1946 г. УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК Т. XXVIII, вып. 2—3

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

В. Л. Гинзбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Возможность осуществления радиосвязи между самыми удалёнными точками земного шара обусловлена влиянием на распространение радиоволн высших слоёв земной атмосферы. Действительно, если мы пренебрежём этим влиянием, то задача расчёта линии связи сводится к рассмотрению диффракции на земном шаре радиоволн, излучаемых находящейся на земле антенной. При этом, как и во всех диффракционных задачах, *волновое поле в области геометрической тени* (т. е. за горизонтом) быстро убывает, и на расстоянии в несколько тысяч километров напряжённость поля ни в коем случае не может достигнуть наблюдаемых значений. Физически это утверждение, вытекающее из строгой теории диффракции, довольно очевидно, так как даже в случае самых длинных волн (с длиной волны в тысячи метров) радиоприём осуществляется на расстояниях, соответствующих загибанию волн *в область тени на тысячи километров*, т. е. на тысячи длин волн.

Вместе с тем ещё в конце XIX века с целью объяснить вариации земного магнитного поля было высказано предположение о наличии в высших слоях атмосферы проводящих слоёв. Подобные слои должны, очевидно, влиять на распространение радиоволн над землёй, на что

и было указано Кеннели и Хевисайдом в 1902 г., т. е. через год после того, как Маркони впервые осуществил трансатлантическую радиосвязь*).

Проводящие слои в атмосфере часто называют слоями Кеннели-Хевисайда, а вся область атмосферы с заметной проводимостью называется ионосферой.

Наличие проводящих слоёв приводит к тому, что радиоволны распространяются над землёй как бы в сферическом конденсаторе, т. е. между концентрическими проводящими сферами (поверхностью земли и ионосферой). В результате дальность приёма чрезвычайно возрастает. Для коротких волн с длиной волны порядка десятков и сотен метров влияние ионосферы выступает особенно ярко и, в частности, на близких расстояниях от передатчика. Само существование отражающих слоёв может быть в этой области продемонстрировано методом радиоимпульсов, предложенным Брейтом и Тювом (1926 г.) и являющимся основным при изучении ионосферы. С земли вверх направляется радиосигнал длительностью менее 10^{-4} *сек*. Через время порядка 10^{-3} *сек* сигнал возвращается обратно в место его отправки, и его появление может быть отмечено на осциллографе. По времени запаздывания отражённого сигнала можно, очевидно, судить о расстоянии отражающего слоя от земли. Это расстояние составляет сто или более километров.

Изучение отражения радиоволн от ионосферы весьма важно для установления закономерностей радиосвязи на коротких волнах и одновременно является основным методом исследования самой ионосферы, т. е. имеет большое значение с геофизической точки зрения. В связи с этим изучению распространения и отражения радиоволн от ионосферы было посвящено большое число работ, из которых особенно важны работы Эпплтона и его сотрудников, и в настоящее время вопрос может считаться в основном выясненным.

Общее состояние проблемы освещено в ряде обзоров [1,2], где, однако, теория распространения радиоволн в ионосфере излагается лишь весьма неполно и, так сказать, в грубом приближении. Вместе с тем, дальнейшее исследование ионосферы радиометодами, которое неизбежно должно быть направлено на более тонкие вопросы и на детали, делает необходимым более тщательную дискуссию теоретической стороны дела. Настоящий обзор и посвящён такому систематическому рассмотрению ряда вопросов теории распространения радиоволн в ионосфере, причём привлекаемые экспериментальные данные носят, главным образом, иллюстративный характер.

Прежде чем закончить это введение, представляется целесообразным привести здесь основные сведения об ионосфере; вопрос о том,

---

*) В соответствии с целями настоящего обзора мы не останавливаемся на истории вопроса сколько-нибудь подробно и не приводим ссылок на ранние работы. Эта сторона дела освещена в обзоре Мимно [1].

как эти заключения получены из ионосферных наблюдений, ясен из дальнейшего.

Распределение плотности в атмосфере вплоть до высот около 100 *км* описывается барометрической формулой, причём состав атмосферы с высотой не меняется (в силу перемешивания). Концентрация молекул на высоте 100 *км* равна примерно 10^{14} (на уровне моря $N_m = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ *молекул/см*^{3}). Ход плотности на бо́льших высотах не ясен; повидимому, здесь с повышением высоты падение концентрации несколько замедляется, а температура даже возрастает. Радиометоды непосредственно позволяют определить лишь верхний предел концентрации молекул на высоте порядка 200—300 *км* (см. § 2).

Влияние высших слоёв атмосферы на распространение радиоволн обусловлено наличием в этой области электронов и ионов. Схематически концентрация электронов показана на рис. 1. В области слоя F, на высоте 200—350 *км*, влияние на радиоволны оказывают электроны, концентрация которых $N_e \equiv N \leqslant 3 \cdot 10^8$ *эл./см*^{3}. Максимальное значение концентрации и её ход с высотой меняются в зависимости от времени суток, сезона, географической широты и солнечной активности. В ряде случаев слой F раздваивается на два слоя F_1 и F_2. Слой E расположен на высоте 100 *км*; его ширина составляет около 20 *км*.

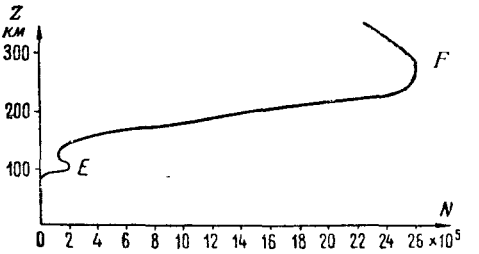

Рис. 1.

Если не учитывать влияния земного магнитного поля, то радиометоды не дают возможности различить между электронным и ионным слоями. При этом, если для электронного слоя концентрация электронов равна N, то в эквивалентном ионном слое концентрация ионов равна $N_i = N\frac{M}{m}$, где M и m — массы иона и электрона (см. § 2; ионы предполагаются однократными, т. е. несущими один элементарный заряд e). В то время как в случае слоя F установлена его электронная природа, в слое E на распространение радиоволн оказывают влияние и электроны и ионы. На рис. 1 отложена поэтому эффективная концентрация электронов, в этом слое равная $N_{ef} = N + N_i\frac{m}{M}$; эта концентрация $N_{ef} \leqslant 2 \cdot 10^5$. Если фактически свойства слоя E определяются ионами, то $N_i \leqslant 6 \cdot 10^9$ (так как масса ионов азота и кислорода больше массы электрона примерно в $3 \cdot 10^4$ раз). Относительная роль зарядов обоих типов (электронов и ионов) в слое E ещё окончательно не выяснена. Помимо двух основных слоёв E и F, ниже, на высоте около 50 *км*, находится слабо ионизированный слой D,

оказывающий влияние, главным образом, на длинные волны и весьма мало изученный.

Следует, кроме того, иметь в виду существование в ионосфере ряда нерегулярных явлений, приводящих к осложнённой картине отражения радиоволн от различных слоёв.

§ 1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

Ионосфера представляет собой среду, состоящую из молекул, ионов и электронов, причём концентрация всех этих частиц меняется с высотой. Задача теории состоит в том, чтобы количественно описать распространение волн в этой среде и сделать, таким образом, возможным по наблюдениям над радиоволнами судить о составе ионосферы на различных высотах.

Поскольку длина волны даже ультракоротких радиоволн значительно больше, чем среднее расстояние между различными частицами в ионосфере, распространение радиоволн в ней заведомо можно и нужно рассматривать на основе обычных феноменологических уравнений электродинамики в материальных средах, имеющих вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{i\omega}{c}\mathbf{D}, & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{i\omega}{c}\mathbf{H}, & \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ — соответственно векторы напряжённости электрического и магнитного полей и вектор электрической индукции, $\mathbf{j}$ — плотность тока и ρ — плотность заряда.

Уравнения (1) написаны сразу в предположении, что все переменные зависят от времени по гармоническому закону, т. е. пропорциональны $e^{i\omega t}$; как известно, в силу наличия дисперсии, которой в применении к ионосфере нельзя пренебрегать, более общие уравнения поля, содержащие вместо множителя $i\omega$ производные по времени, становятся бессодержательными; в то же время уравнения в форме (1) полностью применимы и при наличии дисперсии. Кроме того, поскольку в ионосфере магнитная проницаемость практически равна единице, в уравнениях (1) не делается различия между напряжённостью и индукцией магнитного поля.

Исключая из системы (1) поле $\mathbf{H}$, мы приходим к следующему уравнению для $\mathbf{E}$:

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\mathbf{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\mathbf{j}\right) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Для того чтобы уравнения (1) или (2) могли быть использованы для решения электродинамических задач, необходимо задать связь между векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{j}$, с одной стороны, и электрическим полем

E, — с другой. Если не учитывать влияния на свойства ионосферы земного магнитного поля, то **D** и **j** направлены так же, как и вектор **E**, и пропорциональны ему, т. е.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{3}$$

где ε — диэлектрическая постоянная и σ — проводимость. Связь величин ε и σ со свойствами ионосферы будет рассмотрена в § 2.

При учёте влияния земного магнитного поля, векторы **D**, **j** и **E** связаны между собой более общей зависимостью

$$\left.\begin{aligned} D_i &= \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k, \\ j_i &= \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} E_k, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где положено $D_1 = D_x$, $D_2 = D_y$, $D_3 = D_z$ и т. п. Выражения для ε_{ik} и σ_{ik} будут получены в § 2. Следует подчеркнуть, что ε, σ, ε_{ik} и σ_{ik} зависят от частоты ω, в чём и проявляется наличие дисперсии. Пренебрегая нелинейными явлениями (люксембургский эффект), можно все эти величины считать не зависящими от напряжённостей электрического и магнитного полей радиоволны.

Неоднородность среды, если таковая имеет место, проявляется в том, что ε и σ или ε_{ik} и σ_{ik} являются также функциями координат.

В изотропном случае (3) уравнение (1) принимает вид:

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \tag{5}$$

где ε' — комплексная диэлектрическая постоянная, равная

$$\varepsilon' = \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{6}$$

В общем случае, когда ε' зависит от всех координат, дальнейшее упрощение уравнения (5) невозможно. В случае ионосферы, однако, наиболее ярко выражена зависимость ε', или (при учёте влияния магнитного поля) соответствующего тензора $\varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{4\pi\sigma_{ik}}{\omega}$ от высоты, т. е. от расстояния от земной поверхности. В пределах относительно небольшого участка земной поверхности, на котором можно считать одинаковой высоту солнца, изменение ε' при заданном расстоянии от земной поверхности носит случайный характер (облака в ионосфере и т. п.) и накладывается на регулярную картину распределения ε'. Как ясно из сказанного, в качестве регулярной зависимости ε' мы

принимаем такую, при которой ε' зависит лишь от высоты, т. е., при пренебрежении сферичностью земли, лишь от направленной вертикально вверх координаты z.

Если поставить вопрос об отражении радиоволн от ионосферы во всей его полноте, то необходимо рассматривать такую задачу. Около поверхности земли находятся передающая антенна A и приёмная антенна B (рис. 2); зная ток в антенне A, нужно найти его в антенне B. При этом прямое влияние A на B может быть исключено применением импульсной методики, при использовании которой отражённый сигнал приходит в B в момент, когда в A ток равен нулю.

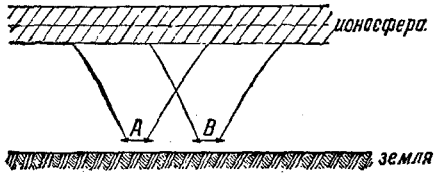

Рис. 2.

В строгой постановке указанная задача, при учёте конечной проводимости земли, весьма сложна и её решение не исследовано (путь нахождения решения указан в [3,4]). Вместе с тем, в строгом решении и нет особой необходимости. Дело в том, что расстояние до ионосферы не меньше ста километров, т. е. несравненно больше длины коротких радиоволн, и, таким образом, ионосфера находится далеко в волновой зоне помещённого на земле излучателя. Поэтому весь процесс распространения волн в ионосфере можно рассматривать независимо от условий, в которых находятся передатчик и приёмник. Эти условия существенны лишь с точки зрения нахождения волнового поля передатчика на большой высоте (до начала ионосферы) и определения напряжённости поля отражённого сигнала у поверхности земли в месте нахождения приёмника; для получения полного решения, т. е. в конечном счёте напряжённости поля в месте приёма или тока в приёмной антенне, нужно, разумеется, соединить решения «внизу» (у земли) и «наверху» (в ионосфере).

Следует, однако, иметь в виду, что вычисление напряжённости поля от сложного излучателя, которым являются помещённая у земли коротковолновая антенна и окружающие её предметы, представляется делом весьма не простым и, главное, ненадёжным. Вместе с тем, с точки зрения основного метода радиоисследования ионосферы напряжённость поля отражённого сигнала интереса не представляет, так как в этом методе определяется лишь время запаздывания сигнала. Напряжённость нужно знать лишь для определения коэффициента отражения от ионосферы. Если же не интересоваться определением коэффициента отражения (см. [5,6]) и ограничиться важнейшим случаем вертикального падения волн на слой, то задача ещё более упрощается. Мы можем теперь просто считать, что вверх, на ионосферу, падает плоская волна с нормалью, направленной по оси z (т. е. вертикально вверх). Отражаясь от слоя, волна остаётся плоской и возвращается

на землю с некоторым сдвигом фаз по сравнению с падающей; поглощение скажется на уменьшении амплитуды отражённой волны. Резюмируя всё сказанное, мы видим, что для радиоисследований ионосферы основной интерес имеет рассмотрение задачи об отражении плоской волны (или группы волн) от среды, свойства которой меняются по направлению нормали к волне. Этой проблемой мы и ограничимся в настоящем обзоре.

В изотропном случае (3), т. е. без учёта влияния магнитного поля земли, при нормальном падении волны на слой, вектор **E** лежит в плоскости xy и в то же время значение E зависит лишь от координаты z, вдоль которой меняются свойства слоя. Поэтому уравнение (5) приобретает такой вид:

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)E=0, \tag{7}$$

где под $E=E(z)e^{i\omega t}$ можно понимать и E_x и E_y. При учёте влияния магнитного поля уравнения в разбираемом случае также сильно упрощаются. Именно, поскольку **E** зависит лишь от z, уравнения (2) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(D_x-i\frac{4\pi}{\omega}j_x\right)=0,\\ \frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(D_y-i\frac{4\pi}{\omega}j_y\right)=0,\\ D_z-i\frac{4\pi}{\omega}j_z=0,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где **D** и **j** связаны с **E** соотношениями (4).

