого интервала энергии dE .

Таким образом, мы должны решить бесконечное число уравнений, которые могут быть написаны в виде

$$\frac{\lambda_t}{3} \Delta n(E) v - n(E) v \Sigma_a + Q(E) = 0 \quad (10, 1)$$

для всех E от E_0 до E_T .

Существенно не смешивать плотность замедления $q(E)$ и $Q(E) dE$ — число нейтронов (в секунду на $см^3$), которое компенсирует утечку и поглощение в интервале энергии dE . Как было показано выше, при выводе уравнения (10,1),

$Q(E) dE = dq = \frac{\partial q}{\partial E} dE$. При вычислении $Q(E_T)$ надо помнить, что когда нейтроны достигают тепловых энергий, они в дальнейшем перестают замедляться. Поэтому в этом случае число нейтронов, переходящих в 1 сек в 1 см³ в тепловые, просто равно плотности замедления, вычисленной для энергии, немного превышающей тепловую:

$$Q(E_T) = q(E_T). \quad (10,2)$$

При наличии поглощения в процессе замедления мы должны изменить это выражение с помощью формулы (9,9):

$$Q(E_T) = q'(E_T) = q(E_T) p(E_T), \quad (10,2a)$$

где p есть вероятность, с которой нейтрон избегает резонансного захвата.

Представляется удобным собрать все нейтроны тепловой энергии в одну группу, даже если они обладают несколько различными энергиями. Мы можем тогда написать отдельное уравнение для потока тепловых нейтронов νv_T :

$$\frac{\lambda_h}{3} \Delta \nu v_T - \nu v_T \Sigma_{aT} + Q(E_T) = 0. \quad (10,3)$$

Для потока быстрых нейтронов мы используем уравнение (9,4):

$$\Delta q + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0,$$

эквивалентное уравнению (10,1), но выраженное через плотность замедления $q(E, x, y, z)$.

Мы пока ещё не знаем $Q(E_T) = q(E_T)$, которое должно быть подставлено в уравнение (10,3). Оно должно появиться как решение уравнения (9,4). Мы можем, однако, получить $q(E_0)$ следующим путём. Если нам известны поперечное сечение для деления Σ_f , полное поперечное сечение поглощения Σ_a для материала котла и ν — среднее число нейтронов, вылетающих на один акт деления, то мы можем вычислить постоянную размножения k_T , определяемую как число нейтронов деления, появляющихся на каждый поглощённый тепловой нейтрон. Обычное определение постоянной размножения слегка отличается от этого; оно состоит в следующем:

Если процесс начинается с поглощения одного теплового нейтрона, то вероятность того, что он произведёт деление, равна Σ_f / Σ_a . Мы получаем тогда $\nu \cdot \Sigma_f / \Sigma_a$ быстрых нейтронов на каждый поглощённый тепловой нейтрон. Поэтому

$$k_T = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \cdot \nu.$$

Мы можем далее написать для плотности замедления при начальной энергии, с которой образуются нейтроны в процессе деления, E_0 (возраст τ_0) выражение

$$q(\tau_0) = q(E_0) = nv_{\tau} \Sigma_{a_{\tau}} k_{\tau}. \quad (10,4)$$

Таким образом, наша задача состоит в решении стационарных уравнений котла, которые мы переписываем ещё раз:

$$\frac{\lambda_{\tau}}{3} \Delta nv_{\tau} - nv_{\tau} \Sigma_{a_{\tau}} + Q_{th} = 0, \quad (10,3)$$

$$\Delta q + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0. \quad (9,4)$$

Эти уравнения должны быть решены при следующих граничных условиях:

$$nv_{\tau} = 0 \text{ на границе,} \quad (10,5)$$

$$q(E) = 0;$$

$$q(E_0) = q(\tau_0) = nv_{\tau} \Sigma_{a_{\tau}} \cdot k_{\tau}. \quad (10,4)$$

Предположим, что

$$q(E) = nv_{\tau} \Sigma_{a_{\tau}} \cdot k_{\tau} \cdot f(\tau),$$

где $f(\tau)$ — функция от τ , на которую мы налагаем условие $f(\tau_0) = 1$, так что уравнение (10,4) удовлетворяется для $\tau = \tau_0$. Подставляя это выражение в уравнение (9,4), мы получаем, после деления на $nv_{\tau} \Sigma_{a_{\tau}} k_{\tau}$:

$$\frac{\Delta nv_{\tau}}{nv_{\tau}} - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} = 0. \quad (10,6)$$

Поскольку первый член есть функция только от x, y и z , а второй член — функция только от τ , то уравнение удовлетворяется только в том случае, если каждый его член равен постоянной.

Мы запишем поэтому:

$$\frac{\Delta nv_{\tau}}{nv_{\tau}} = A \quad (10,7)$$

и

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} = -A, \quad (10,8)$$

где A — постоянная. Интегрируя уравнение (10,8) от τ до τ_0 , мы получаем:

$$f(\tau) = f(\tau_0) e^{A(\tau_0 - \tau)} = e^{A(\tau_0 - \tau)}, \quad (10,9)$$

так как $f(\tau_0) = 1$. Переходя затем от f обратно к выражению для $q(E)$, находим:

$$q(E) = nv_{\tau} \Sigma_{a_{\tau}} k_{\tau} e^{A(\tau_0 - \tau)}. \quad (10,10)$$

Таким образом, член, описывающий рождение тепловых нейтронов, приобретает вид:

$$Q(E_T) = q(E_T) \cdot p = nv_T \Sigma_{a_T} k_T \cdot p e^{A\tau_0}, \quad (10,11)$$

где $\tau = 0$ соответствует $E = E_T$.

Произведение $k_T \cdot p \equiv k$ есть то, что обычно называют постоянной размножения, означающей число тепловых нейтронов, появляющихся на каждый поглощенный тепловой нейтрон; при этом предполагается, что во время замедления отсутствует утечка быстрых нейтронов. В действительности число быстрых нейтронов, появившихся на каждый поглощенный тепловой нейтрон, равно $k_T \cdot p e^{\tau_0 A}$, где множитель $e^{\tau_0 A}$ определяет долю быстрых нейтронов, избежавших утечки.

Подставим теперь это выражение в уравнение (10,3). После использования уравнения (10,7) получаем:

$$\frac{\lambda_T}{3} A n v_T - n v_T \Sigma_{a_T} + n v_T \Sigma_{a_T} k e^{\tau_0 A} = 0. \quad (10,12)$$

В этом уравнении функция $n v_T$ входит множителем в каждый из членов. Если мы разделим на $n v_T \Sigma_{a_T}$ и подставим

$L^2 = \frac{\lambda_T}{3 \Sigma_{a_T}}$ (формула 7,5), то мы получим после перегруппировки членов:

$$k - (1 - L^2 A) e^{-\tau_0 A} = 0. \quad (10,13)$$

Это трансцендентное уравнение для A называется критическим уравнением. Величина A есть функция только постоянных котла k , L^2 , τ_0 , каждая из которых, в принципе, может быть вычислена из ядерных постоянных. Для того чтобы подчеркнуть, что эта величина является свойством материалов, образующих котел, и не зависит от формы и размера котла, мы обозначим её через A_m , где индекс «м» относится к материалу котла. A_m определяется как решение уравнения (10,13).

Если постоянная размножения k больше единицы, то уравнение (10,13) имеет одно вещественное отрицательное решение, как это можно видеть с помощью элементарных соображений.

Теперь остаётся найти решение уравнения

$$A n v_T = A n v_T, \quad (10,7)$$

удовлетворяющее граничным условиям $n v_T = 0$ на экстраполированной границе котла. Заметим, что это, по существу, тоже уравнение, решения для которого ($\alpha^2 < 0$) были даны в таблице II раздела 7.

Для заданных размеров и формы котла решение уравнения (10,7), обращающееся в нуль на границе, соответствует опреде-

лённому значению A . Эта величина зависит только от формы и размера котла. Мы обозначим эту величину A_r (индекс «г» отмечает, что A зависит от геометрии). Условие критичности котла запишется теперь в виде:

$$A_r = A_m.$$

Только в этом случае nv_r является решением стационарного уравнения котла. A_r и A_m определены так, чтобы в дальнейшем мы могли бы в общей форме рассмотреть кинетику котла. Если уровень мощности котла возрастает, мы говорим, что котёл надкритичен и тогда $|A_r| < |A_m|$. Если мощность котла падает, — котёл подкритичен и $|A_r| > |A_m|$. Величина A_r в основном определяет кривизну распределения нейтронного потока. Если эта кривизна слишком велика ($-A_r > -A_m$), что отвечает очень маленькому котлу, котёл будет подкритичным.

В следующем разделе мы приведём явные выражения для A_r , как функции размеров котла, для котлов различной формы.

11. КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРЫ ДЛЯ КОТЛОВ ПРОСТЕЙШИХ ФОРМ

В этом параграфе мы приведём решения уравнения

$$\Delta nv = Anv, \quad (10,7)$$

удовлетворяющего условию $nv = 0$ на границе.

