

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

КОНСТРУКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

Дж. К. Слетер *)

VII. ВХОДНОЙ ИМПЕДАНС ТРУБ СО СТОЯЧИМИ
И БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ

Мы увидим, что указанное в предыдущих разделах различие между длинными и короткими ускорителями играет важнейшую роль как для выбора способа питания прибора, так и для оценки достигаемого в нём вольтажа. Чтобы рассмотреть проблему питания, надо исследовать входной импеданс ускорителя (называя входом то место, откуда подаётся энергия). В случае стоячих волн мы имеем дискретный ряд собственных частот, и входной импеданс имеет пик, когда внешняя частота совпадает с одной из них. Как хорошо известно, ширина резонансного пика (в частотной шкале) относится к частоте, как $\frac{1}{Q_0}$. Если эта ширина мала по сравнению с расстоянием между соседними собственными частотами, мы будем говорить, что последние хорошо разделены. Тогда, как будет в дальнейшем показано, можно использовать резонансные свойства полости для стабилизации частоты вибратора, получая то, что можно назвать резонансным питанием. Мы покажем, что это имеет место, когда линейные размеры ускорителя малы по сравнению с длиной затухания l_0 . С другой стороны, мы увидим, что если длина ускорителя велика по сравнению с l_0 , то собственные частоты лежат очень близко друг к другу, и резонансные методы питания неприменимы.

В системе с бегущими волнами никаких резонансных пиков входного импеданса нет, полость нельзя использовать для стабилизации частоты вибратора, и для этой цели приходится пользоваться другими методами. Дело в том, что, поскольку речь идёт об импедансе, резонанс появляется в результате интерференции падающих и отражённых волн; последние в разбираемой системе отсутствуют. Имеются только полосы пропускания с плавно изменяющимся входным импедансом, который становится чисто мнимым в промежутках между полосами.

*) Окончание. См. УФН 37, 316 (1949); Rev. Mod. Phys. 20, 473 (1948).
Перевод В. Авербаха.

Проследим, каким образом в системе с бегущими волнами исчезает та резонансная структура полос, которую мы имеем для стоячих волн. Механизм этого весьма прост, и его можно рассматривать двояко. Во-первых, при переходе к длинному ускорителю амплитуда отражённой от противоположного конца волны уменьшается; поэтому даже для стоячих волн резонансные пики входного импеданса будут невелики и исчезнут в предельном случае очень длинного волновода. Во-вторых, когда конец трубы из отражающего (стоячие волны) превращается в поглощающий (бегущие волны), то уменьшается добротность для каждой собственной частоты. Это вызывает уширение кривой резонанса, и мы покажем, что оно как раз достаточно велико для того, чтобы вызвать перекрытие пиков, которые уже не удаётся разрешить (в спектроскопическом смысле). Это утверждение по существу эквивалентно высказанному выше. В самом деле, обозначим расстояние между соседними собственными частотами и частоту соответственно через $\Delta\omega$ и ω ; тогда условие перекрытия соседних резонансных линий гласит: $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{1}{Q_0}$; с другой стороны, условие того, что уширение, обусловленное поглощением на конце, вызовет перекрытие линий, запишется в виде:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{v_g}{\omega l} = \frac{1}{Q_0} \frac{l_0}{l}. \quad (14)$$

В дальнейшем будет показано, что формула (14) приближённо даёт разность между соседними собственными частотами трубы со стоячими волнами. Мы видим, что при расстояниях, меньших длины затухания, уширение линий, обусловленное затуханием в стоячей волне, не может вызвать перекрытия пиков; в то же время при $l > l_0$ это перекрытие имеет место.

Посмотрим теперь, как далеко собственные частоты отстоят друг от друга и покажем, в частности, что разность между соседними частотами приближённо определяется формулой (14). Собственные частоты (нормальные колебания) резонансной полости с отражающими стенками на концах определяются из того условия, что длина полости должна содержать целое число полуволн $\lambda_g/2$. Этим обеспечивается выполнение граничных условий (например, обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля) на обоих концах полости. Таким образом, мы имеем:

$$l = \frac{m\lambda_g}{2},$$

где m — целое число, т. е.

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{m}{2l}.$$

Следовательно, собственные значения отделены друг от друга постоянным интервалом $\frac{1}{2l}$, т. е. на рис. 2 им соответствует набор равно-

отстоящих друг от друга абсцисс. Мы видим, что колебания типа π (рис. 2) имеют место при $\frac{1}{\lambda_g} = \frac{1}{2L}$; таким образом, если волновод состоит из N секций (так что $l = NL$), мы получим N различных собственных колебаний, соответствующих $m = 1, 2, \dots, N$: последнее из них принадлежит типу π . Из периодичности рис. 2 следует, что более высокие значения m не дают ничего нового. Частоты этих колебаний (или величины $\frac{1}{\lambda_0}$) можно найти, как показано на рис. 6, откладывая собственные значения $\frac{1}{\lambda_g}$ и определяя соответствующие им значения $\frac{1}{\lambda_0}$.

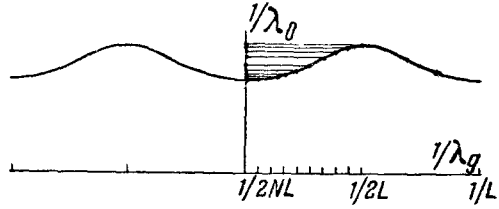


Рис. 6. Вычисление собственных частот нагруженной резонансной линии.

Ясно, что собственные колебания образуют группу из N (или $N + 1$) частот, составляющих одну определённую полосу; при этом частоты особенно густо расположены у дна и под потолком полосы пропускания (т. е. вблизи колебаний типов 0 и π , соответствующих $m = 0$ и $m = N$); в середине полосы (вблизи $m = \frac{N}{2}$, что соответствует типу $\frac{\pi}{2}$) интервалы между частотами больше. Поскольку число собственных колебаний в полосе пропускания равно N , и ширина полосы не зависит от N , ясно, что среднее расстояние между частотами равно ширине полосы, делённой на N .

Пусть теперь разность между ординатами соседних точек (рис. 6) есть $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{\Delta\omega}{2\pi c}$. Тогда разность соответствующих абсцисс будет $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_g}\right) = \frac{1}{2l}$.

Пользуясь (5), получим:

$$\frac{v_g}{c} = \frac{\Delta\omega}{2\pi c} \cdot 2l; \quad v_g = \frac{l\Delta\omega}{\pi},$$

и следовательно,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\pi v_g}{\omega l} = \frac{\pi v_g}{\omega NL}.$$

С точностью до множителя π , характеризующего точность метода, это совпадает с уравнением (14), которое мы и хотели доказать. Отсюда видно также, что, как отмечалось в предыдущем параграфе, разность между соседними частотами обратно пропорциональна N . Таким образом, доказаны утверждения, высказанные в начале этого раздела: в коротком (в нашем смысле слова) ускорителе соб-

ственные частоты стоячих волн хорошо разделены; в длинном — они перекрываются. Уширение линий, обусловленное поглощающим концом, который превращает стоячие волны в бегущие, во всех случаях как раз достаточно велико, чтобы вызвать перекрывание пиков.

VIII. СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ КОЛЕБАНИЙ ТИПА π

Для колебаний типа π $\frac{d(1/\lambda_0)}{d(1/\lambda_g)} = 0$ и из наших формул следует, что в этом случае групповая скорость, разность между соседними частотами и длина затухания обращаются в нуль. Следовательно, любой прибор конечных размеров надлежало бы считать длинным. В действительности, однако, до такой крайности дело не доходит. Учитывая особую важность этого случая для ускорителей МТИ и Калифорнийского университета, мы в этом разделе рассмотрим его подробнее. (В ускорителе Калифорнийского университета используются, правда, колебания типа 2π , но они обладают такими же свойствами.) Существенно, что поскольку наклон кривой $\frac{1}{\lambda_0}$, в функции $\frac{1}{\lambda_g}$, равен нулю, соотношение между этими величинами для колебаний, близких к типу π , может быть записано в виде:

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2L} - a \left(\frac{1}{\lambda_g} - \frac{1}{2L} \right)^2,$$

где $\frac{1}{2L}$ есть значение $\frac{1}{\lambda_g}$ при колебаниях типа π ; a — некая константа. Как известно, колебания типа π получаются, если в общей формуле $\frac{1}{\lambda_g} = \frac{m}{2NL}$ положить $m = N$; ближайшее к нему собственное колебание принадлежит $m = N - 1$.

Поэтому мы имеем:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{N-1}{2NL} = \frac{1}{2L} - \frac{1}{2NL}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, находим разность обратных длин волн типа π и ближайшего к нему собственного колебания: $\Delta \left(\frac{1}{\lambda_0} \right) = \frac{a}{(2NL)^2}$. Она не равна нулю, как можно было заключить из нашей элементарной теории и из обращения в нуль групповой скорости, а убывает с увеличением трубы как $\frac{1}{N^2}$ (в отличие от $\frac{1}{N}$, что имеет место для колебаний типа $\frac{\pi}{2}$). Для практических целей за длину затухания в этом случае можно принять расстояние, на котором ширина резонансной кривой для колебаний типа π становится сравнимой с вычисленной выше разностью частот колебания типа π и ближайшего к нему собственного колебания. Колебания полости, размеры которой малы сравнительно с этой

длиной, будут хорошо отделены от других, и прибор можно питать резонансными методами. Скорость биений между колебаниями типа π и ближайшим к нему, в функции разности их частот определяется формулой (5); о групповой скорости здесь вообще нельзя говорить, так как легко видеть, что скорость биений между N -ым и $(N - k)$ -ым собственными колебаниями пропорциональна k (а не постоянна!), так что возмущение расплывается по мере распространения по трубе. Тем не менее, за время T_0 , необходимое для установления поля в полости, биения между колебанием типа π и его ближайшим соседом пройдут расстояние, равное определённой выше длине затухания, биения же между другими парами собственных колебаний распространятся на целое кратное этой длины; таким образом, возмущение сможет довольно равномерно распределиться по всей полости, хотя, в отличие от обычного случая, это обусловлено немногочисленными правильными отражениями. Таким образом, для большинства наших целей введённое сейчас понятие длины затухания вполне достаточно, и это лучшее, что здесь можно сделать. В ускорителе МТИ определённая так длина затухания оказывается порядка 4 — 5 метров, так что предполагающиеся размеры (6 метров) соответствуют длинной трубе.

IX. ПИТАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

В предыдущих разделах мы видели, что линейные ускорители делятся на два существенно различных класса — длинные и короткие. Различие определяется тем, велики или малы линейные размеры прибора по сравнению с характеристической длиной $l_0 = \frac{v_g}{\omega} Q_0$. Последняя по существу равна расстоянию, которое бегущая волна проходит за время $\frac{Q_0}{\omega}$, необходимое полю, чтобы достигнуть максимальной величины. В коротком ускорителе удобнее всего пользоваться стоячими волнами, тем самым превращая трубу в резонансную полость с хорошо разделёнными собственными частотами. Таким образом, проблема сводится к введению мощности в резонансную полость. Где вводить мощность — безразлично, существенно только, чтобы вибратор работал точно на одной из собственных частот; если нужно поставить параллельно ряд вибраторов, то необходимо, чтобы все они работали не только на одной частоте, но и в одной и той же фазе. Эту проблему мы обсудим позднее. Она носит различный характер в зависимости от того, пользуемся ли мы вибраторами с самовозбуждением типа магнетронов, рабочая частота которых определяется собственной частотой нагрузки, или же усилителями мощности, частота которых задаётся установкой, питающей сеточный контур. Мы увидим, что в обоих случаях фазировка вибраторов весьма проста. Она была успешно осуществлена на практике в ряде лабораторий. Более трудным, хотя и более важным, является случай длинного

ускорителя. Здесь разница между бегущими и стоячими волнами несущественна; проблема питания в обоих случаях ставится по существу одинаково. Мы видели, что длинный ускоритель можно подразделить на секции, короткие по сравнению с l_0 , и каждую из них питать отдельно. В случае стоячих волн секции могут быть физически отделены друг от друга отражающими стенками (в которых, естественно, должны быть сделаны достаточно большие отверстия для прохода частиц), однако стенки могут быть и чисто воображаемыми; при возбуждении бегущих волн это даже необходимо, так как настоящие стенки дали бы отражённую волну. Каждую секцию можно питать, как короткий ускоритель, однако нужен ещё внешний фазирующий контур, чтобы все они работали в фазе. Никакими внутренними способами (которые будут описаны для случая короткого ускорителя, питающегося от вибратора с самовозбуждением) нельзя установить здесь надлежащих фазовых соотношений, так как прибор по определению столь длинен, что сигнал, посланный с одного конца, не успеет достигнуть другого за время установления поля. Поэтому необходимо фазировать систему извне, а это — опять проблема, существенно зависящая от того, чем мы пользуемся для питания — вибраторами с самовозбуждением или усилителями мощности. Для фазировки системы коротких ускорителей требуется прежде всего сигнал. Надо иметь какой-то эталон частоты, усиливая в случае необходимости посылаемый им сигнал, чтобы он был достаточно интенсивен в любой части системы. Если ускоритель питается от вибраторов с самовозбуждением, то, как будет показано в следующем разделе, интенсивность сигнала может быть мала по сравнению с мощностью, отдаваемой вибраторами. В любом из запроектированных в настоящее время ускорителей для отправки фазирующего сигнала можно просто воспользоваться одним из вибраторов с самовозбуждением. С помощью соответствующих разветвлений на выходе излучаемую им мощность можно направить во все короткие секции ускорителя. Сигнал должен быть послан заблаговременно до включения остальных вибраторов, так чтобы все они были сфазированы до того, как поле установится. При необходимости отделить фазирующий контур от большой мощности в ускорителе между ними можно поставить защитный переключатель. Судя по экспериментам в МТИ, вибраторы с самовозбуждением, питающие отдельные короткие секции ускорителя, вполне могут быть сфазированы таким способом. В случае, когда ускоритель питается от усилителей мощности, любой из них может подать фазирующий сигнал описанного типа. Поставив несколько усилительных каскадов, можно довести интенсивность сигнала до необходимой величины. В настоящее время не существует высоко-частотных усилителей мощности, хотя в принципе можно построить мощные клистроны или резонаторы и использовать их в качестве усилителей мощности; вполне возможно, что отдача мощности у них будет не меньше, чем у современных мощных магнетронов.