При заданных ε' и ε'_{ik} дальнейшее исследование сводится к решению уравнений (7) и (8). Кроме того, необходимо выразить ε' и ε'_{ik} через универсальные постоянные, частоту и концентрацию различных частиц в ионосфере. К этому последнему вопросу мы и перейдём.

§ 2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ И ПРОВОДИМОСТЬ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА

Ионосфера — это ионизированный газ (плазма), состоящий из электронов, ионов и молекул. Для вычисления диэлектрической постоянной и проводимости этого газа нужно рассматривать влияние на входящие в его состав заряды постоянного электрического поля. Учитывать зависимость поля от координат не нужно потому, что ε и σ являются, так сказать, локальными характеристиками газа, неоднородность которого проявляется в изменении величин ε и σ от точки к точке. Вначале мы определим ε и σ без учёта влияния

магнитного поля земли, т. е. когда на частицы, кроме внешнего электрического поля, действуют лишь силы взаимодействия между самими этими частицами, проявляющиеся в соударениях между ними. Далее, в практически важных случаях роль упомянутого взаимодействия для распространения радиоволн невелика и в первом приближении ею можно пренебречь. Поэтому уравнение движения электронов имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}e^{i\omega t}, \tag{9}$$

где e и m — заряд и масса электрона.

Вынужденное решение уравнения (9), которое нас только и интересует, имеет вид $\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2} e^{i\omega t}$, а вызванная полем $\mathbf{E}$ поляризация $\mathbf{P} = eN\mathbf{r} = -\frac{e^2N}{m\omega^2}\mathbf{E}e^{i\omega t}$; но по определению $\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}$ и, таким образом,

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - 3{,}19 \cdot 10^9 \frac{N}{\omega^2}, \tag{10}$$

где N — концентрация электронов.

Вклад в ε поступательного движения ионов определяется, очевидно, формулой (10) с заменой массы электрона m массой иона M. Таким образом, влияние на ε ионов с концентрацией N_i эквивалентно влиянию электронов с концентрацией $N_{ef} = N_i m/M$, как об этом уже говорилось во введении. Ниже, для определённости, влияния ионов на ε мы явно учитывать не будем.

Влияние взаимодействия между входящими в состав ионосферы частицами, т. е. влияние соударений, на ε не велико (см. ниже). Однако, проводимость полностью определяется этими соударениями, что ясно уже из того, что проводимость обусловливает потери на поглощение, а потери возможны только при наличии механизма, переводящего в тепло энергию упорядоченного движения, вызванного полем; подобным механизмом и являются соударения. Наличие поглощения можно учесть введением в левую часть уравнения (9) силы трения $g\dot{\mathbf{r}}$, причём смысл коэффициента g можно выявить следующим образом. Выражение $g\dot{\mathbf{r}} = g\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ — скорость) представляет собой среднее связанное с ударами изменение импульса за 1 *сек*; это изменение, с другой стороны, равно $mv\nu_{ef}$, где ν_{ef} — эффективное число ударов, так как при каждом ударе изменение импульса по порядку величины равно самому импульсу mv. Таким образом, $g = m\nu_{ef}$, и уравнение движения с учётом соударений приобретает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu_{ef}\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}e^{i\omega t}. \tag{9'}$$

Решая его таким же образом, как уравнение (9), мы приходим к выражению для полной поляризации *):

$$\mathbf{P}_t = eN\mathbf{r} = -\frac{e^2N\mathbf{E}e^{i\omega t}}{m(\omega^2 - i\nu_{ef}\omega)} =$$

$$= \left(-\frac{e^2N}{m(\omega^2+\nu_{ef}^2)} - \frac{ie^2\nu_{ef}N}{m\omega(\omega^2+\nu_{ef}^2)}\right)\mathbf{E}e^{i\omega t};$$

но, по определению, при наличии проводимости, полный ток

$$\mathbf{j}_t = i\omega\mathbf{P}_t = \left(\sigma + i\omega\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E}e^{i\omega t}.$$

Отсюда имеем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2N}{m(\omega^2+\nu_{ef}^2)}, \quad \sigma = \frac{e^2\nu_{ef}N}{m(\omega^2+\nu_{ef}^2)} = \frac{1-\varepsilon}{4\pi}\nu_{ef}. \tag{11}$$

На практике (речь идёт, конечно, о практике распространения радиоволн) обычно

$$\nu_{ef} \ll \omega^2 \tag{12}$$

и, таким образом, для ε сохраняется старое выражение (10) и

$$\sigma = \frac{e^2\nu_{ef}N}{m\omega^2}. \tag{13}$$

Величина ν_{ef}, фигурирующая в написанных формулах, носит пока несколько условный характер и нуждается в более строгом определении. Последнее достигается путём рассмотрения вопроса методом кинетического уравнения [7]. Не останавливаясь на соответствующих вычислениях, укажем, что в результате мы получаем формулы (11), а при условии (12), разумеется, формулы (10) и (13). При этом, если электроны соударяются с нейтральными молекулами, которые мы для определённости представляем себе в виде твёрдых шариков с радиусом a, то

$$\nu_{ef} = \frac{4}{3}\pi a^2 N_m \bar{v}, \tag{14}$$

где $\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость электрона (при $T = 300°$ K, $\bar{v} \approx 10^7$ *см/сек*) и N_m — число молекул в *см*^{3}. Для молекул O_2 и N_2

*) Полный ток $\mathbf{j}_t = \frac{\partial \mathbf{P}_t}{\partial t}$ по определению равен $\sigma\mathbf{E} + \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$, где $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{D}-\mathbf{E}}{4\pi}$. При желании можно не вводить величин $\mathbf{j}_t$ и $\mathbf{P}_t$, а сразу написать $eN\mathbf{r} = \left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi} + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\mathbf{E}e^{i\omega t}$.

приближённо:

$$\nu_{ef} \approx 5 \cdot 10^{-16} N_m \bar{v} \left(\approx 5 \cdot 10^{-9} N_m \text{ при } T = 300^\circ \text{ K} \right). \quad (15)$$

Формула (14), если не обращать внимания на численный коэффициент, имеет обычный вид выражения для числа соударений ($\nu = \pi r^2 N_m v$). Если электроны соударяются с однократно заряженными ионами, то

$$\nu_{ef} = \frac{\pi e^4}{(kT)^2} \ln \left(\frac{kT}{e^2 N_i^{1/3}} \right) N_i \bar{v} \left(= 10^{-8} \ln \frac{1{,}8 \cdot 10^5}{N_i^{1/3}} \text{ при } T = 300^\circ \text{ K} \right), \quad (16)$$

где k — постоянная Больцмана, N_i — концентрация ионов; формула справедлива с точностью до множителя порядка единицы.

Сравнивая (16) с формулой $\nu = \pi r^2 N_i \bar{v}$ для числа соударений, мы видим, что для ионов эффективное сечение равно $\pi r^2 = \pi \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \left(\frac{kT}{e^2 N_i^{1/3}} \right)$; в качественном отношении этот результат вполне понятен, так как эффективным радиусом для соударений является то расстояние от центра иона, пролетая на котором электрон существенно изменяет своё движение. Поскольку кинетическая энергия электрона равна $^3/_2 kT$, а его потенциальная энергия на расстоянии r от иона равна $\frac{e^2}{r}$, упомянутый эффективный радиус по порядку величины равен $\frac{e^2}{kT}$, так как при пролёте на таком расстоянии от иона электрон претерпевает изменение скорости, сравниваемое с самой этой скоростью. Для $T = 300^\circ$ K значения ν_{ef}, вычисленные по формулам (15) и (16), приведены в таблице

$N_m = N_i$	ν_{ef} по формуле (15)	ν_{ef} по формуле (16)
10^4	—	100
10^6	—	$7{,}5 \cdot 10^3$
10^9	5	$5{,}2 \cdot 10^6$
10^{12}	$5 \cdot 10^3$	$2{,}9 \cdot 10^9$
10^{14}	$5 \cdot 10^5$	—

Мы видим, что при $T = 300^\circ$ K ионы в отношении числа соударений эффективнее молекул в 10^6 раз. При $T = 1000^\circ$ K ионы эффективнее молекул в 10^5 раз.

Ионосфера является квазинейтральной, т. е. число электронов и отрицательных ионов в ней равно числу положительных ионов (ионы предполагаются однократными). Поэтому, если в слое F концентрация электронов равна 10^6, то $N_i \geqslant 10^6$ и ν_{ef} для соударений на этих ионах порядка 10^3—10^4; на опыте ν_{ef} также порядка 10^3—10^4 (экспериментальные значения ν_{ef} см. в [8]). При наличии

и молекул и ионов $\nu_{ef} = \nu_{ef}$ (ионов) $+ \nu_{ef}$ (молекул), и на основании приведённых цифр можно лишь сказать, что ν_{ef} (молекул) $< 5 \cdot 10^3$, т. е. $N_m < 10^{12}$.

Определить число молекул N_m радиометодом (по измерению ν_{ef}), очевидно, невозможно, хотя это и пытались иногда делать. Действительно, даже если бы мы точно знали температуру, то и тогда можно определить лишь нижнюю границу ν_{ef} (ионов); этой нижней границе соответствует предположение о том, что $N_i = N$; достаточно допустить, что в силу наличия отрицательных ионов $N_i > N$, чтобы увеличить ν_{ef} (ионов) до экспериментального значения ν_{ef} (если это значение больше, чем ν_{ef} (ионов) при $N_i = N$) и, таким образом, лишить нас возможности судить о ν_{ef} (молекул).

В E слое, где обычно, повидимому, значение ε определяется ионами в качестве ν_{ef}, нужно взять число соударений ионов с ионами и молекулами. При этом ν_{ef} по порядку величины определяется прежними формулами (15) и (16) с заменой $\bar{v}$ на среднюю скорость ионов; для ионов $O_2^{\pm}$ и $N_2^{\pm}$ при $T = 300°$ К, $\bar{v} = 4 \cdot 10^4$ *см/сек*, т. е. меньше электронной скорости примерно в 250 раз.

Выше при выводе формулы (10) мы молча обошли один весьма существенный и в то же время деликатный вопрос. Дело в том, что по смыслу задачи в уравнении (9) фигурирует так называемое действующее поле $\mathbf{E}_д$, т. е. поле, действующее на электрон, которое, вообще говоря, не равно среднему макроскопическому полю $\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon - 1}\mathbf{P}$. Напомним, например, что в сжатых газах часто хорошо соблюдается соотношение $\mathbf{E}_д = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}$, приводящее к известной формуле Лоренц-Лоренца. Вопрос о значении действующего поля для ионизированного газа весьма не прост и дискутировался до последнего времени. В результате было выяснено [9,10], что в ионосфере $\mathbf{E}_д = \mathbf{E}$ и, таким образом, формула (10) правильна (некоторые оговорки см. в [10]). Связь $\mathbf{E}_д = \mathbf{E}$ использована также при получении формул (11). Этот результат сохраняется, как можно показать, и для ионной плазмы, т. е. в случае поля, действующего на ионы, а не на электроны.

Перейдём теперь к учёту влияния магнитного поля земли $\mathbf{H}^{(0)}$. В этом случае вместо (9′) мы имеем ($\mathbf{E}_д = \mathbf{E}$ и в этом случае):

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu_{ef}\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}e^{i\omega t} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}^{(0)}]. \tag{17}$$

Отсюда получаем уравнение для $\mathbf{P}_t = eN\mathbf{r}$

$$(i\omega\nu_{ef} - \omega^2)\,\mathbf{P}_t = \frac{e^2N}{m}\mathbf{E} + \frac{i\omega e}{mc}[\mathbf{P}_t\mathbf{H}^{(0)}]. \tag{17′}$$

Выбрав систему координат таким образом, чтобы поле $\mathbf{H}^{(0)}$ было направлено по оси z, мы без труда придём к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} P_{t,x}+iP_{t,y}&=\frac{e^2N(E_x+iE_y)}{m(-\omega^2+i\omega\nu_{ef}+\omega\omega_H)},\\ P_{t,x}-iP_{t,y}&=\frac{e^2N(E_x-iE_y)}{m(-\omega^2+i\omega\nu_{ef}-\omega\omega_H)},\\ P_{t,z}&=\frac{e^2NE_z}{m(-\omega^2+i\omega\nu_{ef})},\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где ω_H — гиромагнитная частота, равная

$$\omega_H=\frac{|e|H}{mc}. \tag{19}$$

Поскольку

$$j_{t,i}=i\omega P_{t,i}=\sum_{k=1}^{3}\left(\sigma_{ik}+i\omega\frac{\varepsilon_{ik}-\delta_{ik}}{4\pi}\right)E_k,$$

из (18) можно алгебраическим путём найти ε_{ik} и σ_{ik}, на чём мы останавливаться не будем. Дело в том, что компоненты тензоров ε_{ik} и σ_{ik} зависят от выбора системы координат; система же координат, в которой поле $\mathbf{H}^{(0)}$ направлено по оси z, для дальнейшего не удобна. Как мы уже видели, исследование распространения радиоволн особенно просто, если направить ось z вертикально вверх, т. е. по нормали к волне. Оси x и y мы выберем так, чтобы магнитное поле земли не имело слагающей по оси x. Проекции $\mathbf{H}^{(0)}$ на оси z и y обозначим соответственно через $H_L^{(0)}=H^{(0)}\cos\alpha$ и $H_T^{(0)}=H^{(0)}\sin\alpha$, где α — угол между $\mathbf{H}^{(0)}$ и осью z. В этой системе координат с помощью (17′) можно найти $\mathbf{P}$; мы выпишем соответствующие выражения для случая, когда $\nu_{ef}=0$, и, кроме того, в соответствии с задачей, стоящей в § 6, будем считать, что $D_z=0$:

$$\left.\begin{aligned} D_x=E_x+4\pi P_x&=\left\{1+\frac{\omega_0^2(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega_L^2-\omega^2)+\omega^2\omega_T^2}\right\}E_x+\\ &+\frac{i\omega_L\omega_0^2(\omega^2-\omega_0^2)}{\omega\left\{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega_L^2-\omega^2)+\omega^2\omega_T^2\right\}}E_y\\ D_y=E_y+4\pi P_y&=\frac{-i\omega_L\omega_0^2(\omega^2-\omega_0^2)}{\omega\left\{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega_L^2-\omega^2)+\omega^2\omega_T^2\right\}}E_x+\\ &+\left\{1+\frac{\omega_0^2(\omega^2-\omega_0^2-\omega_T^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega_L^2-\omega^2)+\omega^2\omega_T^2}\right\}E_y\\ P_z=i\frac{\omega\omega_T}{\omega^2-\omega_0^2}P_x,&\quad D_z=E_z+4\pi P_z=0,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \omega_L = \omega_H \cos\alpha, \quad \omega_T = \omega_H \sin\alpha, \\ \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Представив (20) в виде $D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k$, мы сразу же находим значения ε_{ik}.