Решения взяты непосредственно из таблицы II.

Кроме того, мы приводим и критические размеры для котлов простейших форм.

I. Плоский котёл (слой бесконечный в направлениях осей y и z ; толщина t в направлении x).

Граница:

$$\text{плоскость } x = \pm \frac{1}{2} t.$$

Уравнение:

$$\frac{d^2 nv}{dx^2} = A_r nv.$$

Решение:

$$nv = C \cos \frac{\pi x}{t}; \quad A_r = -\frac{\pi^2}{t^2}.$$

Критический размер:

$$A_r = A_m \rightarrow t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{A_m}}.$$

Критический объём:

$$V_0 \sim \infty.$$

II. Шаровой котёл (радиус R).

Граница:

сфера радиуса R .

Уравнение:

$$\frac{d^2 nv}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dnv}{dr} = A_r nv.$$

Решение:

$$nv = \frac{C}{r} \sin \frac{\pi r}{R}; \quad A_r = -\frac{\pi^2}{R^2}.$$

Критический размер:

$$A_r = A_m \rightarrow R_0 = \frac{\pi}{\sqrt{-A_m}}.$$

Критический объём:

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 = \frac{4\pi^4}{3 (A_m)^{3/2}} = \frac{130}{(-A_m)^{3/2}}.$$

III. Цилиндрический котёл (радиус R , высота H).

Граница: круговой цилиндр $r=R$, плоскости $z = \pm \frac{1}{2} H$.

Уравнение

$$\frac{\partial^2 nv}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial nv}{\partial r} + \frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} = A_r nv.$$

Решение:

$$nv = C \cos \frac{\pi z}{H} J_0 \left(\frac{2,405 r}{R} \right); \quad A_r = -\left(\frac{\pi^2}{H^2} + \frac{(2,405)^2}{R^2} \right).$$

Критические размеры, отвечающие наименьшему объёму:

$$\begin{cases} A_r = A_m \rightarrow R_0 = \frac{2,405 \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-A_m}} = \frac{2,495}{\sqrt{-A_m}} \\ H_0 = \frac{\pi \sqrt{2}}{2,405} R_0 = 1,847 R_0. \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 = \frac{\pi \sqrt{3}}{\sqrt{-A_m}} = \frac{5,441}{\sqrt{-A_m}} \end{cases}$$

Наименьший критический объём:

$$V_0 = \pi R_0^2 H_0 = \frac{148,2}{(-A_m)^{3/2}}.$$

IV. Котёл в форме прямоугольного параллелепипеда—ребра a , b и c в направлениях x , y z .

Граница:

$$\text{плоскости } x = \pm \frac{1}{4} a, \quad y = \pm \frac{1}{2} b, \quad z = \pm \frac{1}{2} c.$$

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 nv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 nv}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 nv}{\partial z^2} = A_r nv.$$

Решение:

$$nv = C \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{c}; A_r = -\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right).$$

Критические размеры, отвечающие наименьшему объёму:

$$A_r = A_m \rightarrow$$

$$a_0 = b = c = \frac{\pi \sqrt{3}}{\sqrt{-A_m}} = \frac{5,44}{\sqrt{-A_m}}.$$

Наименьший критический объём:

$$V_0 = \alpha_0^3 = \frac{161}{(-A_m)^{3/2}}.$$

Предположим, например, что значение A_m , полученное с помощью решения критического уравнения (10,13), равно:

$$A_m = -10^{-4} \text{ см}^{-2}.$$

Тогда критические размеры будут:

Для:	Объём
Плоского котла $t = 314 \text{ см}$	
Шарового котла $R_0 = 314 \text{ »}$	$1,30 \cdot 10^8 \text{ см}^3$
Цилиндрического котла $\{ R_0 = 294 \text{ »}$	$1,48 \cdot 10^8 \text{ см}^3$ (на 14% больше,
наименьшего объема . . $\{ H_0 = 544 \text{ »}$	чем для шара)
Кубического котла $a_0 = 544 \text{ »}$	$1,61 \cdot 10^8 \text{ см}^3$ (на 24% больше,
	чем для шара).

Относительные размеры этих котлов показаны в масштабе на рис. 17.

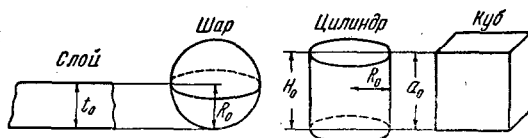


Рис. 17.

На рис. 18 изображены графики трёх функций, используемых в теории котлов. Это следующие функции:

$$\cos(\pi/2)u,$$

$$\text{где } u = \begin{cases} 2x/t & \text{для слоя} \\ 2z/H & \text{для цилиндра.} \end{cases}$$

$$(1/\pi u) \sin \pi u, \text{ где } u = r/R \text{ для шара,}$$

$$J_0(2,405u), \text{ где } u = r/R \text{ для цилиндра.}$$

Следует заметить, что кривые, представляющие эти три функции, очень мало отличаются друг от друга; в некоторых грубых вычислениях можно, не допуская большой ошибки, использовать во всех трёх случаях одну и ту же формулу с косинусом.

12. НЕЙТРОННЫЙ ЦИКЛ

В критическом котле возникновение нейтронов в точности уравнивается поглощением и утечкой. Предположим, что мы впустим N нейтронов деления (энергия E_0) в такой котёл и проследим за ними в течение одного цикла. Эти нейтроны будут

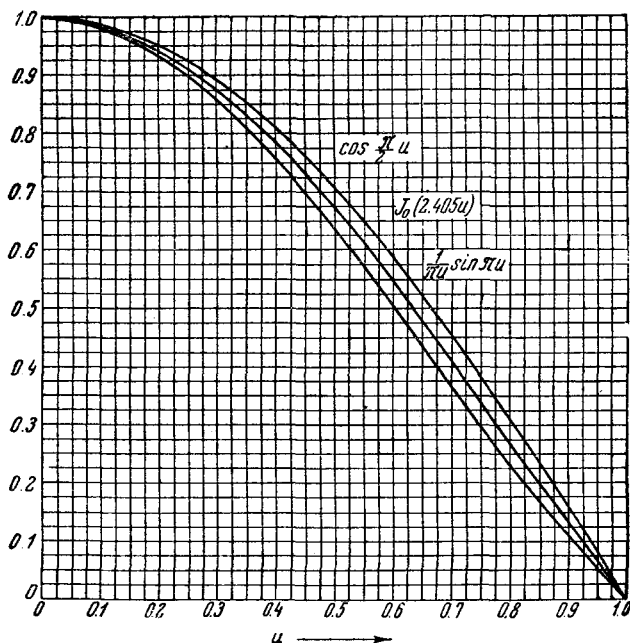


Рис. 18.

замедляться; некоторые из них уйдут из котла, оставаясь быстрыми, другие же будут поглощены при энергиях, выше тепловых. Оставшиеся нейтроны станут тепловыми внутри котла.

Число нейтронов, достигших энергии $E + dE$ внутри котла, равно:

$$Np(E_0, E + dE) e^{[\tau_0 - \tau(E + dE)] A},$$

в то время как число нейтронов, достигших энергии E , равно:

$$Np(E_0, E) e^{[\tau_0 - \tau(E)] A}.$$

Разность этих двух выражений представляет потерю нейтронов в интервале энергии dE , обусловленную поглощением и утечкой; она равна:

$$N \left[e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} \frac{dp(E_0, E)}{dE} dE \right] + \\ + Np(E_0, E) e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} \left(-A \frac{d\tau(E)}{dE} dE \right),$$

где первый член представляет собой число первоначальных нейтронов N , которые поглощаются в интервале энергии dE , а второй — число нейтронов, уходящих из котла в интервале энергии dE .

Число нейтронов, которое достигает тепловых энергий, равно

$$Ne^{\tau_0 A} p(E_0, E_T).$$

Из этих нейтронов доля, равная $\frac{1}{1 - L^2 A}$, поглощается, будучи тепловой, в то время как оставшаяся доля $\frac{-L^2 A}{1 - L^2 A}$ уходит из котла, также будучи тепловой.

Это можно видеть из следующего простого рассуждения: для любого элементарного объёма котла (а таким образом и для всего котла в целом) отношение тепловой утечки к тепловому поглощению есть:

$$\frac{L}{A} = \frac{-\frac{\lambda_t}{3} \Delta n v}{n v \Sigma_a} = \frac{-\lambda_t A}{3 \Sigma_a} = -L^2 A. \quad (12,1)$$

Таким образом доля поглощённых тепловых нейтронов будет равна:

$$\frac{A}{L + A} = \frac{1}{1 + \frac{L}{A}} = \frac{1}{1 - L^2 A},$$

в то время как доля нейтронов, покидающих котёл, равна:

$$\frac{L}{L + A} = \frac{\frac{L}{A}}{1 + \frac{L}{A}} = \frac{-L^2 A}{1 - L^2 A}.$$

Мы знаем поэтому, сколько нейтронов из числа N первоначальных поглощается в котле и при каких энергиях. Число нейтронов, равное

$$N \frac{e^{\tau_0 A} p(E_0, E_T)}{1 - L^2 A},$$

поглощается при тепловых энергиях, а число

$$N \int_{E_T}^{E_0} e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} \frac{dp(E_0, E)}{dE} dE$$

поглощается при энергиях выше тепловых.