Выше уже упоминалось, что в Стэнфорде в дальнейшем предполагают использовать клистронные усилители мощности. В Йельском проекте применены триодные усилители мощности при частоте 568 мегациклов (что весьма близко к максимальной частоте, на которой такие усилители могут работать).

Из нашего рассмотрения ясно, что основную часть проблемы питания ускорителя от вибраторов с самовозбуждением составляет фазировка последних. Она осуществляется либо путём посылки сигнала от одного из вибраторов, что имеет место, когда много вибраторов работает на один короткий ускоритель, либо с помощью фазирующего сигнала, посланного извне, как в длинном ускорителе. Мы рассмотрим теперь эту проблему и покажем, что при соответствующих условиях вибратор с самовозбуждением можно сфазировать слабым внешним сигналом.

Х. ПИТАНИЕ ОТ ВИБРАТОРОВ С САМОВОЗБУЖДЕНИЕМ

Проблема питания резонансного контура от вибратора с самовозбуждением, равно как и проблема фазировки вибраторов с помощью внешнего сигнала, подробно рассматривалась автором в другом месте ³²; мы воспроизведём здесь основные пункты рассуждений. Прежде всего, рабочая частота вибратора с самовозбуждением определяется собственной частотой промежуточного контура или резонансной полости согласно следующему основному уравнению:

$$\frac{g + ib}{C\omega_0} = i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} (G + iB). \quad (15)$$

Рассмотрим входящие сюда величины. Во всяком вибраторе происходит некоторый электронный разряд. Он вызывается радиочастотным напряжением, генерируемым самим вибратором, и представляет собой ток соответствующей частоты. Величина $g + ib$ обозначает соответствующую полную проводимость, т. е. отношение разрядного тока к напряжению; g и b суть, соответственно, омическая и реактивная проводимости. Поскольку в электронном разряде зависимость тока от поля нелинейная, $g + ib$ является функцией напряжения. В действительности одна из компонент тока в вибраторе обычно находится в фазе с напряжением, убывая с ростом последнего; поэтому g является совершенно определённой монотонно убывающей функцией напряжения, b также является функцией напряжения. Вид этой функции нас не интересует, заметим только, что коль скоро g и b однозначно определяются напряжением, последнее можно исключить и получить функциональную зависимость между g и b . Другие величины, входящие в уравнение (15), суть параметры контура. Можно показать, что полная электронная проводимость $g + ib$ шунтируется параллельно включённым контуром. Помножим уравнение (15) на $C\omega_0$, где C - ёмкость этого контура, ω_0 - его собствен-

ная частота. Мы видим, что первый, второй и третий члены справа принимают вид:

$$iC\omega, -iC\frac{\omega_0^2}{\omega} = \frac{1}{iL\omega} \left(\text{так как } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right) \text{ и } \frac{C\omega_0}{Q_0},$$

т. е. они представляют собой, соответственно, ёмкостную, индуктивную и омическую проводимость контура (Q_0 определяет потери в ненагруженном контуре). Остальные члены описывают полную проводимость нагрузки, приключенной к вибратору: G и B представляют её омическую и реактивную проводимости (написанные в безразмерном виде), а «внешняя добротность» Q_{ext} описывает связь вибратора с нагрузкой (по определению Q_{ext} мало, если связь велика, и наоборот). Теперь можно определить зависимость рабочих свойств магнетрона от внешней нагрузки. Разделим уравнение (15) на действительную и мнимую части. Первая из них определяет омическую проводимость вибратора g как функцию проводимости нагрузки G и параметров контура. Поскольку между g и радиочастотным напряжением существует, как мы видели, функциональная зависимость, мы можем найти вольтаж в функции G . Отсюда в свою очередь определяется b . После этого мнимая часть уравнения (15) даёт частоту как функцию b и реактивной проводимости нагрузки B . Предполагая для простоты, что $b = 0$, мы получим (для ω не слишком далёких от ω_0):

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{B}{2Q_{\text{ext}}}. \quad (16)$$

Таким образом, рабочая частота отличается от собственной частоты промежуточного контура на величину, пропорциональную индуктивной проводимости нагрузки; при этом изменение частоты (так называемое затягивание частоты) тем меньше, чем больше Q_{ext} , т. е. чем меньше связь между вибратором и нагрузкой. На практике Q_{ext} обычно невелико. Так, например, в обычных магнетронах, работающих на частоте 3000 мегациклов, Q_{ext} бывает порядка 100. Следовательно, внешняя нагрузка с разумным значением индуктивной проводимости может вызвать немалое затягивание частоты.

Обратимся теперь к работе вибратора с самовозбуждением на резонансную нагрузку, роль которой может играть, например, полость короткого линейного ускорителя, работающего на стоячих волнах. В этом случае $G + iB$ представляет собой полную входную проводимость резонансной нагрузки, выраженную в безразмерных единицах и приведённую к соответствующему основному уровню в магнетроне. Она очень сильно зависит от частоты, так что последняя входит и в действительную и в мнимую части уравнения (15), решение которого поэтому нужно искать более тонкими методами. Чаще всего пользуются комплексной плоскостью, в которой начерчены графики

правой части (15) для всех частот и левой — для всех значений вольтажа. Пересечение этих двух кривых определяет и рабочую частоту и вольтаж. Для примера на рис. 7 показан случай, который действительно осуществляется в проекте ускорителя МТИ. Нагрузкой здесь служит параллельный резонансный контур, включённый последовательно с сопротивлением. На практике его можно осуществить в виде резонансной полости, поставив на выходе её подходящий трёхполюсник (один конец которого надо приключить к сопротивлению, а другой — достаточно длинный — к вибратору). На рис. 7

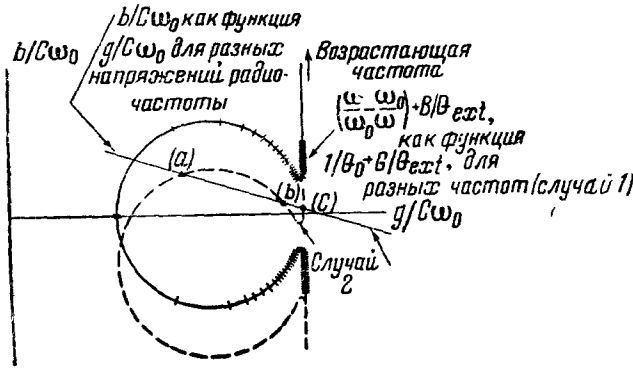


Рис. 7. Определение рабочих характеристик магнетрона, работающего на резонансную нагрузку. Чёрточки на кривой $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{B}{Q_{ext}}$ в функции $\frac{1}{Q_0} + \frac{G}{Q_{ext}}$ соответствуют одинаковым приращениям частоты.

показаны два случая: 1) резонансная полость настроена точно на частоту магнетрона; 2) частота резонансной полости слегка отличается от магнетронной. Мы видим, что в первом случае кривые, представляющие правую и левую части уравнения (15), пересекаются только один раз, в то время как в случае (2) имеются три точки пересечения; одна из них соответствует частоте, близкой к резонансной, другие две — смещённым частотам. Чтобы выяснить смысл этих трёх точек пересечения, рассмотрим процесс возбуждения колебаний. Для исследования нестационарного состояния удобно ввести комплексную частоту, действительная часть которой является обычной частотой колебаний, а мнимая — характеризует скорость установления стационарного режима. Кривая, изображающая правую часть уравнения (15), есть геометрическое место точек, соответствующих действительным частотам; во всей остальной плоскости частоты являются комплексными. Если двигаться по кривой действительных частот в направлении возрастания частоты, то справа будет область возра-

стания амплитуды, а слева — область затухания. Теперь легко исследовать процесс возбуждения колебаний. Как уже было отмечено, при возрастании напряжения величина g уменьшается, т. е. точка на кривой $g(b)$ сдвигается влево. Вначале, когда напряжения ещё очень мало, мы находимся далеко вправо от точки пересечения этой кривой с кривой действительных частот. По мере того, как вольтаж возрастает, мы движемся влево по кривой $g(b)$ и, наконец, приближаемся к кривой действительных частот. Скорость нарастания поля при этом непрерывно уменьшается, и, наконец, в точке пересечения устанавливается стационарный режим. В случае 1 это состояние устойчиво, ибо, как видно на рис. 7, малое смещение влево от точки пересечения, соответствующее увеличению напряжения, приводит нас в область затухания амплитуд, в результате чего вновь восстанавливается равновесное значение вольтаж. К тому же приводит и небольшое смещение вправо по кривой $g(b)$, так как мы попадаем тогда в область нарастания амплитуды. В случае 2 точки a и c обладают такими же свойствами, но точка b описывает неустойчивый режим: небольшое смещение вправо от неё, соответствующее уменьшению вольтаж, приводит нас в область затухания амплитуды, поэтому система не возвращается в исходное состояние, а непрерывно движется направо по кривой $g(b)$, пока не придёт в точку c . Аналогично, небольшое смещение влево от b приводит систему в точку a . Итак, две точки пересечения описывают устойчивый стационарный режим, одна — неустойчивый.

Теперь надлежит выяснить, какой именно из двух возможных режимов колебаний — a или c — устанавливается при заданных условиях. Ответ ясен: если начальная амплитуда мала, т. е. если изображающая точка двигалась по кривой $g(b)$ справа налево, то установится состояние, описываемое точкой c . При этом, однако, резонансная полость слабо возбуждена, а большая часть энергии заключена в самом вибраторе, что для нас бесполезно. По мере того, как полость настраивается на частоту вибратора, или, наоборот, вибратор — на частоту полости, кривые рис. 7 сдвигаются вверх или вниз (от случая (1) к случаю (2)); величина вертикального смещения служит мерой настройки. Таким образом, интересующие нас резонансные колебания полости возбуждаются лишь в небольшой области частот, в которой кривая $g(b)$ проходит через довольно узкое отверстие (горло) резонансной кривой. Этот интервал частот можно увеличить, последовательно вводя в цепь сопротивление, в результате чего горло резонансной кривой расширится. При конечном расстоянии между магнетроном и полостью горло резонансной кривой сжимается по мере уменьшения сопротивления цепи; если последнее слишком мало, то система вообще не может работать в резонансном режиме. В то же время при значительном сопротивлении цепи допустимый интервал частот довольно велик, но зато возрастают и омические потери.

Мы видим, что в процессе установления колебаний автоматически стабилизируется частота вибратора. В самом деле, чёточки на кривой действительных частот, отмечающие равные приращения частоты, в резонансной области очень далеко отстоят друг от друга. Поэтому частота меняется лишь очень незначительно, когда в процессе настройки вибратора кривая действительных частот сдвигается вверх или вниз относительно кривой $g(b)$. Рабочая частота должна лежать внутри полосы пропускания резонансной полости, и, если добротность полости порядка нескольких тысяч (как это будет в случае линейного ускорителя), то частота вибратора будет соответствующим образом стабилизирована. Это обстоятельство очень важно, так как, вообще говоря, нелегко точно настроить вибратор на заданную частоту и стабилизировать её; резонансная же полость нашего типа обеспечивает нужное значение частоты автоматически.

Дело в том, что, когда частота вибратора слегка отклоняется от резонансной, очень возрастает реактивная проводимость резонатора; в результате происходящего отсюда затягивания частота вибратора возвращается к резонансному значению.

