

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

---

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Э. В. ШПОЛЬСКОГО

ТОМ  
XXVII  
ВЫПУСК 2

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1945 ЛЕНИНГРАД

**Адрес редакции: Москва, Орликов пер., д. 3.**



Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## КРАТКИЙ ОЧЕРК ЖИЗНИ И НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЛЕОНИДА ИСААКОВИЧА МАНДЕЛЬШТАМА \*)

*Н. Д. Папалекси*

27 ноября 1944 г. мировая физика и особенно физики нашего Союза понесли исключительно тяжёлую утрату — скончался Леонид Исаакович Мандельштам, действительный член Академии Наук СССР, замечательный учёный, глубокий мыслитель и талантливейший учитель, человек исключительных душевных качеств, в высшей степени скромный, высокопрincipиальный и высокогуманный.

С именем Леонида Исааковича связан не только ряд фундаментальных открытий в области физики, обусловивших коренные сдвиги в науке, но также и возникновение новых областей техники. Открытие явления комбинационного рассеяния света, теория микроскопа, исследования флюктуационного рассеяния света, теория нелинейных колебаний, открытие новых видов резонанса и обобщение и углубление понятия резонанса, исследование распространения радиоволны, фундаментальные работы в области радиотехники, новая область техники — радиогеодезия, новый вид генерации электромагнитной энергии — параметрические машины, — вот неполный список его главнейших достижений; к этому списку можно было бы присоединить ещё ряд других работ, не менее важных, которые не были опубликованы вследствие исключительной, почти болезненной требовательности Леонида Исааковича к стандарту своих сообщений. Может быть, достаточно указать на обнаружение инерции электронов в металлах, теоретически обоснованное и качественно установленное на опыте ещё в 1912 г., за несколько лет до классических опытов Стюарта — Толмена.

Жизнь Леонида Исааковича не отличалась внешним блеском. Он никогда не добивался внешних почестей, не старался играть какую-либо роль, ему совершенно чужды были честолюбие и славолюбие. Но тем полнее и богаче была его внутренняя жизнь. Это

\*) Речь, произнесённая на собрании, посвящённом памяти академика Л. И. Мандельштама, состоявшемся в Доме учёных в Москве 22 декабря 1944 г.

была прекрасная жизнь истинного ученого и глубокого мыслителя, искателя научной истины, человека исключительного душевного благородства.

Сейчас пока еще невозможно дать полную картину всей замечательной деятельности Л. И. и справедливую оценку его выдающихся научных достижений. Позвольте мне, на долю которого выпало исключительное счастье на пороге своей научной жизни встретиться с Л. И., с которым в течение почти 45 лет нас соединяла общая работа и близкие отношения, попытаться вкратце изложить перед вами основные даты прекрасной жизни и научной деятельности этого замечательного человека.

Леонид Исаакович родился 22 апреля ст. ст. 1879 г. в высокодаренной семье, из которой вышли выдающиеся учёные, врачи, писатели, музыканты. Его отец был выдающийся, весьма популярный на юге России, врач; его мать — прекрасная пианистка. Детство Л. И. протекало в атмосфере высокой морали и гуманности. Среднее образование Л. И. получил во 2-й Одесской гимназии. Уже в гимназии Л. И. выделялся своими способностями, особенно математическими, и разносторонностью своих интересов. С самого детства Л. И. очень любил книги, музыку, театр, вообще искусство, всякие игры, особенно умственные, и эти вкусы остались у него на всю жизнь, а любовь к книгам доходила до страсти.

По окончании гимназии в 1897 г. с медалью, Л. И. поступил на физико-математический факультет Новороссийского университета. В 1899 г. Л. И., принимавший участие в студенческих волнениях, был исключён из университета и поехал продолжать свое образование заграницу, где и поступил на физико-математический факультет Страсбургского университета. В то время кафедру экспериментальной физики занимал и одновременно был директором Физического института выдающийся физик — Фердинанд Браун, уже тогда известный своими работами в области термодинамики (принцип Брауна — Ле-Шателье) и электрических явлений, а особенно широко как создатель электрометра Брауна и катодной трубки Брауна. В этот период (начиная с 1898 г.) научные интересы Брауна были направлены, главным образом, на только что зародившуюся тогда новую область применения электричества — радиотелеграфию, за работы в области которой он, как известно, получил в 1909 г., совместно с Маркони, Нобелевскую премию по физике.

Кафедру теоретической физики в то время занимал проф. Эмиль Кон, который тогда как раз заканчивал свой хорошо известный курс «Электромагнитное поле». Лекции по математике читали выдающиеся математики: аналитик Генрих Вебер и геометр Райе.

Проф. Браун, не только выдающийся физик, но и прекрасный учитель и человек, очень скоро обратил внимание на высокоталантливого молодого учёного, оценил выдающиеся качества Л. И. и предоставил ему полную возможность для научной деятельности.

В свою очередь и Л. И. высоко ценил Брауна и на всю жизнь сохранил к нему глубокое уважение и признательность. Естественно, что под влиянием Брауна Л. И. начал заниматься вопросами электрических колебаний в связи с радиотелеграфией.

Первое время после возникновения радио, в 1895—1896 гг., физическая сторона процессов в радиопередатчике и радиоприёмнике ещё долго оставалась неясной. Не было даже точно известна длина волны, на какой работали первые передатчики, да и практически не существовало методов измерения её. Не существовало также и приборов для измерения высокочастотных токов и напряжений, кроме самых грубых — архаического воздушного термометра Рисса и искромера. Всё это очень затрудняло и на первых порах почти полностью затормозило развитие радио. Брауну, как физику, было совершенно ясно, что первоочередной задачей является создание адекватных методов измерений и, прежде всего, разработка методов измерения и контроля длины волны электрических колебаний. С этой целью Браун предложил Л. И. в конце 1900 г. в качестве темы докторской работы разработку методики измерения и контроля частоты электрических колебаний, основанную на зависимости полного электрического сопротивления от частоты. Уже в этой первой научной работе Л. И. наметились основные черты его научного творчества. Он оригинально подошёл к решению поставленной ему задачи, применив нулевой метод и дифференциальную схему, причём в качестве индикатора колебаний был использован специально им сконструированный двойной воздушный электрический термометр Рисса, и дал исчерпывающий анализ метода. Эта работа под названием «Bestimmung der Schwingungsdauer oscillatorischer Kondensatorenladung» была им представлена в качестве докторской диссертации. В 1902 г., по сдаче требуемых испытаний с высшим отличием (summa cum laude), Л. И. получил степень доктора phil. nat. Страсбургского университета.

После окончания университета Л. И. некоторое время в качестве личного ассистента Брауна принимал активное участие в лабораторных заводских исследованиях и практических испытаниях на Балтике приёмно-передающих радиоустройств. Хотя при этих испытаниях и были достигнуты хорошие для того времени результаты, однако у Л. И. осталась большая неудовлетворённость ими, так как ему было ясно, что эти устройства не были эффективно использованы, ввиду того, что многие стороны колебательных процессов в них оставались неясными. В результате проведённого им теоретического анализа, Л. И. пришёл к казавшемуся тогда совершенно парадоксальным заключению, что не увеличение связи между антенной и промежуточным контуром сложной схемы приёмного устройства, к чему тогда стремились, должно повести к увеличению силы приёма, а, наоборот, к этой цели должно повести значительное ослабление связи, причём одновременно с улучшением приёма должна повыситься и его селективность.

Экспериментальная проверка полностью подтвердила эти выводы. Это первое изобретение Л. И. в области радиотехники, так называемая «слабая связь», — ознаменовало собой существенный этап в истории развития радиосвязи и сделала сразу его имя известным в кругу специалистов.

В 1903 г. Л. И. был зачислен в штат Страсбургского Физического института вторым ассистентом (первым ассистентом был в то время известный радиоспециалист Ценнер), а вскоре затем и первым ассистентом. Здесь на обязанности Л. И. лежало руководство научными работами как докторантов, так и учёных разных стран, приезжавших работать в знаменитом Страсбургском Физическом институте, созданном Кундтом и в котором работали в своё время многие наши выдающиеся физики: Лебедев, Голицын, Эйхенвальд, Шегляев и др. Молодые учёные иногда приезжали уже со своими темами, но большей частью получали их от проф. Брауна, а вскоре и от Л. И.

Л. И., который с исключительной добросовестностью относился к своим обязанностям, должен был усиленно работать над собой, чтобы успешно руководить научными работами.

Эти годы, до 1907 г., которые могут быть названы первым страсбургским периодом, были в жизни Л. И. годами расширения знаний, годами научного роста и созревания. В это время окончательно сформировались все основные черты его, как учёного. Л. И. очень много работал, основательно изучил классический трактат Релея «Теория звука», работы Лоренца по электронной теории, «Кинетическую теорию газов» Больцмана, читал сочинения Гельмгольца и других классиков физики. Исключительно одарённый математически, он усиленно изучал также различные разделы математики (дифференциальные уравнения, теорию вероятностей), к которой он всегда чувствовал особое влечение. Наряду с этим его глубоко интересовали история физики, философия науки, теория познания. Он основательно познакомился с английскими философами.

Особое влияние на Л. И. оказал замечательный английский физик Релей. Его изумительная разносторонность, глубина анализа, несравненное умение выделить существенную сторону вопроса, наглядно и выпукло показать его физическую сущность, дать теорию, пользуясь простейшим, но вполне адекватным математическим аппаратом, — все эти качества творений Релея отвечали стремлениям и особенностям ума Л. И. и вызывали в нём особый резонанс, были ему «конгениальны». И, действительно, в характере ума у Л. И. было много общего с Релеем, и не случайно, что пути их научного творчества часто шли параллельно и неоднократно перекрецивались. Не подлежит сомнению, что атмосфера электромагнитных колебаний, в которую попал Л. И., вступая в научную жизнь, а также влияние «великого колебателя» Релея сыграли очень большую роль в формировании основных направле-

ний его научной деятельности и определили тот колебательный подход, который так характерен для творчества Л. И.

Начало научной деятельности Л. И. совпало с эпохой торжества максвелловой электромагнитной теории поля, с триумфальным шествием электромагнитной теории света, которая после знаменитых опытов Герца нашла своё наиболее совершенное практическое выражение в радио. Это было также время стремительного развития лоренцовой электронной теории, которая в рамках классической электродинамики раскрывала взаимоотношения между электромагнитными волнами и веществом. Правда, уже тогда ряд новых открытий в физике — фотоэффект, лучи Рентгена, лучи урана, открытие радиоактивности полония и радия — как бы бросал тень грядущих научных переворотов вперёд, ставя неразрешимые загадки для классической теории. Правда, уже тогда у некоторых физиков (Планк) возникла мысль, что для объяснения вопросов испускания и поглощения света представления классической электродинамики о непрерывном волновом характере светового излучения являются не адекватными, однако почти все физики в то время полностью стояли на почве классической электромагнитной теории поля и электронной теории.

Талантливый молодой учёный, попавший почти со школьной скамьи в «атмосферу» электромагнитных колебаний и нового чудесного их применения — радио, не мог не поддаться очарованию этой в высшей степени интересной и в то же время во многих отношениях ещё загадочной области знания. Поэтому не удивительно, что первое время Л. И. всецело занимался вопросами колебаний. Однако глубокая, пытливая натура Л. И., стремившаяся к широкому обобщению, к охвату различных областей физики и выяснению их взаимной связи, по мере его научного роста, не могла длительно удовлетворяться изучением этой одной, хотя и весьма увлекательной, но всё же сравнительно узкой, области физики. Хотя интерес к вопросам колебаний и к их разнообразным научным и практическим применением, особенно радио, оставался живым всю его жизнь, круг научных интересов Л. И. непрерывно расширялся и углублялся.

Совершенно естественным представляется поэтому постепенное перемещение центра научных интересов Л. И. от электромагнитных колебаний и волн в свободном пространстве, с какими имеют дело в радио, к взаимодействию между электромагнитными волнами и веществом, а именно к вопросам прохождения света через различные среды, и в первую очередь к вопросам дисперсии. Его первое исследование в этой области, в котором он подверг тонкому анализу вопрос о прохождении света через оптически однородные и мутные среды, было представлено весной 1907 г. как диссертация для получения права читать лекции (*venia legendi*) в качестве приват-доцента Страсбургского университета. Характерно, что пробная лекция Л. И. была посвящена электромагнитной теории света Максвелла.

С этого года для Л. И. начался период чрезвычайно интенсивной и плодотворной работы. Уже с самого начала Л. И. проявил себя как исключительно талантливый лектор, прекрасный экспериментатор, тщательно готовившийся к лекциям и иллюстрировавший их очень часто им самим придуманными блестящими демонстрациями. Из них следует отметить его прибор с маятниками, точно и правильно демонстрирующий явления в связанных системах при различных связях, а также прибор для демонстрации основных соотношений специального принципа относительности.

Сначала Л. И. читал отдельные курсы по различным вопросам физики, а с 1910 г. курс телеграфии и телефонии для специализирующихся в этой области. В 1913 г. он получил звание профессора.

Хотя подготовка к лекциям и занятия со студентами и докторантами отнимала у Л. И. значительную часть времени, всё же он находил много времени для собственных работ. В этот, можно сказать, второй страсбургский период его деятельности, до начала первой мировой войны, полностью созрел и проявился его замечательный талант физика, выявились все характерные черты его как учёного. Как я уже упоминал, в круг его научных интересов, наряду с вопросами электромагнитных колебаний и радио, постепенно включались всё новые области физики.

Ещё к первому страсбургскому периоду, а именно к 1904 г., относится первая из наших опубликованных совместно многочисленных работ в области колебаний и радио, которые продолжались как в Страсбурге, так и в России до самого последнего времени. Эта работа касалась создания метода получения сдвинутых на фазе идентичных по форме искровых затухающих колебаний, который лёг в основу первых опытов по направленной радиотелеграфии с помощью интерференции радиоволн. Я не буду касаться здесь других наших работ, я хотел бы только упомянуть из страсбургских работ о новом исключительно чувствительном методе измерения частот и логарифмических декрементов электромагнитных колебаний и новом оригинальном высокочастотном приборе — так называемом индукционном динамометре, принцип которого лёг в основу приборов, непосредственно показывающих частоту и затухание электрических колебаний и других электрических величин.

Очень характерна для Л. И. относящаяся к области распространения радиоволн его весьма содержательная полемика с известным радиоспециалистом Флемингом по вопросу о направленном действии согнутой антенны Маркони. В ней Л. И. убедительно показал, что направленное действие такой антенны нельзя объяснить, если предполагать землю абсолютно проводящей, и указал, в чём заключается математическая ошибка Флеминга.

Начатые Л. И. в его приват-доцентской диссертации исследования рассеяния света продолжались всю его жизнь, всё расширяясь и углубляясь, достигнув здесь, в Москве, в 1928 г., в известном

смысле, апогея замечательным открытием совместно с Г. С. Ландсбергом комбинационного рассеивания света.

Блестящим примером тонкого анализа Л. И., его неумолимой логики, является его весьма содержательная по существу полемика с крупнейшим теоретиком Планком по весьма принципиальному вопросу — о возможности релеевского рассеивания света в совершенно однородных средах, о котором сам Релей имел неправильное представление. В этой полемике Л. И. окончательно доказал невозможность такого рассеяния и показал, в чём заключается корень неправильных теоретических выводов Планка и других теоретиков в этом вопросе.

Придя к заключению, что релеевское рассеяние света нельзя объяснить одним беспорядочным движением молекул, если число их достаточно велико, Л. И. старался выяснить физическую природу этого рассеяния. Он постепенно пришёл к тому же выводу, что и Смолуховский (который первый сформировал его и опубликовал), а именно, что причиной релеевского рассеяния являются беспорядочно возникающие и рассасывающиеся в среде неоднородности плотности — так называемые флуктуации плотности. Развивая эти представления, Л. И. пришел к заключению, что такие неоднородности должны особенно легко возникать вблизи критической точки перехода пар — жидкость. В частности, Л. И. считал, что особенно благоприятны должны быть в этом случае условия для наблюдения рассеяния света на границе раздела жидкость — пар; Л. И. дал теорию явления для этого случая и подтвердил её очень убедительными и показательными опытами.

На первый взгляд представляются совершенно не связанными с предыдущими замечательные работы Л. И. по теории микроскопа. В основе классической теории микроскопа Аббе лежало рассмотрение объектов, освещённых посторонним светом (не самосветящихся), и Аббе, исходя из когерентности отражённых от объекта лучей, физически очень наглядно показал, чем определяется предельная разрешающая сила микроскопа, за которой никакое усиление не позволяет различать структуру объекта. Вследствие этого, в кругах оптиков постепенно сложилось убеждение, что существует принципиальное различие между различимостью объектов, освещённых когерентными лучами, и самосветящихся объектов, испускающих из различных точек некогерентные лучи. Следует подчеркнуть, что и высказывания самого Релеля по этому вопросу отличались большой неясностью. В анализе этого вопроса Л. И. проявил свойственную ему остроту и глубину мысли и тонкое понимание физической сущности. Л. И. внёс полную ясность в этот вопрос: исчерпывающе рассмотрев его, дал впервые теорию изображения самосветящихся объектов и чрезвычайно остроумными опытами показал, что практически нет разницы в разрешающей способности микроскопа как для случая освещённых, так и самосветящихся объектов. Л. И. дал также строгую математическую теорию оптических изо-

бражений, применив для этого наиболее адекватный и элегантный метод решения, в котором он пользуется только что ставшими известными интегральными уравнениями. Может быть интересно подчеркнуть для характеристики математического таланта Л. И., что (как на это указывали и математики) эта работа явилась первым примером применения интегральных уравнений к физической задаче, решение которой не только до тех пор не было, вообще, получено другими математическими средствами, но и иначе не может быть математически просто сформулировано. Эти замечательные работы Л. И. в области оптики вызвали, в известном смысле, сенсацию и послужили предметом полемики (например, с Люмером).

К этому периоду относится ещё одно исследование Л. И., которое очень выпукло и наглядно рисует многогранность его таланта, его способность объединять, казалось бы, не схожие между собой явления. Коренной и наиболее важной проблемой, которую поставила радиотелеграфия уже с самого начала, была проблема распространения радиоволн вдоль земной поверхности, которая привлекла к себе внимание таких крупных физиков и математиков, как Зоммерфельд, Пуанкаре и др. В 1909 г. появилась фундаментальная работа Зоммерфельда, в которой он дал теорию распространения электромагнитных волн от излучающего источника, находящегося на поверхности земли — в воздухе. Эта теория приводила к существенным отличиям между радиоволнами и волнами света. Л. И. ищет аналога этому случаю в оптике и приходит к заключению, что это различие вызвано тем, что в случае радиоволн источник излучения расположен либо на самой поверхности, либо на расстоянии от неё малом или сравнимом с длиной, в то время как в оптике длина световой волны настолько мала, что это расстояние всегда велико по сравнению с ней. Отсюда вытекало, что световые явления, аналогичные радиотелеграфному случаю, должны также иметь место, но только тогда, когда расстояние источника света от поверхности мало или сравнимо с длиной волны света. Л. И. с помощью остроумных и, как всегда, убедительных опытов осуществляет этот случай в оптике, используя в качестве излучающего источника светящиеся точки поверхности флуоресцирующей жидкости (флуоресценции); Л. И. рассмотрел этот случай и теоретически, и при этом, исходя из общей теоремы Лоренца, впервые сформулировал применительно к точечным источникам так называемую теорему взаимности в радиотелеграфии. Заметим, что эта важная теорема была впоследствии (в 1925 г.), применительно к радиотелеграфии, подробно рассмотрена Зоммерфельдом, который, однако, допустил при своём рассмотрении некоторые неправильности. На эти неправильности обратил внимание Л. И., и в работах его учеников, в Москве, этот принцип получил свою полную формулировку и разнообразное применение.

Весьма характерным примером колебательного подхода Л. И. к решению различных вопросов оптики является и его чрезвычайно

остроумный метод определения затухания световых осцилляторов. Рассматривая эти осцилляторы с классической точки зрения, как электромагнитные резонаторы, Л. И. применил для определения их затухания известный в учении о колебаниях метод кривой резонанса Бьеркнесса. Для этой цели Л. И. измерялось поглощение в парах натрия одной из D-линий, испускаемых светящимися парами натрия другого источника света. Для требуемого в методе Бьеркнесса плавного изменения длины волны света Л. И. использовал эффект Зеемана.

Во всех этих работах Л. И. стоял на почве последовательного применения классической электромагнитной теории света и теории электронов. Стойкая, строго-логическая структура величественного физического здания, построенного на их фундаменте, и так легко, непринужденно и, казалось, всеобъемлюще охватывающая всё учение об электрических явлениях, отвечала складу его математического ума. Однако Л. И. ясно ощущал все трудности и противоречия, с которыми встречалась теория, особенно при объяснении таких опытов, как знаменитые опыты Майкельсона, которые без принуждения не укладывались в рамки классической теории. Поэтому, как по складу своего ума, так и по своему глубокому физическому миропониманию, Л. И. оказался подготовленным к восприятию принципа относительности Эйнштейна, который для большинства физиков того времени явился как бы ударом обуха по голове. Его полное признание, как известно, совершилось лишь постепенно, под большим настиском опытных фактов, а некоторые физики до сих пор не понимают и не принимают его.

Л. И. не только один из первых очень быстро полностью усвоил всё физическое значение и всю глубину принципа относительности, вызвавшего один из крупнейших переворотов в нашем физическом миропонимании, но сразу же много сделал для его разъяснения и пропаганды. По его идее тогда уже был построен прибор, наглядно демонстрирующий необычные соотношения, вытекающие из принципа относительности.

Впоследствии в Москве Л. И. распространил принцип относительности на анизотропную среду и в ряде работ, и особенно в своих блестящих лекциях, излагал, в непревзойдённой по глубине и тонкости мысли ясности, простоте и изяществу форме, эти весьма трудные вопросы физики.

Более выжидательно отнёсся Л. И. к первым шагам квантовой теории, хотя и полностью ощущал неспособность классической теории дать удовлетворительное объяснение таким явлениям, как фотозефект, распределение энергии в спектре чёрного тела, линейчатый спектр водорода и др. Л. И. вполне признавал эвристическое значение квантовой гипотезы, но его не удовлетворил рецептурный характер теории в первое время. Впоследствии, после знаменитых исследований Бора и Зоммерфельда, и особенно после работ Де-Брояля, Шредингера и Гейзенberга, для Л. И., много думавшего

над этими вопросами и вполне уяснившего себе связь классической теории с квантовой и глубокое физическое значение квантовой механики для объяснения явлений в микромире, она получила полное логическое обоснование, которое он и блестяще выражал в своих московских лекциях и работах.

Надвигалась зловещая угроза первой мировой войны, и в конце июля 1914 г., после окончания лекций, Л. И. с семьёй спешно выехал на родину, куда и приехал в день объявления войны. В нормальной научной деятельности Л. И. наступил теперь длительный вынужденный перерыв (с 1914 по 1924 г.). Однако, интенсивная научно-техническая и педагогическая деятельность Л. И. не прерывалась. В 1915 г. Л. И. был избран физико-математическим факультетом Новороссийского университета в Одессе приват-доцентом по кафедре физики; в конце 1915 г. он был приглашён научным консультантом на Радиотелеграфный завод в Петрограде (теперь имени Казицкого). Здесь он руководил лабораторными исследованиями и практическими разработками в области радио, столь важной для обороны. Для того, чтобы охарактеризовать разносторонность и широту научно-технического диапазона Л. И., я укажу, что, с одной стороны, им в это время была разработана технология изготовления оксидированной проволоки и наложено её производство, а с другой стороны, в связи с вопросами градуировки волномеров, им был дан и разработан, первый вообще, абсолютный метод измерения радиочастот, принцип которого лёг в основу методики таких измерений.

Осенью 1917 г. Л. И. переехал в Тбилиси, где он был избран и. д. ординарного профессора физики Политехнического института. Одновременно Л. И. состоял также профессором Высших женских курсов.

В 1918 г. Л. И. переехал в Одессу, и в качестве ординарного профессора по кафедре физики принял активнейшее участие в организации Одесского политехнического института, где им была создана, буквально на пустом месте, физическая лаборатория, собраны нужные физические приборы, поставлено чтение лекций по физике с демонстрациями и наложен весь учебный процесс по физике на высоком научном уровне. Блестящие лекции Л. И., к которым он всегда очень тщательно готовился и в которых он не только стремился с предельной ясностью изложить физические основы, но и, по возможности, наглядно продемонстрировать существенные стороны явлений, всегда привлекали полную аудиторию. Наряду с педагогической деятельностью, которая занимала почти всё его время, Л. И. состоял научным консультантом Одесского радиозавода.

Высокоразвитое чувство долга Л. И. проявилось в это время в полной мере. Его сотрудники и ученики хорошо помнят, в каких тяжёлых условиях приходилось тогда читать лекции и проводить занятия (нетопленные помещения, атмосфера настоящего голода, так как это был период блокады и оторванности не только от мировой науки, но и от культурных центров нашей страны). Однако, это не останавли-

вало Л. И., и он не только регулярно читал обязательные лекции, но и читал по своей инициативе для нескольких заинтересованных студентов курс колебаний. Л. И. очень страдал из-за оторванности от мировой науки, вызванной блокадой. Полученная им в 1921 г. от научных друзей фундаментальная книга Зоммерфельда «Строение атома и спектральные линии» явилась для Л. И. большой радостью, и он горячо приветствовал возможность снова приобщиться к мировой научной мысли. Напоминаю, что в то время в физическом мировоззрении происходила коренная перестройка понятий и представлений, вызванная революционным вторжением в науку общей теории относительности и квантовой теории.