Обозначим через $k(E)$ среднее число нейтронов деления, появившихся на каждый нейтрон, поглощенный при энергии E . Тогда:

$$k(E) = \frac{\Sigma_f(E)}{\Sigma_a(E)} \nu(E).$$

Величиной $k_T(E)$ мы называли значение $k(E)$ для тепловых энергий.

Нейтронный цикл таким образом заканчивается. Окончательный результат оказывается следующим.

Если процесс начался с N нейтронов деления, то мы получаем, после одного цикла

$$\left[\frac{e^{\tau_0 A} p(E_0, E_T) k_T}{1 - L^2 A} + \int_{E_T}^{E_0} e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} \frac{dp(E, E_0)}{dE} k(E) dE \right]$$

нейтронов. Это выражение может быть написано в виде:

$$N \left[\frac{e^{\tau_0 A} p_T k_T}{1 - L^2 A} + e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} (1 - p_T) \overline{k(E)} \right],$$

где $\tau_0 - \tau(E)$ — средний «возраст» от энергии деления до энергии, при которой нейтроны поглощаются (во время замедления), $\overline{k(E)}$ есть средняя постоянная размножения для нейтронов, поглощенных при энергиях выше тепловых, а $p_T \equiv p(E_0, E_T)$.

Если котёл критический, то число нейтронов деления должно быть в конце цикла такое же, как и в начале.

Таким образом, критическое уравнение для общего случая имеет вид:

$$\frac{e^{\tau_0 A} p_T k_T}{1 - L^2 A} + e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} (1 - p_T) \overline{k(E)} = 1. \quad (12,2)$$

Котёл, в котором деление происходит только благодаря поглощению тепловых нейтронов, можно осуществить двумя способами: или $p_T = 1$ (нейтроны поглощаются только при тепловых энергиях) или же $p_T < 1$, но $\overline{k(E)}$ обращается в нуль. Последнее соответствует случаю естественных урановых котлов, в которых имеется значительное резонансное поглощение (не ведущее к делению) ядрами U^{238} при энергиях, превышающих тепловые.

В таком котле критическое уравнение имеет вид:

$$\frac{ke^{\tau_0 A}}{1 - L^2 A} = 1 \quad (12,3)$$

или

$$k - (1 - L^2 A) e^{-\tau_0 A} = 0, \quad (12,4)$$

где мы обозначили:

$$k = k_T p_T = \frac{\Sigma_f(E_T)}{\Sigma_a(E_T)} \nu p_T. \quad (12,5)$$

Постоянная размножения k может быть также написана в форме

$$k = f \eta p_T, \quad (12,6)$$

где f — отношение поперечного сечения поглощения делящегося вещества при E_T к поперечному сечению поглощения всех материалов котла при E_T , т. е.

$$f = \frac{\Sigma_a^{\text{дел}}(E_T)}{\Sigma_a(E_T)}$$

есть доля поглощённых тепловых нейтронов, приходящаяся на поглощение в делящемся веществе, а η — умноженное на ν отношение поперечного сечения деления делящегося вещества при E_T к поперечному сечению поглощения делящегося вещества при E_T , т. е.

$$\eta = \frac{\Sigma^{\text{дел}}(E_T)}{\Sigma_a^{\text{дел}}(E_T)} \nu$$

есть не что иное, как число нейтронов деления, возникающих на каждый тепловой нейтрон, поглощённый в делящемся материале.

В котле, работающем не на тепловых нейтронах $p_T = 0$, т. е. ни один нейтрон не достигает тепловых энергий; это условие можно осуществить, создав высокую концентрацию делящегося материала или сделав концентрацию замедлителя низкой или же, наконец, обеспечив и то и другое. В этом случае критическое уравнение можно написать в следующем виде:

$$\overline{k(E)} e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} = 1. \quad (12,7)$$

Для любого из этих случаев — теплового, не теплового, или же смешанного — критический размер котла без отражателя получается, если положить $A_T = A_m$, где A_m — вещественный корень критического уравнения (12,2), (12,4) или (12,7) и определяется параметрами и формой котла (см. раздел 11).

Если размеры котла не критические, то $A = A_T$ будет больше или меньше, чем A_m , а число нейтронов в конце цикла будет отличаться от числа нейтронов в начале. Это означает, что плотность нейтронов в котле будет изменяться со временем. Если есть относительное увеличение числа нейтронов в одном цикле,

то для смешанных некритических котлов мы получаем:

$$\frac{e^{\tau_0 A} p_T k_T}{1 - L^2 A} + e^{[\tau_0 - \tau(E)] A} (1 - p_T) \overline{k(E)} = 1 + \gamma. \quad (12,8)$$

Если $\gamma > 0$, то котёл надкритичен и плотность нейтронов возрастает; если $\gamma < 0$, то котёл подкритичен, а плотность нейтронов снижается.

Для котла, работающего на тепловых нейтронах, γ даётся формулой:

$$\gamma = \rho \frac{e^{\tau_0 A}}{1 - L^2 A}, \quad (12,9)$$

где:

$$\rho \equiv k - (1 - L^2 A) e^{-\tau_0 A} \quad (12,10)$$

называется реактивностью котла. Реактивность котла представляет собой важную величину в теории кинетики котла.

В предыдущем рассмотрении нейтронного цикла мы предполагали, что все нейтроны деления возникают с одной и той же энергией E_0 . Для того чтобы учесть полученный на опыте непрерывный спектр нейтронов деления, следует считать, что величины τ_0 и $\tau_0 - \tau(E)$ в уравнениях (12,2), (12,7) и (12,8) представляют собой величины, усреднённые по спектру деления.

13. КОТЕЛ С ОТРАЖАТЕЛЕМ; МЕТОД МНОГИХ ГРУПП

До сих пор мы рассматривали только однородные котлы. Весьма полезным оказывается, однако, окружение котла отражателем, имеющим высокое альbedo. Поскольку таким образом может быть уменьшена утечка и быстрых и медленных нейтронов, то такой котёл будет иметь меньший критический объём. Оказывается, что если использовать очень хороший отражатель, то можно сделать общий размер критического котла вместе с отражателем меньшим, чем размер «голого» котла. Таким образом, с помощью отражателя можно достигнуть значительной экономии в первоначальной загрузке котла делящимся материалом. Дополнительный выигрыш происходит также за счёт выравнивания распределения нейтронов в котле с отражателем. В «голом» котле делящееся вещество у края котла используется с очень низкой эффективностью, так как поток нейтронов в этом месте очень мал. Благодаря отражателю поток нейтронов делается более однородным по объёму котла и поэтому усреднённый поток может оказаться значительно большим, чем в котле без отражателя. Если, например, мощность котла ограничивается температурой в центре котла, то в котле с отражателем можно получить более высокую мощность. Этот же результат может быть также получен с помощью неоднородного распределения делящегося вещества по объёму котла.

К сожалению, оказалось невозможным получить точное решение уравнений котла для котла с отражателем в том интересном случае, когда свойства отражателя отличаются от свойств реактора. Для решения этой задачи необходимо использовать приближенные методы.

Весьма общий класс методов носит название метода многих групп. В этом методе нейтроны в котле и отражателе распределяются на группы с одинаковыми (усредненными) энергиями; по отношению к каждой из этих групп нейтронов материалы котла и отражателя характеризуются некоторыми усредненными свойствами. Такой метод оказывается очень полезным для вычисления действия управляющих стержней, сильно поглощающих тепловые нейтроны, но мало влияющих на быстрые нейтроны.

Для потока нейтронов каждой группы энергии можно написать уравнение вида (10,1). Уравнения оказываются связанными друг с другом благодаря тому, что нейтроны замедляются; исчезновение нейтрона из какой-то группы сопровождается его появлением в группе более низкой энергии. Как и раньше, уравнения для групп с самой высокой и самой низкой энергией оказываются связанными с процессом деления.

Наиболее простая теория этого типа — это теория одной группы, в которой мы предполагаем, что поглощение и возникновение происходит при одной и той же энергии нейтрона. Это приближение оказывается не слишком плохим для котла на быстрых нейтронах, как, например, для котла, в котором и поглощение и возникновение происходит при энергиях нейтронов, близких к тем, с которыми они возникают при делении. Для котла на тепловых нейтронах теория правильно описывала бы происходящее явление, если бы нейтроны при делении рождались тепловыми, а не быстрыми. Для иллюстрации этого метода мы применим его к случаям плоского и шарового котлов с отражателями; в следующем параграфе мы будем рассматривать эти задачи методом теории двух групп. Нужно заметить, что критический размер «голого» котла (т. е. котла без отражателя) не может быть правильно вычислен ни одним из этих двух методов.