Выше мы учитывали лишь ту часть диэлектрической постоянной, которая связана с движением свободных электронов и ионов; поглощение также связывалось только с соударениями электронов (или ионов) с молекулами и ионами. Часть диэлектрической постоянной, не связанная с колебаниями свободных заряженных частиц для разреженного газа, ничтожно мала и ею действительно можно пренебречь. В принципе возможен, однако, некоторый специфический эффект, обусловленный влиянием земного магнитного поля на магнитный момент частиц, входящих в состав атмосферы [11, 12]. Не считая некоторых ионов и атомарного кислорода, присутствующих в ионосфере, магнитным моментом обладают молекулы кислорода, число которых составляет 21% от всего числа молекул в воздухе. В магнитном поле земли магнитный момент определённым образом ориентируется относительно поля, что приводит к зеемановскому расщеплению термов молекулы. Если разность энергий между зеемановскими подуровнями данного уровня молекулы равна ΔE_i, то она может поглощать электромагнитные волны с частотой $\omega_i = \frac{\Delta E_i}{\hbar}$ ($\hbar = 1{,}04 \cdot 10^{-27}$). Помимо поглощения, зеемановское расщепление приводит к тому, что среда становится двоякопреломляющей, т. е. $\varepsilon_{ik} \neq \varepsilon \cdot \delta_{ik}$. Поскольку $\omega_i = \frac{\Delta E_i}{\hbar} \sim \frac{\mu_0 H}{\hbar} = \frac{eH}{2mc} = 4{,}4 \cdot 10^6$ (μ_0 — магнетон Бора, $H \approx 0{,}5$ гаусса — напряжённость земного поля), частоты поглощения лежат в радиодиапазоне. Однако, как оказывается [11], указанный эффект весьма мал и в лучшем случае лежит на границе экспериментальных возможностей. При этом интересно, что незначительность эффекта обусловливается отрицательными дисперсией и абсорбцией. Отрицательная абсорбция, т. е. вынужденное испускание возбуждённым атомом излучения в направлении падающей волны, так же как отрицательная дисперсия, могут наблюдаться только в газе, содержащем много возбуждённых частиц. Поэтому в оптической области отрицательная абсорбция вообще не наблюдалась, а отрицательная дисперсия изучалась лишь в плазме газового разряда (Ладенбург и др.). В разбираемом здесь случае распространения радиоволн, напротив, отрицательные абсорбция и дисперсия выявлены очень ярко, так как число возбуждённых молекул, т. е. молекул, находящихся на верхних зеемановских подуровнях, лишь немногим меньше числа молекул, находящихся на ниж-

них подуровнях; соответствующее отношение порядка $e^{\Delta E_i/kT} \approx \approx 1 + \frac{\Delta E_i}{kT}$. Вследствие отрицательных абсорбции и дисперсии в выражениях для коэффициента поглощения и для показателей преломления (или тензора ε_{ik}) появляется множитель $\frac{\Delta E_i}{kT} \lesssim \frac{\mu_0 H}{kT} \sim 10^{-7}$ (при $T = 300°$ K), который и обусловливает малость соответствующих эффектов. Если бы отрицательные абсорбция и дисперсия отсутствовали, то этот множитель исчез бы, и характер распространения радиоволн в атмосфере радикально отличался бы от наблюдаемого.

Эффект, аналогичный описанному, мог бы в принципе иметь место в силу влияния электрического поля, имеющегося в атмосфере, на полярные молекулы; в составе атмосферы имеются, однако, лишь полярные молекулы воды, для которых эффект полностью отсутствует [12].

§ 3. ПОКАЗАТЕЛИ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Распространение радиоволн в среде описывается, как мы видели, уравнениями (7) или (8) и вполне определяется заданием функций $\varepsilon'(z)$ или $\varepsilon'_{ik}(z)$. В самом общем случае неоднородной среды не остаётся далее ничего другого, как исследовать решения этих уравнений (7) или (8). Однако, в ионосфере зависимость ε' и ε'_{ik} от z удовлетворяет одному весьма важному условию, а именно она является медленной, и поэтому открывается возможность весьма общего рассмотрения процесса распространения, не связанного с конкретным видом функций ε' или ε'_{ik}. Распространение в среде с медленно меняющимися свойствами тесно примыкает к распространению в однородной среде, где ε' или ε'_{ik} не зависят от координат. В этом последнем случае, как известно, вместо ε' и ε'_{ik} можно ввести производные величины — показатели преломления и поглощения, полностью характеризующие распространение электромагнитной волны. К этому вопросу мы и перейдём, причём для удобства в дальнейшем, вплоть до § 6, будем рассматривать лишь изотропный случай, т. е. влияние земного магнитного поля учитывать не будем.

В однородной среде уравнение (7) для распространяющейся волны имеет решение вида

$$E = Ce^{\pm i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon' z}} \equiv Ce^{\pm i\frac{\omega}{c}(n-ik)z} \equiv Ce^{\pm\frac{\omega}{c}kz + i\frac{\omega}{c}nz}, \qquad (22)$$

где C — постоянная, множитель $e^{i\omega t}$ опущен (это будет делаться

и дальше), и

$$(n - ik)^2 = \varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{23}$$

Показатели преломления n и k, как легко получить из (23), равны:

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \\ k &= \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

При отсутствии поглощения [см. (10)]

$$n^2 = \varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - v, \tag{10'}$$

где

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}.$$

Представление n^2 в виде функции от безразмерного параметра v особенно удобно в значительно более сложном анизотропном случае (см. § 6). В изотропном случае (10′) зависимость n^2 от v представлена на рис. 3, где необычный выбор направления осей определяется известной традицией. Смысл показателей n и k в (22) хорошо известен: показатель k определяет поглощение волны, а n определяет её фазовую скорость, равную $w = \frac{c}{n}$. При $v > 1$, как видно из (10′), $\varepsilon < 0$, и показатель преломления n является мнимым; поэтому правильнее было бы в этом случае поменять n и k местами, т. е. считать, что при $\sigma = 0$ и $\varepsilon < 0$, $n = 0$ и $k^2 = |\varepsilon|$. Мы, однако, не будем этого делать, сохранив для n и k выражения (24) при любом знаке ε. В этом случае при $\sigma = 0$ k всегда равно нулю и $n^2 = \varepsilon$; оправдание такого выбора можно видеть, помимо известного удобства, в том, что при $\sigma = 0$ истинное поглощение отсутствует и затухание волны, имеющее место при $\varepsilon < 0$, не связано с диссипацией энергии.

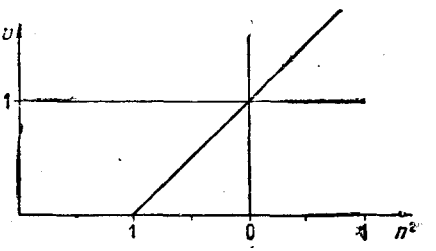

Рис. 3.

Если не обращать внимания на местные, локальные неоднородности ионосферы, то плотность свободных зарядов в ней можно считать плавно и медленно меняющейся — это видно из схематического

рис. 1, на котором представлена высотная зависимость эффективной концентрации электронов. Поэтому диэлектрическая постоянная и проводимость, или эквивалентные этим величинам показатели преломления и поглощения, также плавно и медленно меняются с высотой; критерием медленности изменения является при этом условие, чтобы все величины менялись очень мало на расстояниях порядка длины радиоволн в ионосфере. В слое F, простирающемся на сотни километров, это условие медленности, которое мы ниже уточним, выполняется обычно очень хорошо, так как в этом случае интерес представляют волны с длиной, меньшей 100 метров. В E-слое, толщина которого составляет лишь десятки километров и где интересно распространение более длинных волн, условие медленности оказывается более жёстким, но практически также обычно выполняется.

Если на длине электромагнитной волны свойства среды меняются мало, то, очевидно, распространение этих волн в небольшой области очень близко к распространению в однородной среде с показателями преломления и поглощения, соответствующими данному участку ионосферы. Распространение во всей неоднородной среде при этом эквивалентно распространению в однородной среде с изменяющимися постоянными. Математическое описание распространения в подобных условиях достигается в результате нахождения приближённого решения волнового уравнения (7), причём это решение, носящее название решения в приближении геометрической оптики, можно получить в явном виде при любой зависимости $\varepsilon'(z)$. Из сказанного ясно, что приближение геометрической оптики играет в теории распространения радиоволн в ионосфере исключительно важную роль. Это приближение, однако, неприменимо вблизи места отражения радиоволн от слоя, и здесь нужно прибегнуть к дискуссии строгих решений волнового уравнения, но не для любого слоя, а, как мы увидим ниже, лишь для линейного и параболического.

Переходя к более детальному развитию приведённых соображений, начнём с вопроса о нахождении приближённого решения геометрической оптики в применении к уравнению (7). Если $\varepsilon' = \text{const.}$, то точное решение этого уравнения имеет вид (22). Поэтому, если ε' медленно меняется на расстояниях порядка $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$, то решение уравнения (7), естественно, искать в виде ряда:

$$E = (E^{(0)} + \frac{c}{\omega} E^{(1)} + \ldots) e^{\pm i \frac{\omega}{c} \psi}, \tag{25}$$

где $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots$ и ψ являются неизвестными функциями z. Подставляя решение (25) в (7) и приравнивая нулю выражения, стоящие в качестве множителей у различных степеней $\frac{\omega}{c}$, мы приходим к следую-

щей системе уравнений*):

$$\left.\begin{aligned}&\left(\varepsilon'-\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right)E^{(0)}=0,\quad \frac{dE^{(0)}}{dz}+\frac{\frac{d^2\psi}{dz^2}}{2\frac{d\psi}{dz}}E^{(0)}=0,\\ &\frac{dE^{(1)}}{dz}+\frac{\frac{d^2\psi}{dz^2}}{2\frac{d\psi}{dz}}E^{(1)}=\frac{\frac{d^2E^{(0)}}{dz^2}}{2i\frac{d\psi}{dz}}\ \text{и т. д.}\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Первое из этих уравнений определяет функцию ψ, так как $E^{(0)}\neq 0$ лишь, если

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2=\varepsilon',\tag{27}$$

т. е

$$\psi=\int\sqrt{\varepsilon'}\,dz.\tag{27'}$$

Из остальных уравнений (16) можно определить $E^{(0)}$, $E^{(1)}$ и т. д.

$$\left.\begin{aligned}&E^{(0)}=\frac{C}{\sqrt{\frac{d\psi}{dz}}}=\frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon'}},\\ &E^{(1)}=\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon'}}\int\limits_0^z\frac{\frac{d^2E^{(0)}}{dz^2}\sqrt[4]{\varepsilon'}}{2i\sqrt{\varepsilon'}}\,dz.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Приближение геометрической оптики**), о котором мы говорили выше, применимо, если в решении (25) можно ограничиться первым членом, т. е. если

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|E^{(1)}\right|\ll\left|E^{(0)}\right|.\tag{29}$$

---

*) Подстановка решения (25) в уравнение (7) приводит к уравнению типа $A\frac{\omega^2}{c^2}+B\frac{\omega}{c}+C+D\frac{c}{\omega}+F\frac{c^2}{\omega^2}+\ldots=0$, где A, B, $C\ldots$ — некоторые выражения, содержащие E, ψ и их производные. Поскольку приведённое равенство должно иметь место при любых значениях ω/c, оно выполняется лишь, если $A=B=C=D=F=\ldots=0$.

**) Точнее, речь идёт о первом приближении геометрической оптики. Поскольку, однако, высшие приближения геометрической оптики никогда не используются, условие её применимости можно отождествить с условием применимости 1-го приближения.

Легко показать [13], что условие (29) заведомо выполняется, если соблюдаются неравенства

$$|\ln n| \lesssim 1, \quad \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{dn}{dz}}{n^2} \ll 1, \quad \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{d^2n}{dz^2}}{n\frac{dn}{dz}} \ll 1, \tag{30}$$

где для простоты принято, что поглощение отсутствует, т. е., что $\varepsilon' = n^2$.

Практически основным условием применимости геометрической оптики является второе из неравенств (30); при наличии поглощения оно переходит в такое:

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{dn}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dk}{dz}\right)^2}{n^2 + k^2}} \ll 1, \tag{31}$$

где n и k — показатели преломления и поглощения, определяемые формулами (24).

В условиях, когда приближение геометрической оптики применимо, поле $E(z)$ имеет вид [см. (23), (25), (27′), (28)]:

$$E(z) = \frac{C}{\sqrt{n - ik}} e^{\pm\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} k(z)\,dz \pm i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n(z)\,dz}, \tag{32}$$

где постоянные C и z_0 должны определяться из граничных условий. Два знака в (32), так же как в (22), соответствуют волнам, распространяющимся по положительному [знак — в (22) и (32)] или отрицательному (знак +) направлению оси z. В приближении геометрической оптики волны, бегущие в обоих направлениях, совершенно независимы. Поэтому отражение от слоя, т. е. переход волны, идущей вверх, в волну, идущую вниз, может наступить лишь в областях, где неравенства (30) не соблюдаются. Последнее имеет место либо если очень мал показатель преломления, либо если велик градиент этого показателя *). Второй случай может иметь место при наличии в ионосфере резких неоднородностей концентрации электронов, что не соответствует сделанным выше предположениям (см. рис. 1), отвечающим регулярному (сглаженному) ходу электронной концентрации с высотой.

Отражение радиоволн от ионосферы происходит, таким образом, обычно в силу наличия областей, где показатель преломления для данной частоты близок к нулю. Неприменимость приближения геометрической оптики в этом случае имеет простое физическое содержание. Как мы уже указывали, условие применимости геометрической

*) Мы ограничиваемся практически интересными случаями, когда не соблюдается второе из неравенств (30). Другие принципиально возможные случаи, а также учёт поглощения практического интереса не представляют.

оптики состоит в малости изменения свойств среды на участках порядка длины волны λ в этой среде, причём $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. При $n \to 0$ λ стремится к бесконечности, и поэтому, даже в случае плавно изменяющихся свойств слоя, вблизи точки $n = 0$ геометрическая оптика неприменима.