Мы рассмотрели работу вибратора с самовозбуждением как на резонансную, так и на не резонансную нагрузку и установили, что во втором случае частота вибратора определяется промежуточным контуром; в случае же резонансной нагрузки большой добротности, настроенной примерно на ту же частоту, что и промежуточный контур, рабочая частота стабилизируется именно нагрузкой. Это, однако, верно только если в цепь введено надлежащее сопротивление, ибо, как обычно в случае двух резонансных контуров с близкими частотами, мы имеем здесь два нормальных колебания, одно из которых можно исключить надлежащим выбором сопротивления. Посмотрим теперь, как работает вибратор с самовозбуждением при наличии внешнего сигнала с частотой, близкой к резонансной.

Внешний сигнал, вводимый через выходную линию вибратора и обладающий точно рабочей частотой последнего, неотличим от отражённой волны. Следовательно, его можно учесть, введя в коэффициент отражения (т. е. в импеданс нагрузки) поправочный член, пропорциональный отношению амплитуд сигнала и собственных колебаний вибратора; иными словами, в правой части уравнения (15) появляется ещё один член с произвольной фазой, по порядку величины равный Q_{ext}^{-1} , помноженной на отношение амплитуд сигнала и колебаний вибратора. Он оказывает на вибратор такое же действие, как и всякая другая омическая или реактивная нагрузка, в частности, может затягивать частоту согласно формуле (16). Если при некоторой разности фаз поправочный член достаточно велик, то вибратор, первоначально работавший на частоте, несколько отличной от частоты сигнала, может быть при определённом соотношении фаз синхронизован с последним. Исследование процесса включения внешнего сигнала^{3а} показывает, что это явление действительно

имеет место: как только сигнал достигает вибратора, разность фаз между ними начинает приближаться к значению, при котором происходит упомянутое затягивание частоты, и, спустя очень короткий промежуток времени, наступает стационарный режим — вибратор входит в синхронизм с внешним сигналом (при этом фазовый угол между их колебаниями тем больше, чем больше первоначальная разность частот).

Таким образом, можно связать вибратор с внешним сигналом, синхронизовав их частоты. Это можно осуществить даже с помощью сравнительно слабого сигнала.

Пусть, например, $Q_{ext} = 100$, и отношение амплитуд колебаний сигнала и вибратора равно $1/10$ (следовательно, отношение мощностей $= 1/100$). Тогда из уравнения (16) видно, что максимально возможное изменение частоты вибратора составляет около $1/2000$. Если начальная разность частот сигнала и вибратора меньше этого значения, то в стационарном состоянии соответственно уменьшится разность фаз между ними.

Положение меняется, если частота вибратора, кроме того, ещё стабилизирована резонансной полостью; как мы видели, в этом случае магнетрон ведёт себя в отношении затягивания частоты так, как если бы он обладал добротностью нагрузки, а не нормальным значением Q_{ext} . Здесь «связывание» вибратора с сигналом происходит в весьма небольшом интервале частот; однако, большего и не требуется, так как вибратор уже довольно точно настроен на нужную частоту с помощью резонансной полости. Если частота внешнего сигнала близка к центру резонансной полосы стабилизирующей полости, то он всё же сможет ввести вибратор в синхронизм. Даже если сигнал слабее, чем нужно для установления синхронизма, всё же можно будет заставить вибратор заработать в фазе с ним, и это положение в дальнейшем не изменится просто потому, что частоты сигнала и вибратора достаточно близки. Пока колебания вибратора только устанавливаются, их амплитуда, естественно, меньше, чем в стационарном состоянии; соответственно увеличивается отношение амплитуд колебаний сигнала и вибратора, т. е. возрастает поправка к полной проводимости, и оказывается возможным большее затягивание частоты. Так, во время войны было найдено¹², что магнетрон можно заставить работать в фазе с сигналом, мощность которого в 10^4 раз меньше мощности, излучаемой магнетроном в стационарном режиме. Далее, два вибратора, стабилизированные резонансными полостями, могут быть настроены столь близко друг к другу, что за время прохождения импульса, с которым мы имеем дело в линейном ускорителе, они не выйдут из фазы более чем на малую долю периода. Следовательно, можно устроить так, что если два вибратора под действием сравнительно слабого импульса раз заработали в фазе друг с другом, то они и впредь будут работать в фазе.

До сих пор мы говорили о фазировке вибратора с помощью сигнала извне. Рассмотрим теперь фазировку одного вибратора другим.

Пусть у нас имеется резонансная полость, вроде трубы короткого линейного ускорителя, питающаяся от ряда вибраторов, которые, таким образом, все связаны друг с другом. Если полость короткая, то время, за которое сигнал проходит от одного вибратора до другого, мало по сравнению со временем установления поля в полости. Тогда каждый вибратор посылает другим сигнал, который можно использовать для фазировки. Поскольку связь между вибраторами в данном случае очень сильна, их фазы будут очень строго согласованы. В самом деле, более тщательное исследование показывает, что если рабочие частоты вибраторов достаточно близки к частоте полости, так что фазы их связаны с фазой колебаний в полости, то мощность сигнала, получаемого каждым из них, более чем достаточна для фазировки. Здесь есть только одна трудность: в самом начале работы — сразу после посылки сигналов, — наступает короткий период смятения и беспорядка, когда каждый вибратор стремится установить именно свою фазу. Этой трудности можно избежать, отправив фазирующий сигнал до начала работы — либо извне, либо включив один из вибраторов раньше других. Тогда все вибраторы сразу начнут работать в фазе. В дальнейшем этот режим поддерживается весьма удовлетворительно.

Из всего, что мы видели в этом разделе, как будто бы вытекает, что можно питать длинный линейный ускоритель от вибраторов с самовозбуждением. Это осуществляется следующим образом: с помощью реальных или фиктивных поверхностей ускоритель подразделяется на ряд коротких секций. В каждую из них пускается фазирующий сигнал от импульсного вибратора, питающего все секции (естественно, длина соединительных линий должна быть выбрана с учётом запаздывания — так, чтобы выполнялись необходимые фазовые условия). Таким образом, оказывается, что каждая секция питается от целого набора вибраторов, отпираемых поочерёдно, спустя короткие промежутки времени после отправления фазирующего сигнала.

Соответственно, в секциях будут возбуждены колебания, синхронизованные с фазирующим сигналом, и фазы их будут согласованы друг с другом. Частота колебаний стабилизируется резонансной полостью (если речь идёт об ускорителе со стоячими волнами), и если все короткие секции достаточно хорошо настроены на одну и ту же частоту, все они будут работать в фазе во всё время прохождения импульса.

Ясно, что точная настройка секций играет существенную роль. В следующем разделе мы рассмотрим вопрос о допустимых отклонениях частоты, дабы увидеть, возможно ли осуществить настройку секций длинного ускорителя с требуемой степенью точности.

XI. ДОПУСКИ В ДЛИННОМ УСКОРИТЕЛЕ

Для того чтобы электрон или ион мог резонировать с какой-нибудь Фурье-компонентой поля, последняя должна распространяться с определённой скоростью. В последующих разделах мы увидим, что при ускорении положительных ионов, скорость которых почти при всех энергиях значительно меньше скорости света, образуются устойчивые группы частиц, движущихся вместе с полем. Поэтому здесь нет необходимости очень точно фиксировать скорость волны. Но электроны во всех интересных случаях практически достигают скорости света в самом начале ускорителя и в дальнейшем движутся с этой скоростью. Следовательно, столь же быстро должна распространяться в трубе прибора и ускоряющая электромагнитная волна. Далее, если фаза волны на конце ускорителя заметно отличается от требуемого значения, то необходимое соотношение фаз волны и электронов не сможет установиться, и ускоритель не будет работать как следует. Таким образом, возможны лишь малые отступления от правильного значения фазы; соответственно предъявляются большие требования к стабилизации частоты и к точности подгонки размеров прибора. В настоящем разделе мы исследуем эти требования подробнее и посмотрим, могут ли они быть удовлетворены. Положение существенно зависит от того, какой тип ускорителя рассматривается. Трудности велики только для длинных приборов. Поэтому начнём наше рассмотрение с длинного ускорителя, разбитого на ряд коротких резонирующих секций, фазируемых специальным контуром. Сначала рассмотрим требования, предъявляемые к отдельным коротким секциям, а затем уже перейдём к условиям, которые накладываются на их относительную фазировку. Каждая секция имеет хорошо определённую собственную частоту; ширина резонансного пика относится к самой частоте, как $\frac{1}{Q_0}$. Заметим, прежде всего, что нет необходимости контролировать частоту сигнала с точностью, превышающей эту величину. Причину этого можно понять, рассмотрев продолжительность импульса. Как уже отмечалось, большая часть времени распространения импульса уходит на установление колебаний. Время, потребное электрону или иону для того, чтобы пройти весь ускоритель после того, как поле установилось, невелико по сравнению со временем установления колебаний. Но, как известно, спектр короткого импульса монохроматических колебаний размыт, причём ширина линии обратно пропорциональна числу волн в цуге. Последнее в нашем случае порядка Q_0 (так как это есть число периодов, необходимое для установления поля в полости). Таким образом, спектральная ширина импульса сравнима с шириной резонансной линии полости. Но полость, работающая как стабилизатор частоты, может удерживать частоту вибратора в пределах, значительно меньших ширины резонансной полосы. Поэтому

должно быть легко стабилизировать частоту с необходимой степенью точности.

Возможно, однако, что собственная частота полости будет несколько отличаться от нужного значения; неправильная связь частоты с длиной волны поведёт, естественно, к неверной величине скорости. Практически можно построить короткую секцию, собственная частота которой (при заданной длине секции) будет отличаться от правильного значения примерно на две — три сотых процента. Для наших целей этого недостаточно, так как при Q_0 порядка 18000 (как это имеет место в ускорителе МТИ) относительная ширина полосы оказывается меньше этого значения. Поэтому необходимо в каждую короткую секцию ввести специальный контур настройки, чтобы подправить её частоту. Проверка настройки весьма проста. Нужно только, создав сигнал точно требуемой частоты, посылать его отдельными импульсами в одну из секций и наблюдать, не будет ли биений между двумя сигналами за время распространения импульса. Если биений не будет, значит данная секция и питающие её вибраторы с требуемой степенью точности настроены на данную частоту. Ясно, далее, что если все секции настроены таким образом, то, раз начав работать в фазе друг с другом, они с требуемой степенью точности не выбьются из фазы за время распространения импульса. А большего и не требуется. Практически нетрудно настроить стабилизированные вибраторы с такой степенью точности, и время от времени поддерживать настройку.

Рассмотрим теперь, как можно согласовать работу коротких секций, далеко отстоящих друг от друга — скажем, находящихся на противоположных концах длинного ускорителя. Ясно, что если длина ускорителя во много тысяч раз больше длины волны, то ошибка в небольшую долю последней будет действительно ничтожна. Поскольку случайные ошибки взаимно компенсируются, должно оказаться возможным построить такую трубу с ошибкой в несколько сотых долей полной длины прибора. Ошибку в полной длине ускорителя можно ещё скомпенсировать соответственным изменением собственной частоты, которое можно осуществить, снабдив каждую секцию контуром настройки. Допустим для определённости, что в приборе возбуждены колебания типа π (как это имеет место в ускорителе МТИ). Тогда расстояние между соседними диафрагмами равно половине длины волны, и полное число полуволн, укладываемых в трубу, можно найти простым подсчётом. Можно быть уверенным, что при том способе работы, который мы предлагаем, колебания каждой короткой секции будут принадлежать к типу π . Поэтому рабочая длина волны равна длине прибора, делённой на число полуволн. Теперь, зная скорость света, легко определить необходимую частоту и, с помощью отдельных для каждой секции контуров настройки, настроить на неё все короткие секции.

Описанным образом нетрудно с необходимой степенью точности построить ускоритель, состоящий из коротких резонансных секций, частота и фаза каждой из которых регулируются независимо. Как мы видели, в таком контуре автоматически обеспечивается достаточно чувствительная стабилизация частоты питающих вибраторов. Положение, однако, совершенно меняется, если мы перейдем к системе с бегущими волнами. Здесь уже нет резонансной полости, которая бы стабилизировала частоту. Пользуясь вибраторами с самовозбуждением, мы должны либо полагаться на постоянство частоты вибраторов, самих по себе, либо воспользоваться какими-то отдельными стабилизирующими полостями. В последнем случае вся конструкция очень усложняется, и многие преимущества системы с бегущими волнами теряются. Если же этого не делать, то возникает весьма серьезный вопрос: можно ли настроить вибраторы так точно, чтобы они были синхронизованы во всё время распространения импульса и сфазированы начальным сигналом? Частота колебаний в магнетроне зависит от его температуры и условий работы, а их трудно контролировать. Поэтому автору кажется практически необходимым иметь стабилизирующую полость, которая сглаживала бы флуктуации частоты, происходящие из-за изменений температуры и других причин. Знаменательно, что в отчётах английской группы (Т. Р. Е.), проектирующей ускоритель с бегущими волнами, питающийся от магнетрона, изменение частоты указывается в качестве одной из причин, ограничивающих возможную длину прибора. Предполагаемые там изменения частоты значительно больше тех, с которыми мы встречаемся в случае стабилизации частоты резонирующим ускорителем. Это обстоятельство серьезно лимитирует английские оценки максимального достижимого ускорения. Другая возможность состоит в том, чтобы питать ускоритель от усилителей мощности, контролируя частоту их с помощью хорошо отрегулированного фазированного сигнала. Этот метод питания длинного ускорителя с бегущими волнами представляется автору единственным, имеющим шансы на успех. Это мнение разделяется и группой в Стэнфорде, связывающей свои планы с использованием мощного клистронного усилителя мощности, который ещё надлежит построить.