Однако представляется удобным «подогнать» постоянные котла так, чтобы правильный критический размер получился бы в приближениях как одной, так и двух групп.

Мы начнем с уравнения (6,1), которое мы запишем как уравнение для потока нейтронов $\varphi = nv$. Эта величина внутри котла, характеризуемого постоянными λ_t^0 , Σ_a^0 и k , удовлетворяет соотношению:

$$-\frac{\lambda_t^0}{3} A\varphi + \Sigma_a^0 \varphi - k\Sigma_a^0 \varphi = 0. \quad (13,1)$$

Внутри отражателя, характеризуемого постоянными λ_t^1 , Σ_a^1 , $k=0$ (нет рождения нейтронов), это уравнение имеет вид:

$$-\frac{\lambda_t^1}{3} \Delta \varphi + \Sigma_a^1 \varphi = 0. \quad (13,2)$$

Эти уравнения можно написать в виде:

$$\begin{cases} \Delta \varphi + K_0^2 \varphi = 0 & (\text{в котле}) \end{cases} \quad (13,3)$$

$$\begin{cases} \Delta \varphi - K_1^2 \varphi = 0 & (\text{в отражателе}) \end{cases} \quad (13,4)$$

где:

$$\begin{cases} K_0^2 = (k-1) \frac{3 \Sigma_a^0}{\lambda_t^0} = \frac{k-1}{L_0^2}. \end{cases} \quad (13,5)$$

$$\begin{cases} K_1^2 = \frac{3 \Sigma_a^1}{\lambda_t^1} = \frac{1}{L_1^2}. \end{cases} \quad (13,6)$$

Они должны быть решены при граничных условиях:

I. $\varphi=0$ на внешней границе отражателя.

II. φ и $\frac{\lambda_t}{3} \varphi'$ должны быть непрерывны на границе между реактором и отражателем.

Для примера рассмотрим плоский котёл толщиной $2a$, покрытый с обеих сторон отражателем толщиной t .

Решения уравнений (13,3) и (13,4) суть:

$$\varphi_0 = \cos K_0 x \quad (|x| \leq a), \quad (13,7)$$

$$\varphi_1 = c \operatorname{sh} [K_1 (t + a - x)] \quad (a \leq |x| \leq a + t), \quad (13,8)$$

где граничное условие I удовлетворено, так как мы выбрали в качестве решения гиперболический синус, который обращается в нуль на границе отражателя. Условие II при $x=A$ даёт:

$$\lambda_t^0 K_0 \operatorname{tg} K_0 a = \lambda_t^1 K_1 \operatorname{cth} K_1 t. \quad (13,9)$$

Это трансцендентное уравнение связывает критическую полутолщину котла с толщиной отражателя. При $t \rightarrow 0$, $\operatorname{cth} K_1 t \rightarrow \infty$, $K_0 a = \pi/2$; критическая полутолщина выражается той же формулой, что и для «голого» котла (см. раздел 11), а именно: $a_0 = \pi/2 K_0$. Эти формулы, однако, нетождественны, так как K_0 , определённое уравнением (13,5), не совпадает с $\sqrt{-A_m}$, определённым как решение уравнения (10,13).

Введём экономичность отражателя (reflector savings) $S = a_0 - a$, т. е. величину, на которую уменьшается критическая полутолщина котла (благодаря отражателю) по сравнению с полутолщиной «голого» котла. Очевидно, что S зависит от толщины

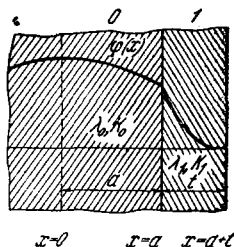


Рис. 19.

отражателя, так же как и от постоянных котла и отражателя. Из уравнения (13,9) мы получаем непосредственно:

$$S \equiv a_0 - a = \frac{1}{K_0} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_t^1 K_1}{\lambda_t^0 K_0} \operatorname{cth} K_1 t \right) \right]. \quad (13,10)$$

В предельном случае малой толщины отражателя ($K_1 t \ll 1$) уравнение (13, 10) будет иметь вид:

$$S = a_0 - a = \frac{\lambda_t^0}{\lambda_t^1} t. \quad (13, 11)$$

Если отражатель рассеивает настолько эффективно, что длина переноса в нём меньше длины переноса в котле, то экономичность отражателя оказывается больше, чем его толщина. Это означает, что размер котла плюс отражатель будет меньше, чем размеры «голого» котла.

Аналогичные вычисления можно провести для более реального случая шарового котла радиуса R , покрытого отражательным слоем толщиной t . Трансцендентное уравнение, соответствующее уравнению (13,9), будет иметь вид:

$$\operatorname{ctg} K_0 R = \frac{1}{K_0 R} \left(1 - \frac{\lambda_t^1}{\lambda_t^0} \right) - \frac{\lambda_t^1 K_1}{\lambda_t^0 K_0 t} \operatorname{cth} K_1 t, \quad (13,12)$$

а критический радиус «голого» котла равен $R_0 = \pi/K_0$. Экономичность отражателя $S = R_0 - R(t)$ в этом случае можно определить с помощью численного решения уравнения при заданных значениях постоянных котла.

Эти величины были вычислены для шарового и плоского котлов, имеющих размеры, приведённые в разделе 11. Мы предполагаем, что замедление в котле осуществляется с помощью графита и что котёл окружён водяным отражателем. Примем следующие округлённые значения:

$$A = -10^{-4} = -K_0^2, \quad K_0 = 10^{-2} \text{ см}^{-1}.$$

Кроме того, мы используем следующие значения постоянных:

$$\lambda_t^0 = 2,7 \text{ см}, \quad K_1 = \frac{1}{2,8} \text{ см}^{-1}, \quad \lambda_t^1 = 0,4 \text{ см}.$$

Результат, приведённый на рис. 20, показывает зависимость экономичности отражателя S от его толщины в этих случаях. Общий характер обеих кривых одинаков. Экономичность отражателя достигает «насыщения», лежащего между 18 и 20 см для толщин отражателя, превышающих 10 см. Как видно из кривой, шаровой графитовый котёл, имеющий без отражателя критический радиус 314 см, может быть сделан критическим при радиусе в 294 см, если использовать водяной отражатель толщиной 10 см.

Для водяного отражателя бесконечной толщины (толщина больше 10 см) экономичность S оказалась равной:

для шара 19,7 см
 для плоского слоя 18,8
 для бесконечного кругового цилиндра 19,7

Абсолютные численные значения весьма грубы, однако общий ход кривых не очень сильно отличается от хода кривых, определяемых более точной теорией. Было показано, что величина экономичности S , вычисляемая с помощью теории одной группы, оказывается преуменьшенной. Более точные вычисления методом

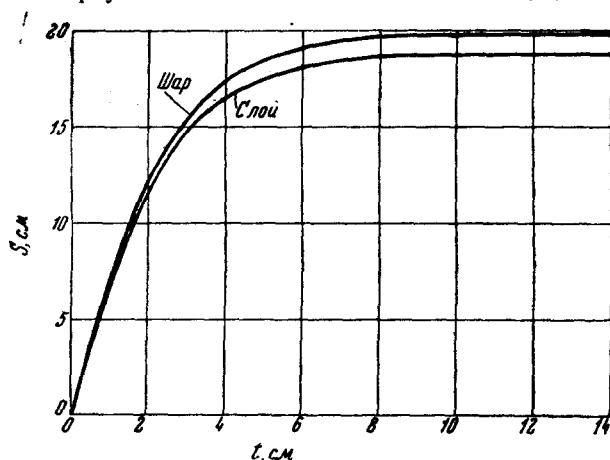


Рис. 20.

двух групп дают большие значения, так как альбеда отражателя для быстрых нейтронов превышает альбеда для тепловых нейтронов.

В случае когда длины переноса в реакторе и в отражателе одинаковы ($\lambda_r^0 = \lambda_r^1$), уравнения (13, 12) для шара и (13, 9) для плоскости имеют тот же вид; поэтому экономичность отражателя, отнесённая к полутолщине плоского реактора и к радиусу шарового реактора, одна и та же.

14. МЕТОД ДВУХ ГРУПП

Благодаря тому, что свойства ядер вещества котла и отражателя по отношению к быстрым нейтронам обычно сильно отличаются от их свойств по отношению к медленным нейтронам, вычисление методом одной группы не может дать точных результатов. Следующий порядок приближения состоит в том, чтобы

рассмотреть отдельно потоки быстрых φ_f и потоки тепловых нейтронов φ_t . Несмотря на то, что быстрым нейтронам отвечает широкий интервал энергии, мы объединим их приближённо в одну группу и припишем веществам, в которых они диффундируют, соответствующим образом подобранные усреднённые характеристики.