При рассмотрении области, где показатель преломления очень мал, нужно различать два случая. В первом из них за точкой, где $\varepsilon = n^2 = 0$, концентрация электронов в слое со стороны отрицательных значений ε возрастает ещё на значительном расстоянии или, другими словами, область, где $\varepsilon < 0$, велика (значительно больше λ_0). Второй случай имеет место, если точка $z\,(\varepsilon = 0)$ лежит вблизи максимума концентрации электронов в слое, т. е. область, где $\varepsilon < 0$, мала (условия малости области, где $\varepsilon < 0$, будут уточнены ниже). В первом случае при отсутствии поглощения имеет место полное отражение радиоволн от слоя. Физически это обстоятельство ясно из следующих соображений. В области, где $\varepsilon < 0$, волна затухает, так как

$$k = 0,\ n = i\sqrt{|\varepsilon|},\ E \sim e^{-\frac{\omega}{c}\int |\sqrt{\varepsilon}|\,dz}$$

[см. (32)], и на расстоянии в несколько длин волн за точкой $z\,(\varepsilon = 0)$ поле практически равно нулю (если производная $d\varepsilon/dz$ не слишком мала). Поскольку по предположению истинное затухание, обусловленное диссипацией энергии, отсутствует, ясно, что вся энергия должна отразиться от слоя так, что образуется стоячая волна.

Приведённые соображения объясняют тот фундаментальный факт, что радиоволны даже при нормальном падении могут полностью отражаться от ионосферы. Это отражение аналогично известному в оптике случаю так называемого полного внутреннего отражения, возникающего при переходе света из оптически более плотной среды, т. е. среды с большим n, в среду, менее плотную. В оптике, однако, полное внутреннее отражение при нормальном падении места не имеет, так как в этом случае оно возможно лишь, если в менее плотной среде $n = 0$. Этот последний случай как раз и осуществляется в ионосфере, где с увеличением высоты (до достижения максимума слоя) n уменьшается и может достигнуть значения $n = 0$. Из формулы (10) ясно, что $n = 0$, если

$$N = \frac{\omega^2}{3{,}19 \cdot 10^9}. \tag{33}$$

Область слоя, соответствующая отрицательным значениям ε и достаточно удалённая от точки $z\,(\varepsilon = 0)$, никакого влияния на поле радиоволн не оказывает. Поэтому и свойства слоя в этой области совершенно несущественны и реальный слой с максимумом можно заменить слоем с монотонно возрастающей концентрацией электронов.

Как ясно из сказанного выше, вблизи от точки $z\,(\varepsilon=0)$ нужно использовать строгое решение волнового уравнения; но в относительно малой области, где ε мало и приближение геометрической оптики неприменимо, зависимость ε от z можно считать линейной и рассматривать, таким образом, решение волнового уравнения для линейного слоя. Смыкая это решение с решением геометрической оптики в области, где последняя применима, мы и получим общее решение для любого слоя, условие применимости этого решения состоит, очевидно, в том, чтобы уклонение слоя от линейного на интервале Δz, где строгое решение волнового уравнения отличается от решения геометрической оптики, было мало, т. е. чтобы соблюдалось неравенство

$$\left|\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right|\Delta z \ll \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0, \tag{34}$$

где производные от ε берутся в точке $z\,(\varepsilon=0)$.

Во втором из указанных случаев, т. е. когда точка $z\,(\varepsilon=0)$ лежит вблизи от максимума концентрации, слой уже нельзя заменить линейным, что ясно непосредственно и проявляется в несоблюдении неравенства (34). В этом случае слой может быть, однако, заменён соответствующим образом подобранным параболическим слоем. Вблизи максимальной концентрации электронов в слое, область, где $\varepsilon<0$, не может быть большой, и имеет место лишь частичное отражение волн от слоя, часть энергии падающей волны при этом проходит через слой. Частота радиоволны, при которой это прохождение становится практически полным, носит, как известно, название критической частоты слоя. Как будет ясно из дальнейшего (см. § 5), критическая частота ω_k может быть с большой точностью определена как частота, при которой точка $z\,(\varepsilon=0)$ находится в максимуме слоя. При бо́льших частотах, как ясно из (33), точка $z\,(\varepsilon=0)$, где $\varepsilon=n^2=0$ вообще не существует. Если $n=0$ в максимуме слоя, то

$$N_{\max}=\frac{m\omega_k^2}{4\pi e^2}=\frac{\omega_k^2}{3{,}19\cdot 10^9}. \tag{35}$$

Это соотношение и определяет критическую частоту ω_k; обычно, однако, пользуются не циклической частотой, а обыкновенной — критической частотой $f_k=\frac{\omega_k}{2\pi}$, равной

$$f_k=9\cdot 10^8\sqrt{N_{\max}}. \tag{36}$$

В F-слое $N_{\max}\leqslant 3\cdot 10^6$ и, таким образом, $f_k\leqslant 1{,}5\cdot 10^7$, и критическая длина волны $\lambda_k=\frac{c}{f_k}$ не меньше 20 метров.

Разумеется, при наклонном падении от ионосферы могут отражаться более короткие волны, чем при нормальном падении, так как в этом случае волна отражается в области, где $n>0$.

§ 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ

Прежде чем пойти дальше, необходимо остановиться на вопросе о строгом решении волнового уравнения (7). Как известно, это уравнение имеет решения, выражающиеся через известные функции лишь в некоторых случаях, т. е. при вполне определённой зависимости ε' от z. Так, например, в случае линейного слоя $\varepsilon' = a + bz$ решение выражается в функциях Бесселя порядка 1/3 [14,8]. Для параболического слоя, когда $\varepsilon' = a + bz^2$, решение выражается в функциях параболического цилиндра (функциях Вебера) [14, 15]. Если ε' имеет вид $\varepsilon' = a + \frac{e^z[b + (e^z + 1) + c]}{(e^z + 1)^2}$, где так же, как и раньше, a, b, c — некоторые комплексные постоянные, то уравнение (7) приводится к гипергеометрическому и его решение может быть детально исследовано [16, 17].

Некоторые другие интегрируемые случаи приводятся в работах [8, 18–20]. Мы не будем здесь останавливаться на различных решениях подробнее, так как по причинам, ясным из сказанного в § 3 в применении к ионосфере, интерес представляет лишь решение для линейного слоя, а вблизи от критической частоты — для параболического слоя.

Для линейного слоя, начинающегося при $z = 0$, при отсутствии поглощения

$$\varepsilon = 1 - \frac{z}{z_1} \quad (z > 0;\ \text{при } z < 0,\ \varepsilon = 1); \tag{37}$$

и решение таково:

$$\left.\begin{aligned} E &= A\zeta^{1/2}\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)\right\} \text{ при } \zeta > 0, \\ E &= A|\zeta|^{1/2}\left\{-I_{1/3}\left(\frac{2}{3}|\zeta|^{3/2}\right) + I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|\zeta|^{3/2}\right)\right\} \text{ при } \zeta < 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где A — постоянная, J — функция Бесселя,

$$I_\nu(z) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} J\left(e^{i\frac{\pi}{2}} z\right)$$

$$\zeta = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3}(z_1 - z). \tag{39}$$

Если $\zeta \gg 1$ (практически $\zeta > 10$), т. е.

$$\left(\frac{\omega}{c} z_1\right)^{2/3} \varepsilon(z) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z_1\right)^{2/3}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \gg 1, \tag{40}$$

то для определения E можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя. В результате при $\zeta > 0$

$$E = A\frac{3}{\sqrt{\pi}}\zeta^{-1/4}\cos\left[\frac{2}{3}\zeta^{3/2} - \pi/4\right]. \tag{41}$$

Будем считать, что в начале слоя при $z = 0$ [т. е. $\zeta = \left(\frac{\omega}{c}z_1\right)^{2/3}$] падающая волна $E_+ = e^{i\omega t}$; решение (41) представляет собой суперпозицию падающей и отражённой волн и, следовательно, при $z = 0$ (множитель $e^{i\omega t}$ опускаем):

$$E = E_+ + E_- = 1 + e^{-i\left(\frac{4}{3}\frac{\omega}{c}z_1 - \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{42}$$

откуда

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega}{c}z_1\right)^{1/6} e^{-i\left(\frac{2}{3}\frac{\omega}{c}z_1 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Сдвиг фаз между отражённой и падающей волнами равен

$$\varphi = \frac{4}{3}\frac{\omega}{c}z_1 - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\omega}{c}\int_0^{z_1}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{1/2} dz - \frac{\pi}{2} =$$

$$= 2\frac{\omega}{c}\int_0^{z_1} n\,dz - \frac{\pi}{2}. \tag{43}$$

Полученные выражения, их обобщение на случай, когда имеется поглощение, а также некоторые результаты для параболического слоя мы обсудим в дальнейшем. Сейчас же можно перейти к рассмотрению отражения от произвольного слоя, происходящего вдали от максимальной концентрации. Если слой всюду линеен, т. е. ε определяется формулой (37), то строгое решение волнового уравнения в начале слоя представляется формулой (42). Как ясно из (43), это решение можно записать в виде

$$E = 1 + e^{-i\varphi},$$

$$\varphi = 2\frac{\omega}{c}\int_0^{z(\varepsilon=0)} n(z)\,dz - \frac{\pi}{2}, \tag{44}$$

где $n = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{1/2}$ и $z(\varepsilon = 0) = z_1$ — точка, где $\varepsilon = 0$. Если бы мы теперь рассмотрели этот случай в приближении геометрической оптики и считали дополнительно, что в точке $z(\varepsilon = 0)$ происходит полное отражение волны, то, как ясно из (32), сдвиг фаз между падающей и отражённой волнами по выходе из слоя равнялся бы

$\varphi = 2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} n(z)\,dz$. Таким образом, точное решение для φ отличается от сконструированного описанным способом решения геометрической оптики лишь слагаемым $-\frac{\pi}{2}$.

Сравнивая (41) с (32), легко видеть, что в применении к линейному слою геометрическая оптика применима при соблюдении условия (40), т. е. на расстояниях от точки $z(\varepsilon=0)$, удовлетворяющих неравенству

$$\Delta z \gg \left(\frac{z_1 c^2}{\omega^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{z_1 \lambda_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{45}$$

Из сказанного в § 3 следует, что если условие (34) выполняется для Δz, удовлетворяющих неравенству (45), т. е. если выполнено неравенство *)

$$\left|\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right|_0 \ll \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0^{4/3} \lambda_0^{-2/3}, \tag{46}$$

то можно получить решение для произвольного слоя, смыкая при $z - z(\varepsilon=0) \sim \Delta z$ решение для линейного слоя с решением геометрической оптики. В результате, для любого слоя при соблюдении условия (46) на выходе из слоя (при $z=0$) имеет место решение (44), где $n(z)$ — характеризующая данный слой функция от z [14]. В обычных условиях поправка $-\pi/2$ в (44) много меньше, чем основной первый член этого выражения.

Иллюстрируем применение полученных формул на примере весьма часто используемого параболического слоя, позволяющего ввиду наличия максимума рассмотреть также область, близкую к критической частоте. В этом случае

$$\varepsilon = 1 - \frac{f_k^2}{f^2}\left[1 - \left(\frac{z}{z_m}\right)^2\right], \tag{47}$$

где z_m — полутолщина слоя, координата z отсчитывается, как принято в этом случае, от максимума слоя, $f = \frac{\omega}{2\pi}$ — частота и f_k — критическая частота, определяемая из условия, что при $f = f_k$, $\varepsilon = 0$ в максимуме слоя, где $z = 0$. Выражение (47) соответствует выбору концентрации электронов в виде

$$N = N_{\max}\left[1 - \left(\frac{z}{z_m}\right)^2\right].$$

*) Для линейного слоя $|d\varepsilon/dz| = 1/z_1$, что и учтено при подстановке (45) в (34).

Для слоя (47) условие (46) выполняется, если точка лежит от максимума слоя (т. е. точки $z=0$) на расстоянии, удовлетворяющем неравенству

$$z(\varepsilon=0)\gg\sqrt{\lambda_0 z_m}\cdot\sqrt{\frac{f}{f_k}}\quad\left(\lambda_0=\frac{c}{f}\right). \tag{48}$$

Поскольку для волн с частотой f *)

$$z(\varepsilon=0)=\pm\sqrt{\frac{f_k^2-f^2}{f_k^2}z_m}, \tag{49}$$

условие (46) или (48) выполнено, если

$$\Delta f\gg\frac{c}{z_m}, \tag{50}$$

где

$$\Delta f=f_k-f.$$

Для слоя F, $z_m\sim100$ *км* и, таким образом, получаем $\Delta f\gg3\cdot10^3$, т. е. условие (46) и приведённая формула (44) для φ справедливы для частот, отличающихся от критической больше, чем на $3\cdot10^4$ гц. Поскольку f_k в этом случае порядка 7—8 мгц, формула (44) применима для $f_k/f\geqslant1{,}005$, т. е. практически всегда. Для E слоя, где $z_m\sim20$ *км*, условие (30) переходит в $\Delta f\gg1{,}5\cdot10^4$ и поскольку f_k здесь порядка 2—3 мгц, рассмотренное выше приближение применимо для $f_k/f\geqslant1{,}05$ т. е. также почти во всей области частот.

Заметим здесь попутно, что для слоя (47) **)

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=2\frac{\omega}{c}\int\limits_{z(\varepsilon=0)}^{z_m}n(z)\,dz-\frac{\pi}{2}=\frac{\omega}{c}L_0-\frac{\pi}{2},\\ L_0&=z_m\left[1-\frac{f_k^2-f^2}{2f_kf}\ln\frac{f_k+f}{f_k-f}\right],\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

где мы ввели оптическую длину пути L_0 (см. ниже).

Приведённые результаты можно распространить на случай, когда имеется поглощение [8]. Для линейного слоя в этом случае

$$\varepsilon'=(n-ik)=\varepsilon-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}=\left(1-\frac{z}{z_1}\right)-i\left(\alpha+\beta\frac{z}{z_1}\right), \tag{52}$$

где α и β действительные постоянные.

---

*) Точка, соответствующая знаку — в (49), лежит за максимумом слоя и при полном отражении волной не достигается.

**) При выбранных для параболического слоя координатах точке 0 в (44) соответствует значение $z=z_m$, и ввиду другого направления оси z пределы в интеграле нужно поменять местами.

