1948 г. Ноябрь *Т. XXXVI, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ И ЗАКОНЫ ДИФФРАКЦИИ

В. А. Фок

В 1821 г. французский учёный Френель установил формулы, определяющие интенсивности и направления колебаний в отражённом и преломлённом луче света, падающего на плоскую поверхность прозрачного тела.

Френель получил свои формулы на основе упругой теории света, в предположении поперечных колебаний упругой среды (эфира), причём ему пришлось ввести особые гипотезы об упругости и плотности эфира в средах, отличающихся друг от друга показателем преломления. Вывод этот не соответствует современным взглядам на природу света и имеет в настоящее время только исторический интерес. Однако самые формулы блестяще оправдались на опыте и в дальнейшем служили пробным камнем для проверки всякой новой теории света.

В 1865 г. появилась созданная Максвеллом электромагнитная теория света, которая выдержала эту проверку и, кроме того, дала объяснение необычайно широкому кругу явлений, включая те, которые были открыты много лет спустя, как-то: радиоволны (Герц, Попов), световое давление (Лебедев) и многие другие.

Законы отражения Френеля вытекают без всяких дополнительных гипотез из уравнений Максвелла и соответствующих граничных условий, причём оказывается, что под рассмотренными Френелем поперечными колебаниями нужно разуметь колебания электрического вектора.

Законы Френеля применимы не только к свету, но и к электромагнитным колебаниям любой частоты, в том числе к радиоволнам. С другой стороны, законы Френеля легко обобщаются на случай, когда волны падают на плоскую поверхность поглощающего тела. Формулы Френеля сохраняют здесь свой вид, с той только разницей, что показатель преломления n должен быть заменён комплексной величиной, а именно, корнем квадратным из комплексной диэлектрической постоянной среды.

Формулы Френеля непосредственно позволяют выразить амплитуды электромагнитного поля отражённой волны через амплитуды поля падающей волны, причём под теми и другими амплитудами подразумеваются их значения на отражающей поверхности. Если на поверхность падает плоская волна и если сама отражающая поверхность — плоская, то амплитуды поля отражённой волны на некотором расстоянии от поверхности будут те же, как на самой поверхности; от расстояния от поверхности будет зависеть только фаза. Если же отражающая поверхность выпуклая, то падающий параллельный пучок лучей после отражения становится расходящимся. В таком случае, при вычислении амплитуды отражённой волны на заданном расстоянии от точки, где произошло отражение, нужно ввести в амплитуду поправочный множитель, учитывающий расширение пучка после отражения. Этот множитель можно найти из чисто геометрических соображений.

Законы отражения электромагнитной волны нашли себе весьма простую и удобную приближённую формулировку в формулах Френеля. Гораздо менее удовлетворительно обстояло дело с приближённой формулировкой законов *диффракции*, т. е. огибания волной препятствий и захождения её в область геометрической тени. Все известные вплоть до недавнего времени приближённые методы относились к случаю диффракции волны от препятствий с *резкими краями*, например от непрозрачных экранов с отверстиями. Эти методы представляют, в основном, уточнения принципа Гюйгенса. Главный шаг в этом направлении сделан самим Френелем. Согласно принципу Гюйгенса в формулировке Френеля, часть световой волны, прикрытая экраном, не действует совсем, а неприкрытые области действуют так, как если бы экрана совсем не было. Дальнейшее уточнение было сделано в 1882 г. Кирхгофом, предложившим свою формулу для амплитуды световой волны за экраном. Формула Кирхгофа представляет весьма гибкое и удобное средство для приближённого решения задач диффракции от экрана с резкими краями, но она не учитывает влияния материала экрана и вообще не принимает во внимание предельных условий для поля, вытекающих из теории Максвелла.

Следующий существенный шаг в решении задачи диффракции от экрана с резкими краями связан с нахождением строгих решений уравнений Максвелла для некоторых частных случаев (полуплоскость, клин). Здесь следует упомянуть работы Зоммерфельда, а также работы советских математиков С. Л. Соболева и В. И. Смирнова, подошедших к той же задаче с новой точки зрения (нестационарные процессы). Чрезвычайно интересные задачи о плоском и цилиндрическом волноводах с открытыми концами (где диффрагированная волна может загибать назад) были в недавнее время решены молодым советским учёным Л. А. Вайнштейном.

В противоположность задаче диффракции от тел с резкими краями (экранов и диафрагм), для решения задачи диффракции от тел с непрерывно меняющейся кривизной никаких сколько-нибудь общих приближённых методов или приближённых формул (подобных формуле Кирхгофа) вплоть до самого последнего времени предложено не было. Для нахождения поля, получаемого в результате диффракции падающей волны, предлагалось для каждого отдельного случая решать уравнения Максвелла с предельными условиями, что представляет весьма сложную математическую задачу.

Формулы отражения Френеля представляют собою интегральный закон, в том смысле, что применение их не требует решения дифференциальных уравнений, ибо эти формулы дают явные выражения для амплитуд отражённой волны. Для явления диффракции от тела произвольной формы не только не был известен вид соответствующего интегрального закона, но не был установлен и факт существования такого закона; другими словами, не была установлена и самая возможность написать, при сколько-нибудь общих предположениях об электрических свойствах вещества тела и о форме его поверхности, явные выражения для амплитуд поля огибающей тело волны.

Этот пробел был в известной мере заполнен в наших работах по диффракции плоской волны от поверхности выпуклого проводящего тела произвольной формы.

Предположение, что вещество тела является хорошим проводником, является существенным, потому что оно даёт возможность пользоваться упрощёнными предельными условиями для поля, установленными М. А. Леонтовичем.

Рассматривая поле вблизи поверхности тела (на расстояниях, малых по сравнению с радиусами кривизны поверхности), мы установили, что в области полутени это поле имеет локальный характер. Это значит, что, при заданной длине падающей волны, её амплитуде и поляризации, поле в области полутени зависит лишь от формы и свойств тела вблизи данной точки, причём оно выражается через некоторые универсальные функции, которые могут быть раз навсегда табулированы. Тем самым оказывается возможным формулировать некоторый общий закон диффракции.