Внутри реактора φ_t и φ_f удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\lambda_f}{3} \Delta \varphi_f - \Sigma_{af} \dot{\varphi}_f + k \Sigma_{at} \varphi_t = 0, \quad (14,1)$$

$$\frac{\lambda_t}{3} \Delta \varphi_t - \Sigma_{at} \varphi_t + \Sigma_{af} \varphi_f = 0. \quad (14,2)$$

Это уравнения того же самого типа, что и наши первоначальные уравнения. Три члена каждого из них описывают утечку, поглощение и возникновение нейтронов, соответственно. Мы ввели фиктивное поперечное сечение поглощения быстрых нейтронов Σ_{af} , которое учитывает не настоящее поглощение быстрых нейтронов, которым мы пренебрегаем, а потерю нейтронов из быстрой группы, происходящую тогда, когда они вследствие замедления попадают в тепловую группу. Член $\Sigma_{af} \varphi_f$ представляет собой, поэтому, как источник тепловых нейтронов (число нейтронов, которые становятся тепловыми, отнесённое на один кубический сантиметр в секунду), так и потерю в быстрой группе. Источник быстрых нейтронов (нейтронов деления), с другой стороны, пропорционален тепловому потоку и равен $\Sigma k_{at} \varphi_t$, если $k \equiv k_{tp}$ — число тепловых нейтронов, возникающих в результате поглощения одного теплового нейтрона, и $p_t = 1$.

Внутри отражателя φ_f и φ_t удовлетворяют аналогичным уравнениям, за исключением того, что коэффициент размножения $k = 0$, так как мы предполагаем, что в отражателе нет делящихся веществ. Остальные постоянные в уравнении будут, вообще говоря, иметь в отражателе также другие значения.

Необходимо выбрать такие значения Σ_{af} и λ_f , чтобы получить такой же средний квадрат длины замедления $6\tau_0$, какой даёт точная теория. Этого можно достигнуть следующим образом: мы пытаемся решить уравнение (14,1), предполагая что в точке $r = 0$ расположен точечный источник нейтронов (деления). Пусть $K_f^2 = 3 \Sigma_{af} / \lambda_f$, тогда уравнение можно написать в виде:

$$\Delta \varphi_f - K_f^2 \varphi = 0 \quad (r > 0) \quad (14,3)$$

и решение будет (см. раздел 7):

$$\varphi_f = A \frac{e^{-K_f r}}{r}, \quad (14,4)$$

Для $\bar{r}^2$ мы получаем, как и в разделе 7:

$$\bar{r}^2 = \frac{\int r^3 \varphi_f dV}{\int \varphi_f dV} = \frac{\int_0^\infty r^2 \frac{e^{-K_f r}}{r} 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty \frac{e^{-K_f r}}{r} 4\pi r^2 dr} = \frac{6}{K_f^2}. \quad (14,5)$$

Поэтому мы выбираем $K_f^2 = \frac{1}{\tau_0}$; при таком выборе уравнение (14, 5) согласуется с уравнением (9, 12). Приближение состоит в подстановке функции $\frac{1}{r} e^{-K_f r}$ вместо точной гауссовой функции $\frac{e^{-r^2/4\tau_0}}{\sqrt{4\pi\tau_0}}$.

Другой путь решения задачи состоит в подробном рассмотрении процесса замедления. Среднее число столкновений, испытанных нейтроном во время замедления от E_0 до E_τ , равно $N = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_\tau}$. Тогда в среднем один акт «поглощения» будет происходить на каждые N столкновений. Отношение фиктивного поперечного сечения поглощения Σ_{af} к усредненному поперечному сечению рассеяния $\bar{\Sigma}_s$ будет поэтому равно

$$\frac{\Sigma_{af}}{\Sigma_s} = \frac{1}{N} = \frac{\xi}{\ln \frac{E_0}{E_\tau}},$$

откуда мы получаем:

$$\Sigma_{af} = \frac{\xi \bar{\Sigma}_s}{\ln \frac{E_0}{E_\tau}}. \quad (14,6)$$

Тогда:

$$K_f^2 = \frac{3 \Sigma_{af}}{\lambda_f} = \frac{3 \xi \Sigma_s}{\lambda_f \ln \frac{E_0}{E_\tau}} = \frac{1}{\tau_0}, \quad (14,7)$$

если λ_f определено как соответствующим образом усредненная длина переноса для быстрых нейтронов.

Теперь мы найдём решения уравнений (14,1) и (14,2), удовлетворяющие условиям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_f &= A \varphi_f, \\ \Delta \varphi_\tau &= A \varphi_\tau, \end{aligned} \right\} \quad (14,8)$$

где в обоих уравнениях постоянная A одна и та же. После под-

становки в уравнения (14,1) и (14,2) мы получаем систему двух линейных уравнений:

$$\left(\frac{\lambda_f}{3} A - \Sigma_{af}\right) \varphi_f + k \Sigma_{aT} \varphi_T = 0, \quad (14,9)$$

$$\Sigma_{af} \varphi_f + \left(\frac{\lambda_T}{3} A - \Sigma_{aT}\right) \varphi_T = 0. \quad (14,10)$$

Эта система имеет неравные нулю решения только в том случае, если определитель, составленный из её коэффициентов, обращается в нуль, т. е. если

$$\left(\frac{\lambda_f}{3} A - \Sigma_{af}\right) \left(\frac{\lambda_T}{3} A - \Sigma_{aT}\right) - k \Sigma_{aT} \Sigma_{af} = 0. \quad (14,11)$$

Деля на $\Sigma_{aT} \Sigma_{af}$ и вводя $L^2 = \lambda_T/3 \Sigma_{aT}$ и $\tau_0 = \lambda_f/3 \Sigma_{af}$, мы получаем:

$$k - (1 - L^2 A)(1 - \tau_0 A) = 0. \quad (14,12)$$

Это и есть критическое уравнение теории двух групп. Оно аналогично уравнению (10,13) и сводится к этому уравнению, если мы положим $e^{-\tau_0 A} = 1 - \tau_0 A$; это является хорошим приближением, если $\tau_0 A \ll 1$, т. е. если средний квадрат длины замедления мал по сравнению с площадью поперечного сечения критического котла. Оно отличается от уравнения (10, 13) тем, что уравнение квадратно относительно A , а не трансцендентно.

Для случая, когда условие $\tau_0 A \ll 1$ не выполняется, критический размер «голового» котла, определяемый уравнением (14, 12), слишком мал (A слишком велико); однако можно изменить определение возраста τ_0 в теории так, чтобы получить правильный критический размер с помощью уравнения (14,12).

В пределе, когда число групп неограниченно возрастает, критическое уравнение для многогрупповой теории переходит в уравнение непрерывной теории (10, 13). Это можно показать следующим образом. Критическое уравнение для n групп (в дополнение к тепловой группе) может быть написано по аналогии с уравнением (14, 12) в следующем виде:

$$k - (1 - L^2 A)(1 - \tau_1 A)(1 - \tau_2 A) \dots (1 - \tau_n A) = 0, \quad (14, 12 a)$$

где под $\tau_1, \tau_2, \dots$ следует понимать «парциальные возрасты» нейтронов в различных группах. Ясно, что по мере того, как нейтрон непрерывно замедляется от энергии деления до тепловых энергий, он пройдёт через все эти группы, и мы будем иметь:

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n = \sum_1^n \tau_i.$$

Для того чтобы вычислить произведение

$$f_n = (1 - \tau_1 A)(1 - \tau_2 A)(1 - \tau_3 A) \dots (1 - \tau_n A)$$

при $n \rightarrow \infty$, возьмём логарифм от обеих сторон, тогда получим:

$$\ln f_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 - \tau_i A).$$

Так как $n \rightarrow \infty$ и каждый из τ_i становится малым, то мы можем использовать приближённое равенство: $\ln(1 - x) = -x$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln f_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (-\tau_i A) = -A \sum_{i=1}^n \tau_i = -A\tau_0, \\ f_\infty &= e^{-\tau_0 A}. \end{aligned}$$

Уравнение (14, 12а) принимает тогда вид критического уравнения непрерывной теории, а именно:

$$k - (1 - L^2 A) e^{-\tau_0 A} = 0.$$

Критическое уравнение можно написать в следующем виде:

$$A^2 - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{L^2} \right) A - \frac{k-1}{L^2 \tau_0} = 0, \quad (14, 13)$$

Его два решения будут:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{L^2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{L^2} \right)^2 + 4 \frac{k-1}{L^2 \tau_0}}, \\ A_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{L^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{L^2} \right)^2 + 4 \frac{k-1}{L^2 \tau_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (14, 14)$$

Если $k > 1$, то решения будут иметь противоположные знаки. Отрицательный корень A_1 приближённо равен

$$A_1 \cong -\frac{k-1}{L^2 + \tau_0}, \quad (14, 15)$$

а положительный корень, если $k-1$ мало,

$$A_2 \cong \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{L^2}. \quad (14, 15a)$$

Для каждого из двух возможных значений A отношение φ_τ / φ_f определяется уравнениями (14, 9) и (14, 10). Обозначим через s_1 отношение, соответствующее A_1 , а s_2 — отношение, соответствующее A_2 . Тогда, если обозначим через $K_f^2 = 1/\tau_0$, выражения для s_1 и s_2 будут иметь вид:

$$s_1 = -\frac{\lambda_f}{\lambda_\tau} \frac{A_1 - K_f^2}{kK_\tau^2}, \quad s_2 = \frac{\lambda_f}{\lambda_\tau} \frac{A_2 - K_\tau^2}{kK_\tau^2}. \quad (14, 16)$$

Если $A_1 < 0$ и $A_2 > 0$, то $s_1 > 0$ и $s_2 < 0$. Общее решение уравнений (14,1) и (14,2) для потоков быстрых и тепловых нейтронов представляет собой линейную комбинацию членов, соответствующих двум значениям A_1, A_2 , определяемым уравнением (14,14).