Решение волнового уравнения (7) имеет при этом попрежнему вид (38), где

$$\zeta = \xi - i\eta = \left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{z_1}{1+i\beta}\right)^{2/3} (n - ik), \tag{53}$$

и условия $\zeta > 0$ и $\zeta < 0$ нужно заменить на условия $\xi > 0$ и $\xi < 0$.

При соблюдении условия (46) и медленности изменения σ, т. е. условии

$$\frac{d\sigma}{dz}\lambda_0 \ll 1, \tag{54}$$

решение задачи может быть, как и при отсутствии поглощения, получено для любого слоя.

Если в начале слоя для падающей волны $E = 1$, то всё поле в начале слоя, равное сумме падающей и отражённой волн, имеет вид:

$$E = 1 + e^{-i\varphi} = 1 + \rho e^{-i\varphi}; \tag{55}$$

сдвиг фаз φ и коэффициент отражения ρ определяются соотношениями

$$\varphi = \frac{2\omega}{c}\int_0^{z(\varepsilon=0)} n(z)\,dz - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\,\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}\right)^{3/2}, \tag{56}$$

$$-\ln\rho = \frac{2\omega}{c}\int_0^{z(\varepsilon=0)} k(z)\,dz + \frac{\sqrt{2}\,\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}\right)^{3/2}, \tag{57}$$

где $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ и $\sigma(0)$ — значения этих величин в точке $z(\varepsilon = 0)$.

Выражения (56) и (57) отличаются от часто используемых формул присутствием члена $\frac{\sqrt{2}\,\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}\right)^{3/2}$, который, впрочем, обычно весьма мал; в реальных случаях, рассмотренных в [8], эта поправка составляет около 5% от величины $\ln\rho$. В отношении φ поправочный член совершенно несущественен, так как он даже много меньше поправки — $\pi/2$; нужно, однако, заметить, что само по себе поглощение на значении φ сказывается, поскольку в этом случае n равно не $\sqrt{\varepsilon}$, а более сложному выражению (24).

Выше мы остановились преимущественно на рассмотрении отражённой волны по выходе её из слоя, т. е. нас интересовали фаза и амплитуда отражённой волны на границе слоя или, что по сути дела то же, вдали от слоя. Известный интерес может также представлять характер волнового поля в самом слое и, в частности, вблизи от точки отражения, т. е. точки $z(\varepsilon = 0)$.

Вдали от этой точки волновое поле имеет вид (32); вблизи от точки $z(\varepsilon=0)$ при соблюдении условия (34) ответ на вопрос может быть получен из рассмотрения линейного слоя. При отсутствии поглощения решение вблизи точки $z(\varepsilon=0)$ определяется формулой (38), причём

$$A=\frac{2}{3}\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/6} e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} n(z)\,dz-\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{58}$$

Расчёты, использующие таблицы функций Бесселя, приводят к следующим выводам [8]. Поле E обращается в нуль в точках, отстоящих от точки $z(\varepsilon=0)$ на расстоянии

$$\Delta z_0=\left(\frac{3}{2}\delta\right)^{2/3}\frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{1/3}}, \tag{59}$$

где δ равно 2,38; 5,61; 8,64 и т. д. (для десятого нуля $\delta=30{,}63$). Первый максимум E лежит в точке

$$\Delta z_m=\left(\frac{3}{2}\,0{,}7\right)^{2/3}\frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{1/3}}. \tag{60}$$

Значение $|E|^2$ в первом максимуме равно *)

$$|E_m|^2=3{,}6\left[\frac{\omega/c}{|d\varepsilon/dz|_0}\right]^{1/3}. \tag{61}$$

Волновое поле в области отражения представлено на рис. 4 сплошной линией, причём по оси абсцисс отложена величина $\zeta=\Delta z\left(\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{1/3}$ и по оси ординат величина $\left|\frac{E}{A}\right|^2$; при $\zeta\gg 1$,

$$\left|\frac{E}{A}\right|^2=\frac{9}{\pi}\zeta^{-1/2}\cos^2\left(\frac{2}{3}\zeta^{-3/2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Как было показано выше, несмотря на то, что при $n\to 0$ решение геометрической оптики неприменимо, фаза отражённой волны может быть по существу (т. е. обычно с большой точностью) вычислена с помощью геометрико-оптического приближения, дополненного

*) В работе [19] было строго рассмотрено отражение не от линейного слоя, а от значительно более сложного. Однако, если заменить этот слой в области отражения на линейный слой с таким же значением $(d\varepsilon/dz)_0$, то значение $|E_m|^2$, если и отличается от (61), то лишь в третьем знаке; в [19] из-за численной ошибки при переходе от формулы (4, 14) цит. работы к последней формуле § 4 цит. работы, совпадающей с нашей формулой (61), появляется коэффициент 2,9 вместо 3,6.

условием отражения в точке $z\,(\varepsilon = 0)$. В этой связи представляет некоторый интерес посмотреть, как в этом же приближении выглядит волновое поле. Конструируя стоячую волну с узлом в точке $z\,(\varepsilon = 0)$ из решений (32) при отсутствии поглощения, мы приходим к такому выражению

$$E = \frac{2}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\omega}{c}\int_0^z n\,dz\right), \tag{62}$$

где z отсчитывается от точки $z\,(\varepsilon = 0)$ и двойка выбрана в соот-

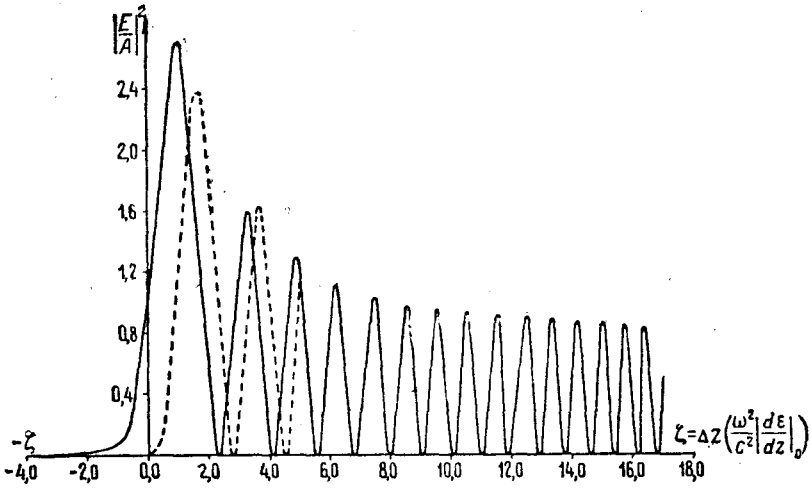

Рис. 4.

ветствии с тем, что амплитуда падающей волны считается равной единице [так же, как в (42)].

Вычисляя интеграл (62) для линейного слоя, можно видеть, что E обращается в нуль в точках, отличающихся от (59) заменой δ на $n\pi$, где n — номер нуля; для первого нуля разница составляет $\sim 16\%$, для второго $\sim 10\%$ и для десятого $\sim 1\%$. Положение первого максимума и его высота определяются заменой в (60) и (61) коэффициентов 0,7 и 3,6 соответственно на 1,5 и 3.

Таким образом, в ряде случаев формула (62) оказывается хорошим приближением $\left(\text{значения } \left|\frac{E}{A}\right|^2 \text{ в этом случае изображены на рис. 4 пунктиром}\right)$. Если бы слоя не было совсем, а вместо него было бы поставлено идеальное зеркало, то значение $|E_m|^2$ равнялось бы 4, так как мы считаем амплитуду падающей волны равной единице. При наличии слоя имеет место некоторое разбухание поля, которое можно

характеризовать фактором

$$\gamma^2 = \frac{|E_m|^2}{4} = 0{,}9 \left[\frac{\omega/c}{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0} \right]^{1/3}; \tag{63}$$

этот фактор практически не особенно велик. Так, в слое E, где разбухание могло бы представлять интерес для нелинейных эффектов [19], $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| \gtrsim 10^{-7}$ и при $\lambda_0 = 1000$ метров, $\gamma^2 = 7{,}7$ $\left(\text{если } \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| = 10^{-7}\right)$.

При наличии поглощения рассмотрение волнового поля также достигается путём использования формулы (38), но с ζ, определяемым с помощью (53). Основное изменение в выражении для $|E_m|^2$ или γ^2 состоит теперь в появлении в качестве множителя амплитудного коэффициента отражения ρ [см. (55)]. Численные множители, например, множитель 3,6 в (61), заменяются на несколько другие, зависящие от величины поглощения. Если, например,

$$\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}{\omega/c} \right]^{2/3},$$

то

$$\Delta z_m \approx \left(\frac{3}{2} \cdot 0{,}9\right)^{2/3} \left[\frac{1}{\frac{\omega}{c} \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0} \right]^{1/3}, \quad E_m \approx 6\rho \left(\frac{\omega/c}{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0} \right)^{1/3}. \tag{64}$$

Полагая $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 = 10^{-7}$, $\lambda_0 = 1000$ метров и $\rho = {}^1/_8$ (т. е. $-\ln\rho = 2$), получаем для γ^2 значение, равное 2,7 *). Из приведённых значений γ^2 следует, что роль «разбухания» поля сводится к тому, что поле в ионосфере можно оценивать по формулам, выведенным для случая, когда слой Хевисайда заменён идеально отражающей поверхностью. Наличие разбухания при этом компенсирует или даже перекомпенсирует затухание поля вследствие поглощения.

При достаточном приближении точки $z(\varepsilon = 0)$ к месту максимальной концентрации электронов замена слоя линейным недопустима, что проявляется и в несоблюдении условия (34) — (46). Одновременно при приближении к максимуму область отрицательных значений ε становится всё меньше, и волна начинает просачиваться через слой. Пока коэффициент пропускания очень мал, его можно приближённо вычислить по формуле

$$D = 1 - R \sim e^{-2\frac{\omega}{c}\int_{z_1}^{z_2} |\sqrt{\varepsilon}|\, dz}, \tag{65}$$

где R — коэффициент отражения (отношение амплитуд отражённого

*) При принятых значениях $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ и λ_0 в разбираемом частном примере значение $\sigma(0)$ соответствует числу соударений $\nu_{ef} \sim 10^4$.

и падающего сигналов $\rho=\sqrt{R}$) и интегрирование ведётся между точками $z_1(\varepsilon=0)$ и $z_2(\varepsilon=0)$, т. е. в области, где значение ε отрицательно [сравни (49)]. Для параболического слоя простой расчёт D по формуле (65) приводит к такому результату:

$$D=e^{-\frac{4\pi}{\lambda_k}z_m\frac{f_k^2-f^2}{2f_k^2}}\approx e^{\frac{-4\pi^2\Delta f}{c}z_m}, \qquad (66)$$

где $\lambda_k=\frac{c}{f_k}$ и $\Delta f=f_k-f$; последнее преобразование в (66) возможно, поскольку в области, где просачивание заметно, $\Delta f\ll f_k$. В области максимума концентрации любой плавный слой может быть апроксимирован параболическим слоем. Поэтому для строгой волновой трактовки вопроса достаточно продискутировать решение волнового уравнения для параболического слоя [21, 15]. Мы не будем приводить здесь выражений для волнового поля, так как они мало прозрачны и, главное, не представляют особого интереса. Что же касается коэффициента отражения, то для него в указанных работах получено следующее выражение, справедливое при любом R и условии $z_m\gg\frac{\lambda_k}{2\pi}$:

$$\frac{\rho^2}{1-\rho^2}=\frac{R}{1-R}=e^{\frac{4\pi\Delta f z_m}{c}}. \qquad (67)$$

Если $R\sim 1$ (т. е. $D=1-R\ll 1$), то формулы (66) и (67) тождественны. При этом точное совпадение результатов является, повидимому, случайным, так как формула (65) — (66) справедлива лишь с точностью до предэкспоненциального фактора. Из (66) — (67) очевидно, что просачиванием сигнала можно пренебречь, если $\Delta f\gg\frac{c}{z_m}$, т. е. при условии (50), являющемся также условием для возможности замены слоя линейным. Таким образом, имеется полная гармония между различными подходами к вопросу о замене рассматриваемого слоя линейным (условия малости просачивания и малости отклонений от линейности совпадают). Применяя формулу (66) — (67) можно, переходя к количественной оценке, видеть, что

$$D\leqslant 10^{-3},\ \text{если}\ \Delta f\geqslant\frac{c}{6z_m}. \qquad (68)$$

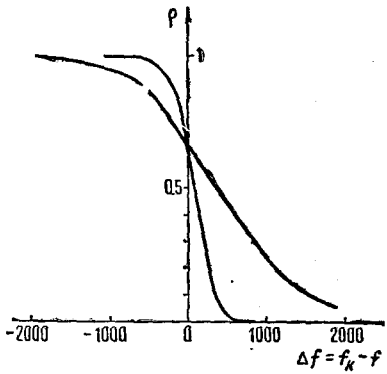

Рис. 5.

Пользуясь оценками значения c/z_m, приведёнными выше для F и E слоёв, можно видеть, что для F слоя просачивание сказывается лишь для $\Delta f<500$ герц и для E слоя — для $\Delta f<2000$ герц. Зависимость ρ от Δf приведена на рис. 5.

Критической частотой f_k называется, как сказано, частота, при которой точка $z(\varepsilon=0)$ достигает максимума слоя. Если считать, что в точке $z(\varepsilon=0)$ имеет место полное отражение, а в случае, когда такой точки вообще нет (т. е. при $f>f_k$), полное пропускание, то при $f<f_k$ $\rho=1$ и при $f>f_k$ $\rho=0$. При строгой волновой трактовке частота f_k ничем особенно не выделена, так как частичное отражение имеет место по обе её стороны. Однако, большая резкость функции $\rho(f)$ придаёт обычному определению f_k практически такое же содержание, как и в случае неучёта просачивания.

Помимо коэффициента отражения, представляет также интерес значение сдвига фаз отражённой волны по сравнению с падающей в области просачивания, где формула (44) неприменима. Соответствующее выражение для φ получено в [15]. Мы не будем здесь его приводить, вместо чего в следующем параграфе укажем формулу для более интересной величины, так называемой кажущейся высоты, получающейся из φ дифференцированием по частоте.

§ 5. ОТРАЖЕНИЕ СИГНАЛОВ *)

Выше речь шла о распространении и отражении монохроматической волны. Однако, как известно, на практике обычно представляет интерес распространение квазимонохроматической группы волн (т. е. импульса). Для того чтобы рассмотреть и этот случай, нужно, очевидно, разложить поле в интеграл Фурье и провести его исследование.