Наши формулы для поля можно рассматривать как обобщение формул Френеля — обобщение, включающее в себя как закон отражения, так и закон диффракции.

Будем мысленно двигаться вдоль поверхности тела от освещённой его стороны в теневую. На освещённой стороне тела можно различить падающую и отражённую волну, причём последняя будет хорошо описываться формулами Френеля. Ближе к геометрической границе тени, в области скользящего падения луча, обе волны уже неотделимы друг от друга, так что имеет смысл рассматривать лишь результирующее плое. Здесь вступают в силу наши формулы, тогда как формулы Френеля становятся неприменимыми. За границей геометрической тени мы уже не имеем волны с более или менее постоянной амплитудой, а имеем затухающую волну, т. е. волну с амплитудой, убывающей по показательному закону с увеличением расстояния от геометрической границы тени. Здесь имеет место явление диффракции в собственном смысле, причём закон диффракции передаётся нашими формулами.

Из сказанного ясно, что существует область (а именно область скользящего падения луча), где одновременно справедливы как наши диффракционные формулы, так и формулы Френеля. Очевидно, что в этой области одни формулы должны переходить в другие.

В дальнейшем мы приведём формулы Френеля для электромагнитного поля и укажем их обобщение, позволяющее учитывать расширение пучка после отражения от выпуклого тела. Далее, мы выпишем полученные нами диффракционные формулы, рассмотрим их предельные случаи и проследим, как они переходят в формулы Френеля в области скользящего падения луча.

1. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ

Обозначим через $\mathbf{E}^0(E_x^0, E_y^0, E_z^0)$ и через $\mathbf{H}^0(H_x^0, H_y^0, H_z^0)$ амплитуды электрического и магнитного векторов падающей волны в данной точке поверхности тела. Соответствующие величины для отражённой волны обозначим через $\mathbf{E}^*(E_x^*, E_y^*, E_z^*)$ и $\mathbf{H}^*(H_x^*, H_y^*, H_z^*)$. Пусть, далее, $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ есть единичный вектор в направлении падающего луча, $\mathbf{a}^*(a_x^*, a_y^*, a_z^*)$ — единичный вектор в направлении отражённого луча и $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор нормали к поверхности тела в точке падения. Согласно закону отражения, величины $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ связаны соотношением

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} - 2\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}), \tag{1,01}$$

причём

$$\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \cos\vartheta, \tag{1,02}$$

где ϑ — угол падения. Величины $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^*$ пропорциональны градиенту фазы падающей и отражённой волны. Считая амплитуду величиной, медленно меняющейся по сравнению с фазой, мы получим из уравнений Максвелла для пустоты

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{E}^0] = \mathbf{H}^0; \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{E}^0 = 0, \tag{1,03}$$

откуда

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{H}^0] = -\mathbf{E}^0; \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{H}^0 = 0, \tag{1,04}$$

и аналогично для отражённой волны

$$[\mathbf{a}^*\times\mathbf{E}^*] = \mathbf{H}^*; \qquad \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{E}^* = 0, \tag{1,05}$$

$$[\mathbf{a}^*\times\mathbf{H}^*] = -\mathbf{E}^*; \quad \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{H}^* = 0. \tag{1,06}$$

Обозначим через μ магнитную проницаемость, через

$$\eta = \varepsilon + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{1,07}$$

комплексную диэлектрическую постоянную вещества отражающего тела и введём коэффициенты Френеля

$$N = \frac{\eta\cos\vartheta - \sqrt{\mu\eta - \sin^2\vartheta}}{\eta\cos\vartheta + \sqrt{\mu\eta - \sin^2\vartheta}}, \tag{1,08}$$

$$M = \frac{\mu\cos\vartheta - \sqrt{\mu\eta - \sin^2\vartheta}}{\mu\cos\vartheta + \sqrt{\mu\eta - \sin^2\vartheta}}. \tag{1,09}$$

Тогда формулы Френеля, устанавливающие связь между амплитудами падающей и отражённой волны, могут быть написаны в виде

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}^*) = N(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}^0), \tag{1,10}$$

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^*) = M(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0). \tag{1,11}$$

Амплитуды проходящей волны (проникающей в вещество тела) нас не интересуют, и мы соответствующих формул не выписываем.

Уравнения (1,05), (1,10) и (1,11) могут быть решены относительно векторов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$. Вводя обозначения

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}^0 = E_n^0; \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0 = H_n^0 \tag{1,12}$$

и выражая согласно (1,01) $\mathbf{a}^*$ через $\mathbf{a}$, мы будем иметь

$$\sin^2\vartheta\,\mathbf{E}^* = -NE_n^0(\mathbf{n}\cos 2\vartheta + \mathbf{a}\cos\vartheta) + MH_n^0[\mathbf{n}\times\mathbf{a}], \tag{1,13}$$

$$\sin^2\vartheta\,\mathbf{H}^* = -MH_n^0(\mathbf{n}\cos 2\vartheta + \mathbf{a}\cos\vartheta) - NE_n^0[\mathbf{n}\times\mathbf{a}]. \tag{1,14}$$

Таковы вытекающие из формул Френеля значения амплитуд отражённой волны на поверхности тела.

Из предыдущих формул можно вывести также соотношения для полного поля. Обозначая через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ полное поле на поверхности тела и через E_n и H_n его нормальные составляющие и полагая

$$\varkappa = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\vartheta}{\eta\mu}}, \tag{1,15}$$

мы будем иметь

$$\sin^2\vartheta(\mathbf{E} - \mathbf{n}E_n) = \varkappa\sqrt{\frac{\mu}{\eta}}\,E_n\{\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\} + H_n[\mathbf{n}\times\mathbf{a}], \tag{1,16}$$

$$\sin^2\vartheta[\mathbf{n}\times\mathbf{H}] = E_n\{\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\} + \varkappa\sqrt{\frac{\eta}{\mu}}\,H_n[\mathbf{n}\times\mathbf{a}]. \tag{1,17}$$

Если $|\eta\mu| \gg 1$, то приближённо $\varkappa = 1$ и правые части (1,16) и (1,17) друг другу пропорциональны. В этом случае будет

$$\mathbf{E} - \mathbf{n}E_n = \sqrt{\frac{\mu}{\eta}}[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]. \tag{1,18}$$

Последнее соотношение уже не содержит вектора $\mathbf{a}$, т. е. не зависит от направления падающей волны. Как показал М. А. Леонтович, оно имеет место не только в освещённой области, где применимы формулы Френеля, но и на всей поверхности тела.