В случае ускорителя, работающего на бегущих волнах, возникает ещё одна проблема: здесь нельзя разбить трубу на физически отделённые друг от друга короткие секции. Поэтому теряется возможность лёгкой проверки резонансной частоты отдельной секции. Нельзя также синхронизировать секции друг с другом с помощью отдельных контуров настройки. Конечно, в процессе постройки прибора можно ограничить каждую секцию отражающими стенками, проверить её собственную частоту, и синхронизовать секции с помощью контуров настройки, периодически введённых в волновол. Однако, после сборки прибора это уже невозможно. Вероятно, для опробования уже готового прибора удобнее всего будет посылать

сигнал параллельно основной линии (таким сигналом может служить бегущая в коаксиальной линии волна), и сравнивать фазы волны в сигнале и в ускорителе в различных точках вдоль линии. Этот способ, хотя и более сложный, чем применяемый в случае стоячих волн, вероятно всё же окажется возможным. Если бы в настоящее время существовали мощные клистронные усилители, то вполне возможно, что ускорители с бегущими волнами оказались бы самыми выгодными, так как они дают некоторый выигрыш в ускорении. С другой стороны, поскольку фактически мощных клистронов сейчас нет, а есть мощные магнетроны, то проблема фазировки и стабилизации частоты гораздо проще решается в случае ускорителей, работающих на стоячих волнах. Именно поэтому в проекте МТИ рассматривается этот последний тип.

ХII. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЕ

До сих пор мы говорили только о механизме установления ускоряющего поля и о свойствах прибора. Рассмотрим теперь задачу о движении частиц в этом ускоряющем поле. Разобьём её на две части: во-первых, исследуем продольное движение частиц параллельно оси ускорителя; во-вторых, поперечное движение и проблемы фокусировки. Далее, рассматривая только продольное движение, мы опять разделим задачу на две части, а именно, движение во внешнем поле, распространяющемся с постоянной и переменной скоростью. До сих пор везде предполагалось, что свойства трубы волновода не меняются от точки к точке, так что резонирующая волна распространяется с неизменной скоростью. Это предположение, разумеется, справедливо для частиц, движущихся со скоростью света; однако в случае положительных ионов или электронов, скорость которых ещё не достигла скорости света, волна должна ускоряться соответственно ускорению частицы.

Мы уже видели, что при постоянной скорости частицы имеет значение только одна из плоских волн, на которые раскладывается поле. Эффект, производимый всеми остальными компонентами Фурье, пропадает при усреднении по периоду. Продольная (т. е. параллельная оси z) составляющая электрического поля этой волны имеет вид:

$$E_z = E \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right),$$

где ω — резонансная частота, v_0 — фазовая скорость. Это — значение, которое поле принимает на оси z (в данный момент мы интересуемся только им). Уравнение движения частицы с зарядом e и массой покоя m_0 в этом поле будет:

$$\frac{dp}{dt} = eE \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right),$$

где импульс p даётся выражением:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad v = \frac{dz}{dt}.$$

Удобно ввести систему координат, движущуюся со скоростью бегущей волны v_0 . Для z' — смещения частицы в этой системе координат — мы имеем: $z' = z - v_0 t$.

Теперь можно записать в гамильтоновой форме уравнение движения в этой системе координат. На эту возможность указал автору:

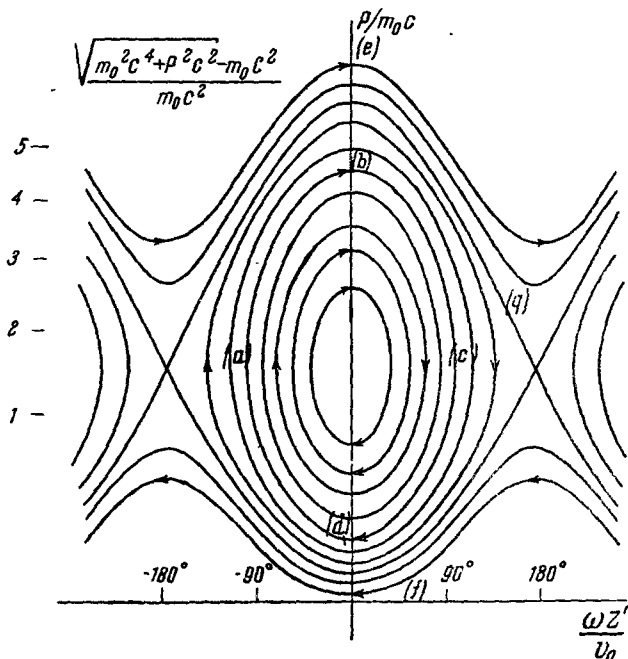


Рис. 8. Фазовое пространство для $v_0 = \frac{c}{2}$.

д-р Мэзон из МТИ; подобный же метод применялся и в работах Т. Р. Е. Введём гамильтонову функцию

$$H = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - p v_0 - e E \frac{v_0}{\omega} \cos \omega \frac{z'}{v_0}. \quad (17)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что уравнение движения может быть переписано в виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z'}; \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Это — уравнения Гамильтона с гамильтоновой функцией, не зависящей явно от времени.

Они показывают, что H остаётся постоянным при движении частиц. Следовательно, прямые $H = \text{const.}$, проведённые в фазовой плоскости (z', p) , дают соотношение между координатой и импульсом движущейся частицы. Отсюда определяется скорость частицы в любой точке её траектории. На рис. 8 изображено фазовое пространство частицы, движущейся со скоростью $v_0 =$

$= \frac{c}{2}$; позднее, на рис. 9,

мы обсудим и случай $v_0 = c$.

По оси абсцисс отложена безразмерная величина $\frac{\omega z'}{v_0}$,

возрастающая на 2π , когда мы продвигаемся вдоль оси z на одну длину волны. В качестве ординаты используется безразмерная величина $\frac{p}{m_0 c}$.

Мы даём также шкалу величины $\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2$ —

т. е. обычной кинетической энергии, выраженной в функции энергии покоя $m_0 c^2$.

Кривые энергии проведены для постоянных значений безразмерной величины $\frac{H}{m_0 c^2}$.

Как видно из уравнения (17), гамильтонова функция содержит некий параметр, который в безразмерной форме имеет вид $\frac{eE}{m_0 c^2} \cdot \frac{v_0}{\omega}$.

Физический смысл его легко усмотреть. Пусть λ_g — длина резонирующей волны, распространяющейся со скоростью v_0 . Тогда $\frac{v_0}{\omega} = \frac{\lambda_g}{2\pi}$, и наш параметр, очевидно, представляет (в долях $m_0 c^2$) энергию, которую частица, испытывающая максимальное ускорение, приобретает на пути длины $\frac{\lambda_g}{2\pi}$.

На рис. 8 эта величина принята равной 0,10; это совпадает по порядку величины с тем, что реально можно получить в ускорителе МТИ.

Рассматривая рис. 8, мы замечаем прежде всего ряд замкнутых овальных кривых, представляющих периодические орбиты. Они окружают точки, в которых потенциальная энергия, входящая в гамильтонову функцию (17), имеет минимум, а импульс равен импульсу частицы, движущейся со скоростью v_0 .

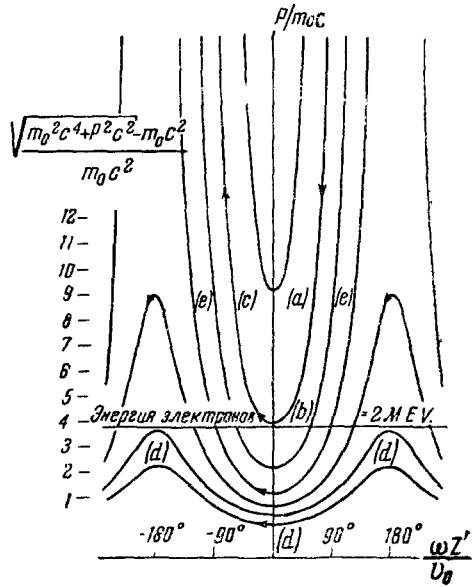


Рис. 9. Фазовое пространство для $v_0 = c$.

Рис. 9. Фазовое пространство для $v_0 = c$. На рис. 9 изображено фазовое пространство частицы, движущейся со скоростью $v_0 = c$. По оси абсцисс отложена безразмерная величина $\frac{\omega z'}{v_0}$, возрастающая на 2π , когда мы продвигаемся вдоль оси z на одну длину волны. В качестве ординаты используется безразмерная величина $\frac{p}{m_0 c}$. Мы даём также шкалу величины $\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2$ — т. е. обычной кинетической энергии, выраженной в функции энергии покоя $m_0 c^2$. Кривые энергии проведены для постоянных значений безразмерной величины $\frac{H}{m_0 c^2}$. Как видно из уравнения (17), гамильтонова функция содержит некий параметр, который в безразмерной форме имеет вид $\frac{eE}{m_0 c^2} \cdot \frac{v_0}{\omega}$. Физический смысл его легко усмотреть. Пусть λ_g — длина резонирующей волны, распространяющейся со скоростью v_0 . Тогда $\frac{v_0}{\omega} = \frac{\lambda_g}{2\pi}$, и наш параметр, очевидно, представляет (в долях $m_0 c^2$) энергию, которую частица, испытывающая максимальное ускорение, приобретает на пути длины $\frac{\lambda_g}{2\pi}$. На рис. 8 эта величина принята равной 0,10; это совпадает по порядку величины с тем, что реально можно получить в ускорителе МТИ.

Рассматривая рис. 8, мы замечаем прежде всего ряд замкнутых овальных кривых, представляющих периодические орбиты. Они окружают точки, в которых потенциальная энергия, входящая в гамильтонову функцию (17), имеет минимум, а импульс равен импульсу частицы, движущейся со скоростью v_0 .

Сила, действующая на частицу в этих движущихся точках устойчивого равновесия, равна нулю. Выходя из такой точки, частица испытывает силу, возвращающую её в прежнее положение. Иначе говоря, в данной точке пространства и в данный момент времени сила равна нулю, но возрастает по мере продвижения волны. Частица, отстающая от устойчивого положения, будет ускоряться, пока её скорость не сделается больше v_0 . Тогда она обгонит волну, и на неё начнёт действовать замедляющая сила, в результате чего скорость частицы уменьшится до v_0 и ниже, частица опять отстанет и т. д. Мы получим цикл, изображённый на рис. 8 (точки a, b, c, d). Иными словами, точка фазового пространства, изображающая частицу, описывает замкнутую кривую, двигаясь по часовой стрелке.

С другой стороны, возможны орбиты типа кривой e рис. 8. Они соответствуют столь большой скорости частицы, что, невзирая на замедление, она все же обгоняет волну, переходя от одного минимума потенциальной энергии к другому, и т. д. Существуют также орбиты противоположного типа (кривая f), соответствующие очень малой скорости частицы — такой, что последняя всё время отстаёт от волны. Кривая g представляет предельный случай перехода от периодической орбиты к одному из двух последних случаев. Она проходит через точку неустойчивого равновесия, отвечающую движению со скоростью v_0 , но со сдвигом фазы на π по сравнению с положением устойчивого равновесия. В этой точке сила, действующая на частицу, также равна нулю, но она не возрастает, а убывает со временем, так что частица, раз обогнавшая волну, попадает в ускоряющее поле и уходит всё дальше и дальше; таким же образом раз отставшая частица отстаёт всё больше и больше. Мы видим, что исследуемое движение физически подобно движению маятника, в котором частица под действием постоянной вертикальной силы колеблется в вертикальной плоскости на заданном расстоянии от оси. В маятнике движения небольшой амплитуды являются периодическими, в то время как при достаточно большой энергии частица описывает круги, замедляясь в верхней точке орбиты, но не меняя направления движения. Здесь также есть предельная орбита, проходящая через положение неустойчивого равновесия; последнее соответствует тому случаю, когда скорость частицы в верхней точке орбиты равна нулю; испытав бесконечно малый сдвиг, частица пойдёт вниз, сделает круг и вновь остановится наверху; для этого, однако, требуется бесконечно большое время. Мы покажем, что это сходство с маятником отнюдь не является поверхностным, а заложено в самой сути дела. Аналогию с маятником можно использовать для получения некоторых результатов относительно периодов и амплитуд колебаний, а также других свойств нашего движения. Так, для малых амплитуд (т. е. для небольших овалов на рис. 8) период колебаний не зависит от амплитуды, но для больших амплитуд период возрастает, обращаясь в бесконечность для только что рассмотренной предельной орбиты.