Падающую волну в начале слоя представим в виде:

$$E_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{69}$$

где по теореме Фурье

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{70}$$

В случае монохроматической волны с частотой ω_0 $E_0(t)=e^{i\omega_0 t}$ и $g(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$, где δ — дельта-функция

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0)\, d\omega=1, \quad \delta(\omega-\omega_0)=0 \quad \text{при} \quad \omega\neq\omega_0.$$

В случае квазимонохроматической группы волн, по определению, функция $g(\omega)$ является весьма острой, существенно отличной от нуля

*) В этом параграфе изложение носит более детальный характер, чем в остальных. Это объясняется тем, что автор был здесь лишён возможности сослаться на какое-либо удовлетворяющее его рассмотрение вопроса.

лишь в небольшой области вблизи несущей частоты сигнала ω_0; другими словами, спектральная ширина сигнала $\Delta\omega$ в этом случае удовлетворяет неравенству:

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \tag{71}$$

После прохождения некоторого участка пути или для определённости после отражения волны от слоя и возвращения в ту же точку, откуда волна была послана вверх, поле имеет вид

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\omega)\, g(\omega)\, e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}\, d\omega, \tag{72}$$

где $\rho(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ — соответственно, коэффициент отражения и сдвиг фаз отражённой волны.

При отсутствии поглощения и полном отражении $\rho(\omega) = 1$, что и будет предполагаться ниже.

В случае квазимонохроматической группы волн поле $E_0(t)$ удобно представить в виде:

$$E_0(t) = A(t)\, e^{i\omega_0 t}, \tag{72'}$$

где $A(t)$, очевидно, медленно меняющаяся функция t.

Согласно (69), (70), (72) можно написать

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int A(\eta)\, e^{i\,[(\omega_0 - \omega)\,\eta + \omega t]}\, d\omega\, d\eta \tag{73}$$

и

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int A(\eta)\, e^{i\,[(\omega_0 - \omega)\,\eta + \omega t - \varphi(\omega)]}\, d\omega\, d\eta. \tag{74}$$

Для квазимонохроматической группы в первом приближении можно положить

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \varphi'(\omega_0)\,\Omega, \tag{75}$$

где

$$\varphi'(\omega_0) = \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega = \omega_0} \quad \text{и} \quad \Omega = \omega - \omega_0.$$

В этом приближении

$$E(t) = e^{i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0))} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int A(\eta)\, e^{i\Omega(t - \eta - \varphi'(\omega_0))}\, d\eta\, d\Omega =$$

$$= A(t - \varphi'(\omega_0))\, e^{i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0))}, \tag{76}$$

в силу того, что, как это следует из (73),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int A(\eta)\, e^{i\Omega(t - \eta)}\, d\eta\, d\Omega = A(t).$$

Полученный результат (76) означает, что в первом приближении (75) группа не меняет своей формы (как функция от t), но в результате отражения и прохождения через слой фаза волны изменяется на $\varphi(\omega_0)$, и вся группа запаздывает во времени на «время группового запаздывания» *)

$$\Delta t_{\text{гр}} = \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \equiv \varphi'(\omega_0). \tag{77}$$

Можно ввести также «время фазового запаздывания», которое, как ясно из (76), равно

$$\Delta t_{\text{ф}} = \frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}. \tag{78}$$

Для того чтобы связать $\Delta t_{\text{гр}}$ и $\Delta t_{\text{ф}}$ с групповой и фазовой скоростями, как это обычно делается, рассмотрим распространение импульса в однородной среде. При этом под $\varphi(\omega)$ мы будем понимать сдвиг фаз при прохождении пути z, т. е. $E_0(t)$ в этом случае есть поле при $z=0$ и $E(t)$ — поле в точке z Тогда, как известно, $\varphi(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) z$ [см. (22)].

В приближении (75), т. е. используя (76), мы имеем

$$E(t) = A\left\{t - \left(\frac{d\frac{\omega}{c}n(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right\} e^{i\left[\omega_0 t - \frac{\omega_0 n(\omega_0) z}{c}\right]}. \tag{79}$$

Отсюда видно, что фаза распространяется с фазовой скоростью

$$w(\omega_0) = \frac{c}{n(\omega_0)}, \tag{80}$$

весь же импульс как целое распространяется без деформаций с групповой скоростью

$$u(\omega_0) = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\omega n(\omega))} = \frac{c}{n(\omega_0) + \omega_0\left(\frac{dn}{d\omega}\right)_{\omega_0}}. \tag{81}$$

Заметим, что если n^2 определяется формулой (10′), то

$$u = cn. \tag{82}$$

В ионосфере, как мы видели, имеет очень широкую область применимости формула (44) для $\varphi(\omega)$. В этом случае

$$\Delta t_{\text{ф}} = \frac{2}{c}\int_0^{z(\varepsilon(\omega_0)=0)} n(z, \omega_0)\, dz = 2\int_0^{z(\varepsilon(\omega_0)=0)} \frac{dz}{w(z, \omega_0)} \tag{83}$$

*) Это значит, как ясно из (72) и (76), что, если, например, падающая группа в точке наблюдения появляется в момент $t=0$ и при $t<0$, $E_0(t)=0$, то отражённая волна в той же точке появится в момент $t=\varphi'(\omega_0)$ и до этого момента $E(t)=0$.

и

$$\Delta t_{\text{гр}} = 2 \int\limits_{0}^{z(\varepsilon(\omega_0)=0)} \frac{dz}{u(z, \omega_0)}, \tag{84}$$

где в (83) опущен исчезающе малый член $\frac{\pi}{2\omega_0}$.

Выражения (83) и (84), получаемые в приближении геометрической оптики [см. (32) и (44)], имеют очевидный смысл, поскольку для однородной среды $\Delta t_{\text{ф}} = \frac{L}{w(\omega_0)}$ и $\Delta t_{\text{гр}} = \frac{L}{u(\omega_0)}$, где L — проходимый группой путь.

Вместо времён $\Delta t_{\text{ф}}$ и $\Delta t_{\text{гр}}$ весьма часто используются длины оптического и группового пути, соответственно равные

$$L_0 = c\Delta t_{\text{ф}}, \quad L_{\text{гр}} = c\Delta t_{\text{гр}}. \tag{85}$$

Половина $L_{\text{гр}}$, т. е. величина

$$h(\omega_0) = \int\limits_{0}^{z(\varepsilon(\omega_0)=0)} \frac{c\,dz}{u(z, \omega_0)}. \tag{86}$$

называется кажущейся высотой места отражения радиосигнала от ионосферы и по определению равна той высоте, на которой сигнал отражался бы, если бы он распространялся в течение времени $\Delta t_{\text{гр}}$ со скоростью c.

Для параболического слоя (47)

$$h = \frac{z_m}{2} \frac{f}{f_k} \ln \frac{f_k + f}{f_k - f}, \tag{87}$$

причём предполагается, что сигнал посылается от начала слоя, где $\varepsilon = 1$.

Формулы (83), (84), (86) и (87) применимы лишь, если можно использовать выражение (44), для φ, т. е. по сути дела лишь в приближении геометрической оптики. Поэтому из сказанного в § 4 ясно, что вблизи от максимума слоя эти формулы использовать уже нельзя. Сказанное, как этого и следовало ожидать, явно проявилось в формуле (87), согласно которой при $f \to f_k$ h и $\Delta t_{\text{гр}}$ стремятся к бесконечности, что на деле, разумеется, места не имеет.

В области $f \sim f_k$ нужно вычислить $\varphi(\omega)$ и h, используя решение волнового уравнения [15]. Мы не будем приводить соответствующих выражений, ограничившись точной формулой для h при $f = f_k$

$$h(f_k) = \frac{z_m}{2} \left\{0{,}577 + \ln \frac{16\pi z_m}{\lambda_k}\right\}. \tag{88}$$

Составить представление о ходе точного значения h и значения h по формуле (87) поможет рис. 6, на котором представлены обе эти величины для параболического слоя с полутолщиной $z_m = 120$ *км* и критической длиной волны $\lambda_k = 30$ *м*. Из этого графика видно, что при $\frac{\Delta f}{f_k} > 10^{-4}$ оба значения h практически полностью совпадают, в согласии с оценкой, основанной на неравенстве (50).

Основной радиометод исследования ионосферы, состоящий в определении времени запаздывания сигналов, отражающихся от ионосферы, приводит непосредственно к определению функции $h(\omega_0)$, где ω_0 — несущая частота сигнала; эта частота в существующих установках плавно меняется так, что сразу находится вся функция $h(\omega_0)$. Кривая $h(\omega_0)$ или, что то же, $h(f_0)$, носит название высотно-частотной характеристики ионосферы. Схематически она изображена на рис. 7. При приближении к критической частоте слоя кажущаяся высота быстро растёт. Это объясняется тем, что h тем больше, чем больше область малых значений групповой скорости u. Поскольку $u = cn$ [см. (82)], высота особенно велика в случае, если волне приходится проходить большую область с малым значением n, что как раз и имеет место при отражении у максимума слоя, т. е. вблизи f_k. Сигнал, отражающийся от слоя F при частотах, лишь немного превосходящих критическую частоту f_k для слоя E, претерпевает в этом последнем слое большое запаздывание, хотя и не отражается от него. Этим и объясняется большое значение кажущейся высоты слоя F вблизи f_k для слоя E. Сигнал, отражающийся от слоя F, расщепляется на два вследствие двойного лучепреломления, вызванного земным магнитным полем; об этом речь будет итти в § 6. Наблюдающиеся на опыте высотно-частотные характеристики часто бывают значительно сложнее изображённой на рис. 7 в силу появления слоя F_1, спорадического слоя E

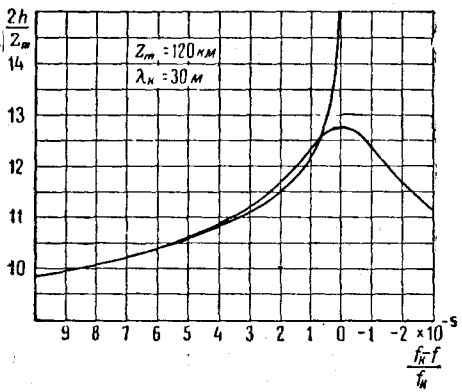

Рис. 6.

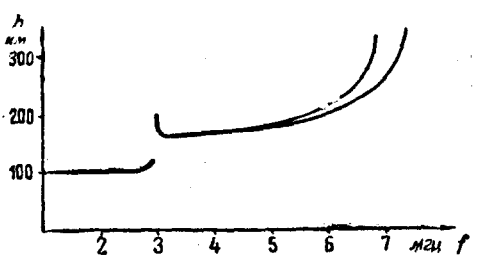

Рис. 7.

и ряда осложняющих обстоятельств; на этом мы здесь останавливаться не можем [1,2].

Кажущаяся высота всегда больше истинной высоты отражения $h_u = z(\varepsilon(\omega_0) = 0)$, поскольку c/u в (86) всегда меньше единицы. Можно показать [22], что если показатель преломления выражается формулой (10), то

$$h_u(\omega_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_0} \frac{h(x)\,dx}{(\omega_0^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} h(\omega_0 \sin\varphi)\,d\varphi, \tag{89}$$

где $h(x)$ определяется формулой (86) с заменой ω_0 на x. Для линейного слоя $h_u = \frac{1}{2}h$ (если отсчитывать высоту от начала слоя).

В рассмотренном приближении (75) импульс распространяется без всяких искажений. Последние, однако, имеют место, и для их исследования нужно перейти к следующему приближению, в котором

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \varphi'(\omega_0)\,\Omega + \frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\Omega^2. \tag{90}$$

Подставляя (90) в (74), мы имеем:

$$E(t) = e^{i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0))} \cdot \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\, e^{i\Omega(t - \eta - \varphi'(\omega_0)) - i\frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\Omega^2}\, d\Omega\, d\eta.$$

Полагая здесь

$$\varphi'' \cdot \left(\Omega + \frac{\eta - t + \varphi'}{\varphi''}\right)^2 = \pi u^2,$$

т. е. заменяя переменную Ω на u и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2}\, du = 1 - i,$$

имеем

$$E(t) = \frac{1-i}{2\pi}\, e^{i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\varphi''(\omega_0)}}\, A(\eta)\, e^{\frac{i(\eta - t + \varphi')^2}{2\varphi''}}\, d\eta.$$

Заменяя теперь $\frac{(\eta - t + \varphi')^2}{2\varphi''}$ на $\frac{\pi u^2}{2}$, мы получаем окончательно:

$$E(t) = \frac{1-i}{2}\, e^{i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} A\left[t - \varphi'(\omega_0) + \sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}\, u\right] e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\, du. \tag{91}$$

Если производная $\varphi''(\omega_0)$ так мала, что членом $\sqrt{\pi\varphi''}\,u$ в амплитуде функции A в (91) можно пренебречь, то (91) переходит в (76), как это и должно быть. В общем случае изменение формы сигнала определяется видом функции $A(t)$.

В простейшем случае

$$\left.\begin{aligned} A(t)&=1 \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}, \\ A(t)&=0 \quad \text{при} \quad t>\frac{T}{2} \text{ и } t<-\frac{T}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

т. е. $E_0=e^{i\omega_0 t}$ в интервале $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ и $E_0=0$ вне этого интервала. В этом случае *)

$$g(\omega)=\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}}{\pi(\omega-\omega_0)} \tag{93}$$

и

$$E=\frac{1-i}{2}e^{i(\omega_0 t-\varphi(\omega_0))}\left\{F\left(\frac{T-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)-F\left(\frac{-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)\right\}, \tag{94}$$

где $\theta=\frac{T}{2}+t-\varphi'(\omega_0)$ — время, отсчитываемое от момента $-\frac{T}{2}+$ $+\varphi'(\omega_0)$ прихода в точку наблюдения импульса без учёта его расплывания, и

$$F=\int_0^u e^{i\frac{\pi}{2}u^2}du \tag{95}$$

— интеграл Френеля $\left(F(-u)=F(u);\ F(\infty)=\frac{1+i}{2}\right)$. Практически, обычно, длительность сигнала $T\gg\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}$. В этом случае с точки зрения расплывания сигнала интерес представляет лишь область изменения θ, в которой $\theta\ll T$. Амплитуда отражённого сигнала при $\theta\ll T$ равна

$$|E|=\frac{1}{\sqrt{2}}|F(\infty)-F(-u)|, \quad u=\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}. \tag{96}$$

Выражение (96) хорошо известно, так как оно определяет интенсивность волнового поля при диффракции Френеля у края плоского экрана. График функции $|E|$ приведён на рис. 8. При $\theta=0$, т. е. в момент, когда без учёта расплывания в точку наблюдения должен притти

*) Расплывание сигнала в случае (92) было несколько иначе рассмотрено в [23].