Из формул (1,16) и (1,17) можно также вывести соотношения:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}) = \left(-\cos\vartheta + \varkappa\sqrt{\frac{\mu}{\eta}}\right)E_n, \tag{1,19}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{H}) = \left(-\cos\vartheta + \varkappa\sqrt{\frac{\eta}{\mu}}\right)H_n. \tag{1,20}$$

Если падающая волна — плоская, так что вектор **a** имеет определённое значение, то последними соотношениями можно пользоваться вместо условий Леонтовича (1,18). Это удобно делать тогда, когда рассматривается скользящее падение луча, причём в выражении (1,15) для $\varkappa$ можно положить $\sin^2\vartheta = 1$.

2. СЕЧЕНИЕ ПУЧКА ОТРАЖЁННЫХ ЛУЧЕЙ

Для нахождения амплитуды отражённой волны на некотором расстоянии от поверхности тела необходимо иметь формулы для сечения пучка, опирающегося на площадку dS поверхности тела и прошедшего после отражения заданный путь s. Эти формулы могут быть выведены из известных формул дифференциальной геометрии.

Пусть уравнение отражающей поверхности есть

$$x = x_0(u, v); \quad y = y_0(u, v); \quad z = z_0(u, v), \tag{2,01}$$

где u, v — гауссовы координатные параметры. Квадрат элемента дуги на поверхности мы будем писать в виде

$$dl^2 = g_{uu}du^2 + 2g_{uv}du\,dv + g_{vv}dv^2 = \sum_{u,v} g_{uv}du\,dv, \tag{2,02}$$

где сумма $\sum\limits_{u,v}$ есть сокращённое обозначение для среднего члена этого равенства.

Мы будем пользоваться обозначениями для ковариантных и контравариантных составляющих векторов и тензоров, поднимая и опуская значки при помощи «метрического» тензора, входящего в (2,02). Элемент поверхности мы будем писать в виде

$$dS = \sqrt{g}\,du\,dv. \tag{2,03}$$

Выпишем формулы для составляющих вектора нормали к поверхности и их производных по u, v. Мы имеем

$$\sqrt{g}\,n_x = \frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial z_0}{\partial v} - \frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{\partial z_0}{\partial u} \quad \text{и т. д.} \tag{2,04}$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial u} = -\sum_v G_u^v \frac{\partial x_0}{\partial v} \quad \text{и т. д.} \tag{2,05}$$

Последняя формула может служить определением величин G_u^v — смешанных компонент второй квадратичной формы поверхности. Если R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны нормального сечения поверхности, то мы будем иметь

$$K = \frac{1}{R_1R_2} = G_u^uG_v^v - G_v^uG_u^v, \tag{2,06}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -G = -G_u^u - G_v^v. \tag{2,07}$$

Величина K есть гауссова кривизна поверхности. Нам понадобится формула для радиуса кривизны R_0 нормального сечения поверхности плоскостью падения луча. Можно показать, что если $k\psi$ есть фаза падающей волны, причём

$$(\operatorname{grad}\psi)^2 = 1, \tag{2,08}$$

то будет

$$\sum_{u,\,v} g^{uv}\frac{\partial\psi_0}{\partial u}\frac{\partial\psi_0}{\partial v} = \sin^2\vartheta, \tag{2,09}$$

где ϑ есть угол падения, а производные берутся от значения $\psi = \psi_0$ фазы на поверхности тела. Величина R_0 определится тогда из равенства

$$\sum_{u,\,v} G^{uv}\frac{\partial\psi_0}{\partial u}\frac{\partial\psi_0}{\partial v} = -\frac{\sin^2\vartheta}{R_0}. \tag{2,10}$$

Применим выписанные здесь формулы к вычислению нормального сечения пучка лучей, отражённых от элемента поверхности dS.

Рассмотрим уравнения:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s\overset{*}{a}_x, \\ y &= y_0 + s\overset{*}{a}_y, \\ z &= z_0 + s\overset{*}{a}_z, \end{aligned} \tag{2,11}$$

в которых s есть некоторая заданная величина, а x_0, y_0, z_0, $\overset{*}{a}_x$, $\overset{*}{a}_y$, $\overset{*}{a}_z$ суть функции от u, v, определяемые из уравнения поверхности (2,01) и из соотношений

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} - 2\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}), \tag{2,12}$$

где $\mathbf{n}$ есть вектор нормали в точке x_0, y_0, z_0.

Величина s есть, очевидно, путь, пройденный лучом после отражения. При постоянном s уравнения (2,11) представляют уравнения некоторой поверхности, в известном смысле параллельной отражающей поверхности тела. Если мы будем менять u, v в пределах $(u, u + du)$, $(v, v + dv)$, мы получим некоторый участок поверхности (2,11). Этот участок можно рассматривать как сечение поверхностью пучка отражённых лучей, опирающегося на элемент $dS = \sqrt{g}\,du\,dv$. Чтобы получить нормальное сечение пучка, мы должны спроектировать этот участок на плоскость, перпендикулярную отражённому лучу. Обозначив площадь нормального сечения через $D(s)\,dS$, мы будем иметь

$$D(s)dS = \begin{vmatrix} \overset{*}{a}_x & \overset{*}{a}_y & \overset{*}{a}_z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv, \tag{2,13}$$

откуда

$$D(s) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \overset{*}{a}_x & \overset{*}{a}_y & \overset{*}{a}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{2,14}$$

Мы вычислим этот определитель в предположении, что падающая волна — плоская и что, следовательно, вектор **a** не зависит от u, v.