Переходя затем к аperiodическим орбитам (соответствующим круговому движению маятника), мы видим, что время обращения, бесконечно вблизи предельной орбиты, постепенно уменьшается по мере удаления от кривой g ; когда скорость частицы становится много больше v_0 (что соответствует быстрому вращению маятника), периодическое поле можно рассматривать как малое возмущение, и скорость частицы примерно постоянна. Отсюда легко найти период обращения.

Эту аналогию можно продолжить и использовать для расчёта периодов и амплитуд, если подходящим образом переписать наши формулы. Единственное, что отличает нашу задачу от проблемы маятника, это релятивистское изменение массы. Например, за период колебаний энергия частицы меняется от максимума до минимума. Если это изменение энергии достаточно велико, чтобы вызвать заметное изменение массы, то наша задача существенно отличается от проблемы маятника. Однако её можно свести к последней, если изменение массы мало. Математически это выражается следующим образом: пусть

$$v' = \frac{dz'}{dt} = v - v_0.$$

Разложим импульс p по степеням v' . Мы получим:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{m_0 v_0}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} + \frac{m_0 v'}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \dots = \\ &= p_0 + m_l v' + \dots = p_0 + p' + \dots, \end{aligned}$$

где $m_l = m_0 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ — продольная масса. Таким же образом разложим и гамильтонову функцию (17). При этом, как нетрудно видеть, ряд нужно оборвать не на втором, а на третьем члене, однако ответ получается весьма простой:

$$H = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{p'^2}{2m_l} - eE \frac{v_0}{\omega} \cos \frac{\omega z'}{v_0} \quad (18)$$

или

$$H = H_0 + H',$$

где H_0 — первый член (18), а H' включает всё остальное. В этих обозначениях уравнения движения принимают вид:

$$\frac{dp'}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial z}; \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'}.$$

Это — как раз уравнения колебаний частицы массы m_1 в поле $-eE \sin \frac{\omega z'}{v_0}$, т. е. уравнения маятника. Начертим теперь фазовое пространство частицы в переменных z' , p' . Положение равновесия на рис. 8 сдвинется при этом по направлению к оси абсцисс (оси z'), но не попадёт на неё; кривые $H' = \text{const.}$ будут очень похожи на кривые $H = \text{const.}$ рис. 8, с небольшими отличиями за счёт высших степеней v' .

Теперь можно в указанном приближении вывести ряд свойств нашей системы, пользуясь известным решением задачи о маятнике. Круговая частота малых колебаний даётся корнем квадратным из силовой постоянной, делённой на массу. Действующая на частицу сила в случае малых колебаний принимает вид $-eE \frac{\omega z'}{v_0}$ (синус заменён своим аргументом). Таким образом, круговая частота колебаний (обозначим её через ω_0) есть:

$$\omega_0 = \left[\frac{e}{m_0} E \frac{\omega}{v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{3/2} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Эта величина, конечно, не имеет ничего общего с круговой частотой волны ω . Можно вычислить также амплитуду колебаний частицы (в фазе электромагнитной волны, равной $\frac{\omega z'}{v_0}$), энергия которой (в движущейся системе координат) равна W . Легко видеть, что эта амплитуда определяется уравнением:

$$\frac{W}{m_0 c^2} = \frac{1}{2} \cdot (\text{амплитуда})^2 \cdot \frac{eE}{m_0 c^2} \frac{v_0}{\omega}.$$

Эта формула верна для малых колебаний, когда энергия пропорциональна амплитуде. Точность её при больших амплитудах можно оценить, рассмотрев предельный случай амплитуды, равной π . Мы имеем в этом случае:

$$\frac{W}{m_0 c^2} = \frac{\pi^2}{2} \frac{eE}{m_0} \frac{v_0}{c^2 \omega},$$

в то время, как точная формула (18) даёт численный коэффициент 2.

Важно отметить, что W — энергия колебаний в движущейся системе координат — не равна изменению кинетической энергии частицы в покоящейся координатной системе. Легко показать, что полная кинетическая энергия даётся формулой

$$KE = KE_0 + m_1 v_0 v' + \dots,$$

где KE_0 — кинетическая энергия частицы, движущейся со скоростью v_0 .

Максимальное и минимальное значения кинетической энергии частицы, колеблющейся с данной амплитудой, суть:

$$KE = KE_0 + m_e v_0 \left(\frac{2W}{m_e} \right)^{1/2} = KE_0 \pm (\text{амплитуда}) \cdot m_0 c^2 \times \\ \times \frac{v_0}{c} \left[\frac{eE}{m_0 c^2 \omega} \frac{v_0}{\omega} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

В предельном случае орбиты, проходящей через положение неустойчивого равновесия, это даёт:

$$KE = KE_0 \pm 2m_0 c^2 \frac{v_0}{c} \left[\frac{eE v_0}{m_0 c^2 \omega} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Как следует из вывода, эти формулы верны только до тех пор, пока изменение кинетической энергии столь мало, что изменением массы частицы во время колебаний можно пренебречь. Из формулы (21) видно, что при $\frac{eE v_0}{m_0 c^2 \omega} = \frac{1}{10}$, как принято на рис. 8, это условие выполняется не слишком хорошо, но даже и в этом случае ошибка невелика. Конечно, формулы (20) и (21) дают изменение энергии, вызванное средней силой, действующей на частицу со стороны ускоряющего поля за полупериод, когда энергия частицы возрастает от минимального до максимального значения (оно определяется произведением средней силы на расстояние, которое частица со скоростью около v_0 проходит в поле за это время).

Рассмотрим теперь, как меняются кривые рис. 8 при изменении различных параметров. При изменении ускоряющего поля E овалы сжимаются или уширяются в вертикальном направлении. Как видно из уравнений (20) и (21), высота овалов при заданном значении v_0 пропорциональна $E^{1/2}$.

Картина, представленная на рис. 8, соответствует большому ускорению, которое можно получить в случае электронов. С другой стороны, уравнения (20) и (21) показывают, что для положительных ионов (при том же ускоряющем поле) овалы уширяются как корень квадратный из отношения масс электрона и иона. Это отвечает тому факту, что в заданном поле относительное изменение энергии ионов много меньше, чем у электронов, так как масса покоя последних гораздо меньше. Другим параметром, которым мы можем распоряжаться, является скорость волны v_0 . По мере того как она возрастает, происходит ряд изменений. Прежде всего, положение устойчивого равновесия безгранично сдвигается вверх. В самом деле, ордината этой точки определяется импульсом частицы со скоростью v_0 , а он обращается в бесконечность, когда v_0 приближается к скорости света. В то же время частота колебаний, определяемая по уравнению (19), стремится к нулю, т. е. период обращается в бес-

конечность. Это происходит потому, что когда v_0 приближается к c , даже очень большое изменение энергии (или импульса) частицы вызывает лишь весьма малое изменение скорости. Поэтому для того, чтобы из-за различия скоростей волны и частицы последняя отстала от положения равновесия и вновь опередила его, требуется очень большое время. С этим связано вертикальное удлинение овалов: ведь когда период колебаний очень возрастает, частица проходит в поле за период весьма большое расстояние (в покоящейся системе координат) и, следовательно, может за один цикл приобрести или потерять весьма значительную энергию. Очевидно, в этом предельном случае наш приближённый метод сведения задачи к проблеме маятника более неприменим.

Когда v_0 становится равным скорости света, точки равновесия уходят в бесконечность, и овалы более не являются замкнутыми. Чтобы получить в этом случае правильное решение, нужно вернуться к первоначальной, точной постановке задачи. На рис. 9 показаны те же кривые рис. 8, но для случая $v_0 = c$ (а не $v_0 = \frac{c}{2}$, как раньше).

Орбиты рис. 9 делятся на два, а не на три класса. Во-первых, мы имеем орбиты, движущиеся вместе с полем (подобные периодическим кривым рис. 8). Одна из них обозначена на рисунке буквами a, b, c . Она начинается в точке с конечным импульсом (т. е. со скоростью, меньшей скорости света) и потому сначала отстаёт от волны и попадает в ускоряющее поле. Однако частица никак не может достичь скорости волны, поэтому фазовая траектория изображающей точки асимптотически приближается к некоей вертикали, определённым образом сдвинутой по фазе относительно положения равновесия. Там частица остаётся неопределённо долго, продолжая приобретать энергию и импульс. Величина сообщаемой ей энергии зависит от фазы волны, связанной с асимптотическим положением частицы. Если эта асимптотическая фаза близка к $-\frac{\pi}{2}$ (т. е. к той фазе, где ускорение максимально), то частица будет неопределённо долго находиться в поле максимальной напряжённости E и, следовательно, приобретёт максимальную возможную энергию.

Помимо этих орбит, движущихся вместе с бегущей волной, в результате чего частицы в конце концов получают сколь угодно большую энергию, существуют ещё орбиты другого типа, подобные кривой d (рис. 9). Они отстают от волны, не обладая достаточной скоростью, чтобы поспевать за полем.

Естественно, орбиты третьего класса, опережающие поле, в данном случае отсутствуют. Кривая e рис. 9, фаза которой асимптотически стремится к $-\pi$, представляет граничный случай между двумя указанными выше типами. В фазе, равной нулю, она проходит через точку с некоторым минимальным импульсом (и, следовательно, минимальной кинетической энергией). Ни одна частица с энергией,

меньшей этого минимального значения, не может попасть на орбиту первого типа; для любой энергии больше минимальной можно найти фазу колебаний, при которой это возможно. Хотя формулы (20) и (21) в этом случае количественно уже неверны, мы всё же можем заключить по аналогии, что чем больше E , тем меньше будет эта минимальная кинетическая энергия. На рис. 9 она равна примерно 0,75 MeV.

До сих пор мы считали скорость бегущей волны постоянной. Теперь нам надлежит рассмотреть случай, когда она постепенно меняется от точки к точке. В периодическом волноводе это можно осуществить, постепенно меняя расстояние между диафрагмами (с соответствующим изменением всех прочих размеров, чтобы во всей трубе можно было возбудить поле данной частоты). Таким образом, v_0 является функцией точки. Вместо нашего прежнего выражения для поля теперь нужно написать:

$$E_z = E \sin \omega \left(t - \int \frac{dz}{v_0(z)} \right),$$

причём для простоты мы рассматриваем только тот случай, когда E не зависит от z . Как решить задачу о движении частиц в таком поле? Здесь не удаётся найти точное решение, которое прежде привело нас к гамильтониану (17) и кривым рис. 8 и 9, однако можно воспользоваться приближённым методом, эквивалентным нашему прежнему рассуждению с маятником. С этого мы и начнём.

Раньше мы измеряли смещение частицы (z') относительно точки с координатой $v_0 t$ (движущейся вместе с волной); начальная фаза была выбрана так, чтобы поле в этой точке всегда равнялось нулю и движущаяся точка $z' = 0$ представляла положение равновесия, в котором частица могла покоиться сколь угодно долго. Также и теперь постараемся найти движущуюся точку, представляющую положение равновесия, и пусть z' есть смещение частицы относительно этой точки. Обозначим через $z_0(t)$ смещение этой точки равновесия, а через $p_0(t)$ — импульс частицы, движущейся вместе с ней; p_0 зависит от времени, так как теперь такая частица движется ускоренно. Очевидно, мы имеем:

$$p_0 = \frac{m_0 v_0}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}},$$

причём надо взять значение v_0 в той точке z_0 , в которой частица находится в момент времени t . Тогда уравнение движения частицы, находящейся в положении равновесия, гласит:

$$\frac{dp_0}{dt} = eE \sin \left(t - \int \frac{dz_0}{v_0(z_0)} \right) \omega.$$

Будем считать, что частица всё время находится в одной и той же фазе ускоряющего поля (т. е., что скорость v_0 соответствует движению частицы под действием постоянной силы). Мы имеем тогда

$$t - \int \frac{dz_0}{v_0(z_0)} = t_0,$$

где t_0 — некая константа. Это уравнение определяет z_0 как функцию t . Оно позволяет также найти t , если известно ускорение. Если расстояния между диафрагмами подобраны так, чтобы получить заданное ускорение, то мы можем найти необходимую для этого силу и, приравняв её $eE \sin \omega t_0$, определить t_0 . Заметим, что последнее условие может выполняться только, если ускорение меньше eE — максимального ускорения, которое поле может сообщить частице при самом выгодном соотношении фаз.