В случае плоского котла мы имеем внутри него решения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_f &= \cos \mu_1 x + C \operatorname{ch} \mu_2 x, \\ \varphi_T &= s_1 \cos \mu_1 x + C s_2 \operatorname{ch} \mu_2 x, \end{aligned} \right\} \quad (14,17)$$

где введены положительные величины $\mu_1^2 \equiv -A_1$, $\mu_2^2 \equiv A_2$. Уравнения для потоков быстрых и тепловых нейтронов внутри отражателя могут быть записаны в том же виде, как уравнения (14,1) и (14,2), только с $k=0$. Критическое уравнение тогда совпадёт с уравнением (14,12) при $k=0$. Поэтому

$$(1 - L'^2 A') (1 - \tau_0' A') = 0, \quad (14,18)$$

где штрихи указывают на то, что эти величины относятся к отражателю. Решения уравнения (14,18) будут:

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \frac{1}{\tau_0'} = K_f'^2, \\ A_2' &= \frac{1}{L'^2} = K_T'^2. \end{aligned} \right\} \quad (14,19)$$

В этом случае отношения потоков тепловых и быстрых нейтронов, соответствующие двум значениям A , равны:

$$\begin{aligned} r_1 &= - \frac{\Sigma_{af}'}{\frac{\lambda_T'}{3} A_1' - \Sigma_a'} = \frac{\lambda_f'}{\lambda_T'} \frac{K_f'^2}{K_f'^2 - K_T'^2}, \\ r_2 &= \infty. \end{aligned} \quad (14,20)$$

Последнее условие просто означает, что в отражателе поток быстрых нейтронов, соответствующий второму решению, исчезает. Тогда для отражателя толщины t решение, исчезающее на внешней границе $x = \pm(a+t)$, будет:

$$\varphi_f' = A \operatorname{sh} K_f' (a+t - |x|), \quad (14,21)$$

$$\varphi_T' = r_1 A \operatorname{sh} K_f' (a+t - |x|) + B \operatorname{sh} K_T' (a+t - |x|). \quad (14,22)$$

Остаются четыре граничных условия, которым надо удовлетворить на границе раздела между реактором и отражателем при $x = \pm a$. Они выражают непрерывность потоков быстрых и тепловых нейтронов и непрерывность полного потока быстрых и тепловых нейтронов. Четыре уравнения, возникающие из этих четырёх

граничных условий, в общем случае несовместны, так как у нас есть только три произвольных постоянных A, B, C . Эти уравнения имеют решения только для некоторого определённого значения полутолщины реактора a . Таким образом, критический размер реактора a определяется как неявная функция толщины отражателя t , входящей в уравнения в виде параметра. Для того чтобы получить a как функцию от t , необходимо перейти к довольно длинным численным расчётам. Это было сделано для некоторых проблем, имеющих практический интерес, и может быть найдено в отчётах, связанных с проектом. Результаты, полученные для определённых комбинаций котла и отражателя, показывают, что вычисленная методом двух групп экономичность отражателя обычно оказывается на несколько процентов выше, чем по упрощённой теории одной группы.

15. УПРАВЛЕНИЕ КОТЛОМ

В практических условиях размеры котла всегда превышают критические размеры, для того чтобы иметь возможность управлять котлом. В котлах на тепловых нейтронах для этой цели используются управляющие стержни, сделанные из вещества, имеющего большое поперечное сечение поглощения для тепловых нейтронов (кадмий, бористая сталь). Таким образом вместо того, чтобы изменять размеры котла, изменяют его эффективные постоянные k, L^2 и τ_0 с помощью введения в конструкцию котла или изымания из неё инородных веществ.

Другой способ рассмотрения задачи состоит в том, чтобы считать, что управляющие стержни изменяют граничные условия, которым должен удовлетворять поток нейтронов. Например, если управляющий стержень представляет собою «чёрное» тело по отношению к тепловым нейтронам, то поток нейтронов должен обращаться в нуль на экстраполированной границе управляющего стержня.

Удобно ввести опять величину ρ (уравнение (12,10)), называемую реактивностью, которая определяется в непрерывной теории формулой

$$\rho = k - (1 - L^2 A) e^{-\tau_0 A} \quad (15,1)$$

или же аналогичным выражением в методе одной группы:

$$\rho = k - (1 - L^2 A). \quad (15,1a)$$

Если $\rho = 0$, то котёл является точно критическим, так как тогда удовлетворяется уравнение (10,13). Если ρ положительно, то поток нейтронов увеличивается со временем; если же ρ отрицательно, то он уменьшается.

Котёл и управляющие стержни должны быть спроектированы так, чтобы имелся значительный избыток реактивности, которым

можно было бы управлять. По мере того как делящиеся материалы, находящиеся в котле, расходуются, реактивность уменьшается из-за того, что уменьшается число делящихся атомов, поглощающих нейтроны, а также от того, что образующиеся при делении осколки поглощают нейтроны.

Таким образом уменьшается полезное поглощение и увеличивается непроизводительное. Для того чтобы котёл продолжал работать после заметного использования делящихся ядер и накопления вредных продуктов деления, необходимо предусмотреть достаточно большой избыток реактивности в котле с тем, чтобы можно было восстановить критические условия ($\rho = 0$), убрав из котла управляющие стержни.

Другой эффект связан с тем, что постоянные котла, а следовательно, и A_m зависят от температуры котла. Имеется несколько температурных эффектов, которые связаны в принципе с 1) изменением поперечных сечений поглощения и рассеяния веществ в котле с энергией нейтронов и 2) изменением физических постоянных (размера, плотности) котла с температурой.

Реактивность, в зависимости от конструкции котла, может или увеличиваться с температурой, или уменьшаться. Представляется желательным иметь котёл с отрицательным температурным коэффициентом, так как при этом небольшое возмущение, увеличивающее температуру, приведёт к уменьшению реактивности, что в свою очередь приведёт к возвращению к первоначальной температуре. Такой котёл будет устойчивым, тогда как котёл с положительным температурным коэффициентом будет неустойчивым. Таким образом, для всех котлов температурный коэффициент является важным фактором его устойчивости. В котлах с высокой температурой этот фактор ещё более важен, так как в таком котле разность между реактивностью горячего и холодного котла относительно велика.

В экспериментальном котле необходимо иметь избыток реактивности, для того чтобы введение поглотителей нейтронов (например, для получения радиоактивных изотопов) не выключало бы котёл.

В дополнение к этим относительно большим эффектам, изменяющим реактивность котла и требующим грубого регулирующего механизма, существуют ещё флуктуации реактивности с малыми периодами, которые также нужно регулировать для того, чтобы котёл работал на постоянном уровне мощности. Например, реактивность котла может несколько меняться из-за изменения температуры теплоносителя.

Избыток реактивности, предусмотренный в конструкции котла, может в несколько раз превышать реактивность, связанную с запаздывающими нейтронами (см. раздел 16).

Вообще говоря, можно утверждать, что управление котлами, работающими на тепловых нейтронах, более простое, так как в них существуют ядра с большим поперечным сечением погло-

нения для тепловых нейтронов. Проблема управления котлами, работающими на быстрых нейтронах, значительно труднее, так как поперечные сечения поглощения для быстрых нейтронов всегда значительно меньше.

Для того чтобы уяснить себе влияние изменения реактивности котла на поток нейтронов, мы должны рассмотреть решения уравнений котла, зависящие от времени. Это и будет сделано в следующем разделе.