После довольно сложных выкладок, которые мы здесь опускаем, получается следующий результат:

$$D(s) = \cos\vartheta + 2s\left(-G + G\sum_{u,v} g^{uv}\frac{\partial\psi_0}{\partial u}\frac{\partial\psi_0}{\partial v} - \sum_{u,v} G^{uv}\frac{\partial\psi_0}{\partial u}\frac{\partial\psi_0}{\partial v}\right) + 4Ks^2\cos\vartheta. \tag{2,15}$$

Пользуясь приведёнными выше выражениями (2,06) — (2,10), мы можем написать:

$$D(s) = \cos\vartheta + 2s\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{R_0}\right] + \frac{4s^2}{R_1R_2}\cos\vartheta, \tag{2,16}$$

где значения R_0, R_1, R_2 взяты в точке, где произошло отражение.

Величина $D(s)/D(0)$ даёт, очевидно, расширение пучка, т. е. отношение его сечения на расстоянии s от поверхности (считаемом вдоль луча) к сечению у самой поверхности.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОТРАЖЁННОЙ ВОЛНЫ

Пусть поле падающей плоской волны равно

$$\mathbf{E}^0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{H}^0 e^{i\varphi}, \tag{3,01}$$

где $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ — постоянные амплитуды и

$$\varphi = k\psi = k(xa_x + ya_y + za_z) \tag{3,02}$$

— фаза волны в данной точке пространства.

Вводя значение

$$\varphi_0 = k\psi_0 = k(x_0a_x + y_0a_y + z_0a_z) \tag{3,03}$$

фазы φ на поверхности тела, мы будем иметь для поля падающей волны на поверхности тела выражения

$$\mathbf{E}^0 e^{ik\psi_0}, \quad \mathbf{H}^0 e^{ik\psi_0}. \tag{3,04}$$

Поле отражённой волны на поверхности тела будет равно

$$\mathbf{E}^* e^{ik\psi_0}, \quad \mathbf{H}^* e^{ik\psi_0}, \tag{3,05}$$

где $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$ связаны с $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ формулами Френеля (1,13) и (1,14). (По поводу обозначений заметим, что в формулах (1,13) и (1,14) мы считали фазовый множитель $e^{ik\psi_0}$ включённым в $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ и в $\mathbf{E}^*$, $\mathbf{H}^*$, но так как этот множитель в обеих частях равенств (1,13) и (1,14) одинаков, то безразлично, будем ли мы разуметь в этих равенствах под $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^*$, $\mathbf{H}^*$ полные выражения (3,04) и (3,05) или их амплитуды.)

В обозначениях этого параграфа $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ суть постоянные, а $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$ — медленно меняющиеся функции от координат точки на поверхности. Обозначим через F одну из составляющих поля отражённой волны. Значение F на поверхности будет равно

$$F = f(u,\ v)\, e^{ik\psi_0(u,\ v)}, \tag{3,06}$$

где $f(u, v)$ — медленно меняющаяся функция, а k — большой параметр. Чтобы найти значение F на некотором расстоянии s от поверхности, нам нужно знать решение волнового уравнения

$$\Delta F + k^2 F = 0, \tag{3,07}$$

которое удовлетворяет условию излучения и предельному условию (3,06) на поверхности. Пользуясь тем, что k есть большой параметр, можно указать приближённый вид такого решения в явной форме.

В самом деле, рассмотрим выражение

$$F = f(u,\ v)\sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}}\cdot e^{ik(\psi_0 + s)}. \tag{3,08}$$

Величины u, v, s можно толковать как криволинейные координаты точки в пространстве, связанные с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями (2,11). Геометрический смысл этих криволинейных координат очевиден: параметры u, v определяют положение той точки на поверхности тела, от которой отразился луч, дошедший до точки x, y, z; величина же s есть расстояние, пройденное лучом после отражения.

Таким образом, величину F в формуле (3,08) можно толковать как функцию точки в пространстве. Очевидно, что эта функция принимает на поверхности $s = 0$ значение (3,06). Очевидно также, что она удовлетворяет условию излучения и соответствует рассеянной волне. Но, кроме того, если параметр k велик, функция F приближённо удовлетворяет волновому уравнению. Действительно, можно показать, что из определения ψ_0 и $D(s)$ и из формул (2,11) вытекают равенства

$$\{\operatorname{grad}(\psi_0 + s)\}^2 = 1, \tag{3,09}$$

$$\operatorname{div}\left\{f^2 \frac{D(0)}{D(s)} \operatorname{grad}(\psi_0 + s)\right\} = 0. \tag{3,10}$$

На основании этих равенств легко проверить, что после подстановки F в уравнение (3,07) в нём сократятся члены второй и первой степени относительно k и останутся только члены нулевой степени.

Независимо от только что изложенных рассуждений, справедливость выражения (3,08) вытекает из соображений геометрической оптики. В самом деле, это выражение должно давать отражённую волну. Но фаза отражённой волны, очевидно, равна $k(\psi_0+s)$. Что касается амплитуды, то, если итти вдоль тонкого пучка отражённых лучей, амплитуда должна меняться обратно пропорционально корню квадратному из сечения пучка, что и даётся формулой (3,08).

Таким образом, эта формула даёт поле отражённой волны на расстоянии s от поверхности, когда известно поле на самой поверхности.

Применяя найденную формулу к составляющим электрического и магнитного поля, мы получим для них выражения

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^*(u,v)\cdot\sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}}\,e^{ik(\psi_0+s)}, \tag{3,11}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}^*(u,v)\cdot\sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}}\,e^{ik(\psi_0+s)}, \tag{3,12}$$

где $\mathbf{E}^*(u, v)$ и $\mathbf{H}^*(u, v)$ суть получаемые из формул Френеля амплитуды поля на поверхности тела.

Полученные нами формулы для поля представляют естественную комбинацию законов отражения и геометрической (лучевой) оптики. То и другое в отдельности было известно свыше ста лет назад: Френель нашёл свои законы отражения около 1820 г., а Гамильтон — законы лучевой оптики около 1830 г. В частности, Гамильтону было известно, что величина, соответствующая нашему $D(s)$, является многочленом второй степени от s. Однако нам не удалось найти в литературе указаний на применение этих результатов к приближённому представлению отражённой электромагнитной волны.