Рассмотрим теперь частицу с координатой $z = z' + z_0$, где z' измеряет отклонение частицы от положения равновесия, а $v' = \frac{dz'}{dt}$ — быстроту изменения этого отклонения со временем. Ограничимся достаточно малыми значениями z' , чтобы скорости волны в точках z и z_0 можно было считать одинаковыми. Ограничимся, далее, достаточно короткими промежутками времени, за которые v_0 и продольная масса не успевают заметно измениться. Тогда сила, действующая на частицу, может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} eE \sin \omega \left(t - \int \frac{dz}{v_0(z)} \right) &= eE \sin \omega \left(t - \int \frac{dz_0}{v_0(z_0)} - \frac{z'}{v_0} \right) = \\ &= eE \sin \omega \left(t_0 - \frac{z'}{v_0} \right). \end{aligned}$$

Изменение импульса частицы со временем определяется выражением

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp_0}{dt} + m_l \frac{dv'}{dt} = eE \sin \omega t_0 + m_l \frac{dv'}{dt}.$$

Таким образом, уравнение движения принимает вид:

$$m_l \frac{dv'}{dt} = eE \left\{ \sin \omega \left(t_0 - \frac{z'}{v_0} \right) - \sin \omega t_0 \right\}.$$

Его можно получить из гамильтоновой функции

$$H' = \frac{p'^2}{2m_l} - eE \frac{v_0}{\omega} \cos \omega \left(t_0 - \frac{z'}{v_0} \right) + eE z' \sin \omega t_0, \quad (22)$$

где $p' = m_l v'$, и m_l считается постоянной.

На рис. 10 представлена потенциальная энергия из уравнения (22) в функции z' . Она напоминает косинусоидальную кривую, известную по задаче о маятнике, с той разницей, что кривая рис. 10 наклонена

и потому несимметрична. Движение удобно рассматривать с помощью хорошо известного интеграла энергии. Проведём на рис. 10 горизонтальную прямую, ордината которой равна H' . Расстояние по вертикали между этой прямой и потенциальной кривой даёт кинетическую энергию. Там, где H' больше потенциальной энергии, кинетическая энергия положительна, и движение возможно. Мы видим, что, например, в случае $H' = H_1$ частица может либо совершать колебания между точками a и b , либо, находясь слева от точки c , двигаться направо, достигая точки c и затем, повернув назад, вновь направляться влево. При больших значениях энергии (например, H_2) колебательное движение невозможно. Иначе говоря, колебания около точки $z' = 0$ могут происходить только в узком интервале энергий, тем более узком, чем круче потенциальная кривая.

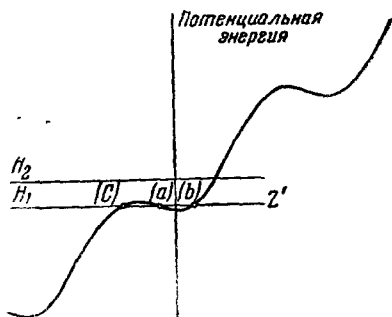


Рис. 10. Потенциальная энергия ускоряемой частицы в функции z' .

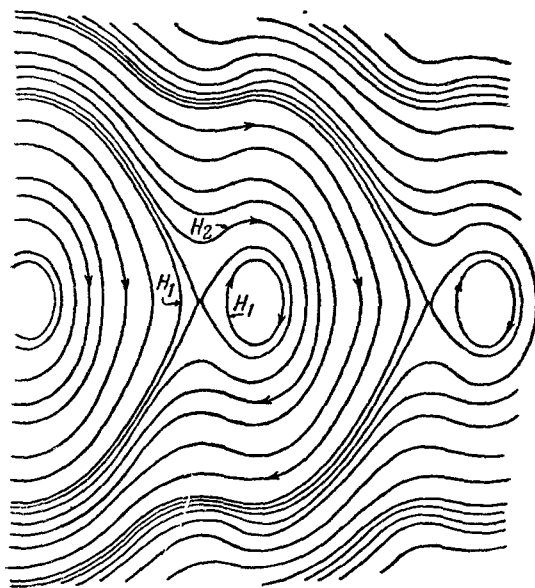


Рис. 11. Фазовое пространство ускоряемой частицы.

Иначе говоря, колебания около точки $z' = 0$ могут происходить только в узком интервале энергий, тем более узком, чем круче потенциальная кривая.

Из уравнения (22) видно, что её крутизна возрастает по мере того, как ω'_0 приближается к $\frac{\pi}{2}$. Это — как раз значение фазового угла, при котором частица на равновесной орбите испытывает максимальное ускорение. При $\omega'_0 = \frac{\pi}{2}$ кривая оказывается столь крутой, что потенциальные ямы исчезают, и стабильные орбиты более не существуют. Все эти соотношения удобно изобразить на фазовой плоскости. Она показана на рис. 11, подобно рис. 8

и 9. Там отмечены траектории изображающих точек, принадлежащих энергиям H_1 и H_2 рис. 10. Ясно виден периодический характер движения

в первом случае и аperiodический — во втором. Ясна также связь с рис. 8. Аperiodические орбиты в этом случае не всегда движутся только впереди или только позади волны. Дело в том, что для этих орбит не существует резонансного соотношения фаз частицы и волны, так что частица не ускоряется, а движется (в покоящейся системе координат) с постоянной скоростью, но под действием ряда наложенных друг на друга периодических возмущений. Если вначале частица двигалась быстрее волны, то последняя, ускоряясь, постепенно догонит и перегонит её. В системе координат, связанной с бегущей волной, будет казаться, что частица начинает двигаться с положительной скоростью v' и положительным импульсом p' , постепенно замедляется, останавливается и начинает двигаться в обратную сторону с отрицательной скоростью и отрицательным импульсом. Ясно, что такая частица никогда не сможет быть захвачена волной и двигаться вместе с ней. С другой стороны, частицы, описывающие периодические орбиты, могут захватываться волной. Они путешествуют вместе с ней, постоянно ускоряясь, подобно частице на равновесной орбите, с той лишь разницей, что они ещё колеблются около положения равновесия. Это ясное различие между одними частицами, которые захватываются волной и резонируют с ней, непрерывно получая энергию, и другими, которые волной не захватываются, оправдывает предположения, сделанные в первом разделе. В самом деле, там предполагалось, что влияние всего поля на частицу можно заменить действием только одной резонирующей плоской волны, которая распространяется с той же скоростью, что и частица.

Из нашего рассмотрения видно, что частицы, резонирующие с волной, резко отличаются от тех, которые с ней не резонируют. И совершенно ясно также, что частица может резонировать только с одной из компонент Фурье, все же остальные производят только периодическое возмущение, подобное тому, которое испытывают аperiodические орбиты рис. 11.

В случае плоской волны переменной скорости различные параметры, входящие в уравнение (22), — продольная масса, скорость v_0 , а во многих случаях и амплитуда электрического поля E — также являются функциями точки и, следовательно, меняются со временем, хотя можно ожидать, что это изменение будет небольшим. Важно исследовать, как отразится медленное изменение этих параметров на движении частицы. Частица, движущаяся по равновесной орбите, конечно, там и останется, но если есть ещё частицы, колеблющиеся около положения равновесия, то интересно знать, как изменится амплитуда их колебаний при изменении параметров. Ответить на этот вопрос можно с помощью известной механической теоремы, которая в квантовой теории носит название адиабатической. В терминах фазового пространства она формулируется так: пусть имеется периодическая орбита; вычислим соответствующий фазовый интеграл

$\oint p dq$, т. е. площадь, заключённую внутри траектории изображающей точки (p — импульс, q — координата; интеграл берётся вдоль фазовой траектории). Пусть параметры, характеризующие движение, медленно меняются — так, что относительное изменение каждого из них за период мало. Вид траекторий изображающей точки при этом, конечно, изменится, и законно спросить, какая из этих кривых в новом фазовом пространстве представляет истинное движение. Адиабатическая теорема утверждает, что истинное движение изображается кривой, для которой фазовый интеграл имеет прежнее значение. Другими словами, фазовый интеграл инвариантен относительно медленного изменения параметров.

Это, вообще говоря, означает, что энергия будет меняться с изменением параметров. Например, можно показать, что в случае линейного гармонического осциллятора фазовый интеграл равен энергии, делённой на частоту. Таким образом, если частота меняется (в результате изменения массы или действующей силы), то пропорционально ей будет меняться и энергия. Но энергия осциллятора, смещение которого есть $A = \cos \omega_0 t$, равна максимальному значению его кинетической энергии — $\frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2$. Поскольку она пропорциональна частоте ω_0 , A меняется пропорционально $\frac{1}{\sqrt{m\omega_0}}$. Этим результатом можно воспользоваться для исследования изменения амплитуды малых колебаний в линейном ускорителе. Частота колебаний, которую можно получить из гамильтоновой функции (22) (так же, как (19) получается из (17)), даётся формулой:

$$\omega_0 = \left(\frac{e}{m_e} E \frac{\omega}{v_0} \cos \omega t_0 \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Поскольку в динамическую задачу также входит продольная масса, мы заключаем отсюда, что амплитуда колебаний A пропорциональна выражению $\left(\frac{v_0}{m_e} E \omega \cos \omega t_0 \right)^{1/2}$.

Мы видим, что когда v_0 приближается к скорости света и продольная масса обращается в бесконечность, амплитуда колебаний стремится к нулю. Это можно усмотреть и непосредственно из хода фазовых кривых: мы видели, что по мере приближения v_0 к скорости света овальные фазовые траектории изображающих точек вытягиваются в вертикальном направлении; следовательно, ширина их должна уменьшиться, так как площадь остаётся постоянной. Это и означает, что частицы переходят на орбиты с меньшей амплитудой. Аналогично, амплитуда колебаний уменьшается с увеличением ускоряющего поля E . Как мы увидим в следующем разделе, эти соотношения можно использовать для очень тесной группировки частиц около положения равновесия.

ХIII. ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОНОВ К РАЗЛИЧНЫМ ТИПАМ УСКОРИТЕЛЕЙ

В предыдущем разделе мы исследовали динамику продольного движения частиц в бегущей плоской волне как для постоянной скорости волны, так и для того случая, когда она медленно меняется от точки к точке. Применим теперь эти общие теоретические результаты к различным типам ускорителей, о которых мы говорили. Простейшим из них является ускоритель МТИ. В этом случае речь идёт об ускорении электронов, которые выпускаются в прибор, будучи предварительно разогнаны до 2 MeV в генераторе Ван де Граафа. Труба ускорителя устроена так, что фазовая скорость волны равна c . Мы имеем здесь, следовательно, как раз случай рис. 9. Электроны выпускаются в прибор во всевозможных фазах. Таким образом, проведя на рис. 9 горизонтальную линию с ординатой, отвечающей энергии в 2 MeV , мы получим у входного конца равномерное распределение частиц по фазам. Из рис. 9 видно, что несколько больше половины всех фаз соответствуют орбитам, на которых частицы связываются с волной, непрерывно получая энергию. Особенно сильная концентрация электронов будет иметь место вблизи орбиты (отмеченной буквами a , b , c), которая касается проведённой нами горизонтальной линии. Асимптотическая фаза для этой орбиты близка к $\frac{\pi}{2}$, и, следовательно, частицы приобретут максимальную возможную энергию. Таким образом, при данной начальной энергии, соответствующей выбранному нами значению ускоряющего поля, большинство электронов испытает максимальное ускорение. Доктор Мэзон исследовал вероятный энергетический спектр вылетающих электронов и нашёл, что энергии большинства из них будут лежать в довольно узком интервале. Заметим, что если бы E было меньше, оптимальная начальная энергия соответствующим образом увеличилась бы.

В ряде других проектов, в том числе в проектах General Electric Company и Стэнфордском, предполагается впускать в прибор электроны с гораздо меньшими начальными энергиями. Поэтому в части трубы скорость волны постепенно возрастает, пока электроны не разогнаются почти до скорости света. Такой метод впуска разрабатывался также и в МТИ.

Из уравнения (23) видно, что при скоростях, много меньших c , и вольтаже обычного порядка угловая частота колебаний электронов лежит почти в радиобласти. Далее, ускорение происходит столь быстро, что предположения о малости изменения релятивистской массы за один период колебаний или о медленном изменении параметров со временем не слишком оправданы. Тем не менее, можно предположить, что наши выводы, основывающиеся на адиабатической теореме, не совсем неверны. Предположим, что мы вводим электроны

с различными фазами в трубу, фазовая скорость волны в которой меняется от точки к точке. Фазовое пространство в этом случае приближённо изображено на рис. 11. Электроны с одними начальными фазами будут захватываться волной, с другими — не будут. Нетрудно обеспечить захват по крайней мере половины всех электронов. В самом деле, если бы скорость вводимых в прибор электронов точно равнялась скорости волны (т. е. если бы v' равнялось нулю), то все электроны оказались бы захваченными. По мере ускорения электронов амплитуды их колебаний, согласно адиабатической теореме, должны уменьшаться, поэтому электроны теснее сгруппируются вблизи точек, в которых ускорение как раз достаточно, чтобы частицы двигались вместе с волной. По мере приближения v к скорости света группы сжимаются всё больше и больше, и в пределе мы получаем нечто весьма похожее на уже исследованный случай рис. 9. Нарушение адиабатической теоремы и других наших предположений (в результате быстрого ускорения) поведёт, вероятно, к потере некоторого числа частиц и размазанности фазы электронов, захваченных волной, движущейся со скоростью света; тем не менее можно ожидать, что значительная часть впущенных в прибор электронов приобретёт большую энергию. Это предсказание согласуется с опытом работ по ускорению электронов в таких трубах.