волновой фронт и амплитуда должна скачком измениться от нуля до единицы

$$|E| = \frac{1}{2} \text{ при } \theta = 0. \tag{97}$$

Время установления амплитуды сигнала по порядку величины равно

$$\tau = \sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}. \tag{98}$$

Более точное определение времени установления может быть получено, разумеется, лишь, если задать требуемую точность установления амплитуды. Из рис. 8, например, видно, что интервал времени, в течение которого амплитуда установилась с точностью до 5% при $\theta > 0$ и $|E| < 0{,}05$ при $\theta < 0$, превосходит τ в 8 раз. Оценки τ приведены в [23]; даже вне области критической частоты, где время установления особенно велико, $\tau \sim 10^{-5}$ *сек*.

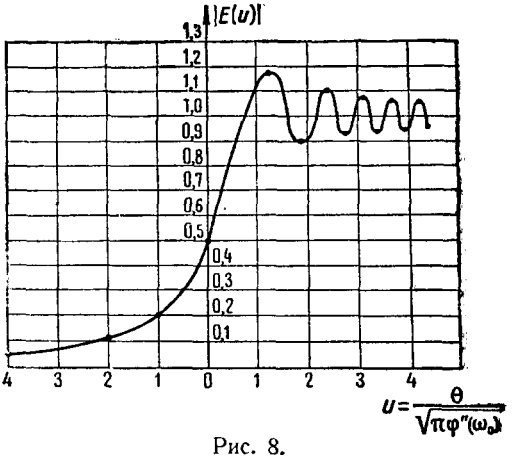

Рис. 8.

При учёте поглощения в выражение для E нужно ввести множитель $\rho(\omega)$ [см. (72)]. На практике в области спектральной ширины сигнала $\rho(\omega)$ меняется весьма мало [8], и таким образом можно положить $\rho(\omega) = \rho(\omega_0)$ и вынести этот множитель из-под интеграла (72); при этом, очевидно, все дальнейшие вычисления не меняются. Поглощение сказывается, помимо появления множителя $\rho(\omega_0)$, на значениях $n(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Рассмотрение расплывания волновой группы может быть произведено не только для квазимонохроматического импульса, но и для импульсов любой спектральной ширины [23].

§ 6. УЧЁТ ВЛИЯНИЯ ЗЕМНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В §§ 3—5 мы не принимали во внимание влияния на распространение радиоволн земного магнитного поля. При учёте этого влияния необходимо использовать вместо уравнения (7) систему (8). Если выбирать систему координат так, как указано в § 2 (при этом магнитное поле земли $H^{(0)}$ лежит в плоскости yz), и не учитывать поглощения, то **D** выражается через **E** с помощью формул (20). Уравнения (8)

принимают при этом вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(AE_x+iCE_y)=0,\\ \frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(-iCE_x+BE_y)=0;\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

$$\left.\begin{aligned}A=\frac{u-(1-v)^2-uv\cos\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha},\quad C=\frac{\sqrt{u}\cos\alpha\cdot v(1-v)}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha},\\ B=\frac{u(1-v)-(1-v)^2}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

и

$$u=\frac{\omega_H^2}{\omega^2},\quad \sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega},\quad v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=\frac{4\pi eN(z)}{m\omega^2}. \tag{101}$$

В случае неоднородности среды коэффициенты A, B и C зависят от z через v. Если среда однородна, то уравнения (100) решаются без труда в результате подстановки $E_{k,y}=Ce^{\pm i\frac{\omega}{c}nz}$, где n — показатель преломления. Условия существования у получающейся таким образом системы алгебраических уравнений нетривиального решения приводят к квадратному уравнению для определения n^2; в неявном виде это уравнение, очевидно, таково:

$$\begin{vmatrix}A-n^2 & iC\\ -iC & B-n^2\end{vmatrix}=0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$n_{1,2}^2=1-\frac{2v(1-v)}{2(1-v)-u\sin^2\alpha\pm\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}. \tag{102}$$

При наличии поглощения, т. е. учитывая в (17) член $m\nu_{ef}\dot{x}$, мы получаем такое выражение:

$$(n_{1,2}-ik_{1,2})^2=1-\frac{2v\left(1-v-i\frac{\nu_{ef}}{\omega}\right)}{A\pm B}, \tag{103}$$

где

$$A=2\left(1-i\frac{\nu_{ef}}{\omega}\right)\left(1-v-i\frac{\nu_{ef}}{\omega}\right)-u\sin^2\alpha;$$

$$B=\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u\left(1-v-i\frac{\nu_{ef}}{\omega}\right)^2\cos^2\alpha},$$

где n и k — показатели преломления и поглощения.

В дальнейшем для простоты мы учитывать поглощения не будем.

В магнитном поле ионизованный газ является двояко-преломляющим и в заданном направлении в нём могут распространяться волны двух типов, отличающиеся своей скоростью, т. е. показателем пре-

ломления и формой колебаний, т. е. поляризацией. В формуле (102) оба эти решения отличаются выбором знака у корня.

Выбирая в (102) у корня верхний знак, мы получаем квадрат показателя преломления n_2^2 «обыкновенной» волны; нижний знак соответствует «необыкновенной» волне ($n^2 = n_1^2$). Показатель преломления принимаем равным $n_{1,2} = \sqrt{n_{1,2}^2}$. Решения $n_{1,2} = -\sqrt{n_{1,2}^2}$ соответствуют волнам, бегущим в противоположном направлении, что будет ниже учитываться сразу в выражении для фазы волны.

Если магнитное поле $H^{(0)} = 0$, то и $u = 0$ и, следовательно,

$$n_{1,2}^2 = n_0^2 = 1 - v,$$

как это и должно быть [см. (10')].

Показатель преломления n_2, так же как n_0, обращается в нуль при

$$v = v_{20} = 1. \qquad (104)$$

Если $u < 1$, то показатель преломления n_1^2 обращается в нуль*) при

$$v = v_{10}^{\pm} = 1 \pm \sqrt{u} = 1 \pm \frac{\omega_H}{\omega} \qquad (105)$$

и в бесконечность при

$$v = v_{1\infty} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}. \qquad (106)$$

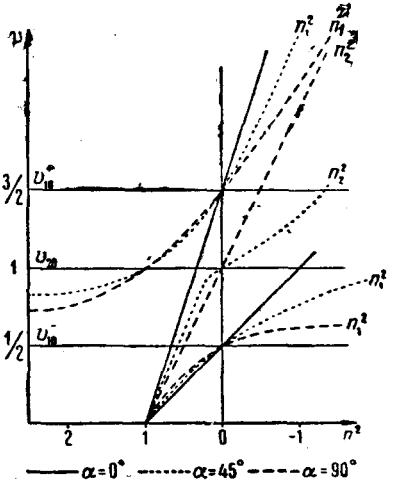

Рис. 9.

При $u > 1$, n_1^2 обращается в нуль лишь в точке v_{10}^+, так как $v^+ \geqslant 0$; в бесконечность в этом случае показатель n_1^2 не обращается. Вместе с тем, если $u\cos^2\alpha > 1$, в бесконечность обращается показатель n_2^2; точка $v_{2\infty}$ определяется при этом уравнением (106).

Зависимость $n_{1,2}^2$ от v иллюстрируется рис. 9 и 10; в случае рис. 9, $u = 1/4$, т. е. $\omega = 2\omega_H$ (поскольку $H^{(0)} = 0{,}5$ гаусса $\omega_H = \frac{eH}{mc} = 8{,}82 \cdot 10^6$ и $\lambda_H = \frac{2\pi c}{\omega_H} = 214$ *м*). Для кривых рис. 10, $u = 1{,}08$ и в другом случае $u = 4$; угол α в обоих случаях, представленных на рис. 10, равен 20°. Как ясно из (106), $v_{2\infty} \geqslant \frac{1}{\cos^2\alpha}$, причём равенство имеет место при $u \to \infty$.

Ниже мы ограничимся рассмотрением важнейшего случая, когда $u < 1$.

---

*) Мы считаем пока, что $\alpha \neq 0$ (см. ниже).

Исследование кривых $n_{1,2}^2(v)$ в различных случаях и, в частности, с учётом поглощения можно найти в ряде работ [24–26]. Особый интерес представляет по ряду причин ещё недостаточно исследованная область, где u близко к 1 [см. [10,27]].

Форма колебаний обеих волн, распространяющихся в однородной среде, определяется из (99):

$$\frac{E_x^{(1,2)}}{E_y^{(1,2)}} = \frac{-iC}{A - n_{1,2}^2} = \frac{B - n_{1,2}^2}{iC} =$$

$$= i\,\frac{u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}{2\sqrt{u}\,(1-v)\cos\alpha}, \qquad (107)$$

где, как и раньше, верхний знак корня относится к волне 2 ($E_x^{(2)}$, $E_y^{(2)}$, n_2) и нижний знак — к волне 1; при этом, очевидно, $\frac{E_x^{(1)}}{E_y^{(1)}} = \frac{E_y^{(2)}}{E_x^{(2)}}$. Поляризация обеих волн в общем случае эллиптическая, причём оси эллипсов параллельны осям x и y.

Для того, чтобы составить представление о распространении волн в неоднородной среде, нужно рассмотреть зависимость $n_{1,2}^2$

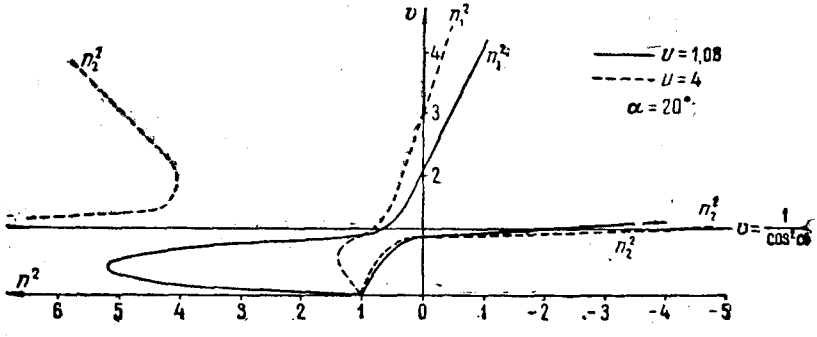

Рис. 10.

от v. Если функция $N(z)$ монотонна и, в особенности, линейна относительно z, то соответствующий график зависимости $n_{1,2}^2(v)$ описывает одновременно зависимость показателей преломления обеих волн от высоты. Если, далее, $n_{1,2}^2$ меняется с изменением z достаточно медленно, то, вообще говоря, должен иметь место квазистационарный случай, т. е. в окрестности данной точки поле должно быть, примерно, таким же, как для однородной среды с соответствующими значениями $n_{1,2}^2$. Обоснование этого интуитивно ясного утверждения достигается путём перехода к приближению геометрической оптики

(см. § 3 и ниже). При условии, что это приближение справедливо, знание $n_{1,2}^2(z)$ действительно достаточно для качественного описания распространения волн в неоднородной среде. В частности, полное внутреннее отражение волн должно иметь место вблизи точек, где $n_{1,2}=0$ (отражение от области вблизи точки $n_1 \to \infty$ оставляем сейчас в стороне; как ясно из дальнейшего, оно, вообще говоря, не осуществляется).

Помимо $N(z)$ или безразмерного параметра $v=\frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}$, значение $n_{1,2}^2$ зависит от u и α. В частных случаях, когда $\alpha=0$ (распространение по полю) и $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (распространение перпендикулярно к полю), выражение для $n_{1,2}^2$ сильно упрощается:

$$\alpha=0 \ : \ n_{1,2}^2=1-\frac{v}{1\pm\sqrt{u}}, \tag{108}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2} \ : \ n_1^2=1-\frac{v(1-v)}{1-u-v}, \quad n_2^2=n_0^2=1-v. \tag{109}$$

При $\alpha=0$ обе волны поляризованы по кругу; при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ они линейно поляризованы, причём для волны 2 электрический вектор параллелен магнитному полю (оси y), т. е. $E_x=E_z=0$; для волны 1 в этом случае $E_y=0$, но компонента E_z, так же как E_x, не равна нулю.

Важно отметить, что при любом не равном нулю угле между волновым вектором и магнитным полем n_1^2 обращается в нуль в двух точках (105) и n_2^2 в одной точке (104) *); положение этих точек от α не зависит вовсе. Если же $\alpha=0$, то, как ясно из (108) или непосредственно из (102), и n_1^2 и n_2^2 обращаются в нуль лишь в одной точке, причём положение корня уравнения $n_2^2=0$ при $\alpha=0$ перескакивает от $v=1$ к $v=1+\sqrt{u}$. Этот «перескок» корней n_2^2 ясен из рис. 9.

Таким образом, при очень малых углах α имеет место особенность, которая становится ясной из рассмотрения кривых $n_{1,2}^2$, для малых значений α (см. рис. 11). Мы видим, что непрерывного перехода к случаю, когда $\alpha=0$, формально говоря, нет. Физически же ясно, что такой переход должен иметь место и будет наблюдаться следующее. При $v<1$ волна 1 («необыкновенная» волна) распространяется во всех случаях лишь до точки v_{10} (см. рис. 9), где она претерпевает полное отражение. Пока α достаточно велико, волна 2 («обыкновенная» волна) полностью отражается в точке v_{20} (точнее, в области около этой точки). По мере уменьшения α свойства волны 2

*) Напомним, что мы ограничиваемся случаем, когда $u<1$.

в области $v < 1$ всё ближе приближаются к свойствам волны типа 1, могущей распространяться при $v > 1$. Действительно, при малом α, n_2^2 при значении $v < 1$, но близком к 1, приближается к n_1^2 при v, большем, но также близком к 1; далее, при этом форма колебаний волн 2 и 1 в точках v_{I} и v_{II} (см. рис. 11) приближается одна к другой; последнее связано с тем, что, как ясно из (107), отношение $\frac{E_x^{(1,2)}}{E_y^{(1,2)}}$ при переходе v через единицу меняет знак. В силу этого

$$\left(\frac{E_x^{(2)}}{E_y^{(2)}}\right)_{v_{\mathrm{I}}} \approx \left(\frac{E_x^{(1)}}{E_y^{(1)}}\right)_{v_{\mathrm{II}}}.$$

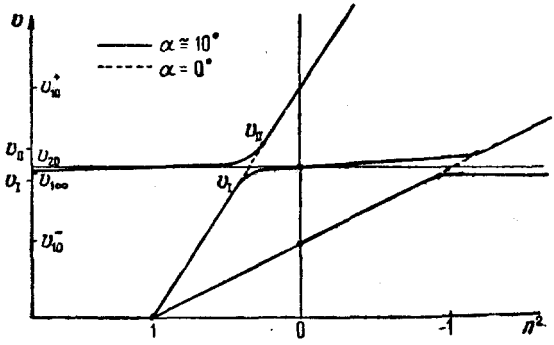

Рис. 11.