4. ЗАКОН ДИФФРАКЦИИ В ОБЛАСТИ ПОЛУТЕНИ

Мы уже упоминали во введении, что вблизи геометрической границы тени, в области скользящего падения луча, падающая и отражённая волны становятся неотделимыми друг от друга и формулы Френеля становятся неприменимыми. Мы изложим здесь, на основе нашей работы [1], идею вывода диффракционных формул, которые дают поле в этой области, а также в области полутени и тени.

Представим себе выпуклое тело, на которое падает в направлении оси x плоская волна. Выберем на поверхности тела точку, лежащую на границе геометрической тени и примем её за начало координат. Направим ось z по нормали к поверхности (в сторону воздуха). Так как нормаль на границе тени перпендикулярна направлению волны, то наши оси x и z будут взаимно перпендикулярны. Ось y выберем так, чтобы получить правую координатную систему.

В окрестности данной точки уравнение поверхности будет иметь вид

$$z+\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)=0, \tag{4,01}$$

причём будет

$$a\geqslant 0; \quad c\geqslant 0; \quad ac-b^2\geqslant 0. \tag{4,02}$$

Радиус кривизны нормального сечения поверхности будет равен

$$R_0=\frac{1}{a}. \tag{4,03}$$

В дальнейшем мы введём «большой параметр» m по формуле

$$m=\sqrt[3]{\frac{kR_0}{2}}=\sqrt[3]{\frac{k}{2a}} \tag{4,04}$$

и будем решать нашу задачу, пренебрегая величинами порядка $\frac{1}{m^2}$ по сравнению с единицей.

Наша цель состоит в нахождении электромагнитного поля на расстояниях от начала координат, малых по сравнению с радиусом кривизны R_0.

При наших предположениях каждая составляющая поля будет вида

$$F=e^{ikx}F^*, \tag{4,05}$$

где F^* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2F^*}{\partial z^2}+2ik\frac{\partial F^*}{\partial x}=0. \tag{4,06}$$

Все составляющие поля могут быть выражены через H_y и H_z по формулам

$$\left.\begin{aligned} E_x&=\frac{i}{k}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right),\\ E_y&=H_z,\\ E_z&=-H_y,\\ H_x&=\frac{i}{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4,07}$$

которые можно рассматривать как упрощённые уравнения Максвелла.

Приближённые предельные условия для поля в воздухе на границе с хорошо проводящим телом были установлены М. А. Леонтовичем. Они справедливы при условиях

$$|\eta\mu|\gg 1; \quad kR_0\left|\sqrt{\eta\mu}\right|\gg 1 \tag{4,08}$$

и имеют вид (см. (1,18)).

$$\mathbf{E}-\mathbf{n}E_n=\sqrt{\frac{\mu}{\eta}}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]. \tag{4,09}$$

В дальнейшем мы будем считать $\mu = 1$. Входящие в (4,09) составляющие вектора нормали определятся из уравнения поверхности (4,01). Мы можем приближённо положить

$$n_x = ax + by; \quad n_y = bx + cy; \quad n_z = 1, \tag{4,10}$$

ибо квадратами величин n_x и n_y можно пренебречь по сравнению с единицей. Величины n_x, n_y, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ мы будем считать малыми одного порядка.

При этих предположениях можно вывести из (4,07) и (4,09) такие предельные условия для поля, которые содержат только H_y и H_z. Они будут иметь вид:

$$H_z = -n_y H_y, \tag{4,11}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + ik\left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) H_y = n_y \frac{\partial H_z}{\partial x}. \tag{4,12}$$

Вследствие малости величины n_y правые части этих уравнений представляют поправочные члены. В первом приближении их можно заменить нулём и рассматривать более простые предельные условия:

$$H_z = 0, \tag{4,13}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + ik\left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) H_y = 0. \tag{4,14}$$

Во втором приближении можно подставить в правые части (4,11) и (4,12) значения H_y и H_z, получаемые путём решения дифференциальных уравнений с предельными условиями (4,13) и (4,14)*).

Кроме дифференциальных уравнений и предельных условий на поверхности тела, решение должно удовлетворять условиям на бесконечности. Эти последние состоят в требовании, чтобы та часть решения, которая соответствует плоской волне, имела на бесконечности заданную амплитуду.

Поставленная математическая задача имеет однозначное решение, которое мы здесь приведём, минуя все выкладки и ограничиваясь определениями.

Если не считать множителя e^{ikx}, поле будет зависеть от координат только через посредство величин**)

$$\xi = m(ax + by), \tag{4,15}$$

$$\zeta = 2am^2 \left[z + \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cz^2)\right], \tag{4,16}$$

*) В нашей основной работе[1] здесь была допущена непоследовательность, а именно, в качестве предельных условий рассматривались (4,11) и (4,14). Вследствие этого в окончательном выражении для H_z (см. ниже формулу (4,30)) получен как главный член, так и поправочный, а в выражении для H_y (формула (4,29)) получен только главный член. В настоящей статье эта неточность исправлена.

**) Поправочные члены будут, кроме того, содержать линейным образом координату y.

из которых вторая на поверхности обращается в нуль. Постоянные, характеризующие электрические свойства отражающей поверхности, входят в выражения для поля через посредство величины*)

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta}}; \qquad m = \sqrt[3]{\frac{k}{2a}}. \tag{4,17}$$

Поле выражается в конечном счёте через одну универсальную (т. е. не зависящую от формы поверхности) функцию $V_1(\xi, \zeta, q)$ и через её предельное значение

$$V_2(\xi, \zeta) = V_1(\xi, \zeta, \infty). \tag{4,18}$$

Функция V_1 может быть представлена в виде определённого интеграла, содержащего комплексные функции Эйри $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Последние определяются как решения дифференциального уравнения

$$w''(t) = tw(t), \tag{4,19}$$

имеющие при больших отрицательных t асимптотические выражения

$$w_1(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{-t}} \exp\left(i\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right), \tag{4,20}$$

$$w_2(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{-t}} \exp\left(-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right). \tag{4,21}$$

Выражение для V_1 имеет вид

$$V_1(\xi, \zeta, q) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_C e^{i\xi t} \left\{ w_2(t-\zeta) - \frac{w_2'(t) - qw_2(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-\zeta) \right\} dt, \tag{4,22}$$

где контур C идёт по лучу $\arg t = \frac{2}{3}\pi$ от бесконечности к нулю и по лучу $\arg t = -\frac{1}{3}\pi$ от нуля до бесконечности.