Проблема ускорения положительных ионов гораздо легче поддаётся анализу, так как здесь ускорение наверняка будет очень медленным благодаря большой массе покоя частиц, поэтому адиабатическая теорема, как и другие наши предположения, выполняется с большой степенью точности. Итак, допустим, что мы вводим в прибор ионы с весьма малой начальной скоростью, и пусть фазовое пространство системы подобно изображённому на рис. 11. Частота бегущей волны значительно превышает частоту колебаний ионов, но, тем не менее, изменение энергии частицы за период колебаний будет много меньше, чем в случае электронов. В самом деле, простым вычислением легко показать, что энергия, приобретаемая за один период ионом, находящимся в положении равновесия, с точностью до численного множителя совпадает с изменением кинетической энергии по формуле (21), хотя это последнее и было вычислено для другой задачи.

Периоды колебаний иона и электрона относятся друг к другу, как корень квадратный из отношения их масс; соответственно, во столько же раз больше расстояние, проходимое ионом в поле, и приобретаемая им энергия. Однако, будучи выражено в долях полной энергии, приращение энергии иона оказывается меньше, чем для электрона, в число раз, равное корню квадратному из обратного отношения масс.

При ускорении положительных ионов может оказаться выгодным вводить их в прибор под небольшим напряжением. Затем поле можно постепенно увеличивать, что, как мы видели, приведёт к более тесной

группировке ионов вокруг положений равновесия в фазовом пространстве (т. е. вблизи точек, где ускорение как раз достаточно, чтобы частицы двигались вместе с полем). Таким путём практически все ионы можно собрать в устойчивые группы. Они будут ускоряться вместе с волной, обладая в каждой точке скоростью, характерной для волны. По мере приближения последней к скорости света, продольная масса будет возрастать, в силу чего группы будут становиться всё более и более узкими.

Наконец, при весьма больших энергиях ионы попадут в ту секцию волновода, где фазовая скорость равна c ; фазовое пространство приобретёт вид, изображённый на рис. 9, и группы окажутся столь тесными, что практически все ионы будут испытывать максимальное ускорение. Это обстоятельство определённо говорит в пользу введения в ускоритель частиц со сравнительно небольшими начальными скоростями, так как тогда происходит весьма тесная группировка частиц, при которой практически все они получают максимальное ускорение. В ускорителе МТИ, где электроны сразу захватываются волной со скоростью c , это не имеет места. Возможно, что в будущем в улучшенных конструкциях ускорителей эффект группировки будет использоваться. Однако при таком способе ввода электронов возникают весьма значительные трудности с фокусировкой пучка. (Они будут рассмотрены в следующем разделе.) Эти трудности столь велики, что в проекте МТИ было сочтено разумным избежать их, воспользовавшись в качестве инжектора генератором Ван де Граафа.

XIV. ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ И ФОКУСИРОВКА ЧАСТИЦ

В предыдущем разделе мы изучали свойства продольного движения частиц вдоль оси ускорителя и нашли, что частицы со скоростью, меньшей скорости света, имеют тенденцию к образованию устойчивых групп, окружающих точки равновесия. Последние характеризуются тем, что ускоряющее поле в них растёт со временем, а частицы ускоряются как раз так, чтобы двигаться вместе с полем.

По мере того как скорости волны и частицы стремятся к скорости света, частота колебаний частицы около положения равновесия уменьшается до нуля, и в пределе $v_0 = c$ эффект группировки исчезает, однако группы, образовавшиеся при меньших скоростях, при этом не распадаются. Мы изучим теперь поперечное движение частиц и сопутствующие ему эффекты фокусировки и дефокусировки. При этом мы сделаем неприятное открытие, что стабильная группа по самой сути своей неустойчива относительно поперечных движений, и, следовательно, группирующий эффект ведёт к дефокусировке пучка.

Это можно было бы предвидеть заранее, на основании общих соображений. Дело в том, что всякую волну, скорость которой меньше скорости света, можно преобразовать к покою. В этой

новой системе координат волна является статическим решением уравнений Максвелла; частица, находящаяся в точке равновесия, покоится, а все прочие колеблются около положения равновесия. Это лоренцово преобразование можно было бы применить и для исследования продольного движения; однако преобразование Галилея, применённое в предыдущих разделах, ведёт там к тем же результатам, и потому мы воспользовались им, как более простым. Но коль скоро мы получили статическую задачу, вступает в силу теорема Ирншоу, согласно которой электростатический потенциал в пустом пространстве не достигает ни максимума, ни минимума, а может иметь только точку седловины. Следовательно, если равновесие устойчиво относительно движения в каком-нибудь одном направлении, оно должно быть неустойчиво относительно движения в направлении, перпендикулярном первому. Поскольку в нашем случае группы частиц устойчивы относительно продольных движений, устойчивая фокусировка не может иметь места. И наоборот, если фазы подобраны так, чтобы пучок был сфокусирован, то группы частиц окажутся неустойчивыми; это соответствует как раз положению неустойчивого равновесия, о котором мы говорили в связи с продольным движением. С другой стороны, при скорости, близкой к c , эффект группировки исчезает и заменяется безразличным равновесием. В наших прежних рассуждениях это вытекало из того, что в пределе при $v_0 = c$ частота колебаний обращалась в нуль. Теперь, после того, как мы совершили преобразование Лоренца, этому соответствует то обстоятельство, что длина волны в волноводе обращается в бесконечность при бесконечном возрастании скорости, т. е. ускоряющая сила перестаёт зависеть от координат, и поле делается постоянным в любой конечной области. Соответственно и дефокусирующий эффект исчезает при $v_0 = c$, и мы имеем безразличное равновесие также и относительно поперечных движений.

Все эти утверждения можно было бы доказать релятивистскими методами, но гораздо проще проверить их прямым и элементарным расчётом. Выпишем формулы для электрического и магнитного полей резонирующей с частицей бегущей волны, как они выглядят в обычной (покоящейся) системе координат. Мы имеем, как легко показать:

$$E_z = E \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right) J_0(x),$$

$$E_r = E \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right) \frac{-jJ_1(x)}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

$$B_\theta = E \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right) \frac{v_0}{c^2} \frac{-jJ_1(x)}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

где

$$x = \frac{j\omega r}{v_0 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Пусть частица движется параллельно оси z со скоростью v_0 (здесь мы пренебрегаем небольшим различием скоростей частицы и волны, имеющим место в результате колебательного движения). Радиальная компонента силы, действующей на частицу, равна $e(E_r - v_0 B_\theta)$ (это r -компонента выражения $e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}])$), т. е.

$$F_r = eE \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_0}\right) \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2} \{-jJ_1(x)\}.$$

Иначе говоря, r -компоненты сил, с которыми электрическое и магнитное поля действуют на частицу, отличаются друг от друга множителем $\frac{v_0^2}{c^2}$, поэтому в пределе, когда v_0 приближается к c , сила, действующая перпендикулярно оси ускорителя, обращается в нуль, и фокусирующий и дефокусирующий эффекты исчезают.

Применим теперь эти результаты к исследованию силы, действующей на частицу при малых отклонениях последней от оси прибора. При малых значениях аргумента x бесселевы функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ стремятся, соответственно, к 1 и к $\frac{x}{2}$. Таким образом, для малых r мы имеем:

$$\begin{aligned} F_z &= eE \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0}\right), \\ F_r &= \frac{\omega r}{2v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) eE \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_0}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Нас интересует, в основном, значение F_r в той фазе, в которой возможно образование устойчивых групп частиц. Последнее имеет место, когда F_z положительна, и возрастает со временем, т. е. когда как $\sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0}\right)$, так и производная от этой функции по времени $\omega \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_0}\right)$ положительны.

Легко видеть, что в этом случае F_r положительна и пропорциональна r , т. е. она отклоняет частицы от оси прибора, оказывая тем самым дефокусирующее действие.

Координата частицы, испытывающей действие силы отталкивания, пропорциональной расстоянию от данной точки, зависит от времени по показательному закону. Написав уравнение движения частицы под действием силы F_r и учитывая, что в данном случае нужно пользоваться поперечной массой $\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, мы найдём закон движе-

ния в следующем виде:

$$r = r_0 e^{t/T}; \quad \frac{1}{T} = \left[\frac{eE\omega}{2m_0v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{3/2} \cos \omega t_0 \right]^{1/2}, \quad (25)$$

где $t_0 = t - \frac{z}{v_0}$ (множители $\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{1/2}$ и $1 - \frac{v_0^2}{c^2}$, комбинируясь, дают

продольную массу). Как видно из (23), $\frac{1}{T}$ с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{2}}$ совпадает с угловой частотой колебаний около положения равновесия. Отсюда мы заключаем, что за время порядка одного периода колебаний около положения равновесия расстояние частицы от оси прибора r возрастает в e раз. Для ускорителя МТИ это не составляет проблемы, так как период колебаний там практически бесконечен; непосредственный анализ поперечного движения показывает, что когда электроны с начальной энергией 2 MeV ускоряются, достигая любой сколь угодно высокой энергии, их расстояние от оси возрастает максимум в два раза. При сравнительно небольших начальных скоростях электронов проблема дефокусировки тоже не слишком важна. Мы видели, что при тех больших ускорениях, которые мы здесь имеем, электроны уже после сравнительно небольшого числа колебаний в группе достигают скорости света; следовательно, их расстояние от оси хотя и возрастает, но не на много. Это не должно привести к недопустимому расширению пучка, если он вначале был достаточно узок и хорошо сфокусирован. Далее, в начальной стадии дефокусировки и ускорения электроны легко можно вновь сфокусировать продольным магнитным полем (мы вскоре обсудим это).

В то же время для положительных ионов дефокусирующий эффект оказывается исключительно серьезным. Вероятно, он фатальным образом воспрепятствует применению длинных ионных ускорителей в области энергий около миллиарда eV. Мы видели, что положительный ион должен будет совершить множество колебаний около положения равновесия, прежде чем он приблизительно достигнет скорости света; за это время радиус пучка будет многократно увеличиваться в e раз, т. е. пучок недопустимо расширится. Правда, надо отметить, что мы упустили из виду один фокусирующий эффект, который, может быть, несколько исправит положение. Происхождение его можно понять, исходя из теории циклотрона. Там ионы, ускоряясь в промежутке между дуантами, движутся в поле вида, показанного на рис. 12. Входя в этот промежуток, ионы фокусируются, выходя из него — дефокусируются. Дефокусировка может быть или слабее, или сильнее фокусировки. Это определяется двумя причинами. Во-первых, поле может возрастать со временем, пока ионы

проходят между дуантами; тогда при выходе оно окажется сильнее, чем при входе, и в результате произойдет дефокусировка пучка. Именно этот эффект мы до сих пор и рассматривали. Но есть еще и другое обстоятельство: проходя между дуантами, ионы ускоряются. Следовательно, при выходе они будут двигаться быстрее, чем при входе, и фокусирующее действие может оказаться более эффективным. Это явление выпало из нашего рассмотрения, так как мы пренебрегли членами второго порядка в изменении скорости частицы.

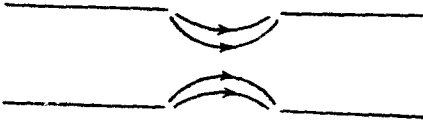


Рис. 12. Силовые линии в щели.

Благодаря этому эффекту существует небольшая область фаз, в которой возможны как фокусировка, так и образование устойчивых групп. Это — область вблизи максимума ускоряющего поля, где $\cos \omega_0 t_0$ почти равен нулю. Угловая частота колебаний, определяемая формулой (23), здесь еще действительна, хотя и мала, так что группы еще устойчивы. В то же время величина $\frac{1}{T}$ из уравнения (25) очень мала, и дефокусировка почти отсутствует. Она может оказаться столь слабой, что будет перекрыта другим только что описанным эффектом, и в результате пучок будет фокусироваться. В английских работах, где разбираются эти явления, показано, что существует небольшая (несколько градусов) фазовая область, в которой дело обстоит именно таким образом. При некоторых условиях, когда поле сконцентрировано в очень узких щелях, благоприятная фаза может оказаться довольно большой. Вероятно, именно этому обстоятельству обязаны своей удачей первые конструкции линейных ускорителей. Возможно, что оно же, в конце концов, определит успех ионных линейных ускорителей.