В конце 1922 г. Л. И., по приглашению Треста заводов слабого тока, переехал в Москву, где он в качестве научного консультанта руководил научными исследованиями и научно-техническими разработками в радиолаборатории, преобразованной, после переезда правления треста в Ленинград, в 1924 г., в Центральную радиолабораторию.

С деятельностью Л. И. в ЦРЛ, которая продолжалась до 1935 г. и в научном отношении неотделима от его деятельности в это время в НИИФ, связаны наиболее существенные его работы в области радиофизики и радиотехники: новые способы радиотелеграфной и радиотелефонной модуляции, вопросы высококачественной измерительной техники, высокоселективное приёмное устройство с кварцевым фильтром, стабилизация частоты, обобщение понятия обратной связи и регенерации, новые радионтерференционные методы исследования распространения радиоволн и измерения расстояния и ряд других. Однако, наиболее фундаментальным и научно важным достижением является основанное на теории нелинейных колебаний открытие новых видов резонанса и новых способов возбуждения колебаний (автопараметрическое, гетеропараметрическое, асинхронное возбуждение). Это привело, с одной стороны, к существенному расширению и эволюции понятия резонанса и, с другой стороны, к созданию новых радиоустройств (автопараметрический фильтр, трансформаторы частоты и др.) и нового типа машин.

Я не могу, к сожалению, в узких рамках моего доклада останавливаться даже на самых главных работах Л. И. в этой области. Эту сторону его научной деятельности подробно осветят в своих докладах ученики Л. И. — проф. А. А. Андronов и проф. С. Э. Хайкин. Я хотел бы только указать, что нелинейное направление в области колебаний, всецело вытекавшее из свойственного Л. И. стремления возможно более чётко, адекватно и в то же время математически строго передать сущность и количественный ход колебательных процессов, не укладывающихся в рамки линейных дифференциальных уравнений, оказалось чрезвычайно действенным и плодотворным, и оно постепенно завоёвывает признание не только в этой, сравнительно узкой, области радиоколебаний.

В 1925 г. Л. И. был избран профессором теоретической физики МГУ и действительным членом Исследовательского института физики

и кристаллографии при нём. С этого времени начался самый насыщенный и плодотворный период его научной и педагогической деятельности. Здесь, в стенах старейшего нашего университета, полностью расцвёл его замечательный талант учёного и учителя.

Вокруг Л. И. вскоре сгруппировалось много талантливых молодых учёных, аспирантов и студентов, которые под руководством Л. И., вдохновлённые его идеями, успешно разрабатывали различные вопросы оптики, молекулярной физики и колебаний и образовали большую научную школу.

В долгие годы вынужденного перерыва в своей научной деятельности Л. И. не переставал возвращаться к научным вопросам, исследование и выявление которых было так жестоко прервано мировой войной. Он продолжал непрерывно думать над вопросами рассеяния света, особенно в связи с флюктуационными явлениями. Свои вполне чёткие соображения по этому вопросу Л. И. высказал в разговорах со мной ещё в 1920—1921 гг. В результате глубокого и вместе с тем физически чрезвычайно наглядного анализа Л. И. пришёл к заключению, что в совершенно свободном от посторонних примесей однородном теле, в силу тепловых флюктуаций, не только должно наблюдаться релеевское рассеяние света, но что и спектр падающего света должен при этом претерпевать изменения, правда, чрезвычайно незначительные, количественную оценку которых Л. И. и дал. Этот так называемый эффект Мандельштама — Брилуэна — эффект изменения тонкой структуры спектра при флюктуационном рассеянии света был Л. И. и обнаружен, а затем, в 1930 г., по предложению Л. И., окончательно и полностью изучен Е. Ф. Гроссом в ГОИ.

Опыты, поставленные для его обнаружения, привели, однако, сначала к другому, гораздо более фундаментальному открытию, а именно — к открытию совместно с Г. С. Ландсбергом в 1928 г. явления комбинационного рассеяния света. Это открытие, которое одновременно с русскими физиками было сделано индийским учёным Раманом, является не только одним из крупнейших, может быть, самым крупным из открытий в оптике за последние 25 лет, но его значение и для практики уже сейчас столь велико, что его можно поставить в ряд с замечательным открытием Кирхгоффа и Бунзена спектрального анализа. Это открытие, несомненно, поставило имя Л. И. в ряд с именами крупнейших физиков современности. Только присущая Л. И. исключительная требовательность к себе, можно сказать скрупулёзность, из-за которой Л. И. не опубликовывал новых вещей, не подвергнув их предварительной многократной проверке в течение длительного времени, была причиной того, что фактически сделанное им первым открытие появилось в печати позже телеграфного сообщения о своём открытии в „Nature“ Рамана, который в 1930 г. получил за это открытие Нобелевскую премию по физике.

Открытие явления комбинационного рассеяния света привело к большому оживлению научной работы, направленной к выяснению

физической природы этого явления и управляющих им закономерностей. Л. И. дал теорию этого явления как с классической, так и с квантово-теоретической точек зрения. Характерен здесь «колебательный», можно сказать радиотехнический, подход Л. И. к объяснению этого явления, которое он трактует, как модуляцию света, вызванную инфракрасными колебаниями молекул.

Наряду с комбинационным рассеянием света Л. И. продолжал свои исследования флуктуационного рассеяния света. Здесь внимание Л. И. привлекла возможность создавать в жидкостях и газах регулярные неоднородности с помощью упругих (ультразвуковых) волн, вызывающих в них правильно расположенные области сгущения и разряжения. Это открыло новые возможности для изучения, с помощью дифракции света на этих неоднородностях, различных вопросов молекулярной физики, и, таким образом, возникло новое направление исследований в молекулярной физике, особенно важное для изучения нестационарных явлений. Попутно Л. И. было указано на возможность использования ультразвуковой методики для модуляции света, получившей в настоящее время широкое применение как для научных исследований, так и в телевидении.

В 1928 г. Л. И. был избран членом-корреспондентом нашей Академии, а в 1929 г. её действительным членом.

В 1931 г. Л. И. получил за свои работы премию имени Ленина.

Наряду с этими исследованиями и глубокими исследованиями в области теоретической и молекулярной физики, которых я здесь не касаюсь, Л. И. продолжал интенсивно интересоваться вопросами колебаний. Параллельно с работами, которые велись в ЦРЛ и о которых я уже упоминал, в НИИФ при МГУ под руководством Л. И. развивалась теория нелинейных колебаний, охватывающая колебательные процессы не только в радиотехнике, но и в акустике и механике, и способствовавшая выяснению процессов при радиопередаче, а также в автоматике и аэродинамике. В настоящее время ряд учеников Л. И., принимавших видное участие в развитии этой теории с самого начала (А. А. Андронов, С. Я. Хайкин, Г. С. Горелик, С. М. Рытов), весьма успешно развивают и применяют эту теорию в указанных выше областях.

Работы по нелинейным колебаниям были в 1936 г. удостоены Первой Менделеевской премии по физике.

С осени 1934 г., с переводом Академии Наук СССР в Москву, Л. И. принимал близкое участие в организации ФИАН и с этого времени, параллельно с работой в МГУ, вёл работы в лаборатории колебаний и оптической лаборатории ФИАН, где разрабатываются его идеи и интересовавшие его вопросы. Здесь была создана по идеи Л. И. и разработана методика измерения интенсивности электрического и магнитного сверхвысокочастотных полей и производились исследования поведения диэлектриков в этих полях, проводились работы по молекулярной физике с использованием

ультразвуковой методики, а также продолжались исследования в области комбинационного рассеяния.

В стенах Института нашла своё теоретическое и экспериментальное завершение знаменитая проблема распространения радиоволн вдоль земной поверхности, которая, как известно, возникла сразу же после того, как Маркони перекрыл Атлантический океан, и которой были посвящены многочисленные работы крупнейших физиков и математиков: Зоммерфельда, Пуанкаре, Ватсона, Ван дер Поля и др. В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований с помощью новых радиоинтерференционных методов был подведен прочный научный фундамент под возникшую из них и связанную с именем Л. И. новую отрасль радиотехники — радиогеодезию, первые практические применения которой уже дали значительные результаты. Применение радиоинтерференционных методов позволило также выяснить вопрос о скорости распространения радиоволн вдоль земной поверхности и измерить её с наибольшей до сих пор известной точностью.

Какое большое значение придаётся этим исследованиям в кругах радиоспециалистов, можно судить по тому, что в 1942 г. председатель Радиосекции Британского Об-ва инженеров-электриков, известный радиоспециалист Smith-Rose основную часть своего годового доклада посвятил изложению радиоинтерференционной методики и полученных у нас результатов. Эти работы были удостоены в 1942 г. Сталинской премии 1-й степени по физике.

Последние годы так рано оборвавшейся жизни Л. И. были омрачены его тяжёлой болезнью и жестокой войной, навязанной нам фашизмом. Л. И. очень страдал и возмущался вызванной фашистской Германией стихией человеконенавистничества, которая принесла миру, и особенно нашей стране, ужасные бедствия. В середине июля 1941 г. Л. И., по предложению Президиума Академии Наук СССР, эвакуировался в курорт Боровое в Казахстане, где оставался до возвращения Академии Наук в Москву. Несмотря на болезнь и на то, что он очень страдал из-за своей оторванности от друзей, сотрудников и учеников, от отсутствия лаборатории и библиотеки, Л. И. продолжал чрезвычайно много работать над различными вопросами, преимущественно из области колебаний. Упомянем развитую им математическую теорию колебательных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами и малой нелинейностью, общую теорию прохождения волн в трубах и вдоль одного провода, а также принципиально весьма интересные работы по квантовой механике.

Л. И. много занимался в Боровом и историей науки. В связи с 300-летним ньютоновским юбилеем он сделал в Боровом прекрасный доклад о работах Ньютона по физике.

В Боровом же Л. И. подготовил доклад о научной деятельности нашего замечательного учёного А. Н. Крылова, который он сделал здесь, в этом зале, на общем собрании Академии Наук, посвящён-

ном 80-летию Алексея Николаевича. Этот блестящий доклад, в котором Л. И. так выукло и ярко осветил замечательные работы Алексея Николаевича, особенно в области вибрации и качки корабля, ещё у всех нас в памяти.

Наконец в спокойных условиях в Боровом Л. И. приступил к выполнению своей давней заветной мысли написать научную биографию столь близкого ему по научному складу, мыслям и духу Релея. Он собрал нужный материал, составил полностью план биографии, но написать её Л. И. уже не было суждено.

С возвращением в Москву Л. И. снова приступил к научной и педагогической деятельности. Его лекции для студентов «о колебаниях» собирали такое большое количество слушателей, не только студентов и молодых учёных, но и профессоров и крупных учёных, что аудитория не могла вместить всех желающих слушать Л. И., и лекции должны были быть перенесены в большую аудиторию. Несмотря на болезненное состояние, Л. И. очень много времени уделял молодёжи, приходившей к нему за советами. Не отказался он также взять на себя тяжёлый труд по подготовке материалов к ознаменованию в 1945 г. 50-летия радио. Он принял самое деятельное участие в подборе материалов для I сборника «К предистории радио», сам редактировал многочисленные переводы статей и написал замечательное предисловие, которое и было его последней работой.

Со смертью Л. И. физическая наука понесла исключительно тяжёлую утрату. Академия Наук СССР лишилась одного из самых выдающихся её членов, высшая школа — замечательного учителя молодёжи и профессора, мы — друзья его и товарищи — необыкновенно милого, душевного человека, прекрасного товарища, человека кристально честного, высокопринципиального, справедливого и гуманного в высшем смысле этого слова. Следы, которые он оставил в науке и технике, глубоки и длительны; с его именем связаны замечательные открытия в физике и возникновение новых областей техники. Л. И. принадлежал к тем учёным, которые в подлинном смысле сами горели страстью к науке и заражали ею других. Вокруг Л. И. создалась многочисленная школа талантливой молодёжи. Вдохновлённые его идеями, эти молодые учёные продолжают творчески развивать созданные Л. И. новые направления в науке и технике.

В творчестве Л. И. поражает гармоническое сочетание изумительного по глубине и тонкости логического анализа с поразительной силой интуитивного проникновения и редким экспериментальным чутьём. Богатство и разнообразие его всегда оригинальных и глубоких идей изумительно. Физик *par exellence*, он вместе с тем был прекрасный математик, и в то же время не только великолепно понимал и чувствовал практическую сторону науки, но был замечательным изобретателем. Для творчества Л. И. весьма характерна необычайная целеустремлённость. К Л. И. полностью приме-

нимы его же собственные слова о Масквелле, сказанные им в его последней работе — предисловии к «Предистории радио»: «Определённая интенсивная направленность мысли в связи с особо острым экспериментальным инстинктом позволяет учёному сделать решающий шаг и открыть новую область для науки».

После Л. И. осталось большое научное наследие. Оно заключается не только в трудах, опубликованных им самим или совместно с другими учёными, но и в ещё неопубликованных манускриптах и заметках.

Многие его глубокие мысли, тонкие и вместе с тем точные формулировки, изящные доказательства и блестящие изложения самых трудных вопросов физики содержатся в его замечательных лекциях по теоретической физике, которые при его жизни не были изданы, но были тщательно записаны и обработаны его учениками. Но и этим, конечно, далеко не ограничивается всё богатство мыслей и идей Л. И. Многие из них заключаются в работах его многочисленных учеников и ещё долго будут приносить плоды для науки.

В Л. И. поражала изумительная разносторонность его умственных и культурных интересов. Хотя главным смыслом его жизни была наука, однако, наряду с этим, он очень любил и хорошо знал музыку, искусство, блестяще знал литературу русскую и мировую. Книги, вообще, были его страстью. Выросши у моря, Л. И. очень любил море и вообще природу.

Исключительно тепло, с большой благожелательностью, вниманием и чуткостью относился Л. И. не только к своим ученикам, но и к людям вообще. К нему очень многие обращались за советами и помощью по разнообразным житейским делам. В то же время он не переносил никакой фальши и лжи и особенно возмущался людьми, которые свои личные интересы ставили выше всего. В разговорах на любые темы, которые всегда были для его собеседников чрезвычайно интересны, Л. И., по выражению некоторых, никогда не заслонял других. Душевное величие и благородство Л. И., его обаяние, вызывали во всех знатавших его особое уважение и любовь.

Прекрасный семьянин, Л. И. был также прекрасный друг и товарищ. Он на всю свою жизнь сохранил привязанность к товарищам детства. Память об этом исключительном человеке будет долго жива не только у самых близких людей, а его прекрасная жизнь будет служить примером для молодежи, которую он так любил.

## ФИЗИКА И ТЕХНИКА ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

*B. A. Фабрикант*

«Не знаю, могли бы изобретатели  
придумать что-нибудь лучше свечки,  
которая горела бы без помощи щип-  
цов».

Гёте

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1938 г. на Всемирной выставке в Нью-Йорке для освещения советского и других павильонов были применены новые источники света, названные американцами флуоресцентными или сокращённо —

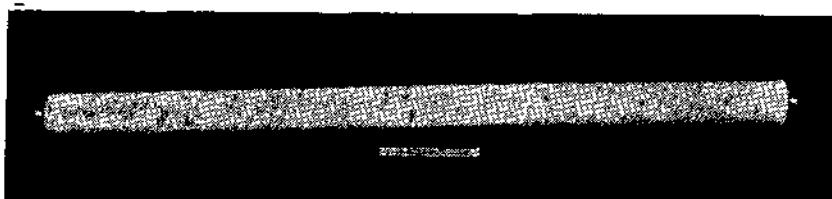


Рис. 1. Внешний вид люминесцентной лампы.

ф-лампами<sup>1</sup>. Правильнее эти лампы называть люминесцентными, так как в них используется свечение люминофоров. Люминесцентные лампы по своему внешнему виду резко отличаются от ламп накаливания и представляют собой длинные, равномерно светящиеся трубки с четырьмя контактами в виде штырьков на концах (рис. 1). Производство люминесцентных ламп, несмотря на войну, вернее даже благодаря войне, чрезвычайно быстро стало расти: 1938 г. — 200 000 шт., 1939 г. — 1 600 000 шт., 1940 г. — 7 100 000 шт., 1941 г. — 19 000 000 шт., 1942 г. — 30 000 000 шт. и 1943 г. — 40 000 000 шт.

Построен специализированный завод для изготовления люминесцентных ламп с проектной мощностью 200 000 шт. ламп в день. Десятки фирм занялись изготовлением принадлежностей для люминесцентных ламп. В общем, безусловно речь идёт о рождении новой крупной отрасли промышленности и о настоящей революции в области техники освещения.

У нас в Советском Союзе первые люминесцентные лампы современного типа были построены в начале 1940 г. сотрудниками Всесоюзного электротехнического института (ВЭИ) Ф. А. Бутаевой и В. И. Долгополовым.

В настоящее время Всесоюзный электротехнический институт, Московский электроламповый завод и Физический институт Академии наук СССР ведут ряд работ, связанных с развертыванием производства люминесцентных ламп.

Цель настоящего обзора заключается в том, чтобы дать возможно более полное представление о свойствах люминесцентных ламп и, главное, разобрать все основные физические процессы, определяющие эти свойства. Мы попытаемся проследить, как микрохарактеристики отдельных элементов люминесцентной лампы связаны с такими макроскопическими характеристиками ламп, как светоотдача.

Конечно, перед тем как говорить о люминесцентных лампах, следует напомнить причины, сделавшие необходимым появление новых источников света на смену лампам накаливания. Так же необходимо несколько более подробно рассмотреть вопрос об идеальном источнике света. Ясно, что универсального идеального источника света нет и не может быть, но, с другой стороны, «если не знаешь, в какую гавань направиться, не может быть попутного ветра» (Сенека).

## 2. НЕДОСТАТКИ ЛАМП НАКАЛИВАНИЯ

Прежде всего остановимся кратко на причинах, делающих лампу накаливания нерациональным источником света, нуждающимся в замене. Основной недостаток лампы накаливания, как известно, это низкий коэффициент полезного действия. В табл. 1 приведены данные о балансе энергии в лампах накаливания мощностью 100 Вт, со сроком службы 1000 часов<sup>2</sup>. В табл. 1 под видимым излучением

Таблица 1  
Баланс энергии в лампах накаливания

Распределение энергии	Пустотная лампа — прямая нить	Лампа с аргоном — ординарная спираль	Биспиральная лампа с аргоном	Лампа с ординарной спиралью — криптон — ксенон
Видимое излучение . . .	7	10	12	13
Невидимое излучение	86	68	74	76
Потери в держателях	7	3	2	2
Потери в газе . . .	0	19	12	9
Всего . . . . .	100	100	100	100

понимается область спектра, примерно, от 0,40 до 0,75  $\mu$ . Невидимое излучение представляет собой, по существу, почти целиком инфракрасные лучи. Таким образом, лампа накаливания весьма экономична, как источник инфракрасных лучей. Последнее обстоятельство и вызвало широкое применение ламп накаливания для сушки различных предметов<sup>8</sup>. Однако из табл. 1 следует, что как источник видимого света лампа накаливания значительно менее экономична. При этом важно отметить, что световой кпд лампы накаливания несравненно ниже 12%, соответствующих доле энергии, приходящейся на видимую часть спектра. Напомним, что световым кпд называется отношение светового потока, даваемого источником света, к максимальному значению светового потока, которое может быть получено при той же затрате мощности<sup>2</sup>. В определении светового кпд весьма существенную роль играет ход кривой спектральной чувствительности глаза в пределах видимого спектра. Эта кривая имеет резкий максимум для длины волны 0,556  $\mu$ . Коэффициент видимости для 0,556  $\mu$  принимается равным единице. Наибольший световой поток получится, естественно, при превращении всей энергии в излучение с этой длиной волны, при этом каждый ватт энергии превратится в 621 люмен светового потока. Если мы сравним с этой цифрой светоотдачу 100-ваттной лампы накаливания 15,5  $лм/вт$ , то получим световой кпд, равный всего лишь 2,5%!

### 3. ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ «ИДЕАЛЬНОГО» ИСТОЧНИКА СВЕТА

С точки зрения экономичности идеальным был бы источник монохроматического зелёного света с длиной волны 0,556  $\mu$ . Однако, широкое применение такого источника света натолкнулось бы на серьёзные трудности. Дело заключается в том, что нам важно не только количество света, даваемого источником, но и его качество, т. е. спектральный состав. Обычные газосветные лампы, в особенности натриевые, не могли найти себе достаточно широкое применение как раз ввиду неудовлетворительного спектрального состава даваемого ими света. При монохроматическом свете пропадает всякое различие цветов освещённых предметов. Если же свет не монохроматичен, но состоит из небольшого числа спектральных линий, то происходит сильное искажение видимых цветов предметов. Человеческий глаз приспособился к соотношениям цветов, возникающим при освещении предметов дневным или солнечным светом. Опыт показывает также, что человеческий глаз в известной мере привык к искажению цветов при освещении предметов жёлто-красным светом ламп накаливания. Однако, в ряде случаев искажение цветов при освещении лампами накаливания является недопустимым. Когда важно точное различие цветов, возникает сложная проблема искусственного дневного света (текстильная промышленность, полиграфия, музеи и т. д.). За эталон дневного света принят источник С со спектраль-

ным распределением энергии, близким к распределению энергии в спектре абсолютно чёрного тела при  $6500^{\circ}$  К (рис. 2)<sup>4</sup>. Необходимо подчеркнуть, что для создания искусственного дневного света нужен источник, близкий к источнику С по спектральной характеристике, а не только по своему цвету. Два источника, близких по цвету и изображаемых в цветовом треугольнике Максвелла близкими точками, могут очень резко различаться по своим спектральным свойствам. Например, источник, испускающий две спектральные линии, соответствующие дополнительным цветам (красный, зелёный), и источник, испускающий непрерывный спектр. При освещении белой поверхности такими источниками в обоих случаях поверхность сохранит свой цвет, но как только мы осветим ими какие-либо разноцветные объекты (человеческие лица, окрашенные ткани, картины и т. д.), сразу же возникнут резкие различия в виде этих предметов. Бедность спектра линейчатого источника проявится в выпадении одних цветов и неестественно высокой яркости других. Поэтому для правильной оценки цветовых свойств источника света

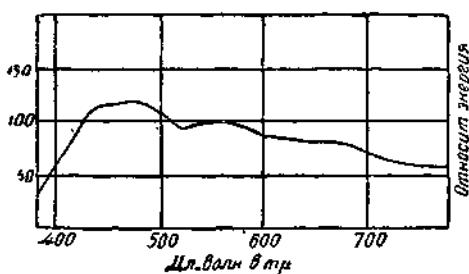


Рис. 2. Распределение энергии в спектре источника С.

необходимо либо измерять распределение энергии в спектре, либо, что более практически, оценивать цветопередачу ряда стандартных цветных образцов при освещении исследуемым источником света<sup>5</sup>.

Для наглядного изображения искажений цветопередачи удобнее всего пользоваться равноконтрастным графиком, построенным по Джедду<sup>6</sup>. На этом графике, в отличие от обычного треугольника Максвелла, одному и тому же расстоянию между двумя точками соответствует одно и то же различие в цвете, независимо от области, в которой лежат эти точки. На рис. 3 изображён равноконтрастный график. По краям нанесены монохроматические цвета спектра. Прямая, соединяющая 700 и 400 мкм, соответствует пурпурным цветам. Точки  $C_1$  — белый,  $C_2$  — жёлтый,  $C_7$  — красный,  $C_9$  — малиновый,  $C_{18}$  — синий,  $C_{15}$  — голубой и  $C_{22}$  — зелёный — образцы при освещении стандартным источником дневного света С. Точки  $H$  изображают цвета тех же образцов при освещении лампой накаливания, точки  $P$  — ртутной лампой и точки  $P+H$  — комбинацией из лампы накаливания и ртутной лампы. Мы видим, что при освещении лампой накаливания белый образец становится оранжевым (смещается в сторону 610 мкм), при освещении ртутной лампой — зеленовато-голубым (смещается в сторону 470 мкм). Жёлтый образец  $C_2$  при лампе накаливания краснеет, а при ртут-

ной — зеленеет. Не менее значительны изменения цвета других образцов.

В идеальном случае различие в цветовых характеристиках образцов при освещении эталоном и данным источником света не должно превышать для всех образцов 1—2 порогов (порог — наименьшее различие в цвете, обнаруживаемое глазом).