При $\zeta = 0$ (на поверхности тела) выражение для V_1 упрощается и принимает вид

$$V_1(\xi, 0, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_C e^{i\xi t} \frac{dt}{w_1'(t) - qw_1(t)}. \tag{4,23}$$

Эта функция табулирована для ряда значений q; таблицы для $q = 0$ (абсолютно-проводящее тело) напечатаны в нашей работе [2].

*) Если бы мы вместо условий Леонтовича (1,18) пользовались формулами (1,19) и (1,20), мы получили бы для q несколько более точное значение $q = \frac{im}{\eta}\sqrt{\eta - 1}$.

Имея определение $V_1(\xi, \zeta, q)$, мы можем написать выражения для поля. Для этого введём функции

$$\Psi = e^{-i\varphi} V_1(\xi, \zeta, q), \tag{4,24}$$

$$\Phi = e^{-i\varphi} V_2(\xi, \zeta), \tag{4,25}$$

где

$$\varphi = \xi\zeta - \frac{1}{3}\xi^3, \tag{4,26}$$

и составим при помощи их выражения:

$$P = -i\frac{b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} + \left(i\frac{b}{a}q + \frac{ac-b^2}{a}my\right)(\Phi - \Psi), \tag{4,27}$$

$$Q = i\frac{b}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} + \left(-i\frac{b}{a}q + \frac{ac-b^2}{a}my\right)(\Phi - \Psi). \tag{4,28}$$

Тогда составляющие H_y и H_z магнитного поля будут равны:

$$H_y = H_y^0 e^{ikx}\Psi + \frac{1}{m}H_z^0 e^{ikx}Q, \tag{4,29}$$

$$H_z = \frac{1}{m}H_y^0 e^{ikx}P + H_z^0 e^{ikx}\Phi, \tag{4,30}$$

где H_y^0 и H_z^0 — амплитуды падающей волны. Все четыре функции Φ, Ψ, P, Q удовлетворяют дифференциальному уравнению вида (4,06) и будут одного порядка величины. Так как m есть большой параметр, то члены, содержащие Φ и Ψ, будут главными, а члены, содержащие P и Q, — поправочными. Составляющие поля E_x и H_x будут того же порядка, как поправочные члены, а именно:

$$E_x = -\frac{i}{m}H_y^0 e^{ikx}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}, \tag{4,31}$$

$$H_x = \frac{i}{m}H_z^0 e^{ikx}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}. \tag{4,32}$$

Что касается остальных составляющих электрического поля, то в силу упрощённых уравнений Максвелла (4,07) они будут равны

$$E_y = H_z; \quad E_z = -H_y. \tag{4,33}$$

Таким образом, все составляющие поля нами определены.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЯ В ТЕНЕВОЙ И ОСВЕЩЁННОЙ ОБЛАСТЯХ

Выведенные нами диффракционные формулы дают поле вблизи некоторой точки, лежащей на поверхности проводящего тела на границе геометрической тени. Мы покажем, что они дают непрерывный переход от поля, соответствующего формулам Френеля (для освещённой области), к полной тени. Начнём с области тени.

Интеграл (4,22) может быть представлен как сумма вычетов, относящихся к корням знаменателя подъинтегральной функции. Мы имеем

$$V_1(\xi,\zeta,q) = i\,2\sqrt{\pi}\sum_{s=1}^{\infty} e^{i\xi t_s}\,\frac{w_1(t_s-\zeta)}{w_1^2(t_s)\,(t_s-q^2)}\,, \tag{5,01}$$

где t_s есть корень уравнения

$$w_1'(t_s) - q w_1(t_s) = 0. \tag{5,02}$$

Корни t_s лежат вблизи луча $\arc t = \frac{\pi}{3}$ и возрастают по модулю. При достаточно больших положительных значениях $\xi - \sqrt{\zeta}$ в ряде (5,01) можно ограничиться одним членом. Если, кроме того, воспользоваться асимптотическим выражением (4,20) для w_1 и считать в нём ζ большим по сравнению с t_1, мы получим для V_1 приближённое выражение

$$V_1(\xi,\zeta,q) = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}\,2\sqrt{\pi}}{w_1^2(t_1)\,(t_1-q^2)}\cdot e^{i\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}\cdot e^{i(\xi-\sqrt{\zeta})\,t_1}\,. \tag{5,03}$$

Величина t_1 имеет при $q=0$ и $q=\infty$ следующие значения:

$$t_1 = 1{,}01879\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad (q=0), \tag{5,04}$$

$$t_1 = 2{,}33811\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad (q=\infty). \tag{5,05}$$

Во всяком случае, как вещественная, так и мнимая часть t_1 — положительны. Отсюда следует, что при возрастании $\xi - \sqrt{\zeta}$ функции V_1 и V_2 и связанные с ними функции Φ, Ψ, P, Q, а следовательно, и поле будут убывать по показательному закону.

Заметим, что равенство $\xi - \sqrt{\zeta} = 0$ даёт геометрическую границу тени. Возрастающие положительные значения величины $\xi - \sqrt{\zeta}$ соответствуют точкам, лежащим всё дальше и дальше в области тени.

Там, где величина $\xi - \sqrt{\zeta}$ не велика (она может быть обоих знаков), мы имеем область полутени. На способах вычисления функции V_1 в этой области мы останавливаться не будем; укажем только, что эта функция, а следовательно, и поле меняются там непрерывным образом.