16. УРАВНЕНИЯ КОТЛА, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

При выводе уравнений котла в разделе 10 мы сделали предположение, что существует точный баланс между утечкой нейтронов и поглощением, с одной стороны, и возникновением нейтронов, с другой. Мы должны сейчас исследовать случай, в котором такого баланса нет. Если в котле возникает больше нейтронов, чем теряется благодаря утечке и поглощению, то мы должны ожидать, что поток нейтронов должен увеличиваться со временем. Действительно, если мы проведём эти рассуждения для 1 см^3 объема котла, то мы получим:

*возникновение — (утечка + поглощение) = скорости изменения
плотности тепловых нейтронов*

или

$$Q - \left(-\frac{\lambda_t}{3} \Delta n v + n v \Sigma_a \right) = \frac{\partial n}{\partial t}, \quad (16,1)$$

т. е.

$$\frac{\lambda_t}{3} \Delta n v - n v \Sigma_a + Q = \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (16,2)$$

Для упрощения мы сначала рассмотрим кинетику котла методом одной группы. Мы положим в этом случае:

$$Q = n v \Sigma_a k. \quad (16,3)$$

Введём величину

$$K^2 = \frac{3 \Sigma_a}{\lambda_t} (k - 1) = \frac{k - 1}{L^2}, \quad (16,4)$$

положим продолжительность жизни нейтрона равной $l = \lambda_a / v = 1 / v \Sigma_a$ и разделим уравнение на v . Тогда уравнение (16,2) превращается в

$$\Delta n + K^2 n = \frac{l}{L^2} \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (16,5)$$

Для того чтобы разделить переменные, положим

$$n(x, y, z, t) = n_0(x, y, z) f(t). \quad (16,6)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (16,5) и деления на $n_0 f$, мы получаем:

$$\frac{\Delta n_0}{n_0} + K^2 = \frac{l}{L^2} \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt}. \quad (16,7)$$

Так как левая часть является функцией только от x , y и z , а правая только от t , то каждая часть должна быть равна постоянной, которую мы обозначим через $\frac{l}{L^2} \Lambda$.

Тогда

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \Lambda. \quad (16,8)$$

Интегрируя от $t = 0$ до t , мы получаем:

$$f \sim e^{\Lambda t}, \quad (16,9)$$

где Λ определяется уравнением

$$\frac{\Delta n_0}{n_0} + K^2 = \frac{l}{L^2} \Lambda, \quad (16,10)$$

получаемым подстановкой (16,9) в уравнение (16,7). Если мы обозначим:

$$\frac{\Delta n_0}{n_0} = A, \quad (16,11)$$

то, используя уравнения (15,1a) и положив $n = n_0 e^{(\rho/l)t}$, получим:

$$\Lambda = \frac{L^2}{l} (A + K^2) = \frac{1}{l} [k - (1 - L^2 A)] = \frac{\rho}{l}. \quad (16,12)$$

Интерпретация уравнения (16,12) очевидна. Член $-L^2 A$ согласно уравнению (12,1) есть отношение утечки к поглощению, т. е. число тепловых нейтронов, покидающих котёл, на один тепловой нейтрон, поглощённый в котле.

Так как в результате деления на один поглощённый нейтрон возникает k нейтронов и один из этих нейтронов должен быть оставлен для поддержания цепной реакции, то величина $\rho = k - (1 - L^2 A)$ представляет собою полное увеличение (или уменьшение) числа нейтронов на один поглощённый нейтрон. Тогда в среднем каждые l сек (где l — средняя продолжительность жизни нейтронов) будет происходить увеличение (или уменьшение) числа нейтронов в 1 см^3 на величину ρn . Скорость изменения n поэтому будет: $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\rho}{l} n$. Это уравнение может быть сразу проинтегрировано. Интегрирование даёт: $n = n_0 e^{(\rho/l)t}$ — выражение, совпадающее с только что полученным.

Величина $T = \frac{1}{\Lambda} = \frac{l}{\rho}$ называется «периодом котла». Он может быть очень длинным, если ρ очень мало по сравнению с l . В котле, работающем на тепловых нейтронах, $l = 1/v\Sigma_a$

может быть порядка 10^{-3} сек, в то время как в котле, работающем на быстрых нейтронах, эта величина на много порядков меньше. Таким образом, оказывается, что если бы предыдущие рассуждения описывали полностью всю картину, то было бы очень трудно управлять даже котлами, работающими на тепловых нейтронах. Например, рассматривая крайний случай, если значение k для критического котла, работающего на тепловых нейтронах, увеличится при быстром удалении управляющего стержня на 0,1, так что ρ станет равным 0,1, то активность котла возрастет в одну секунду на множитель $e^{\rho/l} = e^{0,1/10^{-3}} = e^{100} = 10^{43}$. Этот катастрофический результат должен рассматриваться как предостережение в том смысле, что нельзя допускать неожиданных больших изменений в реактивности котла.

В реальных случаях все котлы снабжены специальными аварийными приспособлениями, которые предупреждают такую катастрофу. Очевидно, что представляет большую опасность работа с котлами, имеющими большой избыток реактивности. Можно почти с уверенностью сказать, что обычные управляющие стержни не могут служить для управления котлом с периодом $1/100$ сек. Однако таким способом можно управлять котлом с $T = 1/10$ сек. Это означает, что управляющие стержни должны выдвигаться с такой скоростью, чтобы избыток реактивности никогда не превышал бы 1%. Как мы сейчас увидим, некоторые из этих заключений должны быть несколько изменены, если учесть роль, которую играют в котле запаздывающие нейтроны.

Благоприятным фактором, помогающим в управлении котлами, оказалось наличие, в дополнение к мгновенным нейтронам, небольшой доли (0,76%) нейтронов, испускаемых в процессе деления с запаздыванием. Обнаружено шесть групп запаздывающих нейтронов с периодами полураспада от 0,05 до 55 сек. Показано, что два из этих периодов отвечают определенным ядрам — осколкам деления, — из которых нейтроны вылетают после β -распада. Было обнаружено, что определенное число γ_m (мгновенные нейтроны) вылетает сразу же после деления (за время порядка 10^{-12} сек), в то время как небольшая часть γ_d (запаздывающие нейтроны) вылетает значительно позже. Каждой группе запаздывающих нейтронов отвечает свой характерный период β -распада, который ему предшествует. Таким образом, полное число нейтронов, испускаемых на одно деление, равно сумме γ_m и γ_d . Энергия запаздывающих нейтронов несколько меньше, чем средняя энергия мгновенных нейтронов. Очевидно, что различие между запаздывающими и мгновенными нейтронами имеет значение только в нестационарных состояниях.

Данные о запаздывающих нейтронах, сопровождающих деление U^{235} , собраны в таблице III.

Таблица III

Период полураспада $\tau_{1/2}$ (сек)	Постоянная распада $\lambda_i = \frac{0,693}{\tau_{1/2}}$ сек ⁻¹	Доля (%) от всех нейтронов деления β_i	Нейтронный излучатель
0,05	14	0,029	?
0,43	1,61	0,084	?
1,52	0,456	0,24	?
4,51	0,154	0,21	?
22,0	0,0315	0,17	Xe ⁽¹³⁷⁾
55,6	0,0125	0,026	Kr ⁽⁸⁷⁾
Всего . . . $\beta = 0,76\%$			

Эффект запаздывающих нейтронов состоит в значительном увеличении эффективной средней продолжительности жизни нейтронов, если только изменение реактивности не настолько велико (как в описанном выше катастрофическом случае), что котёл оказывается надкритичным на одних быстрых нейтронах. Если β есть доля запаздывающих нейтронов, а l_3 есть среднее время запаздывания, то эффективная средняя продолжительность жизни нейтрона равна: $l_{эф} \sim l + \beta l_3$. Используя приближённые значения $\beta = 1/100$ и $l_3 \sim 10$ сек, мы находим:

$$l_{эф} \sim 10^{-3} + \frac{1}{10} \sim \frac{1}{10} \text{ сек.}$$

17. КИНЕТИКА КОТЛА. ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ

В предыдущем разделе переходный режим котла исследовался с помощью метода одной группы, без непосредственного рассмотрения действия замедляющихся нейтронов. В этом разделе мы рассмотрим кинетику «голого» гомогенного котла с запаздывающими нейтронами на основании более точного метода раздела 10.

Мы обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (или в общем случае λ_i) постоянные распада различных групп, а число излучателей запаздывающих нейтронов, возникающих на один акт деления, — через $\nu\beta_i$. Тогда, если ν есть полное число нейтронов, испускаемых на одно деление, то $\sum_i \nu\beta_i = \nu\beta = \nu_3$ представит собою число запаздывающих нейтронов на одно деление, а $(1 - \beta)\nu$ — число мгновенных нейтронов на одно деление.

венных нейтронов на одно деление. Аналогично, мы можем разбить постоянную размножения на два слагаемых:

$$k = k_3 + k_m,$$

где

$$k_3 = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \beta \nu \quad (17,1)$$

и

$$k_m = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} (1 - \beta) \nu.$$

Нестационарное уравнение для потока тепловых нейтронов в котле может быть написано по аналогии с уравнением (16,1):

$$\frac{\lambda_l}{3} \Delta n v_T - n v_T \Sigma_a + (n v_T \Sigma_{aT} k_m + \lambda c) e^{\tau_0 A} = \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (17,2)$$

Здесь c — число осколков деления в 1 см³, испускающих запаздывающие нейтроны. Для простоты мы рассмотрим случай, когда имеется только один вид излучателей запаздывающих нейтронов и лишь укажем позже, как можно рассматривать все шесть групп одновременно. Пусть λ будет постоянная распада (вероятность излучения в 1 сек) для излучателя запаздывающих нейтронов. Тогда каждую секунду будет излучаться λc запаздывающих нейтронов. В уравнении (17,2) источник будет представлен членами:

$$(n v_T \Sigma_{aT} k_m + \lambda c) e^{\tau_0 A}.$$

Концентрация таких осколков деления c в данный момент зависит от количества актов деления, происходящих за небольшой отрезок времени, предшествующий этому моменту.