Если мы теперь вернёмся к вопросу о предельной светоотдаче источника света, уже учтя сформулированные требования к качеству

света, то получим цифры значительно более низкие, чем 621 лм/вт. Представим себе источник света, превращающий всю подводимую мощность в излучение с длинами волн, лежащими только в пределах видимой части спектра, и пусть распределение энергии в этой части спектра будет таким же, как у абсолютно чёрного тела (рис. 4). Тогда

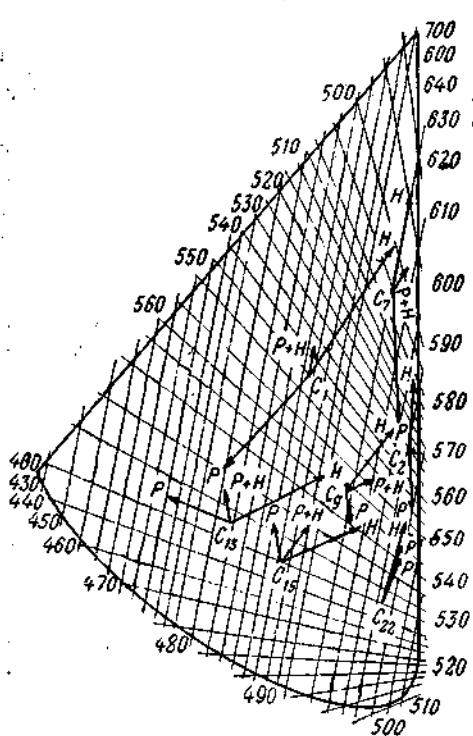


Рис. 3. Равноконтрастный график по Джедду.

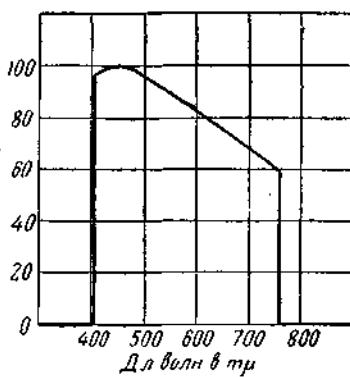


Рис. 4. Распределение энергии в спектре «идеального» источника света.

для такого идеализированного источника можно рассчитать светоотдачу, которая будет различной для различных значений температуры абсолютно чёрного тела, т. е. по существу для различных цветовых температур источника света.

На рис. 5 изображён ход светоотдачи с цветовой температурой<sup>7</sup>. Мы видим, что максимальная светоотдача составляет примерно 220 лм/вт, т. е. почти в 3 раза меньше максимальной светоотдачи для монохроматического источника света.

Ясно, что значения светоотдачи, нанесённые на рис. 5, сильно зависят от установления пределов видимого спектра (0,4—0,7; 0,4—

0,75; 0,4—0,8; 0,38—0,76 и т. д.). Кривая рис. 5 соответствует пределам 0,4—0,76  $\mu$ . Ход кривой на рис. 5 показывает, что изменения цветовой температуры от 2500 до 8000° К мало влияют на светоотдачу, т. е. мы можем довольно сильно изменять цветовые свойства идеализированного источника, не изменяя его светоотдачи.

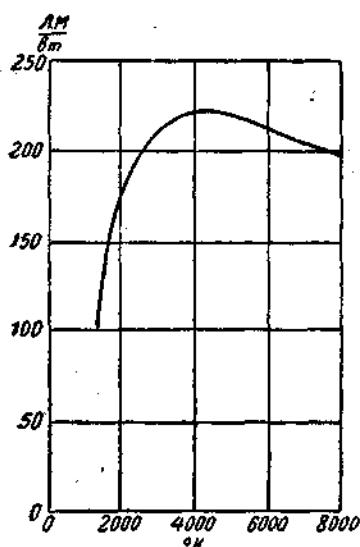


Рис. 5. Светоотдача, как функция цветовой температуры «идеального» источника света.

источника света как по экономичности, так и по своим спектральным свойствам.

#### 4. НЕДОСТАТКИ ГАЗОСВЕТНЫХ ЛАМП

До 1938 г. разработка новых источников света шла, главным образом, по линии создания газосветных ламп, использующих видимое свечение газового разряда. Здесь был получен ряд серьёзных результатов в смысле повышения экономичности и яркости, но с цветовыми характеристиками дело всё время обстояло весьма неблагополучно. Высокая светоотдача, главным образом, достигалась за счёт предельной селективности источников света, т. е. благодаря линейчатой структуре их спектров (предельный случай — монохроматичная натриевая лампа).

Как мы указывали выше, линейчатый характер спектра крайне неприятен с точки зрения цветопередачи. При свечении газового разряда непрерывный спектр можно получить только при очень высокой степени ионизации газа, когда основную роль начинают играть процессы рекомбинации свободных электронов с ионами. Моллер<sup>8</sup> сделал любопытный подсчёт, показывающий, что при таких условиях разряд в парах цезия может оказаться источником белого света со светоотдачей порядка 180 лм/вт. Однако, построение лампы с парами цезия, работающей длительный срок при высокой температуре, представляет огромные чисто технологические трудности.

Для большинства практических применений разумно идеалом считать источник с описанными выше свойствами, что соответствует предельной светоотдаче порядка 200 лм/вт. В тех же случаях, когда монохроматичность света является преимуществом (освещение автострад) или когда цветопередача не существенна (освещение больших цехов металлообрабатывающей промышленности, наружное освещение и т. д.), принципиальная граница для светоотдачи источника должна быть значительно выше.

Во всяком случае лампа накаливания весьма далека от идеального

Цезий чрезвычайно химически активен и быстро разрушает стеклянную разрядную трубку. Так же практически пока мало интересны попытки применения молекулярных газов<sup>9</sup>. Другой, более реальный, но менее эффективный путь для получения источника света с необходимыми цветовыми свойствами состоит в комбинировании газосветных ламп (ртутных ламп) с лампами накаливания. Такого типа установки были довольно широко распространены в США для освещения школ и других общественных зданий. Однако, это решение проблемы, конечно, сопряжено с большой потерей в экономичности и, главное, не даёт всё-таки хорошей цветопередачи. На графике рис. 3 точки  $P$  и  $H$  изображают цвета образцов при освещении комбинированным источником света. Согласно законам смешения, точки, соответствующие цветам тест-объектов, при комбинированном освещении должны лежать на прямых, соединяющих точки  $P$  и  $H$ . Так как эти прямые не проходят через точку  $C$ , соответствующие правильным цветам тест-объектов, то ясно, что никакая (в смысле соотношения мощностей) комбинация ртутной лампы и ламп накаливания не может дать правильной цветопередачи.

### 5. СОЧЕТАНИЕ ЛЮМИНОФОРОВ С ГАЗОВЫМ РАЗРЯДОМ

Гораздо более плодотворным оказался путь, связанный с применением люминофоров в газосветных лампах. Как известно, спектры излучения твёрдых люминофоров представляют собой довольно резко ограниченные, но непрерывные полосы. Таким образом, люминофоры обладают спектральными свойствами, аналогичными свойствам того идеального источника света, о котором мы говорили выше. Излучение люминофоров сосредоточено в определенной спектральной области, но в пределах этой области присутствуют все длины волн.

Надо сказать, что идея применения люминофоров в сочетании с газовым разрядом имеет основательную давность. Еще Беккерель наблюдал свечение люминофоров в разрядных трубках<sup>10</sup>, а Купер-Юитт более 30 лет тому назад проводил опыты с флуоресцирующими рефлекторами, предназначенными для добавления красного света к зелёному свечению ртутной лампы<sup>11</sup>. Затем, в течение ряда лет, успешные эксперименты по применению люминофоров вёл во Франции Клод со своими сотрудниками<sup>12</sup> и Рэндалл в Англии<sup>13</sup>.

Но, как мы уже подчеркивали вначале, настоящий размах практическое применение люминесцентных ламп получило только начиная с 1938 г. Принцип действия газоразрядных ламп с люминофорами чрезвычайно прост. На стеклянную колбу лампы наносится тонким слоем какой-либо люминофор, светящийся под действием излучения газового разряда. При этом обычно используется для возбуждения люминофора ультрафиолетовая часть спектра излучения разряда. В том случае, когда люминофор используется только для исправления цветности лампы, видимое излучение разряда играет весьма существенную роль. Например, при исправлении цветности ртутных ламп высокого давления цинк-кальций сульфид, нанесённый на вну-

треннюю поверхность наружной колбы, даёт ничтожную долю общего светового потока лампы. Светоотдача, по существу, целиком определяется в этом случае видимым излучением разряда. Ясно, что присутствие ярких линий в спектре излучения сильно портит цветовые характеристики лампы. Поэтому применение люминофоров



Рис. 6. Разрез люминесцентной лампы. Внутренняя поверхность покрыта люминофором.

для исправления цветности газоразрядных ламп, обладающих высокой светоотдачей самого разряда, является трудной задачей. До сих пор получены весьма ограниченные результаты в этом направлении.

Проще обстоит дело в том случае, когда видимое излучение самого разряда весьма слабо по сравнению с ультрафиолетовым излучением. Здесь можно создать такие условия, при которых почти весь световой поток лампы будет состоять из свечения люминофора. Роль газового разряда сводится только к генерации ультрафиолетового излучения, возбуждающего люминофор. Такого типа лампы и называются люминесцентными.

В люминесцентных лампах, получивших широкое распространение, использован электрический разряд в смеси паров ртути с аргоном и смесь люминесцирующих силикатов, вольфраматов и боратов (рис. 6). Мы последовательно рассмотрим отдельные элементы люминесцентных ламп и их взаимодействие между собой.

## 6. БАЛАНС ЭНЕРГИИ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Выход излучения в газовом разряде чрезвычайно сильно зависит от таких параметров, как давление газа и сила тока. При этом существенно различать резонансное излучение, испускаемое атомами газа при переходах на самый низкий энергетический (нормальный) уровень, и излучение, испускаемое при переходах между более высокими уровнями. Если мы грубо разобьём все уровни атома на три «этажа» (рис. 7), то наиболее интенсивные резонансные линии соответствуют переходам со второго этажа на первый, наиболее интенсивные нерезонансные линии — переходам с третьего этажа на второй. На рис. 8а весьма схематично изображён баланс энергии в положительном столбе газового разряда при различных давлениях, подсчитанный на основании обширного экспериментального материала Клярфельдом<sup>14</sup>. Потери на стенках состоят из энергии, отдаваемой стенкам ионами и метастабильными атомами; тепловые потери в объёме связаны с нагреванием газа за счёт упругих соударений электронов с атомами. Потери на стенах с ростом давления уменьшаются в связи с уменьшением длины свободного пробега ионов, что затрудняет попадание ионов на стекло.

Доля энергии, расходуемой на тепловые потери в объеме газа, имеет резкий максимум в области средних давлений. Выделяющееся при этом тепло благодаря теплопроводности газа также передается стенкам разрядной трубки.

Интересно отметить, что в области больших давлений  $\eta_{\nu}$  резко снижается. Это связано с исчезновением разницы между электронной температурой и температурой газа и с установлением по оси разряда весьма высоких температур, порядка  $7000^{\circ}\text{K}$ .

Тепловые потери в объеме можно рассматривать, как своеобразный процесс теплопередачи от горячего электронного газа, «подогреваемого» электрическим полем разряда, к более холодному атомарному газу, на который электрическое поле непосредственно не действует.

Из диаграммы рис. 8а видно, что существуют две области давлений, оптимальных для генерации излучения в разряде.

В области низких давлений разряд особенно эффективен как источник резонансного излучения; в области высоких давлений, наоборот, особенно велик выход нерезонансных линий.

Нас будет интересовать в дальнейшем только разряд низкого давления. Рассмотрим кратко механизм возбуждения излучения в таком разряде.

### 7. МЕХАНИЗМ ВОЗБУЖДЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В РАЗРЯДЕ

Как известно, схема основных энергетических превращений в разряде низкого давления довольно проста. Электрон приобретает запас кинетической энергии в электрическом поле разряда, затем соударяется с атомом и возбуждает его, т. е. переводит атом с более низкого энергетического уровня на более высокий. Возбужденный атом по истечении некоторого весьма небольшого промежутка времени (продолжительность жизни возбужденного атома  $10^{-7}$ — $10^{-8}$  сек.) возвращается обратно на более низкий энергетический уровень, испуская при этом квант лучистой энергии. Однако, эта

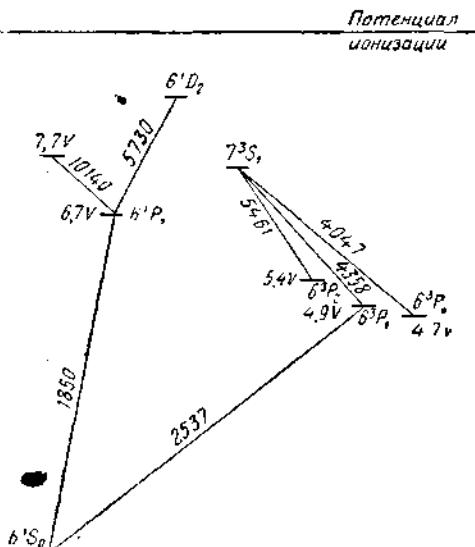


Рис. 7. Упрощенная схема энергетических уровней атома ртути.

простая схема усложняется рядом вторичных процессов, на которых мы остановимся несколько позже.

Очевидно, что в процессе возбуждения могут участвовать только электроны, обладающие энергией большей, чем потенциал возбуждения, равный расстоянию между энергетическими уровнями атома, выраженному в электрон-вольтах. Распределение электронов по энергиям носит максвелловский характер с электронной температурой в качестве параметра. Электронную температуру принято выражать в электрон-вольтах — 1V соответствует  $7800^{\circ}\text{K}$ <sup>16</sup>.

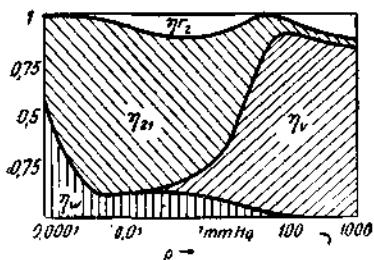


Рис. 8а. Баланс энергии в положительном столбе газового разряда.

$\eta_1$  — доля мощности, превращаемая в рэзонансное излучение;  $\eta_2$  — внешегоризонтальное излучение,  $\eta_3$  — тепловые потери в объеме газа,  $\eta_4$  — потери на стенах,

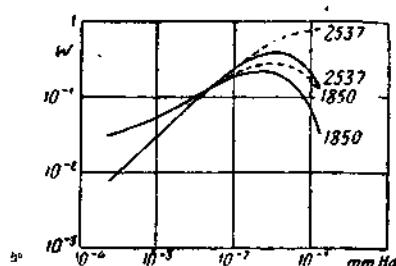


Рис. 8б. Интенсивность линий 1850 и 2537 Å.

Максимум максвелловской кривой соответствует энергии электронов, равной одной

трети электронной температуры, выраженной в электрон-вольтах. В разряде почти всегда максимум кривой распределения лежит значительно левее потенциала возбуждения, так что в возбуждении атомов участвует лишь небольшая доля всех электронов. Чем ниже электронная температура, тем меньше эта величина.

С ростом давления при постоянной силе разрядного тока растёт концентрация нормальных атомов и электронов (в связи с уменьшением скорости дрейфа) и падает электронная температура<sup>17</sup>. В результате наложения этих взаимопротивоположных эффектов, при определённом давлении наблюдается максимум произведения из концентрации нормальных атомов на число электронов, обладающих энергией, достаточной для возбуждения этих атомов. Это должно соответствовать максимуму излучения разряда в области низких давлений.

Абсолютная интенсивность излучения зависит весьма сильно от величины эффективного сечения атома для процесса возбуждения электронным ударом. Эффективное сечение атома имеет различные значения для переходов между различными уровнями и является функцией энергии возбуждающего электрона — «функция возбуждения». На рис. 9 приведены функции возбуждения для четырёх уровней атома ртути<sup>18</sup>. Все эти уровни принадлежат ко «второму

этажу» уровней атома ртути. С уровня  $6^1P_1$  начинается линия 1849 Å, а с уровня  $6^3P_1$  — линия 2537 Å; уровни  $6^3P_2$  и  $6^3P_0$  метастабильные.

Абсолютное значение эффективного сечения атома ртути в максимуме функции возбуждения уровня  $6^1P_1$  равно  $15 \text{ см}^2/\text{см}^3$  (площадь всех мишеней при  $0^\circ\text{C}$  и  $1 \text{ мм Hg}$  — величина, обратная длине свободного пробега), что составляет примерно  $15\%$  от газокинетического сечения атома ртути для уровня  $6^3P_1$ , соответственно,  $4 \text{ см}^2/\text{см}^3$ <sup>19</sup>. Следует указать, что имеющиеся в литературе данные для уровня  $6^3P_1$  противоречивы, но после внесения соответствующих поправок неплохо согласуются друг с другом<sup>20</sup>. У атомов инертных газов сечение гораздо меньше, например у неона эффективное сечение для возбуждения составляет доли процента от газокинетического сечения<sup>21</sup>. Наоборот, у таких атомов, как натрий и калий, эффективность соударений ещё больше, чем у ртути. Грубо говоря, вероятность возбуждения убывает с увеличением потенциала возбуждения.

В отсутствии вторичных процессов эффективное сечение атома является единственной атомарной характеристикой, влияющей на интенсивность излучения газового разряда. Связь между макроскопическими характеристиками разряда и атомными константами может быть установлена только при условии, что известны электронные характеристики разряда, т. е. концентрация электронов и электронная температура.

Для разряда в парах натрия имеются наиболее полные данные об электронных и оптических характеристиках<sup>22</sup>. Для этого разряда получается прекрасное согласие между рассчитанными из атомных констант значениями абсолютных интенсивностей и экспериментальными данными<sup>23</sup>.

К сожалению, ртутный разряд исследован гораздо менее обстоятельно. В работах, посвящённых абсолютным измерениям интенсивности резонансных линий, не всё благополучно с точки зрения методики. Нет прямых данных об интенсивности линии 1850 Å. Максимум интенсивности резонансного излучения получается в области давлений порядка  $10^{-2} \text{ мм Hg}$ , что качественно согласуется с теоретическими расчетами<sup>24</sup>. На рис. 8б изображён ход интенсивности линий 1850 и 2537 Å, рассчитанный теоретически. Более точное сопоставление затруднительно, так как почти нет сведений

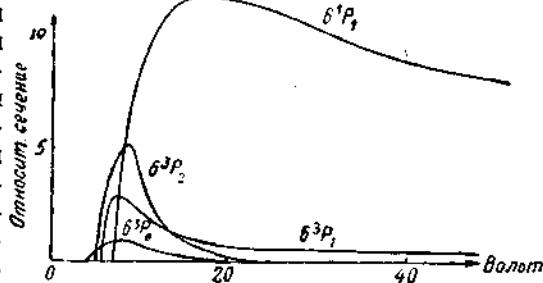


Рис. 9. Функции возбуждения атома ртути.

о концентрациях электронов и электронных температурах для тех же условий разряда, при которых производились измерения излучения. Например, в работе Фаунда и Хеннели<sup>25</sup> есть подробные данные об электронных характеристиках, но результаты измерений линии 2537 Å носят относительный характер.

### 8. РАЗРЯД В ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМПАХ КАК ИСТОЧНИК УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

До сих пор мы говорили об излучении разряда в чистых парах ртути. По ряду побочных причин, которые будут разобраны ниже, в люминесцентных лампах используется разряд в смеси паров ртути с аргоном. Давление аргона — порядка 3—4 мм Hg. Роль аргона в механизме излучения разряда ещё не выяснена полностью. Во всяком случае присутствие аргона затрудняет движение электронов и ионов, так как вызывает уменьшение длины свободного пробега. Последнее должно приводить к увеличению концентрации электронов (при постоянной силе тока) и к понижению электронной температуры.

При добавлении 4 мм аргона, согласно измерениям Ф. Бутаевой<sup>26</sup>, происходят следующие изменения в разряде: концентрация электронов повышается на порядок с  $9 \cdot 10^{10}$  до  $2,6 \cdot 10^{11}$ , а электронная температура снижается с 18 100 до 13 000°K. Температура стенок лампы при этом поддерживалась постоянной и равной 40°С, что соответствует давлению ртутных паров порядка  $10^{-2}$  мм Hg. Сила тока также постоянная — 350 мА. Снижение электронной температуры должно изменять соотношение интенсивностей линий 1850 и 2537 в пользу последней.

На рис. 15 изображён выход излучения, как функция температуры стенок люминесцентной лампы<sup>27</sup>. Мы видим, что 40°С (110°F) соответствуют оптимальным условиям для генерации резонансного излучения.

В табл. 2 приведены данные Тейера и Бэрнса<sup>28</sup> для распределения энергии в спектре газового разряда лампы диаметром 25 мм

Таблица 2  
Выход спектральных линий в люминесцентных лампах

Ток в А	Темпера- тура сте- нок в °С	Доля мощности, превращённой в линию $\lambda$							Сумма	Доля на линию 2537	Люмен на ватт
		2537	3129	3651	4047	4358	5461	5780			
0,25	48	62	0,53	0,45	0,59	1,30	0,86	0,18	65,9	94	5,5
0,50	57	55	0,68	0,62	0,86	1,45	1,26	0,27	60,1	92	7,3
1,00	69	40	0,89	0,82	1,02	1,79	1,49	0,39	46,4	86	10,0

при трёх различных силах тока. В табл. 2 за 100% принята мощность, расходуемая в положительном столбе разряда. Из неё следует, что в данных условиях более 50% подводимой в положительный столб мощности превращается в линию 2537 Å и что эта линия составляет более 90% излучения разряда (последнее не точно, ибо не измерялась линия 1850 Å и инфракрасные линии).

Эти данные находятся в прекрасном согласии с общей картиной энергетического баланса разряда, изображённой на рис. 8 в начале настоящего раздела. Следует заметить, однако, что из-за сложности энергетических уровней ртути количественное теоретическое объяснение таких высоких значений выхода для линий 2537 Å, как приведённые в табл. 2, является далеко не тривиальной задачей.

Ведь, как видно из рис. 9, вероятность возбуждения обоих метастабильных уровней  $6^3P_0$  и  $6^3P_2$  примерно в два раза больше, чём вероятность возбуждения линии 2537 Å, начинающейся с уровня  $6^3P_1$ . Следовательно, если на возбуждение линии 2537 Å расходуется более 50% мощности, то на возбуждение метастабилей должно расходоваться более 100% мощности, а на возбуждение всех четырёх нижних уровней значительно более 150% подводимой мощности<sup>29</sup>. В этом смысле в натриевом разряде дело обстоит совсем иначе: там находят себе простое объяснение даже значения для выхода излучения, близкие к 100%, поскольку нет метастабильных состояний. Противоречие, возникающее при попытке теоретически истолковать данные табл. 2, может быть разрешено только путём учёта ударов второго рода. При ударах второго рода метастабильные атомы ртути либо отдают свою энергию обратно электронам, либо переходят на уровень  $6^3P_1$ , превращаясь в излучающие атомы.

Возможно, что последний процесс играет значительную роль в механизме возбуждения линии 2537 Å. Присутствие аргона должно значительно повышать число ударов второго рода, испытываемых метастабильными атомами.

Во всяком случае приведённые данные свидетельствуют о том, что разряд в люминесцентных лампах является весьма экономичным источником коротковолнового ультрафиолетового излучения. Наоборот, как источник видимого излучения этот разряд не выгоден. В последнем столбце табл. 2 приведены значения светоотдач самого разряда, и мы видим, что эти цифры ниже даже светоотдач ламп накаливания.

Как уже указывалось выше, слабая интенсивность видимых линий также является преимуществом люминесцентных ламп. Наконец, из табл. 2 видно, насколько вредна форсировка режима ламп, — выход резонансного излучения резко падает и возрастает роль видимых линий. К этому вопросу мы ещё вернёмся в разделе, посвящённом выбору технических параметров люминесцентных ламп.

## 9. ЛЮМИНОФОРЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМПАХ

При выборе люминофоров для люминесцентных ламп приходится считаться с целым рядом обстоятельств. Прежде всего, эти люминофоры должны обладать большой чувствительностью к коротковолновому ультрафиолету. Затем эти люминофоры должны давать видимую люминесценцию с вполне определёнными спектральными характеристиками в смысле положения полосы люминесценции в спектре и распределения энергии в полосе. Наконец, люминофоры для ламп должны быть вакуумными, т. е. при введении их внутрь электровакуумного прибора, каким является люминесцентная лампа, они не должны разлагаться и должны быть достаточно стабильными в присутствии ртутного разряда. Последнее условие чрезвычайно усложняет подбор люминофоров для ламп. Зачастую приходится отказываться от весьма выгодных по своим оптическим характеристикам люминофоров, так как они не являются вакуумными в указанном смысле слова.

В настоящее время уже установлен асортимент люминофоров, используемых в люминесцентных лампах. В табл. 3 сведены основные характеристики этих люминофоров по работе Одей и Цизель<sup>30</sup>.

Таблица 3  
Основные люминофоры, применяемые в люминесцентных лампах

Люминофор	Цвет	Полоса возбуждения	Максимум чувствительности	Полоса испускания	Максимум испускания
$\text{CaWO}_4$	Синий	2200—3000	2720	3800—7000	4400
$\text{MgWO}_4$	Сине-белый	2200—3200	2850	3800—7200	4800
$\text{ZnSiO}_3$	Зелёный	2200—3960	2537	4500—6200	5250
$\text{ZnBeSiO}_3$	Жёлто-белый	2200—3000	2537	4500—7200	5950
$\text{CdBO}_3$	Розовый	2200—3600	2500	4000—7200	6150

Следует отметить, что коротковолновая граница полосы возбуждения 2200 Å определена условно, так как применявшаяся аппаратура не давала возможности продвинуться дальше в сторону коротких волн.