Перейдём теперь к освещённой области, где величина $\xi - \sqrt{\zeta}$ велика и отрицательна. В этом случае рядом (5,01) для V_1 пользоваться нельзя и нужно вернуться к интегралу (4,22). Член, содержащий $w_2(t-\zeta)$ в этом интеграле, может быть вычислен точно. Он даёт

$$\frac{i}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_C e^{i\xi t}\,w_2(t-\zeta)\,dt = e^{i\varphi}\,, \tag{5,06}$$

где φ имеет значение

$$\varphi = \xi\zeta - \frac{1}{3}\xi^3, \tag{5,07}$$

совпадающее с (4,26). Таким образом, этот член даёт в функциях Ψ и Φ слагаемое единицу, а в выражениях для поля он соответствует падающей волне.

Второй член может быть вычислен по способу стационарной фазы, как показано в нашей работе[1]. Экстремум фазы получается при $\sqrt{-t} = p$, где

$$p = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\xi^2 + 3\zeta} - 2\xi\right). \tag{5,08}$$

Для входящего в эту формулу корня квадратного удобно ввести особое обозначение:

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + 3\zeta}. \tag{5,09}$$

Заметим, что величина p имеет тот же знак, как $\sqrt{\zeta} - \xi$, так что $p > 0$ соответствует освещённой области, $p = 0$ — геометрической границе тени и $p < 0$ — теневой области. Нас интересуют теперь большие положительные значения p. Для этого случая применение способа стационарной фазы даёт для всей величины V_1 выражение

$$V_1(\xi, \zeta, q) = e^{i\varphi} - e^{i\varphi^*} \cdot \sqrt{\frac{p}{\sigma}} \cdot \frac{q - ip}{q + ip}, \tag{5,10}$$

где фаза φ равна (5,07), а фаза φ^* равна

$$\varphi^* = \frac{1}{27}\left(4\sigma^3 - 3\sigma^2\xi - 2\xi^3\right). \tag{5,11}$$

Заметим, что разность фаз $\varphi^* - \varphi$ равна

$$\varphi^* - \varphi = \frac{2}{27}(\sigma + \xi)(\sigma - 2\xi)^2 = (\sigma - p)p^2. \tag{5,12}$$

При $\zeta = 0$ будет $\sigma = p = -\xi$, так что $\varphi^* - \varphi$ обращается на поверхности тела в нуль.

Величина V_2 получается из (5,10) при $q = \infty$. Связанные с V_1 и V_2 функции Ψ и Φ будут приближённо равны:

$$\Psi = 1 - e^{i(\varphi^* - \varphi)} \sqrt{\frac{p}{\sigma}} \cdot \frac{q - ip}{q + ip}, \tag{5,13}$$

$$\Phi = 1 - e^{i(\varphi^* - \varphi)} \sqrt{\frac{p}{\sigma}}. \tag{5,14}$$

В выражения для поля входят не только самые функции Ψ и Φ, но и их производные по ζ. При составлении производных можно все множители, кроме фазового, считать постоянными. Вследствие

$$\frac{\partial(\varphi^* - \varphi)}{\partial\zeta} = \frac{2}{3}\sigma - \frac{4}{3}\xi = 2p \tag{5,15}$$

мы будем иметь

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}=2ip\,(\Psi-1);\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=2ip\,(\Phi-1). \qquad (5,16)$$

Вычисляя при помощи этих значений величины P и Q, получим

$$P=Q=\frac{2ip}{q+ip}\left(\frac{b}{a}\,p-\frac{ac-b^2}{a}\,my\right)\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i(\varphi^*-\varphi)}. \qquad (5,17)$$

Нам остаётся подставить найденные выражения в формулы (4,29) — (4,32) для поля. При этом удобно обозначить одной буквой

$$\chi=kx+\varphi^*-\varphi \qquad (5,18)$$

фазу отражённой волны. С этим обозначением мы будем иметь

$$H_y=H_y^0e^{ikx}-H_y^0\frac{q-ip}{q+ip}\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}+$$
$$+\frac{1}{m}H_z^0\frac{2ip}{q+ip}\left(\frac{b}{a}\,p-\frac{ac-b^2}{a}\,my\right)\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}, \qquad (5,19)$$

$$H_z=H_z^0e^{ikx}-H_z^0\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}+$$
$$+\frac{1}{m}H_y^0\frac{2ip}{q+ip}\left(\frac{b}{a}\,p-\frac{ac-b^2}{a}\,my\right)\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}. \qquad (5,20)$$

$$E_x=-\frac{1}{m}H_y^0\cdot 2p\,\frac{q-ip}{q+ip}\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}, \qquad (5,21)$$

$$H_x=\frac{1}{m}H_z^0\cdot 2p\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi} \qquad (5,22)$$

и, кроме того, $E_y=H_z$; $E_z=-H_y$.

Первые члены в (5,19) и (5,20), очевидно, дают падающую волну, а остальные члены — отражённую волну. В следующем параграфе мы покажем, что отражённая волна в точности соответствует формулам Френеля с поправкой на расширение пучка.

6. СРАВНЕНИЕ ДИФФРАКЦИОННЫХ ФОРМУЛ С ФОРМУЛАМИ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ОСВЕЩЁННОЙ ОБЛАСТИ

Обратимся теперь к формулам Френеля. Полагая в коэффициентах Френеля $\mu=1$ и считая $\sqrt{\eta}$ величиной большой, а $\cos\vartheta$ малой (порядка $1/\sqrt{\eta}$), получим для N и M выражения

$$N=\frac{\sqrt{\eta}\cos\vartheta-1}{\sqrt{\eta}\cos\vartheta+1};\qquad M=-1 \qquad (6,01)$$

В формулах Френеля (1,13) и (1,14) мы должны положить $a_x=1$, $a_y=a_z=0$ и считать n_x и n_y величинами малыми, квадратами которых можно пренебречь. Эти формулы дают тогда для электрического поля

$$\left.\begin{aligned} E_x^* &= -2Nn_x H_y^0, \\ E_y^* &= -H_z^0 - (N+1)\, n_y H_y^0, \\ E_z^* &= -NH_y^0 + (N+1)\, n_y H_z^0 \end{aligned}\right\} \qquad (6,02)$$