Отсюда ясно, что волне 2 достаточно просочиться до точки v_{II}, что при волновой трактовке в известной мере всегда имеет место, чтобы она снова могла распространяться вверх до точки v_{10}^{+}, где она уже окончательно отразится (здесь предполагается, конечно, что рис. 10 и 11 описывают ход n^2 с высотой, т. е., например, $v = az$). Таким образом, вблизи точки $v = 1$ должно иметь место частичное отражение волны 2 и частичное её проникновение в область с $v > 1$. Коэффициент отражения очень резко (экспоненциально) зависит от α, как это обычно имеет место в задачах такого типа. Поэтому, практически, только после того, как α станет меньше некоторого угла α_0, который нужно вычислить (см. ниже), будет иметь место частичное отражение. При $\alpha > \alpha_0$ отражение будет полным, и при $\alpha = 0$ оно должно равняться нулю.

Все эти рассуждения, вообще говоря, остаются в силе для распространяющегося вверх радиосигнала, т. е. квазимонохроматической группы волн. При достаточно малых углах между направлением магнитного поля земли и направлением нормали к фронту идущего вертикально вверх сигнала, т. е. направлением отвеса *), сигнал должен отражаться от слоя Хевисайда не в двух точках (v_{10}^{-}, v_{20}), как это имеет место при $\alpha > \alpha_0$, а в трёх (v_{10}^{-}, v_{20}, v_{10}^{+}); интенсивность

*) Эффект «утраивания» сигнала может иметь место лишь, если сигнал распространяется вертикально вверх, так как в противном случае его отражение осуществляется при $n_{1,2}^2 > 0$ и аномальная область вблизи точки $v = 1$ никогда не достигается. Поэтому угол α может быть мал, и в то же время может наблюдаться эффект «утраивания» только вблизи магнитных полюсов земли.

третьего отражения (от точки v_{10}^{+}) должна с уменьшением α возрастать за счёт интенсивности отражения от точки v_{20}, пока при $\alpha=0$ это последнее отражение полностью не исчезнет. Разность времён запаздывания обоих сигналов будет в этом случае значительно больше, чем при $\alpha > \alpha_0$.

Строгое решение уравнений (99) даже для простейших зависимостей N от z до настоящего времени не проведено. Несмотря на то, что возможность строгой дискуссии этих уравнений отнюдь не исключена, ясно, что эта задача значительно сложнее, чем решение волнового уравнения (7). В этой связи применение к системе (99) приближённых методов рассмотрения и в первую очередь метода геометрической оптики приобретает особое значение.

Приближение геометрической оптики может быть получено также, как в изотропном случае [см. (25)], представлением решения системы (99) в виде:

$$\mathbf{E}=(\mathbf{E}^{(0)}+\frac{c}{\omega}\mathbf{E}^{(1)}+\ldots)\,e^{\pm i\frac{\omega}{c}\psi}. \tag{110}$$

В результате в первом приближении мы приходим к соотношениям [13]:

$$\mathbf{E}_{(1,2)}=\mathbf{E}_{(1,2)}^{(0)}\,e^{\pm i\frac{\omega}{c}\psi_{1,2}},$$

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{1,2}^{2}=n_{1,2}^{2}, \tag{111}$$

$$E_{x;\,1,2}^{(0)}=\frac{\text{const}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{1,2}(1-K_{1,2}^{2})}}, \tag{112}$$

$$\frac{E_{y;\,1,2}^{(0)}}{E_{x;\,1,2}^{(0)}}=\frac{A-\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{1,2}^{2}}{-iC}=\frac{iC}{B-\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{1,2}^{2}}=K_{1,2}. \tag{113}$$

Фаза волн обоих типов 1 и 2 определяется, таким образом, выражением

$$\psi_{1,2}=\int_{z_0}^{z} n_{1,2}(z)\,dz. \tag{114}$$

Первое приближение геометрической оптики (111)—(114) применимо лишь при выполнении ряда неравенств, которые мы приводить здесь не будем, т. к. при условии плавной и монотонной зависимости N от z все эти неравенства сводятся практически к одному соотношению

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{\frac{dn_{1,2}}{dz}}{n_{1,2}^{2}}\right|\ll 1, \tag{115}$$

совпадающему с важнейшим из неравенств (30), относящихся к изотропному случаю. В приближении геометрической оптики, волны, идущие вверх и вниз, совершенно независимы.

Из (115) видно, что при $n_{1,2} \to 0$ приближение геометрической оптики не применимо, что ясно и сразу, так как в этом случае $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_{1,2}} \to \infty$. Поэтому в области точек $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ различные решения приближения геометрической оптики не независимы. В изотропном случае, в результате в области, вблизи точки $n = 0$, имеет место отражение, т. е. волна $\sim e^{-i\frac{\omega}{c}\psi}$ порождает волну $\sim e^{+i\frac{\omega}{c}\psi}$. Если область, где $n^2 < 0$, простирается достаточно далеко, то отражение является полным, и хотя геометрическая оптика вблизи точки $n = 0$, строго говоря, неприменима, соответствующее ей решение, учитывающее наличие полного отражения, качественно справедливо. При достаточно плавном изменении N с z это относится (см. § 4) и к вычислению фазы отражённой волны φ, и к значению амплитуды волны вблизи точки $z\,(n^2 = 0)$.

В случае анизотропной среды положение совершенно аналогично. Если $\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то переменные в уравнениях (99) разделяются, т. е. функции $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$, в случае $\alpha = 0$, и функции E_x и E_y, при $\alpha = \pi/2$, оказываются удовлетворяющими независимым уравнениям 2-го порядка типа уравнения (7); в этих случаях, поэтому, все выводы § 4 сохраняются в полной мере. При произвольном α переменные не разделяются, так как в этом случае отношение $\frac{E_x^{(1,2)}}{E_y^{(1,2)}}$ зависит от v, т. е. от z. Однако, и в этом общем случае, несомненно, качественная картина остаётся без всяких изменений и, в частности, фаза φ определяется формулой $\varphi_{1,2} = \int\limits_0^{z\,(n_{1,2}^2=0)} n_{1,2}\,dz$, хотя добавочный член $-\pi/2$ в формуле (44) и может измениться.

Оставляя этот вопрос в стороне, посмотрим, с чем связано наличие в анизотропном случае двух типов волн. Из сказанного ясно, что в области, где $n_1 \to 0$ к волне 2, геометрическая оптика, вообще говоря, применима, и, наоборот, там, где $n_2 \to 0$, она применима к волне типа 1. Отсюда следует, что отражение волны 1 «от точки» v_{10} (где $n_1 = 0$) не должно сопровождаться появлением волн типа 2. Неприменимость геометрической оптики приводит лишь к связи волн типа 1, идущих в различные стороны; то же относится к отражению волны 2.

Выше предполагалось, что в области, где одна из волн методом геометрической оптики рассмотрена быть не может, к другой волне

этот метод применим. Существует, однако, случай, когда обе волны оказываются не независимыми. Это имеет место как раз при условиях, когда должно наблюдаться «утраивание» сигналов, т. е. при малых значениях α. Как видно из рис. 9 и 11, при этом вблизи точки v_{20}, т. е. вблизи значения $v=1$, $n_2 \to 0$ и $\frac{dn_1}{dz} \to \infty$. Таким образом, в этом случае (при $v \to 1$) приближение геометрической оптики действительно неприменимо к волнам обоих типов [см. (115)].

Решение задачи о частичном отражении от точки v_{20} при $\alpha \to 0$ должно базироваться на уравнении (99). Возникающие здесь трудности весьма велики. Известное упрощение может быть достигнуто, если решить уравнения (99) лишь для области v между v_{I} и v_{II} (см. рис. 11), где как раз «разыгрывается» просачивание и частичное отражение. В областях, где $v < v_{\mathrm{I}}$ и $v > v_{\mathrm{II}}$ можно либо считать среду однородной, либо применить приближение геометрической оптики; на границе областей, т. е. в точках v_{I} и v_{II} решения должны быть надлежащим образом связаны.

Приближённое решение задачи о частичном отражении приводит к следующему результату [13]. Коэффициент просачивания, т. е. отношение интенсивности волны, просочившейся через область $v \sim 1$, к интенсивности падающей на эту область волны, равен

$$D \sim e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0}\beta\sqrt{u}\left(\frac{N}{dN/dz}\right)_{v=1}\sin^2\alpha} = e^{-\gamma}, \tag{116}$$

где β — зависящий от u фактор порядка единицы, и значения N и dN/dz берутся в точке $v=1$. Если, например, $u=1{,}4$ (т. е. $\omega = 2\omega_H = 1{,}76 \cdot 10^7$), то $\beta = 0{,}6$ и

$$\gamma = 17{,}5\,\frac{\sin^2\alpha}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}. \tag{117}$$

Недостатком формулы (116) является то обстоятельство, что в ней остаётся неопределённым предэкспоненциальный множитель. Если положить этот множитель равным единице, то при реальном значении $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1} = 0{,}1$, $\gamma = 2$ (т. е. $D = 0{,}135$) при $\alpha \sim 6°$. Эффект «утраивания», насколько нам известно, ещё не наблюдался. Из приведённой оценки, которая не является окончательной, следует, что этот эффект может наблюдаться лишь в непосредственной близости от магнитных полюсов земли. Заметим здесь также, что формула (116) применима лишь пока коэффициент D мал. При $\alpha \to 0$, $D \to 1$ и интенсивность волны, отражающейся от точки $v=1$, мала.

В заключение напомним, что в анизотропной среде нужно различать направление нормали к волне и направление луча, т. е. направление потока энергии. Если задача о распространении фронта волны в приближении геометрической оптики решена, то затем можно

определить траекторию луча; это можно сделать также непосредственно, используя принцип Ферма. При распространении волны вертикально вверх, как мы видели, волновая нормаль также всё время остаётся направленной вверх; вектор Пойнтинга и в этом случае имеет другое направление, что ясно из того, что при этом $E_z \neq 0$ [см. (20)].

При отражении компоненты E_x и E_y меняют знак, т. е. образуется стоячая волна, при этом меняет знак также компонента E_z. Поэтому, если вверх посылается некоторый участок плоской волны, то после отражения обратно на землю этот участок вернётся в то же самое место (см. рис. 12). Реальный излучатель посылает вверх не участок плоской волны, а более сложное волновое поле; однако, поскольку неоднородный слой находится далеко от излучателя, этот случай приводится к предыдущему. Из сказанного ясно, что несовпадение направления луча с осью z не приводит к каким-либо существенным изменениям процесса распространения, разобранного выше, если не считать того, что приходящий вниз сигнал отражён не от области ионосферы, расположенной непосредственно над местом наблюдения, а от несколько смещённой области; при этом для волн типа 1 и 2 эти области различны (см. рис. 12). Кстати, при $\alpha = 0$ луч направлен по оси z, а при малых α отклонение луча от нормали меньше, чем в других случаях.

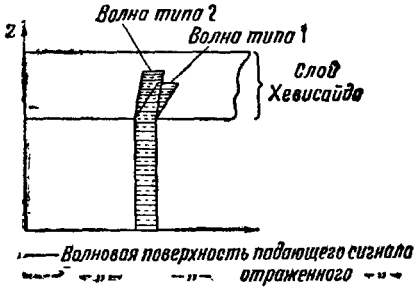

Рис. 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Мимно. Физика ионосферы. Радиоиздат (1938). *У. Ф. Н.*, **18**, 57, 203, (1937).
2. А. Н. Щукин. Физические основы распространения радиоволн в ионосфере. Связьиздат (1940).
3. Г. А. Гринберг. *Известия АН СССР* (серия физ.), 4, 401, (1940), *ДАН*, 26, 581 (1940).
4. Г. А. Гринберг. *Известия АН СССР* (серия физ.), 7 99, (1943).
5. F. W. Whitea L. W. Brown. *Proc. Roy. Soc.*, 153, 637 (1936).
6. В. Н. Кессених. *Изв. АН СССР* (серия физ.), 8, 68 (1944).
7. В. Л. Гинзбург. *Journal of Physics*, 8, 253 (1944).
8. Я. Л. Альперт и В. Л. Гинзбург. *Изв. АН СССР* (серия физ.), 8, 42 (1944).
9. C. Darwin. *Proc. Roy. Soc.*, 146, 17 (1934), 182, 152 (1943).
10. В. Л. Гинзбург. *Изв. АН СССР* (серия физ.), 8, 76 (1944).
11. В. Л. Гинзбург. *ДАН*, 35, 302 (1942).
12. В. Л. Гинзбург. *Изв. АН СССР* (серия физ.), 7, 96, (1943).
13. В. Л. Гинзбург. *Journal of Physics*, 7, 289 (1943).
14. D. R. Hartree. *Proc. Roy. Soc.*, 131, 428 (1931).

15. O. Rydbeck. *Phil Mag.*, **34**, 342 (1943).
16. P. Epstein. *Proc. Nat. Acad. Amer.*, **16**, 627 (1930).
17. K. Rawer. *Ann. d. Phys.*, **35**, 385 (1939); **42**, 294 (1942).
18. K. Försterling. *Ann. d. Phys.*, **11**, 1 (1931).
19. С. М. Рытов и Ф. С. Юдкевич. *ЖЭТФ* **10**, 887 (1940).
20. G. J. Elias. *Proc. I. R. E.*, 19, 891 (1931).
21. E. V. Appleton, R. Naismitha. L. *Proc. Phys. Soc.*, **51**, 81 (1939).
22. O. Rydbeck. *Phil. Mag.*, **30**, 232 (1940).
23. В. Л. Гинзбург. *ЖЭТФ*, **12**, 449 (1942).
24. M. Taylor. *Proc Phys. Soc.*, **45**, 245 (1933).
25. H. G. Booker. *Proc. Rov. Soc.*, **150**, 267 (1935).
26. G. Goubau. *Hochfr. und Elektr.*, **45**, 179 (1935); **46** 37 (1935).
27. H. G. Booker a. L. V. Berkner. *Terrestr. Magnetism*, **43**, 427 (1938).