Как показывают измерения Биза<sup>31</sup>, выполненные при помощи вакуумного спектрографа, полоса возбуждения люминофоров простирается далеко за 1850 Å, причём даже наблюдается второй, более высокий, максимум чувствительности в области 1850 Å (см. рис. 10). К сожалению, данные Биза несколько противоречивы. У него наблюдается количественное расхождение между результатами измерения с вакуумным спектрографом и с монохроматором (для длины волн  $> 2200 \text{ Å}$ ).

Ф. Бутаевой<sup>82</sup> проделаны эксперименты, правда, носящие косвенный характер, но указывающие весьма определенно на большую чувствительность люминофоров к линии 1850 Å. Ф. Бутаева поме-

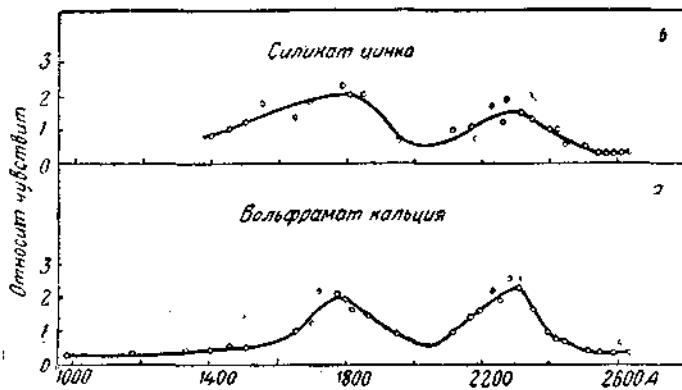


Рис. 10. Чувствительность люминофоров к короткому ультрафиолету.

щала образцы люминофоров на близком расстоянии от ртутной кварцевой лампы низкого давления и закрывала их фильтрами, пропускающими линию 2537 Å (от 33 до 50%) и отрезающими линию 1850 Å. Оказалось, что при закрывании такими фильтрами яркость люминофора уменьшалась в большее число раз, чем это следовало из коэффициента пропускания для линии 2537 Å. Например, при пропускании фильтра 33% яркость уменьшалась для некоторых люминофоров примерно до 26%, для других до 18% от начальной величины. Это свидетельствовало о том, что в возбуждении люминофоров существенную роль играет линия 1850 Å, отрезаемая фильтром. Как и следовало ожидать, все эффекты, связанные с линией 1850 Å, исчезали при достаточно большом расстоянии между лампой и образцом люминофора. Известно, что воздух сильно поглощает линию 1850 Å.

На рис. 11 приведены кривые спектральной чувствительности люминофоров в области длин волн больших, чем 2200 Å. Мы видим, что все они имеют максимумы чувствительности, лежащие близко от 2537 Å и, следовательно, должны хорошо возбуждаться этой спектральной линией. Полосы испускания люминофоров охватывают, как видно из табл. 3, весь видимый спектр. В табл. 4

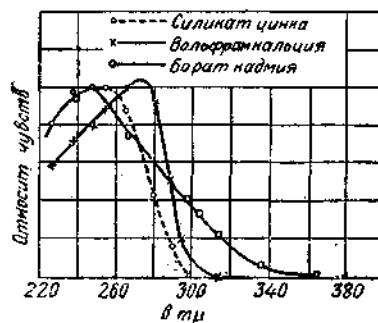


Рис. 11. Чувствительность люминофоров в области длин волн больше 2200 Å.

Таблица 4

Распределение энергии в полосах люминесценции.

Люминофор	Длина волны максимума энергии	Интенсивность по отношению к максимуму				
		$\lambda 4500$	5000	5500	6000	$6500 \text{ \AA}$
$\text{CaWO}_4$	4400	98	60	24	8	2
$\text{MgWO}_4$	4800	86	97	56	26	9
$\text{ZnSiO}_3$	5250	1	33	48	4	0
$\text{ZnBeSiO}_3$	5950	1	9	68	99	55

приведены количественные данные о распределении энергии в полосах люминесценции, согласно Тетру и Бернсу.

На рис. 12 изображены в одном масштабе результаты измерений Ф. Бутаевой люминофоров, синтезированных в ВЭИ В. И. Долгополовым<sup>84</sup>. Естественно, что на свойства люминофоров весьма сильно

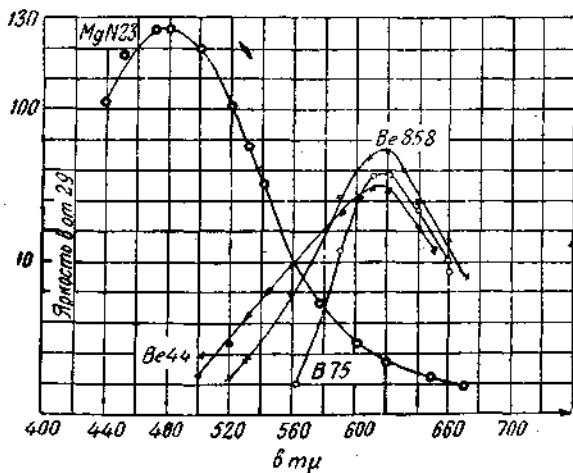


Рис. 12. Распределение энергии в спектральных полосах люминофоров.

$\text{MgN 23}$  — вольфрамат магния;  $\text{Be 44}$  — цинк-бериллий силикат, активированный марганцем;  $\text{Be 858}$  — то же, но с другим количественным соотношением (больше марганца, меньше бериллия);  $\text{Be 75}$  — борат калия.

оказывает влияние технология их изготовления. Очень опасно загрязнение люминофоров тяжелыми металлами вроде железа, меди, свинца и т. д.

На рис. 13 изображен выход люминесценции в зависимости от процентного содержания загрязнения<sup>85</sup>. Мы видим, что достаточные концентрации порядка  $10^{-5}$  —  $10^{-6}$ , чтобы вызвать заметное снижение выхода. Это обстоятельство заставляет предъявлять чрезвычайно

высокие требования к очистке исходных материалов для синтеза люминофоров. Большую роль также играет активатор — тяжёлый металл, придающий люминофору его специфические свойства. Таким активатором в силикате цинка (виллемите) и цинк-бериллий силикате служит марганец. Марганец вообще является распространённым активатором люминофоров, причём свойства люминофоров, активированных марганцем, очевидно, тесно связаны со свойствами иона марганца<sup>35</sup>.

Существует определённая концентрация активатора, соответствующая максимальному выходу люминесценции. В случае силикатов эта концентрация порядка 1%<sup>36</sup>, однако, точное значение сильно зависит от ряда обстоятельств (состав основного вещества, режим прокалки и т. д.). Мы не можем здесь вдаваться в детали технологии люминофоров и поэтому ограничимся следующими краткими замечаниями.

Теория твёрдых люминофоров, базирующаяся на представлениях об энергетических зонах твёрдого тела, находится ещё в зачаточном состоянии<sup>37</sup>. Если эта теория и даёт известную качественную картину механизма возбуждения и излучения люминофоров, то, во всяком случае, все вопросы, так или иначе связанные с интенсивностью люминесценции, пока остаются без ответа. Объясняется это большой сложностью объекта. Поэтому синтез новых люминофоров идёт чисто эмпирическим путём, и удачный рецепт представляет секрет той или иной фирмы.

## 10. СЛОЙ ЛЮМИНОФОРА В ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМПАХ

Люминофор наносится на внутренние стенки лампы в виде слоя мелкокристаллического порошка. Размер отдельных кристалликов порядка микрона. Размер кристалликов существенным образом влияет на выход люминесценции. В оптимальном случае на 1 см<sup>2</sup> поверхности лампы приходится примерно 1—2 мг люминофора, что соответствует  $\sim 10^9$  кристалликов. Кристаллики при этом наломождаются друг на друга (piling)<sup>38</sup>. Оптические свойства лампы зависят весьма сильно от структуры и толщины слоя люминофора.

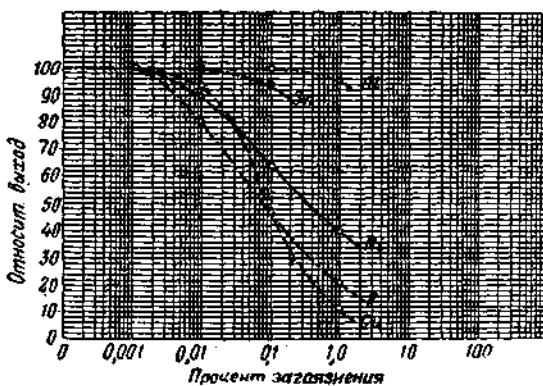


Рис. 13. Влияние загрязнений на выход люминесценции для бората кадмия, активированного марганцем.

При слишком тонком слое не происходит полного поглощения возбуждающего ультрафиолета, при слишком толстом слое уже начинает сказываться вредное поглощение света самой люминесценции в слое. Последнее усугубляется тем обстоятельством, что слой люминофора в лампах работает на просвете, т. е. свечение наблюдается со стороны, противоположной возбуждаемой. Грубо говоря, можно рассматривать люминесцентную лампу, как замкнутую арматуру из молочного стекла. У такой арматуры кпд определяется, как известно<sup>2</sup>, следующей простой формулой:

$$\eta = \frac{p}{1-r}, \quad (1)$$

где  $p$  — коэффициент пропускания слоя,  $r$  — коэффициент отражения слоя.

При выводе формулы (1) учтены повторные отражения света от стенок. Если  $p+r=1$ , то  $\eta$  всегда равна единице, независимо от толщины слоя. Наоборот, небольшие отклонения  $p+r$  от единицы уже вызывают заметное снижение кпд. Например, если  $p$  слоя равно 0,3, а  $r=0,65$ , т. е.  $p+r=0,95$ , и поглощение при однократном прохождении слоя равно 0,05, то кпд, определяемый (1), уже оказывается равным 0,86, т. е. потери света достигают 0,14. Объясняется это многократными отражениями света в такой замкнутой полости. Экспериментально установлено, что в обычных люминесцентных лампах  $\eta$  примерно равно 0,9.

Вопрос об оптимальных характеристиках слоя люминофора приводит к довольно любопытной задаче из области оптики рассеивающих средин<sup>39</sup>.

Технология получения однородных слоев на внутренних стенках длинных трубок основана на использовании суспензий люминофоров в различных жидкостях. После нанесения их — кляющее вещество удаляется. Имеется колоссальное число патентов, описывающих различные методы нанесения люминофоров. Здесь большую роль играют капиллярные свойства жидкой среды и адгезионная способность самого люминофора. Поэтому оказываются весьма полезными небольшие присадки поверхностно-активных веществ.

## 11. ВЫБОР РАЗМЕРОВ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

Теперь мы переходим к описанию технических образцов люминесцентных ламп. Как уже указывалось выше, до сих пор в люминесцентных лампах используется ультрафиолетовое излучение положительного столба разряда. Поэтому люминесцентные лампы имеют вид длинных трубок с большим расстоянием между электродами. При прочих равных условиях, чем больше длина лампы, тем выше её светоотдача, ибо там большая доля всей мощности расходуется в положительном столбе разряда, и тем меньшую роль играют потери у электродов (катодное и анодное падение).

На рис. 14 изображена светоотдача люминесцентной лампы, как функция её длины.

Ясно, что с увеличением длины растёт мощность, потребляемая лампой. Светоотдача достигает насыщения примерно при длине,

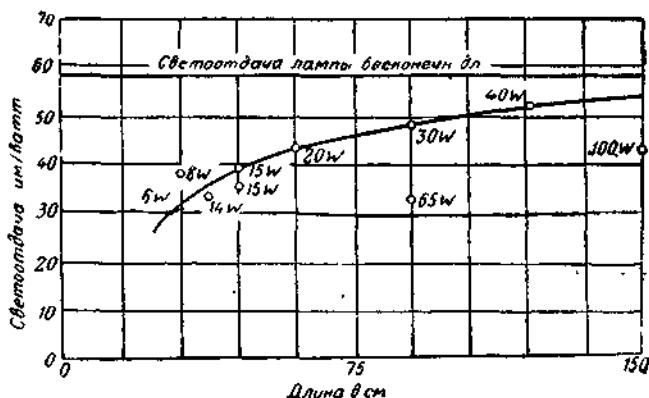


Рис. 14. Светоотдача люминесцентной лампы, как функция её длины.

равной 120 см (рис. 14)<sup>40</sup>. Диаметр лампы определяется необходимостью получить определённую температуру стенок, которой соответствует оптимальное давление ртутных паров. Эта температура зависит от мощности, потребляемой лампой, и от габаритов

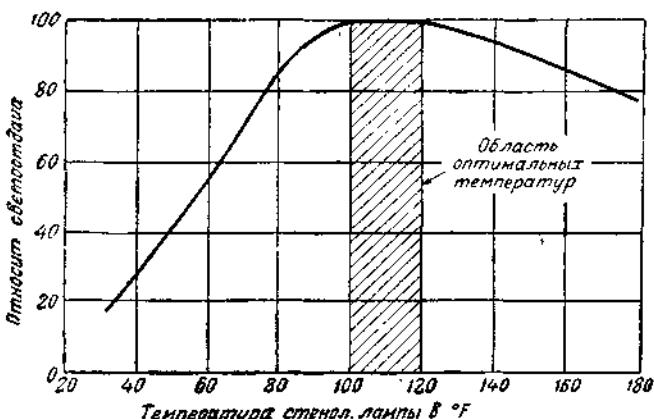


Рис. 15. Светоотдача, как функция температуры стенок люминесцентной лампы.

ламп. Слишком малый диаметр лампы приводит к повышению температуры выше дозволенного предела и тем самым к снижению выхода ультрафиолетового излучения, что, в свою очередь, влечёт за собою снижение светоотдачи лампы. На рис. 15 изображена

светоотдача люминесцентной лампы, как функция температуры стенок трубы<sup>41</sup>.

В табл. 5 приведены габариты низковольтных люминесцентных ламп. Мы видим, что 40-ваттная лампа представляет собой трубку более 1 м длиной и почти 4-сантиметрового диаметра. Такие боль-

Таблица 5  
Размеры люминесцентных ламп

Мощность в ваттах .	6	8	14	15	15	20	30	40	65	100
Длина в сантиметрах .	22,5	30	35	45	45	60	90	120	90	150
Диаметр в сантимет- рах . . . . .	1,56	1,56	3,75	2,5	3,75	3,75	2,5	3,75	5,3	5,3

шие габариты люминесцентных ламп во многих случаях являются их преимуществом, но иногда приводят к затруднениям (местное освещение).

Кроме низковольтных ламп за последнее время получают всё более широкое распространение высоковольтные лампы<sup>42</sup>. Их длина доходит до 250 см, а диаметр от 1,5 до 2,5 см. Наконец, промелькнули в американской печати отрывочные сведения о выпуске в 1944 г. шаровых ламп.

## 12. ЭЛЕКТРОДЫ В ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМПАХ

Люминесцентные лампы переменного тока обладают двумя одинаковыми электродами. Каждый электрод одну половину периода тока служит катодом, а вторую половину периода — анодом. В низковольтных лампах используются электроды в виде вольфрамовых биспиралей, покрытых оксидной пастой (см. рис. 6). Оксидная паста служит для снижения работы выхода электронов. При нормальном режиме электроды накаливаются самим разрядом в результате бомбардировки («самокалиющиеся»). Для того, чтобы ограничить накал электродов, американцы до войны приделывали к ним «усы» из никеля, принимавшие на себя в анодный период часть тока. Во время войны из соображений экономии никеля эти усы были упразднены<sup>43</sup>. Сумма катодного и анодного падений лежит в пределах от 12 до 18 V<sup>44</sup>. Как уже указывалось в предыдущем разделе, наличие этих падений заметно снижает светоотдачу коротких ламп. Любопытно, что оксидный катод не является в данном случае эквипотенциальным и работает одна яркая точка катода постепенно, по мере срока службы лампы, перемещающейся по катоду. Когда эта точка дойдёт от одного конца биспирала до другого, лампа перестаёт действовать. Очевидно, при этом дезактивируется вся

поверхность катода. В результате распыления электродов на концах трубки образуются кольцеобразные чёрные налёты \*).

В высоковольтных трубках используются холодные катоды в виде цилиндров. Эти цилиндры обычно изготовлены из железа, меди или других металлов, обработанных с поверхности веществами вроде азота бария. Сумма катодного и анодного падений достигает сотен вольт, что заставляет делать весьма длинные и узкие лампы для увеличения доли мощности, приходящейся на положительный столб разряда <sup>42</sup>. Срок службы холодных катодов очень большой, порядка 10 000 часов

### 13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

Как и всякий газоразрядный прибор, люминесцентная лампа обладает довольно сложными электрическими характеристиками. Во-первых, приходится различать два режима работы лампы: режим зажигания и режим нормального горения. Во-вторых, люминесцентная лампа обладает падающей вольтамперной характеристикой, т. е. с ростом тока уменьшается падение напряжения на лампе.

Всё это чрезвычайно усложняет схему включения люминесцентной лампы (низковольтной — 120 — 220 В). Приведём прежде всего электрические характеристики ламп при режиме нормального горения (табл. 6). Мы видим, что падение напряжения на лампах со-

Таблица 6  
Электрические характеристики низковольтных люминесцентных ламп

Ватты . . . .	6	8	14	15	15	20	30	40	45	100
Сила тока в амперах .	0,15	0,18	0,37	0,30	0,33	0,35	0,34	0,41	1,35	1,45
Падение напряжения . .	45	54	41	56	48	62	103	108	50	72
Напряже- ние сети . .	110— 125	110— 125	105— 125	110— 125	110— 125	110— 125	220— 225	220— 250	110— 125	220— 250

ставляет не более 50% от сетевого напряжения. Объясняется это тем, что потенциал зажигания газового разряда гораздо выше, чем падение напряжения на разрядном промежутке, когда разряд уже горит <sup>16</sup>. Поэтому, при меньшей разнице между сетевым напряжением и падением на горящей лампе уже нельзя получить надёжное зажигание и устойчивую работу лампы. Ведь при работе лампы на переменном токе зажигание разряда должно происходить каждые

\*). Срок службы катодов примерно 3000 час. Распыление электродов ослаблено из-за присутствия аргона.

полпериода. На рис. 16 изображены осциллограммы тока и напряжения люминесцентной лампы<sup>26</sup>.

Лампа зажигается только тогда, когда мгновенное значение сетевого напряжения достигнет определённой величины, равной потенциальному зажиганию\*). После этого падение напряжения на лампе

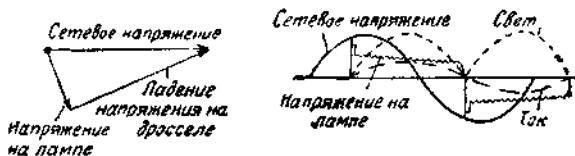


Рис. 16. Осциллограммы тока, напряжения и светового потока люминесцентной лампы. Слева изображена векторная диаграмма напряжений для цепи с люминесцентной лампой.

резко уменьшается и сохраняет в течение некоторого промежутка времени постоянную величину, почти вплоть до очередного потухания ламп. Выбор силы тока определяется желанием, с одной стороны, получить высокую экономичность, с другой стороны, необходимо иметь лампы определённой мощности. На рис. 17 изображён ряд кривых хода светоотдачи при различных силах разрядного тока<sup>28</sup>.

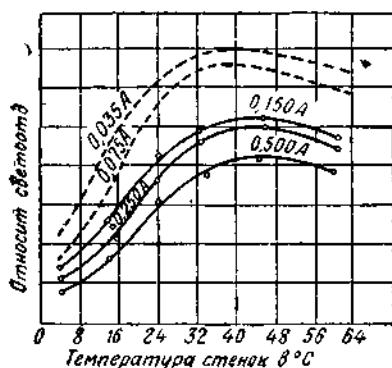


Рис. 17. Светоотдача при различных силах тока.

имеют место у высоковольтных ламп. В них падение напряжения достигает 1—2 кВ и при силе тока 60—100 мА уже получается мощность 15—20 Вт. Узкий диаметр ламп обеспечивает достаточную температуру стенок. Следует указать, что получение токов выше 100 мА при использовании холодных катодов ещё вообще является весьма трудной проблемой.

\*). Зажигание люминесцентных ламп весьма облегчено из-за присутствия аргона.

## 14. ЗАЖИГАНИЕ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

Схема включения низковольтной люминесцентной лампы должна обеспечить надёжное зажигание лампы и затем нормальный режим её горения. Зажигание низковольтной лампы производится при помощи очень остроумного приспособления, называемого реле тлеющего разряда<sup>46</sup>. Дело заключается в том, что для зажигания лампы необходимо сначала накалить электроды. При холодных электродах потенциал зажигания обычной низковольтной лампы достигает почти 1000 V. Наоборот, предварительный накал электродов вызывает сильную электронную эмиссию, облегчающую зажигание разряда. Но как только произойдёт зажигание разряда, накал электродов должен быть выключен, ибо электроды уже начинают нагреваться самим разрядом. Обе эти операции—включение и выключение накала—производит реле тлеющего разряда. На рис. 18 изображена принципиальная схема включения низковольтной люминесцентной лампы (назначение дросселя будет объяснено ниже). Таким образом, параллельно лампе включено реле тлеющего разряда. Аналогичная схема применялась в своё время для натриевых ламп, но с выключателем вместо реле. На рис. 19 изображено это реле. Реле тлеющего разряда представляет собой миниатюрную разрядную трубку, заполненную инертным газом с электродами, сделанными из биметаллических пластин. В нормальном состоянии имеется небольшой зазор между пластинами (см. рис. 19, положение *a*). При наложении достаточного напряжения между пластинами вспыхивает тлеющий разряд. Тлеющий разряд вызывает нагревание электродов, изгибающихся в результате этого нагревания навстречу друг другу вплоть до соприкосновения (см. рис. 19, положение *b*). В этом положении реле, очевидно, закорочено и так как разряд прекратился, электроды начинают охлаждаться и, следовательно, выпрямляться, отходя друг от друга. Если приложенное напряжение остаётся прежним, то опять вспыхивает тлеющий разряд, и всё начинается снова. Возникают своеобразные колебания. Потенциал зажигания реле подбирается лежащим между сетевым напряжением и потенциалом зажигания люминесцентной лампы (с накалёнными электродами). Поэтому в первый момент после включения разряд вспыхивает между электродами реле, но не лампы. Оба электрода лампы оказываются включёнными в сеть последовательно, но в этой цепи идёт очень

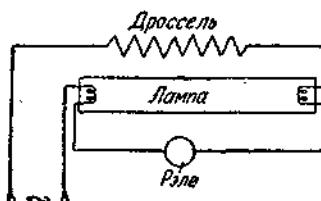


Рис. 18. Принципиальная схема включения люминесцентной лампы.



Рис. 19. Реле тлеющего разряда.

Однако, через весьма короткий промежуток времени (доли секунды) происходит описанное выше закорачивание пластина реле. Сопротивление реле при этом падает почти до нуля, и ток, проходящий через оба электрода, резко возрастает, достигая нескольких сотен миллиамперов. Этот ток обычно превышает почти в два раза нормальный разрядный ток лампы. В результате электроды накаляются до весьма высокой температуры. Однако, и эта стадия продолжается доли секунды, ибо происходящее охлаждение электродов реле приводит к их выпрямлению и разрыву цепи. Теперь уже ситуация резко отличается от той, что была вначале. Электроды лампы благодаря тепловой инерции сохраняют свой накал, а, следовательно, обладают повышенной электронной эмиссией. Поэтому из двух параллельных разрядных промежутков — лампа и реле — лампа обладает теперь более низким потенциалом зажигания, чем реле и поэтому разряд вспыхивает в лампе, а не в реле. Если же по какой-либо причине лампа не зажглась — электроды лампы остывают и всё начинается сначала. Реле не «отстанет» от лампы, пока не произойдёт зажигание разряда в ней. Нужно сказать, что этот автоматизм работы реле, казавшийся сначала большим преимуществом, быстро стал крупным недостатком. Как только какая-либо лампа выходила из строя (дезактивировались электроды), начиналась своеобразная «сигнализация» — лампа начинала «мигать».

В больших цехах, где одновременно устанавливаются сотни и тысячи ламп, всегда может выйти из строя одна, две лампы. При таком «мигании» они резко бросаются в глаза, вызывая неприятный эффект, и кроме того, при длительной работе в режиме «мигания» сильно перегреваются дроссели. В результате длительной работы в США выпущены новые «немигающие» реле. Выпуск этих реле сопровождался шумной рекламой (они названы «революционизирующими»), но конструкция их пока не описана\*). Преимущество высоковольтных ламп состоит в отсутствии специальных устройств для зажигания. Высокое напряжение обеспечивает надёжное зажигание разряда.

### 15. СХЕМА ВКЛЮЧЕНИЯ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

Переходим к режиму нормального горения лампы. Как уже указывалось, падение на лампе при этом примерно в два раза ниже напряжения сети. Значит, последовательно с лампой должно быть включено балластное сопротивление, поглощающее эту разность напряжений. Балластное сопротивление кроме того ограничивает разрядный ток лампы. Без балластного сопротивления, из-за падающей характеристики разряда<sup>16</sup>, ток в лампе начал бы сразу после зажигания катастрофически возрастать и быстро разрушил бы электроды.

\*.) Есть описание только «немигающего» реле старого типа (см. книгу Амикк<sup>40</sup>).