и для магнитного поля

$$\left.\begin{aligned} H_x^* &= -2\, n_x H_z^0, \\ H_y^* &= NH_y^0 - (N+1)\, n_y H_z^0, \\ H_z^* &= -H_z^0 - (N+1)\, n_y H_y^0. \end{aligned}\right\} \qquad (6,03)$$

Чтобы получить поле отражённой волны на некотором расстоянии от поверхности, нужно, согласно (3,11) и (3,12), умножить эти выражения на множитель

$$\sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}}\, e^{ik(x_0+s)}. \qquad (6,04)$$

Значения всех величин, кроме s, нужно брать в той точке x_0, y_0, z_0, где произошло отражение луча, попавшего в точку x, y, z. Так как уравнение отражающей поверхности есть

$$z_0 + \frac{1}{2}(ax_0^2 + 2bx_0 y_0 + cy_0^2) = 0, \qquad (6,05)$$

то мы имеем

$$n_x = ax_0 + by_0; \quad n_y = bx_0 + cy_0; \quad n_z = 1. \qquad (6,06)$$

При вычислении $D(s)$ по общей формуле (2,23) мы должны пренебречь последним членом, так как нас интересует поле на расстояниях, малых по сравнению с радиусами кривизны. Остальные члены дают

$$D(s) = \cos\vartheta + 2as = 2as - ax_0 - by_0. \qquad (6,07)$$

Чтобы произвести сравнение диффракционных формул (5,19)—(5,22) с формулами Френеля (6,02) и (6,03), нам нужно установить связь между величинами x_0, y_0, s и координатами x, y, z (или величинами ξ, ζ, y). Эта связь даётся формулами (2,11), которые в нашем случае принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + s - 2sn_{x2}, \\ y &= y_0 - 2sn_x n_y, \\ z &= z_0 - 2sn_x n_z. \end{aligned}\right\} \qquad (6,08)$$

Решая эти уравнения приближённо относительно x_0, y_0, s, получим

$$\left.\begin{aligned} ax_0+by_0 &= \frac{2\xi-\sigma}{3m} = -\frac{p}{m}, \\ y_0 &= y, \\ s &= \frac{\sigma+\xi}{3am} = \frac{\sigma-p}{2am}. \end{aligned}\right| \qquad (6,09)$$

Отсюда

$$n_x = -\frac{p}{m}; \quad n_y = -\frac{b}{a}\frac{p}{m} + \frac{ac-b^2}{a}y. \qquad (6,10)$$

Далее, фаза χ по определению (5,12), (5,18) равна

$$\begin{aligned} \chi &= kx + \varphi^* - \varphi = kx + (\sigma - p)p^2 = \\ &= k(x + 2sn_x^2) = k(x_0 + s), \end{aligned} \qquad (6,11)$$

т. е. она равна фазе отражённой волны, вычисляемой по геометрической оптике. Вычислим теперь величину $D(s)$. Подставляя в (6,07) величины (6,09), получим

$$D(s) = \frac{\sigma}{m}, \qquad (6,12)$$

причём, очевидно,

$$D(0) = \cos\vartheta = \frac{p}{m}. \qquad (6,13)$$

Последние три формулы дают

$$\sqrt{\frac{p}{\sigma}}e^{i\chi} = \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}}e^{ik(x_0+s)}. \qquad (6,14)$$

Таким образом, множитель (6,14), входящий во все выражения для отражённой волны в диффракционных формулах (5,19) — (5,22), совпадает с множителем, входящим в формулы (3,08) — (3,09), которые представляют обобщение формул Френеля. Величина

$$\sqrt{\frac{p}{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\xi}{3\sigma}} \qquad (6,15)$$

даёт при этом поправку на расширение пучка.

Нам остаётся проверить, что и все другие величины в формулах (5,19) — (5,22) совпадают с френелевскими.

Согласно (4,17) и (6,13) мы имеем

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta}}; \qquad p = m\cos\vartheta. \qquad (6,16)$$

Поэтому

$$\frac{q-ip}{q+ip}=\frac{1-\sqrt{\eta}\cos\vartheta}{1+\sqrt{\eta}\cos\vartheta}=-N, \tag{6,17}$$

где N — коэффициент Френеля (6,01) *).

Пользуясь формулами (6,10) и (6,17) как обозначениями, мы можем написать наши выражения (5,19) — (5,22) для поля в виде

$$H_y=H_y^0e^{ikx}+\left[NH_y^0-(N+1)n_yH_z^0\right]\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}, \tag{6,18}$$

$$H_z=H_z^0e^{ikx}+\left[-H_z^0-(N+1)n_yH_y^0\right]\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}, \tag{6,19}$$

$$E_x=-2Nn_xH_y^0\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}, \tag{6,20}$$

$$H_x=-2n_xH_z^0\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\,e^{i\chi}. \tag{6,21}$$

Сравнивая эти выражения с френелевскими формулами (6,02) и (6,03), мы убедимся, что множители при величине (6,14) в точности совпадают с их френелевскими значениями H_y^*, H_z^*, E_x^*, H_x^*. Равенства же $E_y=H_z$; $E_z=-H_y$ выполняются как в случае наших формул, так и в случае формул Френеля.

Таким образом, мы показали, что в той части освещённой области, где угол наклона луча к поверхности тела мал, наши формулы переходят в обобщённые (путём введения множителя (6,14)) формулы Френеля.

В области же полутени и в теневой области наши формулы дают картину диффракции.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Изв. АН СССР, сер. физ. **10**, № 2, стр. 171—186 (1946).
2. В. А. Фок, ЖЭТФ **15**, вып. 12, стр. 693—702 (1945).

*) Значение $q=\frac{im}{\eta}\sqrt{\eta-1}$ приводит к несколько более точному значению N, а именно

$$N=\frac{\eta\cos\vartheta-\sqrt{\eta-1}}{\eta\cos\vartheta+\sqrt{\eta-1}}.$$