Для скорости изменения c мы имеем:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = n v \Sigma_a k_3 - \lambda c, \quad (17,3)$$

где первый член даёт число возникающих нейтронов, а второй — число распадов в 1 см³ за 1 сек. Используя соотношения

$$l_m = 1/v \Sigma_a \text{ и } k_3 = \beta k,$$

мы получим:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{n \beta k}{l_m} - \lambda c. \quad (17,4)$$

В случае равновесия $\partial c / \partial t = 0$, а потому

$$c = \frac{n \beta k}{l_m \lambda} \quad (17,5)$$

есть концентрация излучателей запаздывающих нейтронов по прошествии длительной работы котла, когда их образование и распад в точности сбалансированы.

Мы должны решить систему дифференциальных уравнений (17,2) и (17,4). Зависимости от времени мы предполагаем в форме:

$$\left. \begin{aligned} n &= n_0 e^{\Delta t}, \\ c &= c_0 e^{\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (17,6)$$

Тогда $\partial n / \partial t = \Lambda n$ и $\partial c / \partial t = \Lambda c$. Подставляя это в уравнения (17,2) и (17,4), мы получаем:

$$\lambda c = \frac{n\beta k}{l_m} \frac{\lambda}{\Lambda + \lambda}, \quad (17,7)$$

$$\frac{\lambda_l}{3} \Lambda n v - n v \Sigma_a + \left[n v \Sigma_a (1 - \beta) k + \frac{n\beta k}{l_m} \frac{\lambda}{\Lambda + \lambda} \right] e^{-\tau_0 A} = \Lambda n, \quad (17,8)$$

где $\Lambda n v / n v$ мы положили равным постоянной Λ и использовали выражение (17,5) для λc . Если мы теперь умножим это уравнение на $e^{-\tau_0 A}$, разделим на $n v \Sigma_a = n / l_m$ и воспользуемся тем, что $L^2 = 3 \lambda_l / \Sigma_a$, то мы получим:

$$e^{-\tau_0 A} (L^2 \Lambda - 1) + k - \beta k + \beta k \frac{\lambda}{\Lambda + \lambda} = \Lambda l_m e^{-\tau_0 A}. \quad (17,9)$$

Мы определяем реактивность, как и раньше, соотношением

$$\rho = k - (1 - L^2 A) e^{-\tau_0 A}. \quad (15,1)$$

Тогда уравнение (17,9) приобретает вид:

$$\rho + \beta k \frac{\Lambda}{\Lambda + \lambda} = \Lambda l_m e^{\tau_0 A}. \quad (17,10)$$

Это квадратное уравнение для Λ ; его можно написать в виде:

$$\Lambda = \frac{\rho/k}{\frac{l_m}{k} e^{-\tau_0 A} + \frac{\beta}{\Lambda + \lambda}}. \quad (17,11)$$

В случае, когда рассматривается несколько групп нейтронов, характеризующихся постоянными β_i , λ_i , уравнение (17,11) заменяется уравнением

$$\Lambda = \frac{\rho/k}{\frac{l_m}{k} e^{-\tau_0 A} + \sum_i \frac{\beta_i}{\Lambda + \lambda_i}}. \quad (17,11a)$$

При учёте всех шести групп запаздывающих нейтронов уравнение (17,11a) будет порядка 6 + 1 относительно Λ и поэтому оно имеет 7 корней: $\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_6$. Общее решение может быть выражено как сумма экспонент вида $\sum a_i e^{\Lambda_i t}$.

Уравнение (17,11) может быть написано в виде:

$$\Lambda^2 l + \Lambda (l + \beta - \rho/k) - \rho/k \lambda = 0,$$

где l сокращённо обозначает $\frac{l_m}{k} e^{-\tau_0 A}$.

Так как последний член отрицателен, то два корня имеют противоположные знаки. Пусть $\Lambda_1 > 0$ и $\Lambda_2 < 0$. Решения уравнений суть:

$$\Lambda_1 = -\frac{(\beta + l - \rho/k)}{2l} + \frac{1}{2l} \sqrt{\left(\beta + l - \frac{\rho}{k}\right)^2 + \frac{4l\rho\lambda}{k}} \quad (17,12)$$

$$\Lambda_2 = -\frac{(\beta + l - \rho/k)}{2l} - \frac{1}{2l} \sqrt{\left(\beta + l - \frac{\rho}{k}\right)^2 + \frac{4l\rho\lambda}{k}}. \quad (17,13)$$

Величина $\frac{\rho}{k} - \beta = \frac{1}{k}(\rho - k_3)$ пропорциональна избытку реактивности над значением, ещё совместимым с возможностью управления котла при учёте запаздывающих нейтронов и равна превышению реактивности, умноженной на $1/k$, над величиной, при которой котёл становится критическим на одних только мгновенных нейтронах. Предположим, что реактивность достаточно мала, так что котёл не является критическим на одних быстрых нейтронах. Тогда $\beta > \rho/k$, а так как $l\lambda$ мало, то формулы (17,12) и (17,13) могут быть приближённо записаны в виде:

$$\Lambda_1 \sim \frac{\rho/k}{l + \frac{\beta - \rho/k}{\lambda}} \quad (17,14)$$

$$\Lambda_2 \sim -\frac{\beta - \rho/k}{l} \quad (17,15)$$

Общее решение тогда состоит из двух членов:

$$n = a_1 e^{\Lambda_1 t} + a_2 e^{\Lambda_2 t} \quad (17,16)$$

Первый представляет собой медленный подъём, а второй — переходный эффект, быстро затухающий со временем.

В качестве примера рассмотрим значения:

$$\frac{\rho}{k} = 0,005, \quad \beta = 0,01, \quad \lambda = \frac{1}{10} \text{ сек}^{-1}, \quad l = 10^{-3} \text{ сек}.$$

Тогда

$$\Lambda_1 \sim 0,1 \text{ сек}^{-1},$$

$$\Lambda_2 \sim -5 \text{ сек}^{-1}.$$

Произвольные постоянные определяются начальными условиями при $t=0$, в качестве которых мы возьмём:

$$n(0) = n_0 = \text{const}; \quad \frac{\partial c}{\partial t}(0) = 0 \quad (17,17)$$

и из уравнений (17,2), (17,5):

$$\frac{\partial n}{\partial t}(0) = \frac{\rho/k}{l} n_0, \quad (17,18)$$

так как тот факт, что некоторые нейтроны запаздывают, не влияет на начальный наклон кривой. Постоянные a_1 и a_2 , входящие в решение (17,16), определяются тогда с помощью уравнений:

$$a_1 + a_2 = n_0 \quad (17,19)$$

и

$$\Lambda_1 a_1 + \Lambda_2 a_2 = \frac{\rho n_0}{kl}, \quad (17,20)$$

решения которых суть:

$$a_1 = \frac{\Lambda_2 - \rho/k l}{\Lambda_2 - \Lambda_1} n_0 \approx \frac{\beta}{\beta - \rho/k} n_0 \quad (17,21)$$

и

$$a_2 = \frac{\rho/k l - \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} n_0 \approx - \frac{\rho/k}{\beta - \rho/k} n_0. \quad (17,22)$$

Собирая все полученные результаты вместе, мы можем написать общее решение:

$$n(t) = \left[\frac{\Lambda_2 - \rho/k l}{\Lambda_2 - \Lambda_1} e^{\Lambda_1 t} + \frac{\rho/k l - \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} e^{\Lambda_2 t} \right] n_0.$$

Подставляя численные значения, мы получаем:

$$a_1 \sim 2n_0,$$

$$a_2 \sim -n_0.$$

Таким образом, для этого случая приближённое решение будет:

$$n \cong n_0 (2e^{0,1 t} - e^{-5 t}).$$

Это решение представлено схематически на рис. 21.

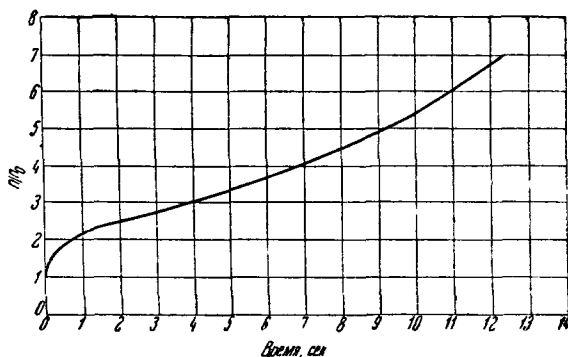


Рис. 21.

Нетрудно видеть, что плотность нейтронов возрастает вдвое в первые полсекунды. Это означает, что котёл вначале «не знает», что он должен «ждать» запаздывающих нейтронов. В дальнейшем плотность нарастает медленнее, и кривая приобретает крутизну, характерную для запаздывающих нейтронов. В случае, когда $\rho/k > \beta$, первоначальный крутой подъём не прекращается, так как в этом случае котёл является надкритичным на одних только мгновенных нейтронах.