Ясно, что делать балластное сопротивление чисто омически бесполезно, ибо это привело бы к превращению примерно половины подводимой мощности в джоулево тепло. Поэтому, в качестве балластного сопротивления используется дроссель, представляющий небольшую катушку медной проволоки, намотанной на железный сердечник. Конкретные конструкции дросселей для люминесцентных ламп весьма разнообразны и изготавляются десятками различных фирм. Присутствие дросселя облегчает зажигание ламп, так как благодаря его индуктивности в момент разрыва цепи реле возникает сильное перенапряжение.

Улучшение дросселей идет по линии снижения потерь мощности и уменьшения габаритов. Потери в дросселях колеблются от 30 до 160% мощности ламп. Применение дросселей вызывает резкое ухудшение коэффициента мощности (косинуса фи) установки. У самой лампы, как это следует из осциллограмм рис. 16, коэффициент мощности равен примерно 0,95, а у лампы с дросселем только 0,55. Поэтому приходится еще усложнять схему включения лампы, вводя ёмкость для компенсации сдвига фаз. Наибольшее распространение получили включающие устройства для 2, 3 и 4 ламп одновременно. На рис. 20 изображена схема такого устройства для двух ламп. Они более компактны и обладают меньшими потерями. В табл. 7 сведены характеристики наиболее распространенных типов включающих устройств.

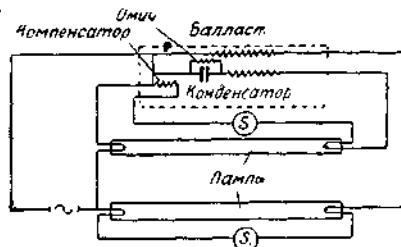


Рис. 20. Схема включения двух люминесцентных ламп. В цепи одной из ламп стоит конденсатор, создающий сдвиг фаз между лампами и улучшающий фактор мощности.

Таблица 7

Включающие устройства для люминесцентных ламп

Тип ламп	Потери в вт	Фактор мощности	Примечание
Для одной 15-ваттной . .	4,5	0,55	
» » 15- » . .	4,5	[0,90—0,95]	Дроссель
» двух 15-ваттных . .	9,0	0,55—1,00	Дроссель с конденсатором
» одной 20-ваттной . .	4,5	0,90—0,95	
» двух 20-ваттных . .	9,0	0,95—1,00	Дроссель с конденс.
» одной 40-ваттной . .	12	0,90—0,95	
» двух 40-ваттных . .	14,5	0,95—1,00	Дроссель с конденс.
» четырех 40- » . .	31,0	0,95—1,00	
» одной 100-ваттной . .	35,0	0,95—1,00	
» четырех 100-ваттных	64,0	0,95—1,00	

Интересно обратить внимание на то, что у более мощных ламп включающие устройства для двух и четырёх ламп имеют значительно меньшие потери (относительно), чем устройства для единичных ламп. Например, у 100-ваттной лампы 35 и 16 W (6434).

Наличие четырёх контактов у низковольтной люминесцентной лампы заставляет применять специальные патроны, причём для каждой лампы нужны 2 патрона. Около одного из патронов в специальном гнезде укрепляется реле тлеющего разряда. Для высоковольтных ламп также применяются специальные патроны, но более простой конструкции.

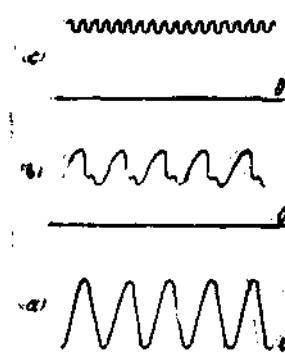


Рис. 21. Осциллограммы светового потока люминесцентных ламп.

а) одна лампа, б) две лампы со сдвигом фаз, в) три лампы на три фазы.

лампы, включённые на три разные фазы трёхфазного тока, дают из-за даже 40-ваттная лампа накаливания. Две лампы включены по схеме рис. 20. Одна лампа включена только с дросселем, другая с дросселем и ёмкостью, что создаёт сдвиг по фазе одной лампы по отношению к другой, и обе лампы дают вместе достаточно сглаженную кривую. При этом фактор мощности близок к единице.

В некоторых специальных случаях (на железнодорожном транспорте) люминесцентные лампы применяются в цепях постоянного тока<sup>48</sup>. Тогда, естественно, приходится вводить омическое сопротивление, роль которого обычно выполняют лампы накаливания. Ясно,

включающие устройства на две и более ламп дают возможность устраниить один недостаток люминесцентных ламп, так как из-за недостаточной инерционности люминофоров они создают сильные стробоскопические эффекты. На рис. 21 в одном масштабе изображены кривые изменения по времени светового потока ламп накаливания и люминесцентных. В табл. 8 приведены количественные данные для глубины модуляции светового потока за период переменного тока<sup>47</sup>.

В табл. 8 колебания светового потока 200-ваттной лампы накаливания условно приняты за единицу. Три люминесцентные

Таблица 8

Колебания светового потока ламп за период переменного тока

Лампа накаливания 100 . . . . .	1 .
Три люминесцентные лампы на три фазы . . . . .	3
Лампа накаливания 40 . . . . .	7
Две белые люминесцентные лампы . . . . .	9
Две дневные люминесцентные лампы . . . . .	10
Одна белая люминесцентная лампа . . . . .	19
Одна дневная люминесцентная лампа . . . . .	21

что в этих случаях экономичность установок с люминесцентными лампами оказывается сниженной. Имеются отрывочные указания на то, что в США построены люминесцентные лампы без балластного сопротивления, но нет данных об их экономичности и сроке службы.

### 16. СВЕТОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

Рассмотрим подробнее световые характеристики люминесцентных ламп. На рис. 22 в виде подробной диаграммы представлен весь баланс энергии 40-ваттной люминесцентной лампы. Из этой диаграммы следует, что в люминесцентной лампе 18,5% подводимой мощности преобразуется в видимый свет, т. е. энергетический кпд люминесцентной лампы примерно в полтора раза выше, чем у 100-ваттной лампы накаливания (см. табл. 1). Однако, это увеличение энергетического кпд не является единственной и, пожалуй, даже не главной причиной высокой экономичности люминесцентных ламп. В табл. 9 приведены световые характеристики люминесцентных ламп, со всей отчётливостью подтверждающие это обстоятельство.

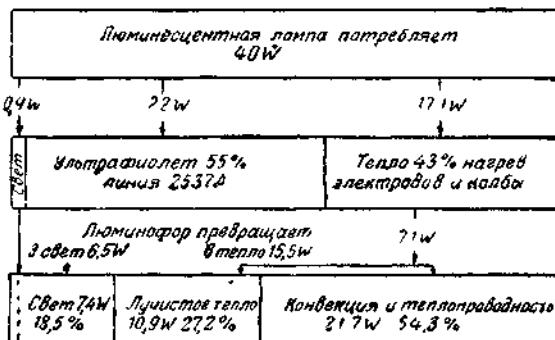


Рис. 22. Баланс энергии 40-ваттной люминесцентной лампы.

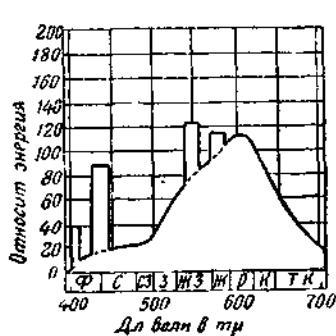


Рис. 23. Распределение энергии в спектре белой лампы. Площадь прямоугольников изображена в соответствующем масштабе энергии линий ртутного спектра.

крайне белой, дневной и мягко-белой люминесцентных ламп. Для получения таких спектральных кривых приходится применять смеси

Мы видим, что светоотдача белых 40-ваттных ламп достигает  $52.5 \text{ лм/вт}$ , что в 3,4 раза превышает световую отдачу 100-ваттной лампы накаливания ( $15.5 \text{ лм/вт}$ ). Светоотдача зелёных ламп достигает  $75 \text{ лм/вт}$ . Эти цифры показывают, какое огромное значение имеет распределение энергии уже в пределах видимого спектра. Основной причиной высокого светового кпд белых люминесцентных ламп является выгодное распределение энергии в видимой части их спектра. На рис. 23, 24 и 25 изображены спектральные

Таблица 9

## Светоотдача люминесцентных ламп

Цвет лампы	Мощность в вт	6		8		14		15		20		30		40		65		100	
		Световой поток в лм	Светоотдача в лм/вт																
Белый . . . . .	180	30	300	37,5	450	33	615	41	900	45	1450	49	2100	52,5	2100	32	4200	42	
Дневной . . . . .	155	26	250	31	370	26,5	495	33	730	36,5	1200	40	1700	42,5	1800	27	3350	33,5	
Мягко-белый . . . . .					325	23	435	29	640	32	1050	35	1500	37					
Синий . . . . .						315	21	460	23	780	26								
Зелёный . . . . .						900	60	1300	65	2250	75								
Розовый . . . . .						300	20	440	22	750	25								
Золотистый . . . . .						375	25	540	27	930	31								
Красный . . . . .						45	3	60	3	120	4								

люминофоров, описанных в разделе 9. Например, в белой лампе используется в качестве основного люминофора цинк-бериллий силикат и к нему добавлены небольшие количества бората-кадмия и вольфрамата магния<sup>47</sup>. В дневной лампе процент люминофоров с голубым свечением значительно выше, чем в белых лампах. К сожалению, для смесей люминофоров не выполняются обычные законы смешения<sup>48</sup>, поэтому подбор смесей ведётся чисто эмпирически.

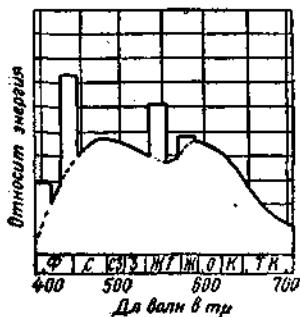


Рис. 24. Распределение энергии в спектре дневной лампы.

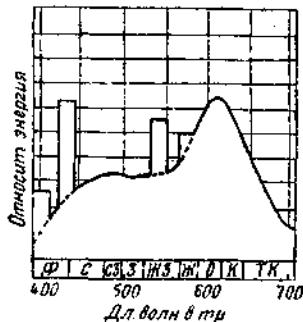


Рис. 25. Распределение энергии в спектре мягко-белой лампы.

Ф. Бутаева<sup>26</sup> подсчитала средние коэффициенты видности для спектральных кривых белой и дневной ламп. Оказалось, что для белой лампы этот коэффициент равен 0,50, а для дневной 0,44, световой кпд излучения 310 и 245 лм/вт. Для 100-ваттной лампы накаливания тот же коэффициент равен всего лишь 0,21. Объясняется это тем, что у белых и дневных люминесцентных ламп гораздо большая доля энергии сосредоточена в центральной части видимого спектра, соответствующей максимуму чувствительности человеческого глаза. Различие в светоотдачах белой и дневной ламп объясняется спектральными характеристиками. Мягко-белые лампы, дающие более приятный свет, обладают значительно меньшей светоотдачей, как раз благодаря тому, что у них искусственно снижена центральная часть спектральной кривой. Наоборот, колоссальная светоотдача зелёной лампы частично объясняется тем, что всё излучение этой лампы (содержащей  $ZnSiO_3$ ) сосредоточено в узкой области, близкой к максимуму чувствительности глаза.

Выбор форм спектральных кривых для люминесцентных ламп определялся колориметрическими соображениями. Лампа дневного света подгонялась к источнику С (см. раздел 2). Лампа белого света примерно соответствует цветовой температуре 3500°К.

На рис. 26 изображены на равноконтрастном графике цвета тест-объектов при освещении люминесцентными лампами ГЕС и ВЭИ. Точки  $C_1$ ,  $C_2$  и т. д. соответствуют цветам тест-объектов при освещении эталонным источником  $C_5$ .

В табл. 10  $x$  и  $y$  — цветовые координаты,  $\rho$  — коэффициент отражения тест-объектов. Наиболее важными являются величины  $\Delta S$ .

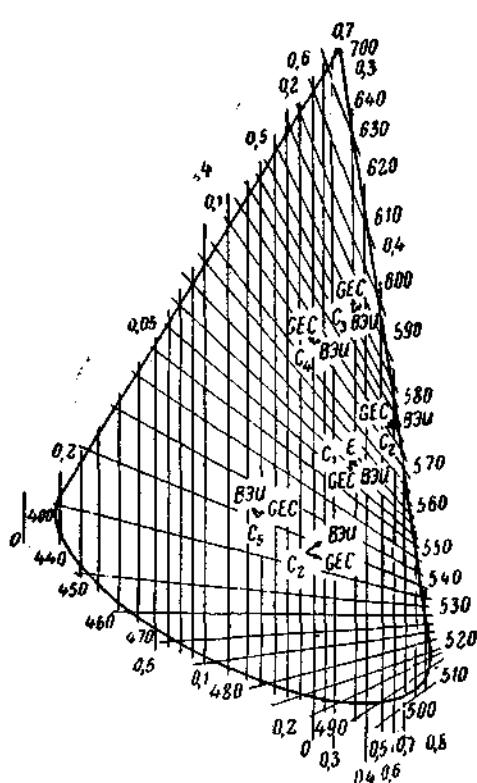


Рис. 26. Цветопередача при освещении люминесцентными лампами дневного света.

дающие в числе порогов изменённые цвета тест-объекта. Мы видим, что  $\Delta S$ , т. е. искажения цветопередачи при освещении люминесцентными лампами дневного света, не превышают одного-двух порогов. Коэффициенты отражения почти не изменяются. Таким образом, люминесцентные лампы дневного света практически совпадают по своим колориметрическим характеристикам с источником  $C$  и дают действительно настоящий дневной свет, а белые люминесцентные лампы дают свет, несравненно более белый, чем лампы накаливания.

## 17. ПРИМЕНЕНИЕ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

При практическом применении экономичность установок характеризуется цифрами более низкими, чем приведённые в табл. 9.

## Колориметрические характеристики люминесцентных ламп дневного света

Тест-объекты		Источник С			Лампа ГЕС				Лампа ВЭИ № 5-6			
№	Цвет	$x_0$	$y_0$	$\rho_0$	$x$	$y$	$\Delta S$	$\rho$	$x$	$y$	$\Delta S$	$\rho$
1	Белый	0,310	0,316	1,0	0,311	0,327	0,3	1,0	0,316	0,336	0,9	1,0
2	Жёлтый	0,458	0,461	0,58	0,460	0,449	0,7	0,62	0,476	0,488	0,7	0,61
7	Красный	0,546	0,320	0,14	0,555	0,323	0,7	0,15	0,552	0,324	0,6	0,14
9	Малиновый	0,382	0,208	0,14	0,378	0,195	1,0	0,15	0,391	0,214	0,6	0,14
13	Синий	0,200	0,144	0,12	0,206	0,150	0,7	0,11	0,206	0,141	0,7	0,11
15	Голубой	0,188	0,221	0,20	0,188	0,262	2,1	0,19	0,200	0,254	1,8	0,19
22	Зелёный	0,201	0,514	0,21	0,222	0,485	1,3	0,21	0,234	0,508	1,7	0,21

Объясняется это тем, что необходимо учесть потери во включающем устройстве и определять светоотдачу, как отношение светового потока ко всей мощности, потребляемой установкой. Тогда мы получим данные, сведённые в табл. 11.

Таким образом, несмотря на указанную поправку, светоотдача установки с 40-ваттными белыми люминесцентными лампами достигает 44 лм/вт, т. е. почти в три раза превышает светоотдачу 100-ваттных ламп накаливания. Разница настолько велика, что становится понятным, какой грозный конкурент появился у лампы накаливания. Нужно сказать, что кроме высокой экономичности и цветности люминесцентные лампы обладают ещё рядом серьёзных преимуществ по сравнению с лампой накаливания. Для целей общего освещения больших помещений (цехов заводов, общественных зданий) положительным качеством люминесцентных ламп является их низкая поверхностная яркость. Вместо сотен стильбов у нити лампы накаливания люминесцентная лампа имеет яркость от 0,15 до 0,75 стильба. Поэтому люминесцентные лампы не оказывают слепящего действия на глаза и могут применяться в открытых корытообразных арматурах<sup>49</sup>. В США широко распространены осветительные установки с люминесцентными лампами. Обычно из ламп образуют сплошные светящиеся линии, создающие равномерное рассеянное освещение<sup>50</sup>.

Таблица 11

Светоотдача установок с люминесцентными лампами в лм/вт

Цвет	Мощность в вт	15 20 40 100			
		15	20	40	100
Белый . . . .	32	37	44	36	
Дневной . . . .	25	29	36	29	
Мягко-белый . .	22	26	31	—	

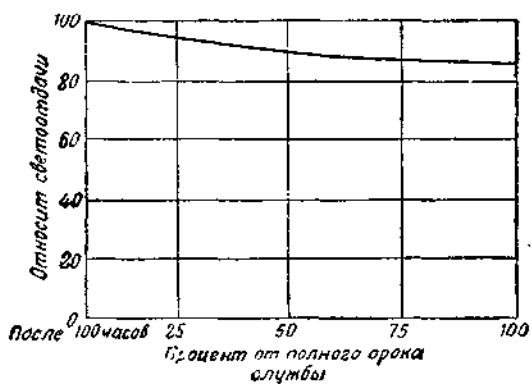


Рис. 27. Спад светоотдачи в течение срока службы лампы.

сов светоотдача падает довольно сильно — на 10%, в дальнейшем светоотдача снижается весьма медленно. На рис. 27 изображена

Далее, серьёзным преимуществом люминесцентных ламп является их большой срок службы — 2500—3000 часов для низковольтных ламп и 10000 часов для высоковольтных.

Между прочим, данные о светоотдаче ламп в табл. 9 приведены после первых 100 часов горения. За эти 100 ча-

кривая спада светоотдачи со временем службы люминесцентной лампы<sup>51</sup>.

Иногда возникает вопрос, не вызывает ли применение люминесцентных ламп повышения расхода таких дефицитных материалов, как медь и другие металлы. В США во время войны этот вопрос встал особенно остро. На первый взгляд кажется, что необходимость применения включающих устройств безусловно должна привести к большему расходу меди, чем в случае ламп накаливания. Однако, расчёт, произведённый Кэверли<sup>52</sup>, показал, что это не так. В табл. 12 приведены результаты этого любопытного расчёта. Из

Таблица 12

Расход меди и стали при освещении люминесцентными лампами и лампами накаливания

Тип установки	Генератор — распредел. сеть		Установка		Полный расход	
	Медь (кг)	Сталь (кг)	Медь (кг)	Сталь (кг)	Медь (кг)	Сталь (кг)
Лампа накаливания (2,5-500 Вт) в рассеивающей арматуре . . .	65	465	0	14	65	479
Люминесцентная лампа . . . . .	26	184	4	25	51	209
Полная экономия . . . . .	—	—	—	—	14	270

табл. 12 прежде всего видно, что наибольшие количества меди и стали расходуются на самой электростанции в генераторах и в распределяющих электроэнергию сетях. Поэтому снижение расхода электроэнергии (при той же освещённости) приводит к такой большой экономии этих материалов (за счёт уменьшения мощности генераторов и уменьшения сечения проводов), что эта экономия с избытком перекрывает возрастание расходов материалов на саму осветительную установку. В результате, как это ни парадоксально, получается даже некоторая общая экономия меди и стали. Мы не можем здесь останавливаться на вопросах стоимости освещения люминесцентными лампами, но они, несмотря на их относительно высокую стоимость, быстро окупаются и потом дают экономию<sup>53</sup>. В заключение настоящего раздела, приведём некоторые статистические данные о распространённости отдельных типов люминесцентных ламп.

По спектральному составу наибольшее распространение имеют белые лампы (65%), 30% всех установленных ламп составляют дневные, остальные цвета — 5%<sup>54</sup>. Объясняется такое соотношение более высокой экономичностью белых ламп и их более приятными цветовыми свойствами. Лампы дневного света, главным образом, применяются там, где важна точная цветопередача. Мягко-белые

лампы дают очень приятный свет, но их широкое применение ограничено сравнительно низкой светоотдачей.

Имеются также характерные данные о потреблении люминесцентных ламп различных мощностей. Естественно, что наиболее распространёнными являются 40-ваттные лампы, составляющие примерно 70%, затем идут 20-ваттные — 20%, остальные типы — 10%.

## 18. ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО УЛУЧШЕНИЯ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМП

Несмотря на свои огромные преимущества по сравнению с лампами накаливания, люминесцентные лампы, конечно, не лишены некоторых недостатков. Кроме того, сами преимущества люминес-

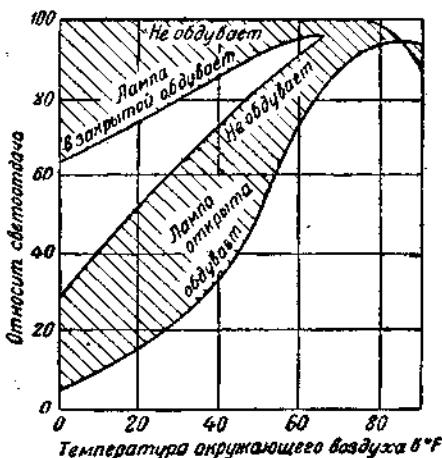


Рис. 28. Светоотдача люминесцирующей лампы в зависимости от температуры окружающего воздуха. Обдувание вызывает снижение температуры стенок. Наоборот, заключение лампы в герметическую арматуру повышает температуру стенок.

центных ламп могут быть значительно усилены при их дальнейшем усовершенствовании.

Можно без особого преувеличения сказать, что люминесцентная лампа образца 1943 г. так относится к люминесцентной лампе будущего, как угольная лампа к биспиральной газополой лампе накаливания. Ведь мы присутствуем при самой первой стадии развития люминесцентных ламп. Поэтому особенно важно представить себе, хотя бы в общей форме, те принципиальные пути, идя по которым можно будет достигнуть значительного улучшения характеристик люминесцентных ламп. Естественно, что многое в этой области ещё неясно и весьма дискуссионно. Основной недостаток обычных люминесцентных ламп — это чувствительность к внешней температуре. На рис. 28 изображена светоотдача лампы в зависимости от

внешней температуры. Такая зависимость вполне естественна, так как внешняя температура сильно влияет на температуру стенок лампы. Оптимальная внешняя температура соответствует 25° С.

При снижении внешней температуры на 1° С световой поток лампы снижается примерно на 1,5%. При температурах ниже 0° С вымораживается ртуть, и лампы плохо зажигаются. Делались попытки приспособить обычные люминесцентные лампы для работ при низких температурах путём понижения давления аргона<sup>47</sup>. Однако, эти попытки приводят к заметному снижению светоотдачи и срока службы. Для построения люминесцентных ламп, работающих при любых температурах, целесообразно было бы отказаться от использования ртути. Лампы, наполненные только инертным газом, обладали бы нужными температурными свойствами, но эксперименты, проведённые с инертными газами целым рядом исследователей (Дженкинс Фонда и др.<sup>55</sup>), пока дали весьма неутешительные результаты в смысле светоотдачи. Основной причиной, ограничивающей светоотдачу люминесцентных ламп, считают невыгодное соотношение между длиной волны возбуждающего излучения и длинами волны люминесценции. Как известно, резонансное излучение инертных газов лежит в пределах от 584 Å для гелия до 1469 Å для ксенона.

Если считать, что в лучшем случае на каждый квант возбуждающего излучения получается один квант излучения люминесценции, то энергетический выход люминесценции при возбуждении шумановской областью должен лежать в пределах примерно от 0,10 до 0,30 (считая среднюю длину волны люминесценции равной 5000—6000 Å). Справедливость квантового закона выхода люминесценции, впервые высказанного и установленного С. И. Вавиловым, была проверена экспериментально для целого ряда жидких и твёрдых люминофоров<sup>56</sup>.

Невозможность «размена» одного «крупного» коротковолнового кванта на два и более «мелких» квантов сильно снижает принципиальный предел для светоотдачи даже обычных люминесцентных ламп, использующих ртутные линии 1850 и 2537 Å. В них энергетический выход люминесценции не может, согласно этому закону, заметно превышать примерно 0,5. Тэйер и Бернс<sup>28</sup> произвели соответствующие подсчёты и измерения для 1,5-ваттных ламп 2,5 см диаметра, покрытых различными люминофорами. Максимальная возможная светоотдача  $E_M$  подсчитывалась следующим образом:

$$E_M = 621CR \times 0,45 \times 0,90 = 251CR \text{ лм/вт}, \quad (2)$$

где 621 — число люменов на ватты лучистой энергии для 5560 Å,  $C$  — коэффициент видности излучения люминесценции, определяемый из спектральной кривой,  $R$  — квантовое отношение — усреднён-

ное отношение энергии кванта люминесценции к энергии возбуждающего кванта, 0,45 — доля мощности лампы, превращаемая в линию 2537, 0,90 —  $\eta$  — кпд рассеивающего слоя лампы (см. раздел 10).

В табл. 13 приведены результаты расчётов и измерений Тэйера и Бернса. Они почему-то не выполнили тех же подсчётов для практически интересных случаев белой и дневной ламп. Такие расчёты по формуле (2) были сделаны Ф. Бутаевой<sup>28</sup> и дали следующие результаты: для белой лампы 50 лм/вт, для дневной лампы 55 лм/вт.