Группой в Бэркли был предложен другой метод борьбы с дефокусировкой пучка в ионном ускорителе, состоящий в использовании сеток. Ясно, что, поместив сетку на выходе в щель между дуантами, как показано на рис. 13, можно полностью исключить дефокусирующее действие поля, сохранив при этом фокусировку. Это отнюдь не противоречит нашим прежним рассуждениям о неизбежности дефокусировки. В самом деле, мы исходили из разложения поля в ряд Фурье в предположении, что плотность зарядов во всей интересующей нас области равна нулю. Но сетки могут нести заряд, и потенциал в этом случае будет подчиняться уравнению Пуассона, а не Лапласа. А тогда он может иметь абсолютный минимум, чем обеспечивается возможность фокусировки одновременно с существо-



Рис. 13. Силовые линии в щели с фокусирующей сеткой или фольгой.

занием стабильных групп. Очевидная трудность состоит в том, что сетка препятствует движению пучка.

Для короткого ускорителя это обстоятельство не существенно, но для длинного оно может оказаться фатальным, так как там пучок придётся пропускать через целый ряд сеток.

Мы уже упоминали о том, что для фокусировки сравнительно медленных электронов можно применить продольное магнитное поле, которое превратит электронные орбиты в спирали. Рассмотрим влияние такого поля. Задача полностью решается, если написать уравнения Лагранжа для частицы, находящейся под действием уже известных нам сил F_r и F_z , а также сил, оказываемых постоянным магнитным полем B , направленным вдоль оси z . Оказывается, что влияние поля B на радиальное движение частицы эквивалентно появлению добавочной потенциальной энергии, пропорциональной r^2 , или, что то же, добавочной силы притяжения, пропорциональной r . Если этот член достаточно велик, чтобы уравновесить силу отталкивания F_r (которая также пропорциональна расстоянию), то могут появиться стабильные орбиты — стабильные спирали, по которым движутся электроны. Вместо того чтобы проделывать весь этот расчёт, проведём простое рассуждение, которое позволит нам получить критическое значение магнитного поля, необходимое для фокусировки.

В отсутствии силы F_r частица под действием магнитного поля будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Как обычно, приравняем силу, тянущую частицу к оси вращения, поперечной массе частицы, помноженной на центростремительное ускорение. Обозначая радиус окружности и угловую скорость через r и $\dot{\theta}$, мы имеем: $eBr\dot{\theta} = m_e r \dot{\theta}^2$, откуда $\dot{\theta} = \frac{eB}{m_e}$, т. е. угловая скорость равна ларморовой частоте. С другой стороны, включив ещё силу отталкивания kr (наша сила F_r), мы получим: $eBr\dot{\theta} - kr = m_e \dot{\theta}^2 r$. Решениями этого квадратного уравнения относительно $\dot{\theta}$ будут:

$$\dot{\theta} = \frac{eB}{2m_e} \pm \sqrt{\left(\frac{eB}{2m_e}\right)^2 - \frac{k}{m_e}}$$

Они представляют устойчивое вращение по кругу, если голько $\dot{\theta}$ действительно. Это даёт нам предельное значение B :

$$\frac{eB}{m_e} = \left(\frac{4k}{m_e}\right)^{1/2}$$

Взяв значение k из формулы (24) для F_r и воспользовавшись (23), получим:

$$\frac{eB}{m_e} = \sqrt{2} \omega_{ce} \quad (26)$$

т. е., чтобы скомпенсировать дефокусирующее действие волны, нужно включить настолько сильное продольное магнитное поле, чтобы соответствующая ларморова частота по крайней мере в $\sqrt{2}$ раз превышала частоту колебаний электронов в группах.

Мы получим при этом безразличное равновесие, которое перейдет в устойчивое при любом сколь угодно малом увеличении магнитного поля.

Теперь можно посмотреть, какова должна быть напряженность поля. Мы видели, что в случае электронов величина ω_0 для больших энергий может приближаться к радиочастоте, хотя обычно она заметно меньше последней. Следовательно, и ларморова частота должна быть того же порядка.

Для тех радиочастот, о которых здесь идет речь, это приводит к полям порядка нескольких сот, в крайнем случае нескольких тысяч, гаусс. Эти значения легко достигаются на практике, особенно учитывая, что магнитное поле надо создать только в той части ускорителя, где скорость электронов заметно меньше c . С другой стороны, для ионов необходимые магнитные поля становятся недопустимо большими.

Правда, частота ω_0 в этом случае уменьшается в $\sqrt{\frac{m_{\text{иона}}}{m_{\text{электрона}}}}$ раз,

но добавочный множитель m_i в уравнении (26) приводит к тому, что магнитное поле должно во столько же раз возрасти. Таким образом, чтобы скомпенсировать дефокусирующее действие волны, потребуется магнитное поле напряженностью не в тысячу, а в сорок — пятьдесят тысяч гаусс. Кроме того, оно должно быть приложено во всех секциях ускорителя, где скорость ионов заметно меньше c . В небольших объемах получить такое поле, конечно, можно, но исключительно трудно создать его во всем длинном ускорителе.

Наконец, надо рассмотреть еще одну проблему, касающуюся фокусировки электронов. Хотя на частицы, движущиеся со скоростью света, и не действуют дефокусирующие силы, всё же в ускорителе типа МТИ электроны первичного пучка будут обладать некоторым разбросом по направлениям. Законно спросить, должен ли этот пучок быть столь узким, чтобы все электроны были нацелены в отверстие последней диафрагмы в дальнем конце трубы?

Если да, то это означало бы очень малый, практически почти недостижимый угол раствора первичного пучка. К счастью, в столь сильной концентрации пучка нет необходимости. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим проблему следующим весьма простым способом. Импульс первичного электрона, движущегося не строго параллельно оси прибора, можно разложить на две компоненты — параллельную оси — p_z и перпендикулярную ей (направленную по радиусу) — p_r .

В предельном случае $v_0 = c$, который мы сейчас рассматриваем, радиальные силы отсутствуют и p_r остаётся постоянным. В то же время p_z непрерывно возрастает, так как вдоль оси z действует

постоянное ускоряющее поле. Поэтому вектор импульса (и параллельный ему вектор скорости) будет всё время поворачиваться по направлению к оси z .

Дело обстоит так же, как в задаче о падении тела, брошенного параллельно горизонту. Известно, что такое тело будет двигаться по параболе, и путь, который оно пройдёт за время падения, равен произведению времени падения на начальную скорость. Однако в нашем случае, в силу релятивистского характера движения, постоянство скорости отнюдь не вытекает из постоянства импульса; в самом деле, мы увидим, что радиальная скорость уменьшается по мере продвижения частицы вперёд, так что путь, пройденный перпендикулярно оси z , оказывается гораздо меньше, чем в нерелятивистском случае.

Решение нашей задачи элементарно. Будем измерять координату z от некоторой точки, в которой энергия по условию была бы равна нулю, если бы ускоряющая сила на всём пути частицы была постоянной. Тогда энергия в точке z будет равна eEz , а z -компонента импульса (в релятивистской области) $\frac{eEz}{c}$; $p_r = \text{const}$. Истинная траектория частицы в каждой точке параллельна её импульсу. Это даёт: $\frac{dr}{dz} = \frac{p_r}{p_z} = \frac{p_r c}{eE}$. Поскольку $dz = c dt$ (в области, где скорость частицы $= c$), отсюда следует, что радиальная компонента скорости уменьшается обратно пропорционально z .

Интегрируя написанное выше уравнение, получаем:

$$r_2 - r_1 = \frac{p_r c}{eE} \ln \frac{z_2}{z_1}.$$

Это даёт изменение радиальной координаты на пути от точки z_1 , где частица вошла в прибор, до z_2 , где она выходит оттуда. Удобно выразить его через угол φ_0 между осью трубы и начальным направлением движения электрона. Очевидно, что $\varphi_0 = \frac{p_r}{p_z}$ при $z = z_1$. Это даёт:

$$r_2 - r_1 = \varphi_0 z_1 \ln \frac{z_2}{z_1}.$$

Подставляя численные значения входящих сюда величин, мы видим, что уширение пучка весьма мало даже в очень длинном ускорителе. Допустим, например, что начальная энергия электронов равна 2 MeV, и пусть этому соответствует $z_1 = 60$ см. Желая разогнать электроны до 2 млрд. eV, мы должны положить $\frac{z_2}{z_1} = 10^3$.

Примем, что $\varphi_0 = 10^{-3}$. Это означает, что пучок полностью пройдёт через миллиметровое отверстие на расстоянии одного метра

от источника; для хорошо коллимированного пучка от генератора Ван де Граафа это должно быть возможно. И мы имеем:

$$r_2 - r_1 = 4 \text{ мм.}$$

Даже для десятикратного большего ускорителя смещение увеличивается всего в $4/3$ раза, т. е. оказывается равным 5,3 мм. Таким образом, можно ожидать, что всегда, для любого ускорителя удастся коллимировать пучок так, чтобы его ширина не превзошла диаметра отверстий в диафрагмах.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. S. Akeley, Phys. Rev. 69, 255A (1946).
2. E. S. Akeley, J. App. Phys. 17, 1056 (1946).
3. E. S. Akeley, Phys. Rev. 69, 50A (1946).
4. W. D. Allen and J. L. Symonds, Proc. Phys. Soc. 59, 622 (1947).
5. L. W. Alvarez, Phys. Rev. 70, 199A (1946).
6. W. R. Baker, J. V. Franck and J. D. Gow, Phys. Rev. 73, 535A (1948).
7. E. G. Bowen, O. O. Pulley and J. S. Gooden, Nature 157, 840 (1946).
8. H. Bradner, R. Crawford, H. Gordon and J. R. Woodyard, Phys. Rev. 73, 534A (1948).
9. G. G. Bruck and E. R. Wicher, J. App. Phys. 18, 766 (1947).
10. E. L. Chu and W. W. Hansen, J. App. Phys. 18, 996 (1947).
11. A. B. Cullen, Jr. and J. H. Greig, J. App. Phys. 19, 47 (1948).
12. J. E. Evans, R. C. Fletcher and F. F. Rieke, Rad. Lab. Report, No. 1051, Feb. 6 (1946).
13. J. B. Fisk, H. D. Hagstrum and P. L. Hartman, Bell Sys. Tech. J. 25, 167 (1946).
14. D. W. Fry, R. B. S. Harvie, L. B. Mullett and W. Walkinshaw, Nature 160, 351 (1947).
15. E. L. Ginzton, W. W. Hansen and W. R. Kennedy, Rev. Sci. Inst. 19, 89 (1948).
16. J. Halpern, E. Everhart, R. A. Rapuano and J. C. Slater, Phys. Rev. 69, 688A (1946).
17. R. O. Haxby, E. S. Akeley, A. Ginzburg, R. N. Smith, H. W. Welch and R. M. Whaley, Phys. Rev. 70, 797A (1946).
18. F. L. Hereford, Jr., J. App. Phys. 18, 956 (1947).
19. F. L. Hereford, Jr., Phys. Rev. 72, 159A (1947).
20. E. O. Lawrence and D. H. Sloan, Proc. Nat. Acad. Sci. 17, 64 (1931).
21. B. L. Miller and J. M. Wolf, Phys. Rev. 73, 657A (1948).
22. F. Oppenheimer, L. H. Johnston and C. Richman, Phys. Rev. 70, 447A (1946).
23. W. K. H. Panofsky, Phys. Rev. 70, 447A (1946).
24. W. K. H. Panofsky, C. Richman and F. Oppenheimer, Phys. Rev. 73, 535A (1948).
25. H. L. Schultz, R. Beringer, C. L. Clarke, J. A. Lockwood, R. L. McCarthy, C. G. Montgomery, P. J. Rice and W. W. Watson, Phys. Rev. 72, 346A (1947).
26. J. Schwinger, Phys. Rev. 70, 797A (1946).
27. R. Serber, Phys. Rev. 73, 535A (1948).
28. J. C. Slater, Tech. Report No. 47, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. (Sept. 2, 1947).
29. J. C. Slater, Phys. Rev. 70, 799A (1946).

30. J. C. Slater, Tech. Report No. 48, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. (Sept. 19, 1947).
31. J. C. Slater, Rev. Mod. Phys. **18**, 441 (1946).
32. J. C. Slater, Tech. Report No. 35, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. (April 3, 1947).
33. D. H. Sloan, Phys. Rev. **47**, 62 (1935).
34. D. H. Sloan and W. M. Coates, Phys. Rev. **46**, 539 (1934).
35. D. H. Sloan and E. O. Lawrence, Phys. Rev. **38**, 2021 (1931).
36. J. R. Woodyard, Phys. Rev. **69**, 50A (1946).
37. J. F. Woodyard, F. A. Martinelli, W. Toulis and W. K. H. Panofsky, Phys. Rev. **70**, 447A (1946).

ПОПРАВКА

В первой части статьи Дж. К. Слестера (вып. 3) на странице 342 строка 8 снизу напечатано $a = 10,3$; следует читать $a = 1,03$.

Редакция