Однако, эксперименты Ф. Бутаевой<sup>29</sup> с фильтром, отрезающим линию 1850 Å, проведённые уже внутри люминесцентной лампы

Таблица 13

Определение квантового выхода для люминофоров путём сравнения расчётов и измерений 15-ваттных ламп

Люминофор	Коэффициент видности <i>C</i>	Квантовое отношение <i>R</i>	Вычислённая светоотдача <i>E<sub>M</sub></i>	Наилучшая измеренная светоотдача *)	Квантовый выход	Энергетический выход
CaWO <sub>4</sub>	0,21	0,58	30	21	0,70	0,41
MgWO <sub>4</sub>	0,37	0,53	50	35	0,70	0,37
ZnSiO <sub>3</sub>	0,78	0,48	95	70	0,74	0,36
(Zn, Be)SiO <sub>3</sub>	0,55	0,43	60	32	0,53	0,23
CdSiO <sub>3</sub>	0,58	0,42	55	30	0,55	0,24
CdB <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0,34	0,41	35	23	0,66	0,27

(люминофором было покрыто маленькое пятнышко на стенке, которое закрывалось фильтром, см. раздел 9), показали, что кроме линии 2537 Å в возбуждении люминофоров примерно в равной мере участвует линия 1850 Å. Отсюда следует, что формула (2) для расчёта *E<sub>M</sub>* неверна и приведённые в табл. 13 значения предельных светоотдач значительно преуменьшены. Значения квантового выхода, наоборот, завышены примерно в два раза, так как при расчётах учитывалась только линия 2537 Å, а измерялась по существу суммарная яркость люминофора, вызванная обеими линиями 2537 и 1850 Å. К сожалению, пока неизвестна интенсивность линии 1850 Å, нельзя точно рассчитать принципиальный предел светоотдачи для люминесцентных ламп с ртутными парами.

\*) При измерениях исключалось излучение самого разряда, дающее 4 лм/вт.

Во всяком случае, согласно закону квантового выхода эта светоотдача не может превышать  $621 C \times R$ , т. е. для белых ламп 128 лм/вт, а для дневных 134 лм/вт.

Такие светоотдачи получились бы при 100%-ном превращении мощности в линию 2537 Å и при квантовом выходе люминесценции, равном единице. Эти светоотдачи весьма высоки, но всё же значительно меньше 220 лм/вт для идеального источника света (см. раздел 3).

Напомним, что при этом средний коэффициент видности у белых ламп почти в полтора раза выше, чем у «идеального источника» (см. раздел 3), благодаря заметным отклонениям спектральной кривой белой лампы от спектральной кривой температурного излучателя.

Возникает невольно вопрос, не могут ли быть отклонения от закона «квант на квант», т. е. не может ли наблюдаться «размен» крупных квантов на несколько мелких. При оптическом возбуждении люминесценции паров натрия такой «размен» квантов, как известно, наблюдается<sup>60</sup>. При возбуждении линии в 3302,34—94 пары натрия испускают три линии 22057—84, 11382—11404 и 5889,96 и 5895,93. При возбуждении атомы натрия подымаются на уровень  $4^2P_{3/2}$ , переходя с этого уровня на уровень  $4^2S_{1/2}$ , испуская линию 22057—22084, затем с  $4^2S_{1/2}$  на  $3^2P_{1/2, 3/2}$ , испуская линию 11382—11404 и, наконец, с уровня  $3^2P_{1/2, 3/2}$  на уровень  $3^2S_{1/2}$ , испуская линию 5889,96—5895,93 (рис. 29).

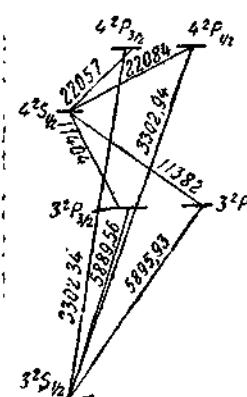


Рис. 29. Схема «размена» квантов при флуоресценции паров натрия.

Возможно, что будут созданы люминофоры (особенно с участием редких земель), обладающие аналогичными свойствами. Это сразу резко подымет принципиальную границу светоотдачи люминесцентных ламп и сделает реальным создание безрутутных люминесцентных ламп с большой светоотдачей.

Наконец, необходимо упрощение схемы включения ламп. Несмотря на всё остроумие принципа действия реле, сложность схемы включения безусловно является недостатком люминесцентных ламп. Здесь перспективным является развитие лампы с холодными электродами. Как будто бы есть надежды на создание электродов с большой холодной эмиссией электронов \*).

<sup>\*)</sup> В американских журналах появились сообщения о новом включающем устройстве, разработанном в трансформаторной лаборатории ДЖИИ. Новое устройство зажигает лампы без реле, но при этом лампы старого типа быстро выходят из строя. С 1 мая 1944 г. начат массовый выпуск 40-ваттных ламп нового типа с нормальным сроком службы при работе с новым включающим устройством.

## ДОПОЛНЕНИЕ 1. УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ ЛАМПЫ

Во время войны были выпущены совершенно своеобразные люминесцентные лампы, дающие, главным образом, невидимые ультрафиолетовые лучи. Сначала ультрафиолетовые люминесцентные лампы изготавливались в виде длинных узких трубочек на переменный ток напряжением 120 V, затем эти лампы приняли вид колб, вроде изображённой на рис. 30, и рассчитаны на питание постоянным током с напряжением 24—26 V<sup>61</sup>. Кроме конструкции претерпел также изменение и люминофор, нанесённый на стекле лампы. В старом типе, очевидно, использовался вольфрамат-кальция, тогда как в новых лампах применён специальный люминофор 360 B, обладающий максимумом излучения на длине волны 3650 Å (рис. 31). Ультрафиолетовые лампы применяются с чёрным фильтром Вуда, хорошо пропускающим длинноволновой ультрафиолет в районе 3650 Å и полностью поглощающим видимое излучение. Сочетание ультрафиолетового люминофора с фильтром Вуда даёт возможность создать прекрасный источник излучения для возбуждения лю-

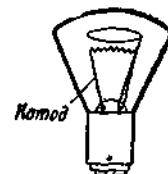


Рис. 30. Ультрафиолетовая люминесцентная лампа постоянного тока 24 V.

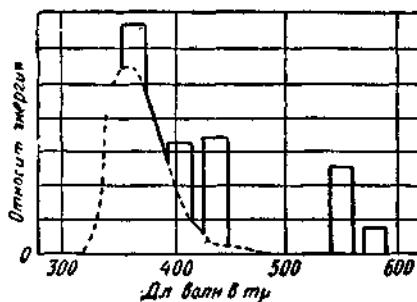


Рис. 31. Распределение энергии в спектре ультрафиолетовой люминесцентной лампы.

минофоров, нанесённых на шкалы приборов самолёта. При этом отсутствуют всякие блики от приборных стекол, так как возбуждающая лампа практически не даёт видимого света. При использовании ультрафиолетовых люминесцентных ламп уже имеют место две последовательные трансформации излучения. Сначала в самой лампе коротковолновой ультрафиолет разряда превращается люминофором 360 B в длинноволновой ультрафиолет, а затем этот ультрафиолет, попадая на люминесцирующие надписи, превращается в видимое излучение. Как показывают измерения, несмотря на такую двойную трансформацию, применение люминесцентных ультрафиолетовых ламп весьма эффективно.

## ДОПОЛНЕНИЕ 2.

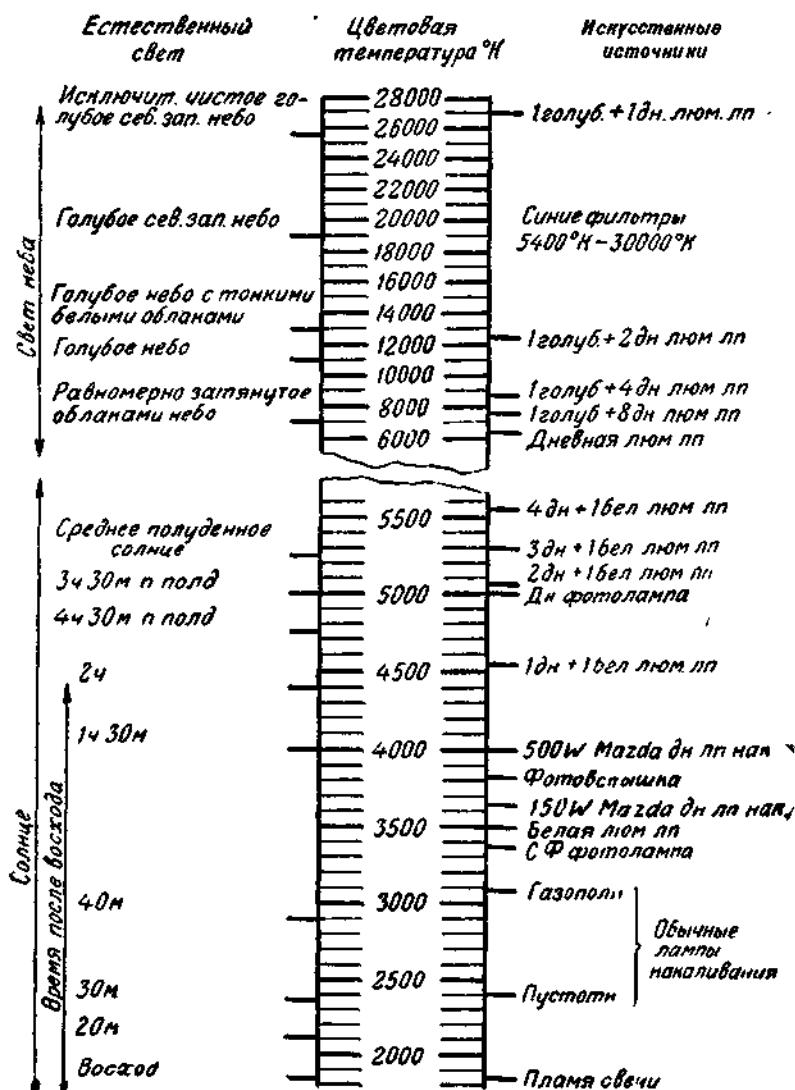


Рис. 32 (дополнение 2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Hibben, J. E. S. Trans., **34**, 855, 1939.
2. Б. Федоров, Общий курс светотехники, 2 изд., М.—Л., 1944.
3. L. Ickis, H. Naupes, G. E. R., **42**, 145, 1939; *Metropolitan Vickers Gazette*, **20**, 342, 1943.
4. Н. Т. Федоров, Общее цветоведение, М., 1939.
5. D. Nickerson, J. E. S., Trans., **34**, 1233, 1939. Е. С. Ратнер и Д. А. Шкловер, Бюлл. ВЭИ, **5**, 35, 1941. A. Taylor, III. Eng., **35**, 625, 1940.
6. D. Indd, JOSA, **22**, 65, 1932.
7. А. П. Иванов, Электрические источники света, ч. 1, М.—Л., 1938.
8. F. Mohler, JOSA, **29**, 152, 1939.
9. T. Kollian, JOSA, **28**, 49, 1938.
10. A. Бесцвегель, Ann. de phys. et chim., **55**, 93, 1859; *La Lumière*, Paris, 1867.
11. Р. Вуд, Физическая оптика, М.—Л., 1936.
12. G. Claude, C. R., Paris, **203**, 1203, 1936, **207**, 1206, 1938.
13. J. Randall, Journ. Roy. Soc. Arts, **135**, 4398, 1937.
14. Электронные и ионные приборы, ГЭИ, М.—Л., 1940, стр. 217.
15. W. Elenbaas, Physica I, **211**, 678, 1934; 2, 45, 1935; De Ingenieur, **50**, 83, 1935.
16. Д. А. Рожанский, Физика газового разряда, М.—Л., 1937.
17. M. Druyvesteyn, F. Rennig, Rev. Mod. Phys., **12**, 1940.
18. W. Rennig, Phys. Rev., **39**, 467, 1932.
19. F. Arnot, G. Baines, Proc. Roy. Soc., **151**, 256, 1935; P. Bricout, Journ. d. Phys., **9**, 88, 1928.
20. В. Фабрикант, И. Цир, ДАН, **16**, 279, 1937.
21. К. И. Паневкин, ЖЭТФ, **9**, 1007, 1939.
22. M. Druyvesteyn, N. Warmoltz, Phil. Mag., **17**, 1, 1934.
23. В. Фабрикант, ДАН, **15**, 451, 1937.
24. В. Фабрикант, ЖЭТФ, **8**, 549, 1938; M. Townsend, Tr. AJEE, **61**, 607, 1942.
25. C. Fonda, E. Neupelly, Доклад на 34-м годовом собрании Амер. об-ва инжен. светотехн., 1940.
26. Ф. Бугаева, ДАН, **27**, 654, 1940.
27. J. Marden, N. Beese, G. Meister, JOSA, **30**, 184, 1940.
28. R. Thayer, B. Barnes, JOSA, **29**, 131, 1939.
29. Ф. Бугаева и В. Фабрикант, Изв. АН СССР, сер. физич., 1944.
30. A. Oday, R. Cissel, J. E. S. Trans., **34**, 1165, 1939.
31. N. Beese, JOSA, **29**, 278, 1939; J. Marden, N. Beese, III. Eng., **36**, 235, 1941.
32. Ф. Бугаева, Техн. отчёт ВЭИ, 1944; ЖТФ, 1945 (готов. для печати).
33. J. Marden, G. Meister, J. E. S. Trans., **34**, 503, 1939.
34. В. И. Долгополов, Бюлл. ВЭИ, № 5, 29, 1941.
35. Kräger, Диссертация 1940 (Голланд.).
36. G. Fonda, J. Phys. Chem., **43**, 564, 1939.
37. Ф. Зейтц, Р. Джонсон, Успехи физич. наук, **29**, 89, 1940.  
N. Mott, R. Gurney, *Electronic Process in ionic crystals*, Oxford, 1940.  
H. Leverenz, Pr. J. R. E., **32**, 256, 1933. В. Левшин, В. Антонов-Романовский и Д. Блохинцев, Изв. АН СССР, сер. физич., 1944 (в печати).
38. J. Marden, G. Meister, III. Eng., **36**, 1286, 1941.
39. Ф. Бугаева, В. Долгополов и В. Фабрикант, Изв. АН СССР, сер. физич., 1944 (в печати).
40. C. Amick, *Fluorescent Lighting Manual*, Mc. Graw Hill, N. Y., 1942.
41. E. Beggs, *Lighting a. Lamps*, **42**, N. 5, 18, 1942.
42. K. Channou, K. Batt, III. Eng., **37**, 769, 1942; W. Phillips, *Electrical*

- Wordl, Apr., 17, 62, 1943; A. Ban, C. Cutler, Electrical Wordl, May, 1, 38, 1943; J. Sabatini, Ill. Eng., 38, 171, 1943.
43. D. Caverly, Ill. Eng., 38, 133, 1943.
44. J. Marden, G. Meister, J. E. S. Trans., 34, 1095, 1939.
45. R. F. Hays, D. Gustin, J. E. S. Trans., 35, 939, 1940.
46. R. Hays, Electronics, 13, 14, 1940; El. Eng., 60, 226, 1941.
47. E. Beggs, Lighting a. Lamps, 42, N. 4, 14, 1942; R. Neumann, Electronic Engineering, 16, 202, 1943.
48. Railway, Electr. Eng., 31, 135, 1940.
49. W. Potter, W. Darley, Ill. Eng., 35, 759, 1940; F. Winkler, Ill. Eng., 37, 220, 1942; D. Severance, ibid., 38, 49, 1941; R. Douglas, D. Adams, Ill. Eng., 38, 141, 1943.
50. G. Taylor, Ill. Eng., 36, 1414, 1941; W. Brown, Mag. Light, 5, 20, 1941; K. Frank, Ill. Eng., 37, 217, 1942; M. Luckiesh, F. Moss, Ill. Eng., 37, 81, 1942 (общие сведения); R. Ackerley, Electr. Eng., 63, 203, 1943 (английск.); E. Cleaver, India Rubber World, 102, 33, 1940 (резина); R. Hays, El. Eng., 60, 539, 1941; Ill. Eng., 36, 570, 1941 (самолёты); I. Long, Rayon, Textil Monthly, 22, 179, 1941; G. Taylor, Cotton, 105, 105, 1941; D. Caverly, Ill. Eng., 36, 489, 1939 (текстиль); E. Derrah, G. E. R., 46, 593, 1943; Steel, 106, 42, 1940; Lighting Rev. Dec., 19, 1942 (авиаприборы); R. Blain, Telephony, 120, 9, 1941; B. Durden, Telephon Eng., 45, 23, 1941 (телеф. станции); El. World, 120, 77, 1943 (метро); Power, Plant. Eng., 42, 67, 1942 (ж. д.), Architect. Record, Apr., 69, 1943 (безоконный артил. завод); Mag. Light, I, 13, 1943 (подземные заводы); El. Times 102, 30, 1942 (картины галлерен).
51. C. Amick, loc. cit.
52. D. Caverly, Ill. Eng., 38, 133, 1943.
53. B. Greenberg, Ill. Eng., 37, 165, 1942; Lighting a. Lamps, 41, 19, 1943.
54. P. S. Miller, Electrical Eng., 63, 126, 1944.
55. G. Fonda, H. Huthsteiner, JOSA, 32, 156, 1942.
56. S. I. Vavilov, ZS. Physik, 42, 311, 1927; В. Фабрикант, Сow. Phys., 3, 567, 1933; G. Harrison, P. Leighton, Phys. Rev., 38, 5, 1932; Соломкин, ДАН, 1941.
57. C. Christensen, G. Rollefson, Phys. Rev., 34, 1157, 1929.
58. Ill. Eng., 39, 235, 1944; Lighting a. Lamps, Apr. 1944.
59. E. Beggs, JOSA, 33, 61, 61, 1943; G. E. R. Jan., 1942.

### Обзоры

1. С. И. Вавилов, Изв. АН СССР, сер. физич., 1941.
2. А. Морин, Амер. Техн. и Пром., 19, № 1—2, 31, 1942.
3. Н. И. Черноусов, Электричество, 1944.
4. С. Amick, Fluorescent Lighting Manual, Mc Graw Hill, N. Y., 1942.
5. P. S. Miller, Electrical Engineer, 63, 126, 1944.
6. L. Davis, H. Ruff a. W. Scott, J. J. E. E. (London) 89, 447, 1942, (англ. люмин. лампы).
7. R. Neumann, Electronic Engineering, 16, 154, 202, 1943 (историч. очерк).

## ВЫРЫВАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

П. И. Лукирский

## 1. СИЛА ТОКА ЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ

Уже давно было показано на опыте, что между двумя электродами, находящимися в совершенном вакууме, возникает электрический ток, если между ними создать сильное электрическое поле.

Подробно и тщательно это явление было изучено в работах Милликэна и Камерона, которые показали, что ток между электродами не может быть обусловлен ионизацией остатков газа в приборе. Источником тока являются электроны, вырванные электрическим полем из тех точек катода, в которых градиент электрического поля имеет наибольшее значение. Наблюдаемое явление не зависит от температуры катода и происходит при любой низкой температуре, поэтому часто оно носит название «холодного» испускания электронов. Современные представления о природе металлов дают изящное квантово-механическое объяснение этому явлению, развитое в теории Фаулера и Нордгейма<sup>1</sup>. При температуре абсолютного нуля в металле существует распределение энергии, ограниченное максимальной энергией  $W_f$ . На границе металл—вакуум имеется потенциальный барьер, верхняя граница которого расположена на величину  $\phi_0$  (рис. 1) выше, чем наибольшее значение энергий при температуре абсолютного нуля. Эта величина  $\phi_0$  носит название работы выхода. Без наличия электрического поля эмиссия невозможна. Если же вблизи поверхности металла создать сильное электрическое поле, то форма потенциального барьера будет иметь вид, изображённый на нашем рисунке. Электроны металла, хотя их кинетическая энергия меньше высоты барьера, всё же могут пройти «сквозь» него и дать ток. Сила этого тока будет в общем виде равна

$$i = \int_0^{\infty} N(W) D(W, F) dW, \quad (1)$$

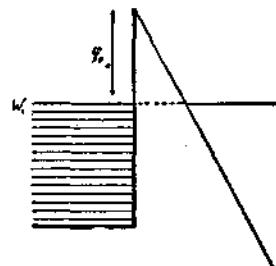


Рис. 1.

где  $N(W)$  — распределение электронов внутри металла по нормальным составляющим энергии  $W$ , а  $D(W, F)$  — коэффициент проникновения электронов через барьер — функция как энергии электронов, так и величины электрического поля  $F$ . Фаулер и Нордгейм вычислили вероятность  $D(W, F)$  проникновения через барьер и соответственно нашли для силы тока выражение

$$i = 6,2 \cdot 10^{-6} \frac{W_i^{1/2}}{(W_i + \varphi_0)^{1/2}} F^2 e^{-\frac{6,85 \cdot 10^7}{F} \varphi_0^{3/2}} \text{ амп см}^{-2}, \quad (2)$$

где  $F$  — поле в вольтах на сантиметр, а  $\varphi_0$  и  $W_i$  — в электронвольтах. Эта основная формула Фаулер-Нордгейма выведена ими в предположении, что на границе металла существует прямолинейный потенциальный барьер. Считая, что форма барьера обусловлена наличием сил электрического изображения, Нордгейм<sup>2</sup> для такого барьера получил исправленное выражение

$$i = 6,2 \cdot 10^{-6} \frac{W_i^{1/2}}{(W_i + \varphi_0) \varphi_0^{1/2}} F^3 e^{-\frac{6,85 \cdot 10^8 \cdot \varphi_0^{3/2}}{F}}, \quad (3)$$

где  $\theta = \theta \left( \frac{3,62 \cdot 10^{-4} \sqrt{F}}{\varphi_0} \right)$  — функция, изменяющая своё значение от нуля до единицы при изменении поля от  $\infty$  до нуля. При полях, меньших  $10^7 \text{ V см}^{-1}$ , она очень близка к единице. Эта функция табулирована.

Как показывают формулы (2) и (3), сила тока, испускаемого металлом под влиянием электрического поля, в сильной степени зависит от величины работы выхода металла и от напряжённости поля. Экспериментальное исследование явления вырывания электронов полем очень затруднительно ввиду того, что сила тока в сильной степени зависит от величины электрического поля у поверхности катода. Этим обстоятельством и обусловлены те противоречивые результаты, которые получались рядом авторов. Действительно, при наличии шероховатостей и острый на поверхности электрическое поле вблизи них будет иметь значение, во много раз большее, чем то поле, которое определяется геометрией прибора и электродов. Эмиссия практически будет идти только с отдельных мест катода, и её величину очень трудно будет сопоставить с теоретической зависимостью.

Вследствие этого, испускание электронов под действием поля для обычных металлов наступает при полях в  $10^6 \text{ V см}$ , в то время как, согласно теории, практически заметное испускание должно начинаться при полях, больших чем  $10^7 \text{ V см}$ .

Количественное изучение этого явления стало возможным только после того, как ряду исследователей удалось создать гладкую поверхность металла. Если приготовить из металла очень тонкое коническое острье, а затем прогреть его в вакууме до высокой

температуры, но всё же более низкой, чем его температура плавления, то при этом конец острия закругляется в виде правильной гладкой полусферы. В различных опытах радиусы таких полусфер имели различное значение от микрона до десятых и даже сотых его долей. Если такое остряе поместить внутри сферического вакуумного сосуда, покрытого изнутри проводящим слоем, то, приложив разности потенциалов, мы будем иметь вблизи нашей полусферы очень сильное радиальное поле с возможной напряженностью вплоть до значения в  $10^8$  В/см. Бенжамину и Дженкинсу<sup>3</sup> удалось для острия из молибдена, а Хэфера<sup>4</sup> для острия из вольфрама измерить ток при различных полях и показать полное согласие наблюдаемой величины тока со значением, вычисленным по теории Фаулера и Нордгейма. Если на оси ординат отложить значение  $\lg \frac{t}{F^2}$ , а на оси абсцисс  $1/F$ , то экспериментальные данные хорошо укладываются на прямую линию, как это и следует из теории [см. формулы (2) и (3)], причём угловой коэффициент совпадает с теоретическим, если для работы выхода  $M_0$  и  $W$  взять хорошо известные значения.

Нужно отметить, что измерение радиуса кривизны острия вследствие малости его размеров производить очень затруднительно. Хэфер определял форму и радиус острия, пользуясь для этого электронным микроскопом с увеличением до 20 000 раз. В той же работе Хэфер после измерения тока с вольфрама напылял на его поверхность барий, калий и цезий. Исследование поверхности электронным микроскопом показало, что в ряде случаев напыленные слои образуются в виде кристаллов, чем, повидимому, и обусловлены те ошибочные данные, которые были получены Миллером<sup>5</sup> для зависимости тока эмиссии от работы выхода. Если произвести наблюдения над эмиссией с вольфрама, покрытого слоями бария, калия и цезия как толстыми, так и оптимальными, при условии контролирования поверхности электронным микроскопом (отсутствие кристаллитов), то в пределах погрешности опыта закон Фаулера-Нордгейма

$$\lg \frac{t}{F^2} = \lg A - \frac{B \varphi_0^{3/2}}{F} \quad (4)$$

для зависимости эмиссии от работы выхода  $\varphi_0$  хорошо оправдывается. Таким образом, мы видим, что в основном опытные данные для металлов для полного тока эмиссии, его зависимости от поля и от работы выхода хорошо количественно согласуются с теорией Фаулера и Нордгейма.

В электронной лаборатории Ленинградского физико-технического института, Б. Г. Брежнев исследовал явление испускания электронов под влиянием поля с поверхности сурьмяно-цециевого катода. Для исследования был построен сферический вакуумный прибор, внутренний электрод которого представлял собою очень тонкое, оттянутое стеклянное остриё, закруглённое на конце в пламени

горелки. На этой стеклянной полусфере диаметром  $\sim 10 \mu$  создавался чувствительный сурьмяно-цезиевый слой. Вторым электродом служила стеклянная внешняя сфера. Она была покрыта изнутри катодным распылением полупрозрачным слоем платины, сверху которого был нанесён слой виллемита. Это давало возможность, помимо измерения силы тока, также производить и визуальное наблюдение за распределением тока. Измерения показали, что в случае сурьмяно-цезиевого катода эмиссия начинается при значениях электрического поля  $\sim 10^5 \text{ V/cm}$  и при дальнейшем увеличении напряжённости очень быстро растёт. При изменении направления электрического поля при самых больших напряжённостях ток отсутствовал. Кроме того, при охлаждении всего прибора жидким воздухом в течение 8 час. ни визуальная картина эмиссии, ни сила тока не изменялись. Это дает нам уверенность в том, что в этом случае мы имеем дело с вырыванием электронов полем. На рис. 2 приведён график, в котором отложена величина  $\ln \frac{I}{F^2}$ , как функция  $1/F$ .

Полученные данные хорошо укладываются на прямую линию. Однако, если произвести вычисления работы выхода катода из наклона этой прямой, то получается очень маленькое значение  $\varphi_0 = 0,062 \text{ V}$ , в то время как величина работы выхода, измеренная фотоэлектрически, равна  $1,3 \text{ V}$ . Обусловлено это тем, что истинное поле у отдельных мест катода во много раз больше, чем поле, вычисленное из размеров электродов. Действительно, визуальное наблюдение показывает, что в то время как фотоэффект с катода даёт равномерное свечение виллемита по всей сфере, эмиссия под влиянием поля сосредотачивается в виде отдельных пятен и полосок с очень различной интенсивностью свечения. Если обратиться к работе С. А. Векшинского<sup>6</sup> по исследованию слоёв сурьмы, то получающуюся картину эмиссии легко объяснить тем, что сферолиты из сурьмы частично отстают от стекла и их края загибаются в виде острых краёв. При активировке сурьмы цезием такая форма слоя в основном сохраняется. Естественно, что вблизи этих острых краёв сферолитов электрическое поле достигает очень больших значений, и с этих мест, главным образом, и происходит вырывание электронов полем. Любопытно отметить, что в отдельных приборах удавалось на экране наблюдать в сильно увеличенном

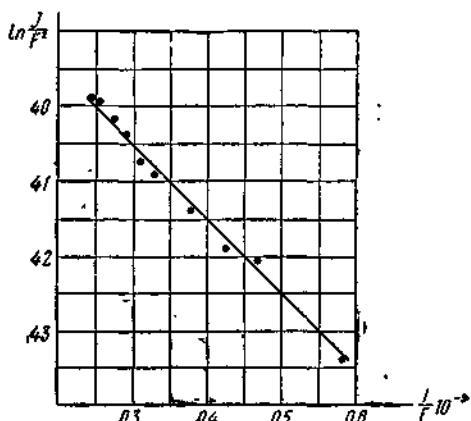


Рис. 2.

мой, то получается очень маленькое значение  $\varphi_0 = 0,062 \text{ V}$ , в то время как величина работы выхода, измеренная фотоэлектрически, равна  $1,3 \text{ V}$ . Обусловлено это тем, что истинное поле у отдельных мест катода во много раз больше, чем поле, вычисленное из размеров электродов. Действительно, визуальное наблюдение показывает, что в то время как фотоэффект с катода даёт равномерное свечение виллемита по всей сфере, эмиссия под влиянием поля сосредотачивается в виде отдельных пятен и полосок с очень различной интенсивностью свечения. Если обратиться к работе С. А. Векшинского<sup>6</sup> по исследованию слоёв сурьмы, то получающуюся картину эмиссии легко объяснить тем, что сферолиты из сурьмы частично отстают от стекла и их края загибаются в виде острых краёв. При активировке сурьмы цезием такая форма слоя в основном сохраняется. Естественно, что вблизи этих острых краёв сферолитов электрическое поле достигает очень больших значений, и с этих мест, главным образом, и происходит вырывание электронов полем. Любопытно отметить, что в отдельных приборах удавалось на экране наблюдать в сильно увеличенном

масштабе целые отдельные сферолиты и их взаимное свечение, подробно изученное С. А. Векшинским. Если оценить отношение истинного поля у отдельных мест катода к величине геометрически вычисленного, считая, что величина работы выхода равна 1,3 V, и применяя к этому случаю формулу Фаулера-Нордгейма, то мы получим значение  $\sim 100$ . Эта величина характеризует нам величину шероховатости нашего сурьмяно-цезиевого метода. Мы видим, что в то время, как вопрос о величине тока эмиссии для металлов подробно изучен, для сложных катодов излучение эмиссии под влиянием поля только начинается. Переядём к рассмотрению вопроса о распределении по энергиям электронов, вырываемых под влиянием поля.

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Как показывают вычисления, коэффициент прозрачности потенциального барьера  $D(W, F)$  в сильной степени зависит от величины нормальной составляющей энергии электронов  $W$ . Распределение энергий электронов внутри металла известно, поэтому опытное изучение распределения энергий явилось бы ценным для теории явления вырываания электронов полем, так как сравнение распределения энергий внутри и вне металла дало бы непосредственное значение зависимости коэффициента прозрачности от энергии электронов.

Такие опыты по изучению распределения энергий были сделаны Гендерсоном и Дальстремом<sup>7</sup>. Если между катодом и окружающей его сеткой приложить сильное ускоряющее поле, достаточное по величине для вырываания электронов, а затем между сеткой и охватывающим её приёмным электродом создать задерживающее поле, то, измеряя величину этого поля, можно изучить энергию электронов, вырываемых полем из катода. Схема такого опыта показана на рис. 3, где дан график потенциальной энергии. Электрон из катода проникает через узкий потенциальный барьер, ширина которого обусловлена наличием большого градиента поля у катода. Далее он ускоряется электрическим полем по направлению к сетке. Пройдя её, он будет замедляться и подойдёт к приёмному электроду. Однако, он может попасть на приёмный электрод только в том случае, если потенциал последнего будет увеличен на значение  $\varphi_1$ , так как градиент поля у приёмного электрода мал и никакое проникновение сквозь барьер не может иметь места.

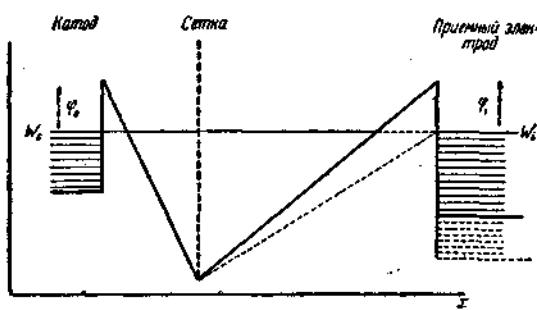


Рис. 3.

Поэтому ток на приёмный электрод начнётся только при условии, что ускоряющая разность потенциалов будет больше замедляющей на  $\Delta V_1 = \varphi_1$  вольт. При дальнейшем увеличении этого значения  $\Delta V$  в приёмный электрод будут проникать и электроны с уровнем энергии, лежащих ниже значения  $W_i$ , однако, для них  $D(W, F)$  будет меньше. Измерив силу тока, как функцию разности потенциалов и продифференцировав эту зависимость, мы найдём, очевидно, распределение энергии электронов, вырываемых полем из катода.

Гендерсен и Дальстрем произвели такие измерения и получили кривые распределения энергий при различных значениях поля у поверхности катода. Максимум на этих кривых расположен в области максимальных энергий, в сторону же малых энергий кривая постепенно падает. Качественно эти результаты совпадают с теоретическими ожиданиями, так как электроны с энергиями, меньшими чем  $W_i$ , обладают меньшей вероятностью проникновения через барьер.

Однако, количественного совпадения нет, так как ширина распределения энергий, по опытным данным Гендерсена и Дальстрема, порядка 10 V, в то время как весь диапазон энергий электронов внутри вольфрама всего порядка 5,7 V. Это тем более противоречиво, что при изменении энергии электрона от значения  $W_i$  на 1 V ниже коэффициент прозрачности барьера, согласно теории, уменьшается в 600 раз. Такое расхождение между ожидаемым теоретическим результатом и опытными данными Гендерсона и Дальстрема объясняется на наш взгляд тем, что в своих опытах они пользовались цилиндрическим случаем. В самом деле, при прохождении отверстий сетки электроны отклоняются на некоторый угол от своего первоначального направления. Получающаяся при этом составляющая энергии вдоль по образующей цилиндра в задерживающем поле не изменится и её величина будет равна тому диапазону энергий, который будет измерен на кривой: ток, как функция задерживающего поля. Так как электроны подходят к сетке с большими энергиями, порядка в несколько тысяч вольт, то достаточно отклонения на небольшой угол, чтобы получить размазанное распределение энергий.

Иначе будет обстоять дело, если для изучения скоростей использовать сферический случай, а именно, двойной сферический конденсатор, в котором сперва электроны ускоряются, а затем замедляются. Как было давно показано методом задерживающего поля в сферическом конденсаторе, мы измеряем распределение энергий электронов, независимо от направления угла вылета электрона по отношению к нормали. Разрешающая способность такого метода, как было показано, равна

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi, \quad (5)$$

где  $\Delta V$  — неточность определения энергии электрона, имеющего значение энергии,  $V$  — электрон-вольт,  $r$  и  $R$  — радиусы внутренней и внешней сферы конденсатора, а  $\varphi$  — угол между нормалью к внутренней сфере и направлением вылета электрона. При отношении  $r/R$ , равном  $1/10$ , и при любом значении угла  $\varphi$ , разрешающая способность метода равна  $1/100$ , что для электронов малых энергий (фотоэффект, термоионная эмиссия и т. д.) вполне достаточно. В случае же эмиссии электронов под влиянием поля, когда электроны подходят к сферической сетке с энергиями порядка нескольких тысяч вольт (при меньших потенциалах эмиссия очень мала), то необходимо, чтобы угол отклонения  $\varphi$  всё же был мал. Если вместо сетки взять сферу с отдельными дырочками в ней, то такие отверстия будут действовать, как рассеивающая линза, причём максимальный угол отклонения электронов при прохождении её будет приближённо равен, как показал Л. А. Арцимович,

$$\sin \varphi \approx \frac{1}{4} \frac{r}{\rho}, \quad (6)$$

где  $\rho$  — радиус отверстия, а  $r$  — радиус нашей сферы. Подставляя для  $\rho = 0,02 \text{ см}$ , а для  $r = 1 \text{ см}$ , мы получим для  $\sin \varphi = 0,005$ . Общая же разрешающая способность будет [равна (при  $r/R = 1/10$ )

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 10^{-6},$$

т. е. величина, вполне достаточная для точного исследования распределения энергий. По такому методу двойного сферического конденсатора нами предпринято исследование распределения энергий при вырывании электронов полем.

Недавно в наши руки попали работы Мюллера<sup>9, 10</sup>, в которых он изучал распределение энергий электронов при вырывании их полем из вольфрама несколько сходным методом. После ускорения полем электроны вместо сетки проходили ряд диафрагм, после чего попадали в задерживающее поле, создаваемое между этими диафрагмами и сферическим приёмным электродом. Наличие ряда диафрагм обуславливает прямолинейность путей электронов, проходящих через них, а сферическая форма приёмного электрода — ортогональность эквипотенциальных поверхностей к траекториям электронов. Исследуя этим методом распределение энергий, Мюллер нашёл для ширины спектра энергий значение, равное  $0,4 \text{ V}$ , близко совпадающее с теоретически ожидаемым, если считать температуру катода  $500^\circ \text{K}$ . Однако, в этой работе нет должного контроля по изучению распределения при различных полях у поверхности катода и при различных отверстиях диафрагм. Последнее было бы существенным, так как труден точный учёт электроннооптических свойств этого ряда диафрагм. Помимо непосредственного изучения распределения энергии электронов указанным выше методом, можно оценить ширину

спектра этого распределения другим путём. Если мы возьмём простой сферический случай, в котором наблюдается эмиссия электронов под влиянием поля (прибор типа Б. Г. Брежнева), то по величине разрешающей способности этого прибора можно составить

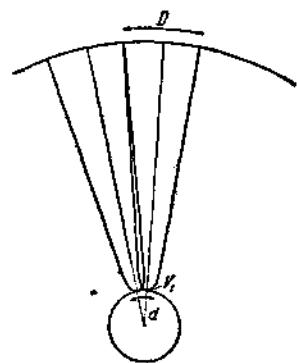


Рис. 4.

представление о величине тангенциальных составляющих энергии электронов. Действительно, электроны, вырываемые полем из какой-либо точки на поверхности сферы, дадут на внешней сфере размытое пятно, если величина тангенциальной энергии будет отлична от нуля. Предположим, что электроны с энергией, соответствующей величине тангенциальной составляющей, вылетают по направлению касательной к внутренней сфере. Они будут двигаться по гиперболе, изображённой на рисунке 4. Определяя точку пересечения гиперболы с внешней сферой, мы найдём величину диаметра пятна  $D$  в зависимости от величины тангенциальной энергии  $V_t$  и от величины полной

приложенной к конденсатору разности потенциалов  $V_0$ . Приближённое значение для этой величины, данное Л. А. Арцимовичем, равно:

$$D = 4R \sqrt{\frac{V_t}{V_0}}, \quad (7)$$

где  $R$  — радиус внешней сферы. Очевидно, что такой прибор, работая, как электронный микроскоп, разрушает две точки на поверхности внутренней сферы, если расстояние  $d$  (см. рис. 4) между ними будет равно

$$d = 4r \sqrt{\frac{V_t}{V_0}}, \quad (8)$$

где  $r$  — радиус внутренней сферы. Помимо наличия тангенциальной составляющей скорости, разрешающая способность такого сферического электронного микроскопа будет определяться также и дифракцией электронных волн, выходящих из двух соседних точек. Величина разрешения, обусловленная дифракцией, будет тем меньше, чем меньше потенциал  $V_0$  (чем больше длина волны Де-Брояля) и чем больше радиус внутренней сферы ( $d^2 \sim R$ ). Нужно, однако, отметить, что в основном разрешающая способность определяется величиной тангенциальной энергии, дифракция же играет значительно меньшую роль в обычных условиях наблюдения. В упомянутой выше работе Б. Г. Брежнева по изучению эмиссии электронов под влиянием поля с сурьмяно-цеизиевого катода на флуоресцирующем экране наблюдались отдельные светящиеся пятна.

Если измерить величину наименьшего из этих пятен, то по приведённым выше данным можно оценить максимальную величину тан-

генциальной составляющей энергии. Эта величина получалась равной  $0,02 \text{ V}$ . Отсюда легко сделать заключение, что и величина полной энергии электронов того же порядка и что ни о каких  $10 \text{ V}$ , найденных Гендерсоном и Дальстремом, не может быть и речи. Мюллер даёт выражение для разрешающей способности своего электронного микроскопа и производит сравнение своих теоретических вычислений с наблюдениями над отдельными яркими пятнами, которые иногда получаются при эмиссии с чистых металлов. Приведённые им данные хорошо совпадают с его вычислениями. Это тем более удивительно, так как Мюллер пользуется приближённой формулой, отличающейся вдвое от заведомо правильной приведённой формулой (7).

В заключение упомяну, что такой сферический прибор, в котором мы имеем электронную эмиссию под действием поля, является электронным микроскопом с увеличением в несколько сот тысяч раз и с большой разрешающей способностью.

### 3. ИСПУСКАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ЛЮБЫХ ПОЛЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

Выше нами были рассмотрены вопросы о полной эмиссии электронов под действием поля и о распределении скоростей этих электронов. В этом рассмотрении мы имели дело с подлинно «холодной» эмиссией. Действительно, теория Фаулера-Нордгейма дана нами для температуры металла, равной абсолютному нулю, а приведённые опыты производились при низких температурах, при которых можно считать, что распределение энергий электронов внутри металла практически не отличается от распределения Ферми-Дирака при  $T = 0^\circ$ .

Однако, как легко видеть, Рис. 5.  
испускание электронов под  
влиянием поля и распределение энергий при этом испускании должны,  
вообще говоря, зависеть от температуры катода.

На рис. 5 дан график потенциального барьера вблизи поверхности металла, помещённого в электрическое поле. Под влиянием электрического поля происходит прежде всего снижение высоты барьера и вследствие этого уменьшение работы выхода из металла (явление Шоттки). Величина этого уменьшения работы выхода  $\Delta\phi_0$  в поле равна по Шоттки

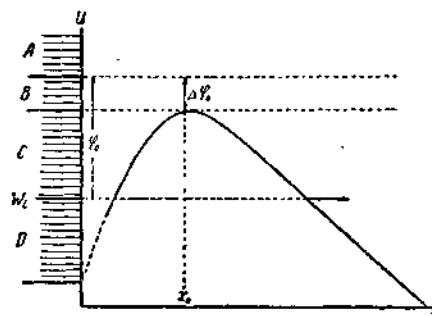


Рис. 5.

$$\Delta\varphi_0 = e^{\beta/2} \sqrt{F}, \quad (9)$$

где  $e$  — заряд электрона, а  $F$  — поле у поверхности металла. Расстояние  $x_0$ , на котором потенциальная энергия имеет максимум, равно:

$$x_0 = \frac{e^{1/2}}{2V\bar{F}}. \quad (10)$$

Эти формулы выведены в предположении, что силы, действующие на электрон вне металла, являются силами электрического изображения. Помимо уменьшения высоты барьера под влиянием внешнего поля происходит изменение его формы, что приводит при сильных полях к эмиссии электронов «сквозь» барьер.

При изменении температуры металла от температуры  $T=0$  распределение энергии электронов внутри металла изменяется за счёт появления «максвеллова хвоста» в распределении Ферми-Дираха, поэтому распределение энергий будет простираться значительно выше границы  $W$ .

При высоких температурах и не при очень сильных полях, т. е. таких полях, при которых отсутствует практически проникновение «сквозь» потенциальный барьер, мы будем наблюдать обычную термоионную эмиссию из области  $A$ , подчиняющуюся известному закону Ричардсона-Дешмана. К ней будет прибавляться испускание электронов из области  $B$ , так как эти электроны за счёт понижения работы выхода будут теперь также обладать энергией большей, чем высота барьера. При этом по мере увеличения внешнего поля снижение барьера будет всё больше и больше, что будет приводить к расширению области  $B$  и соответственному увеличению эмиссии. Увеличение термоионной эмиссии за счёт включения электронов области  $B$  носит, как известно, название эффекта Шоттки.

Если, наоборот, взять сильные поля и не очень большую температуру, то выше уровня  $W_i$  будет некоторое количество электронов за счёт «максвеллова хвоста». Так как при сильных полях барьер проницаем для электронов, то из основной области  $D$  будет наблюдаться «холодная» эмиссия, подчиняющаяся закону Фаулера-Нордгейма, но к ней прибавится при температуре  $T$ , отличной от абсолютного нуля, эмиссия из области  $C$  за счёт проникновения сквозь барьер. Это даёт нам определённый температурный ход «холодной» эмиссии. Кроме того, и спектр энергий электронов будет зависеть от величины температуры, что, конечно, может быть установлено и изучено на опыте.

Если же взять общий случай большого поля и высокой температуры, то эмиссия будет происходить из всех четырёх указанных областей  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ; при этом нужно сказать, что между эмиссией из областей  $B$  и  $C$  будет непрерывный переход, так как вероятность прохождения «сквозь» барьер верха распределения области  $C$  будет близка к вероятности прохождения электронов из области  $B$ . Дополнительно нужно заметить, что при сужении барьера при больших электрических полях для ряда электронов из полного

распределения их энергий будут удовлетворяться условия интерференции, вследствие чего в полной эмиссии появится периодически изменяющийся член. К сожалению, эта промежуточная область средних температур, а также высоких температур в очень сильных полях еще не исследована, хотя к этому имеются в настоящее время все необходимые экспериментальные предпосылки.

Точное изучение эмиссии электронов из металлов, будь то термоионная эмиссия или испускание электронов, под влиянием сильного электрического поля осложняется в настоящее время тем, что, как показывает опыт, работа выхода является функцией кристаллографического направления. Действительно, целым рядом работ по изучению термоионной эмиссии с различных кристаллографических граней одного и того же монокристалла, а также работами по определению границы фотоэффекта установлено различие для величины работы выхода электронов. Так, например, исследуя термоионную эмиссию с монокристаллической проволоки вольфрама, Никольс<sup>11</sup> нашел для различных кристаллографических направлений различные значения. (Здесь, как и в дальнейшем, под кристаллографическим направлением с индексами  $h, k, l$  будем понимать направление, перпендикулярное к плоскости  $|h, k, l|$ .)

Как видно из приложенной таблицы, значения работ выхода колеблются в пределах 0,3 V. Такого порядка различия были найдены и в опытах других исследователей и для других монокристаллов. Легко видеть, что при изучении эмиссии с поликристаллических тел это наличие разных работ выхода для различных граней должно сказаться на измеряемом токе эмиссии.

Индексы . . . . .	111	112	116	100	110
$\phi^0$ . . . . .	4,36	4,66	4,35	4,53	4,65

При этом результаты наблюдения будут зависеть от того, при каких электрических полях происходит наблюдение явления. Эта задача вполне аналогична той, которую мы имеем, рассматривая на поверхности металла « пятна », обладающие иной работой выхода ( пятна тория на вольфраме ).

Если величина приложенного поля мала, так что расстояние, на котором внешнее поле равно силе, удерживающей электрон, больше, чем величина неоднородностей металла ( величина пятен или величина кристалла поликристаллического тела ), то мы будем наблюдать эффект, обусловленный средним значением работы выхода. В этом случае барьер вблизи поверхности будет определяться не только работой выхода, но и теми контактными полями, которые компенсируют различие в работах выхода. Наоборот, при больших полях, когда расстояние  $x_0$  значительно меньше, чем величина областей с определенной работой выхода, ток независимо будет испускаться различными участками поверхности и будет равен

$$i = \sum f_n i_n,$$

где  $f_n$  — часть площади с работой выхода  $\varphi_n$ , а  $i_n$  — соответствующая плотность тока. Это обстоятельство приводит к тому, что при больших полях эмиссия будет происходить, главным образом, с мест с малой работой выхода; только эффективная площадь испускания будет меньше. Зависимость Шоттки будет в этом случае удовлетворяться. При малых полях будет другой закон испускания, что, как известно, приводит в слабых полях к отступлению от прямой Шоттки. Нужно отметить, что отступление от закона Шоттки в слабых полях наблюдается и для чистых поликристаллических металлов. Естественно, что в случае изучения испускания электронов под действием сильных электрических полей мы всегда имеем случай, когда  $x_0$  — расстояние, на котором внешнее поле, равное удерживающей силе, очень мало, и поэтому мы имеем раздельное испускание с различных мест поверхности, если только области с различными работами выхода не имеют размеров порядка атомных расстояний. В последнем случае и для сильных полей мы имели бы эффект, соответствующий усредненному значению работы выхода.

#### 4. ИСПУСКАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ МОНОКРИСТАЛЛАМИ

Обратимся к опытам по изучению испускания электронов под действием сильного электрического поля, которые были проведены рядом авторов на монокристаллах. Как нами было выше изложено, наиболее удобными для изучения электронной эмиссии в сильных полях являлись способы, в которых катодом служила маленькая полусфера, получаемая при прогревании тонких конических острій. Если такое остріе поместить в вакуум и прогревать, то форма его меняется и оно обращается в полусферу, как показал Хэфер, изучая эти острія в электронном микроскопе. Но одновременно с этим происходит и перекристаллизация в этом остріе, и так как размеры острія порядка размеров одного кристалла взятой поликристаллической проволоки ( $\sim 10^{-4}$  см), то на остріе практически образуется монокристаллическая полусфера. В этом легко убедиться следующим образом. Если такой катод поместить внутрь стеклянного шара, внутренние стени которого покрыты проводящим полупрозрачным слоем с нанесенным на него виллемитом, то при больших разностях потенциала, порядка нескольких тысяч вольт, можно визуально наблюдать свечение, вызванное электронами, вырываемыми из катода. Во всех опытах при таких наблюдениях получается симметрическая картина, симметрия которой вполне совпадает с симметрией кристалла вещества катода. Это служит безусловным доказательством того, что катод является монокристаллом. Такие наблюдения были произведены во многих лабораториях и дают совпадающие результаты. Эта картина легко получается сразу же после прогрева катода, длительно же она может быть наблюдаема только при условии очень тщательного обезгаживания прибора. Наиболее

подробные исследования получающихся картин были произведены в прекрасной работе Бенжамина и Дженкинса. Прежде всего обратимся к тем картинам, которые получаются при исследовании чистых металлов: вольфрама и молибдена. Так как наблюдаемая картина имеет симметрию кристалла, то она может быть легко индицирована. В основном получающиеся картины сводятся к тому, что: 1) в областях, лежащих около различных основных кристаллографических направлений, интенсивности свечения разные, отличающиеся друг от друга по порядку интенсивности в 2 раза, и 2) в некоторых направлениях свечение очень мало (тёмные пятна), так что оно имеет значение, в сто раз меньшее, чем свечение близлежащей области. К сожалению, эти наблюдения производились визуально, интенсивность же тока по различным направлениям не измерялась. Самое простое объяснение, которое можно выдвинуть для интерпретации этих результатов, заключалось бы в том, что по различным кристаллографическим направлениям происходит различная эмиссия электронов, вследствие различия работы выхода. Действительно, как мы видели, испускание электронов под влиянием поля зависит от работы выхода ( $\phi_0^{3/2}$  в показательной функции Фаулера-Нордгейма). Однако, то изменение работы выхода, которое имеет место для различных кристаллографических направлений, никоим образом не может объяснить величины изменения интенсивности в сто раз.

Этим изменением могло бы быть обусловлено различие в два или несколько раз (общая интенсивность областей). Более тривиальным было бы объяснение, заключающееся в том, что небольшие остаточные примеси, сильно изменяющие работу выхода, по-разному адсорбируются в разных кристаллических областях, что и обуславливает наличие резкой картины. Однако, при многократном отжиге картина воспроизводится и является очень устойчивой, что заставляет думать, что наличием примесей объяснить явление нельзя. Наблюдаемый эффект мог бы быть вызван тем, что электронные волны, идущие изнутри кристалла для определённых кристаллографических направлений, согласно условиям Брэгга, интенсивно отражаются назад, из-за чего для этих направлений получаются тёмные пятна.

Кроме указанных возможных причин, следует обратить внимание на ещё одно дополнительное обстоятельство. Мы видели, что при прогреве острый в них происходит перегруппировка атомов так, что в результате образуется монокристалл в виде сферы, т. е. фигуры с минимальной поверхностью. Но так как свободная энергия единицы поверхности (поверхностное напряжение) для кристаллов будет функцией направления, то равновесная форма поверхности, соответствующая минимуму свободной энергии, должна быть многогранником с сглаженными и закруглёнными ребрами. Если это так, то вблизи площадок такого многогранника поле должно быть меньше, чем у ребер, и эмиссия с них должна быть меньше. К сожалению, Хэфер, исследуя форму острый, только грубо определил их сферичность и не производил специального исследования деталей их внеш-

ней формы. Другие авторы этого тоже не делали. Однако, опыты с крупными монокристаллами каменной соли, взятыми в виде шаров, показывают наличие образования многогранников с закруглёнными ребрами. В какой мере это явление выражено у молибдена и вольфрама, сказать трудно, но нужно указать, что для объяснения различия испускания электронов в сотни раз нужно значительное различие поля, а следовательно, сильно выраженное изменение формы, что, как указано, непосредственно не наблюдено. Так обстоит дело с картиной электронной эмиссии под влиянием поля монокристаллов чистых металлов.

Кроме этого, Бенжамином и Дженкинсом<sup>12</sup> были изучены действия длительного нагревания на монокристаллы, находящиеся в электрическом поле, а также то изменение картины, которое получится, если на вольфрам или молибден осадить чужеродные атомы щёлочных и щёлочноземельных металлов, а затем постепенно поднимать температуру катода. В этих наблюдениях прибор с электронной эмиссией под действием поля является прекрасным микроскопом, при помощи которого можно изучать детали явления миграции и испарения атомов.

Рассмотрев основные данные о явлении испускания электронов под влиянием электрического поля, мы можем видеть, что основные теоретические представления о природе этого явления безусловно подтверждаются. В то же время экспериментальные данные ограничиваются почти исключительно очень немногочисленными опытами с вольфрамовыми и молибденовыми остриями. Очень мало изучен вопрос о распределении скоростей и почти не затронуто изучение эмиссии с монокристаллами, если не считать качественных наблюдений Бенжамина и Дженкинса. Нужно отметить, что основные наблюдения проделаны с чистыми металлами. Эмиссия же полупроводников и дизелектриков и более сложных поверхностей (например, сложных катодов) совершенно не затронута. Между тем несомненно, исследование испускания электронов под действием поля — этого одного из наиболее элементарных явлений — даёт сведения об электронных уровнях в телах и о природе потенциального барьера на границе этих тел с вакуумом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Fowler a. L. Nordheim, Proc. Roy. Soc., A **119**, 173, 1928.
2. L. Nordheim, Proc. Roy. Soc., A **121**, 626, 1928.
3. M. Benjamin a. R. O. Jenkins, Proc. Roy. Soc., **176**, 262, 1940.
4. R. Haefter, Z. Physik, **116**, 604, 1940.
5. E. Müller, Z. Physik, **102**, 734, 1936.
6. C. A. Векшицкий, ЖТФ, X, 1359.
7. I. E. Henderson a. R. K. Dahlstrom, Phys. Rev., **55**, 473, 1939.
8. П. И. Лукирский, ЖРФХО, VII, 463, 1924.
9. E. W. Müller, Z. Physik, **120**, 261, 1943.
10. E. W. Müller, Z. Physik, **120**, 270, 1943.
11. M. H. Nichols, Phys. Rev., **59**, 944, 1941.
12. M. Benjamin a. R. O. Jenkins, Proc. Roy. Soc., **180**, 225, 1942.

**МИКРОРАДИОВОЛНЫ\*)**  
**Э. Ю. Кондон**

**ВВЕДЕНИЕ**

Микрорадиоволнами в электромагнитной теории излучения принято называть электромагнитные волны, лежащие, грубо говоря, в интервале длин волн от 1 м до 1 мм, что отвечает интервалу частот от  $3 \cdot 10^8$  до  $3 \cdot 10^{12}$  циклов·сек $^{-1}$ .

Со стороны больших частот этот интервал ограничен тем, что техника получения более высоких частот является скорее «оптической», чем «электрической».

Со стороны малых частот ограничение связано с тем, что для частот ниже 300 мегациклов·сек $^{-1}$  становятся совершенно достаточными обычные методы расчёта контуров с сосредоточенными постоянными, применяемые в радиотехнике.

Поле микрорадиоволн характеризуется следующими тремя основными моментами.

1. Методы получения микрорадиоволн являются электрическими, но не оптическими. В частности, источником для получения микрорадиоволн являются вынужденные колебания в макроскопических электромагнитных системах, а не некогерентное излучение большого числа атомов или молекул.

2. Размеры приборов, служащих для получения микроволн, обычно велики и, во всяком случае, сравнимы с длиной волны. Это обстоятельство делает невозможным или, по крайней мере, весьма затрудняет использование для изучения микрорадиоволн обычных методов, применяемых для колебательных контуров с сосредоточенными или даже распределёнными постоянными. Во всяком случае, пока не существует ещё каких-либо методов, которые позволяли бы обойтись без применения методов теории поля при расчётах в этой области, подобно тому, как это делается при расчётах переменных токов или в обычной радиотехнике.

Растущие требования практики, несомненно, приведут к разработке таких методов, но на данной стадии развития желательно изучение микрорадиоволн именно с точки зрения теорий электромагнитного поля. Повидимому, инженерам, работающим в области

\*) Rev. Modern Physics, 14, 341 (1942), перевод В. Г. Левича.

ультракоротких волн, придётся всерьёз заняться изучением теории электромагнитного поля.

3. Электронные лампы, применяемые в области микрорадиоволн, имеют ту основную особенность, что время полёта отдельных электронов в приборе не является малым по сравнению с периодом излучения, как это имеет место в области длинных волн.

Действительно, в обычных лампах скорости электронов составляют от 0,01 до 0,1 скоростей света. Поэтому на протяжении 1 цикла электроны пролетают путь от 0,01 до 0,1 длины волны.

Если длина волны составляет всего лишь несколько сантиметров, на практике оказывается затруднительным сконструировать трубку со столь коротким пробегом электронов, чтобы он был мал по сравнению с 0,01—0,1 длины волны.

Это обстоятельство делает неприменимыми обычные представления в области электронных ламп. Современный прогресс в области ультракоротких волн в значительной степени связан с открытием путей для полного использования конечного (по сравнению с периодом излучения) времени полёта электронов в лампах.

Другими словами, конечное время полёта не явилось ограничением для современной электроники, но лишь вынудило оставить традиционные представления в этой области.

Исторически, ранние работы Герца, в которых электромагнитные волны были впервые получены искусственным путём, относились к той области длин волн, которую мы называем здесь микрорадиоволнами.

Однако, они отличались от рассматриваемых здесь волн, с одной стороны, тем, что их интенсивность была крайне мала, а с другой стороны, тем, что они представляли собой сильно затухающий цуг волн, гораздо более удобное для практических целей стационарное излучение, получаемое с помощью современной аппаратуры.

С точки зрения использования ультракоротких волн для связи, основными моментами являются следующие.

1. Новые частоты могут получаться в плотной среде.
2. Микрорадиоволны могут успешно использоваться для получения строго направленного излучения, поскольку для направленности излучения размеры антенны должны быть велики по сравнению с длиной излучаемой волны — требование, которому, очевидно, легче удовлетворить в случае коротких волн.

Область микрорадиоволн настолько нова, что имеется пока очень небольшое число работ, в которых изучалось распространение таких волн вдоль поверхности суши или моря или поведение их в ионосфере. В этом направлении должна ещё проводиться большая работа. С развитием экспериментальной техники и усовершенствованием оборудования и приборов, физики получат в своё распоряжение новое оружие для исследования ещё совершенно «открытых» областей.

Уже сейчас известно, что некоторые молекулы (например аммиака) имеют в области микрорадиоволн характеристические

частоты, крайне важные для понимания молекулярной структуры. Вероятно, благодаря спектроскопии сантиметровых волн, мы в будущем получим ряд важных сведений и из других областей физики.

Если поместить в поле микрорадиоволнового излучения ферромагнетик, глубина эффективного проникновения поля в проводник будет как раз того же порядка, что размеры областей спонтанного намагничивания (доменов). Поэтому, нет никакого сомнения в том, что изучение ферромагнетиков с помощью микрорадиоволн даст много нового для лучшего понимания природы ферромагнетизма. Далее, у большого числа диэлектриков имеется максимум поглощения в области частот микрорадиоволн. Поэтому, изучение свойств таких диэлектриков в этой области частот должно быть существенно для лучшего понимания их структуры. Это особенно важно для таких веществ, как современные синтетические резины и каучуки. Все эти сведения, важные для лучшего понимания процессов в диэлектриках и ферромагнетиках, представляют большей частью вклад в область прикладной физики.

Однако, если мы захотим найти самую широкую область приложений микрорадиоволн вне стен исследовательской лаборатории, то сразу становится очевидным, что большая часть достигнутых результатов может найти самое непосредственное применение в навигации, морской и воздушной. Не следует также упускать из виду и то, что применение микрорадиоволн в диатермии ещё совершенно не исследовано и может оказаться, что они обладают специфическими лечебными свойствами, отсутствующими у применяемого в настоящее время длинноволнового излучения.

Таким образом, эта область представляет собой обширное поле для исследований.

## Глава I. ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

В области микрорадиоволн, вместо обычных антенн и конденсатора, как главных элементов резонансного контура, употребляются полые резонаторы. Полым резонатором мы будем называть область пространства, окружённую со всех сторон стенками, сделанными из хорошего проводника, которая используется как элемент колебательного контура. Поэтому изучение микрорадиоволн следует начать с рассмотрения свойств полого резонатора.

### § 1. Уравнения Максвэлла

Решение всех задач, связанных с электромагнитным полем, основано на использовании уравнений Максвэлла, которые мы будем писать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi\mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{E}$  — вектор электрического поля в CGS-единицах,  $\mathbf{D}$  — вектор индукции в CGS-единицах,  $\rho$  — плотность заряда в CGS электростатических единицах,  $\mathbf{H}$  — вектор магнитного поля в гауссах,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции в гауссах,  $\mathbf{j}$  — плотность тока проводимости в абс. ед./см<sup>2</sup>.

Выбранная нами система единиц оказывается наиболее удобной и часто применяемой на практике. Однако, мы не хотели бы впасть в распространённую ошибку и постоянно придерживаться однажды выбранной системы единиц. Когда это представляется удобным, мы будем пользоваться и другими системами единиц.

В обычных средах мы имеем

$$\text{и} \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \cdot \} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость и  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды. Коэффициенты  $\mu$  и  $\epsilon$  чаще всего приводятся в справочниках в выбранной нами системе единиц, они являются безразмерными величинами, равными единице в вакууме.

В проводящей среде напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}$  связана с плотностью тока  $\mathbf{j}$  соотношением

$$\mathbf{E} = 1/\sigma \mathbf{j}, \quad (1.3)$$

где  $\sigma$  — проводимость вещества в см<sup>-1</sup> и  $1/\sigma$  — удельное сопротивление. В обычных таблицах приводится значение  $\sigma$  (или удельное сопротивление  $1/\sigma$ ) в ом·см, что соответствует тому, что  $\mathbf{E}$  выражено в вольтах на сантиметр, а  $\mathbf{j}$  — в амперах на квадратные сантиметры. Если  $1/\sigma'$  — удельное сопротивление в омах на сантиметр, то

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{\sigma'}, \quad (1.4)$$

Для меди при комнатной температуре  $1/\sigma' = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{см}$ ,  $1/\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ .

На границе раздела двух непроводящих сред должны выполняться условия непрерывности нормальных слагающих  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  и касательных слагающих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если на поверхности раздела имеются поверхностные заряды с плотностью  $n$  CGS ед./см<sup>2</sup>, то нормальная слагающая вектора  $\mathbf{D}$  испытывает скачок, равный  $4\pi n$ .

Плотность заряда и плотность тока связаны между собой уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

которое выражает тот факт, что полный ток, вытекающий из данного объема, сопровождается соответствующим уменьшением заряда

в этом объеме. В технических руководствах напряженность поля выражают обычно в вольтах на сантиметр, силу тока — в амперах, плотность тока — в амперах на квадратный сантиметр и заряд — в кулонах.  $1 \text{ V} = \frac{1}{300} \text{ CGS-единиц}$ ;  $1 \text{ абр. ед. тока} = 10 \text{ A}$ ;  $1 \text{ кулон} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGS-единиц заряда}$ . Мощность в выбранной нами системе единиц выражается в абр. ед. напряжения на абр. ед. тока  $= 3 \text{ kW}$  ( $1 \text{ кВ} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$ ). Хотя  $\mathbf{H}$  обычно выражается в гауссах и в технических руководствах, однако, иногда  $\mathbf{H}$  выражают в амперах на сантиметр. Последнее соответствует магнитному полю бесконечно длинного соленоида, через который протекает ток, выражаемый в ампер-витках на сантиметр ( $1 \text{ A/cm}^2 = 0,4\pi \text{ гаусс}$ ).

Из уравнений Максвелла можно вывести общее соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -c\mu \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \text{ эрг/см}^2 \text{сек.} \quad (1.7)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  косит название вектора Пойнтинга и интерпретируется, как поток электромагнитной энергии. Истинное значение потока электромагнитной энергии не определяется этим или какими-либо иными соотношениями, так как к вектору  $\mathbf{S}$  можно прибавить любой другой вектор  $\mathbf{S}'$ , дивергенция которого равна нулю, без того, чтобы нарушилось общее уравнение (1.6). Поскольку, однако, значение электромагнитной энергии не измеряется непосредственно, а лишь после превращения её в механическую или тепловую энергию, эта неопределенность не может отразиться на значениях непосредственно наблюдаемых величин.

В тех случаях, когда  $\mu$  и  $\epsilon$  постоянны во времени, второй член в (1.6) может быть представлен, как производная по времени от величины

$$W = \frac{1}{8\pi} (\mu H^2 + \epsilon E^2) \text{ эрг/см}^2, \quad (1.8)$$

которая интерпретируется, как плотность электромагнитной энергии поля.

В выбранной нами системе единиц абсолютные величины векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоской электромагнитной волне равны между собой. Для практики нужно иметь в виду выражение для вектора Пойнтинга в технической системе единиц:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{0,4\pi} [\mathbf{EH}] \text{ W/cm}^2. \quad (1.9)$$

В вакууме в этих единицах величина  $\mathbf{H}$  в гауссах равна  $1/300 \text{ E}$

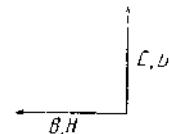


Рис. 1. Соотношение между векторами  $E$ ,  $D$  и  $H$ ,  $B$  в плоской волне, распространяющейся в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа.

в вольтах на сантиметр, так что абсолютная величина вектора Пойнтинга равна  $S = (1/120 \pi) \cdot E^2$ . Число  $120 \pi = 377$  выражается в омах и в литературе часто громко именуется «импедансом пустого пространства».

Возвращаясь снова к уравнению (1.6), мы видим, что в той части пространства, где отсутствуют токи, так что правая часть уравнения обращается в нуль, оно выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля. Оно показывает также, что изменение энергии электромагнитного поля в любой замкнутой области, через границы которой электромагнитная энергия не может вытекать, происходит только за счёт электрического тока, текущего в направлении вектора электрического поля.

Всё содержание теории микрорадиоволн и вся техника их использования состоят в генерировании, передаче и приёме электромагнитной энергии в области столь высоких частот, что соответствующие длины волн оказываются сравнимыми с размерами приборов, служащих для их получения.

В дальнейшем нам придётся часто разыскивать распределение электромагнитного поля, интегрируя уравнения поля. В других областях радиотехники приходится иметь дело только с волнами, длинными по сравнению с размерами приборов. Это обстоятельство позволяет избежать уравнений поля, как расчётного аппарата, и пользоваться общей теорией цепей с сосредоточенными постоянными, которая является основой для расчётов почти во всей электротехнике.

## § 2. Плоские волны

Прежде чем перейти к рассмотрению задачи о поле в полом резонаторе, полезно напомнить решение уравнений поля в виде плоских, стоячих и бегущих волн.

Предположим, что вектор поля представляет вещественную часть вектора

$$Ae^{2\pi i(\nu t - kr)}, \quad (2.1)$$

где  $A$  — постоянный вектор,  $k$  — волновой вектор, направленный по нормали к фронту плоской волны в сторону распространения её фазы и по абсолютной величине равный числу длин волн на 1 см, и  $\nu$  — частота в циклах на секунду. В радиотехнической литературе чаще выбираются противоположные знаки в экспоненте, но все результаты не зависят от выбора знаков. Выбранный нами положительный знак при временном множителе чаще встречается в других разделах электротехники, в частности, в теории переменных токов, где считается, что все векторы на векторных диаграммах вращаются против часовой стрелки.

Из двух уравнений  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  следует, что

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{k} = 0 \text{ и } \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

т. е. что амплитуды электромагнитных волн ортогональны к направлению распространения. Мы будем считать направление  $\mathbf{D}$  или  $\mathbf{E}$  направлением поляризации волны.

Два последних уравнения Максвелла после подстановки (2.1) дают

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nu}{c} \mathbf{B}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = +\frac{\nu}{c} \mathbf{D}, \quad (2.2)$$

из которых вытекает, что

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = -\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \epsilon \mu \mathbf{E} \quad (2.3)$$

и, следовательно, учитывая, что  $\mathbf{k}E = 0$ ,

$$|\mathbf{k}| = \left(\frac{\nu}{c}\right) (\epsilon \mu)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, фазовая скорость распространения волн в среде равна  $c/\sqrt{\epsilon \mu}$ , а показатель преломления  $W = (\epsilon \mu)^{1/2}$ . Из (2.2) легко видеть, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  ориентированы так, как это показано на рис. 1, а их амплитуды удовлетворяют равенству

$$\sqrt{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \sqrt{\mu} \cdot \mathbf{H}.$$

В пустоте все векторы электромагнитного поля равны между собой. Средний поток энергии, переносимой плоской волной,

$$S \text{ W/cm}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{120\pi(\mu/\epsilon)^{1/2}} E^2, \quad (2.5)$$

где  $E^2$  выражено в вольтах на сантиметр.

Как указывалось уже в предыдущем параграфе, коэффициент в знаменателе выражается в омах. Из (2.5) мы видим, что среда характеризуется импедансом для плоской волны, равным  $120\pi(\mu/\epsilon)^{1/2}$  ом. Импеданс для плоской волны в омах можно также определить, как отношение напряжённости электрического (вольт/см) и магнитного (ампервитки/см) полей. Такое определение приводит к тому же самому численному значению импеданца.

Стоячая волна возникает при наложении двух бегущих волн равной амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях. Предположим, например, что одна из волн распространяется в положительном направлении оси  $z$  и поляризована в направлении оси  $x$ . Тогда напряжённости электрического и магнитного полей плоской волны будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos 2\pi(\nu t - kz), \quad E_y = E_z = 0, \\ H_y &= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_1 \cos \pi(\nu t - kz), \quad H_x = H_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Аналогично, для волны, поляризованной в том же направлении, но распространяющейся в противоположную сторону,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_2 \cos 2\pi(\nu t + kz), \quad E_y = E_z = 0, \\ H_y &= -\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_2 \cos 2\pi(\nu t + kz), \quad H_x = H_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Предположим теперь, что плоскость  $z=0$  является идеальным проводником. На поверхности идеального проводника тангенциальная слагающая вектора  $\mathbf{E}$  должна обращаться в нуль, и, следовательно, амплитуды обеих волн должны удовлетворять условию  $E_2 = E_1$ . Поле обеих волн, падающей и отражённой, описывается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 2E_1 \sin 2\pi kz \sin 2\pi\nu t, \\ H_y &= 2\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_1 \cos 2\pi kz \cos 2\pi\nu t. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Как видно из (2.8), в начальный момент, при  $t=0$  энергия поля имеет чисто магнитный характер, а через четверть цикла — чисто электрический. Таким образом, в стоячей волне энергия поля не остаётся совершенно неизменной, а пульсирует, переходя из магнитной в электрическую и обратно (рис. 2).

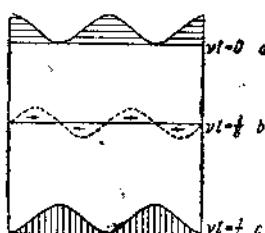


Рис. 2. Пульсация энергии в стоячей плоской волне.

Таким образом, в стоячей волне энергия поля не остаётся совершенно неизменной, а пульсирует, переходя из магнитной в электрическую и обратно (рис. 2). Отражение плоской волны идеальным проводником сопровождается индуцированием в нём токов. В главе IV будет показано, как вычисляется излучение по заданному распределению токов. Здесь же мы ограничимся утверждением, что индуцированный поверхностью ток излучает волны, которые представляют отражённые поверхности металла волны и в точности погашают падающие волны на противоположной поверхности металла.

Индуктируемый ток на поверхности металла можно найти следующим образом. Магнитное поле вблизи границы металла, в плоскости  $z=0$  будет равно

$$\left. \begin{aligned} H_y &= 2E_1\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \cos 2\pi\nu t \quad \text{при } z > 0, \\ H_y &= 0 \quad \text{при } z < 0. \end{aligned} \right.$$

Следовательно, линейный интеграл, взятый по замкнутому контуру единичной длины, проходящему вдоль поверхности вне металла в положительном направлении и внутри него — в отрицательном, будет отличен от нуля.

Из уравнений Максвелла следует при этом, что вдоль поверхности металла течёт замкнутый ток проводимости (ток смещения) равен

нулю, так как у поверхности металла касательные слагающие электрического поля  $E$  исчезают), плотность которого

$$j_x = -\frac{2E_1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \cos 2\pi vt.$$

### § 3. Полый резонатор<sup>1</sup>

Область пространства, окружённая со всех сторон хорошим проводником, может служить полым резонатором или «румбатроном». Каждый такой резонатор имеет бесконечно большое число резонансных частот и соответствующих длин резонансных волн.

Мы сперва изложим теорию резонатора, ограниченного идеальным проводником с омическим сопротивлением, равным нулю, а затем учтём влияние конечного сопротивления металла. Мы ограничимся также полостью в виде прямоугольного ящика, наиболее удобной для наших целей потому, что поле в ней выражается через простые тригонометрические функции. Нашей задачей является решение уравнений поля в такой полости с учётом граничных условий на поверхности металла, ограничивающего полость: вектор  $E$  должен быть перпендикулярен к поверхности и вектор  $H$  — параллелен ей.

Предположим, что все векторы поля зависят от времени по закону  $e^{i\omega t}$ . Тогда координатная зависимость векторов поля может быть найдена из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sqrt{\varepsilon} E &= 0, \quad \operatorname{div} \sqrt{\mu} H = 0, \\ \operatorname{rot} \sqrt{\varepsilon} E &= -i \left(\frac{2\pi n}{c}\right) \sqrt{\mu} H, \\ \operatorname{rot} \sqrt{\mu} H &= +i \left(\frac{2\pi n}{c}\right) \sqrt{\varepsilon} E, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

если внутри полости  $\varepsilon$  и  $\mu$  — постоянные. Здесь  $n$  означает показатель преломления, определённый в § 2,  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ . Обозначим через  $k$  множитель  $2\pi n/c$ .

Из уравнений (3.1) ясно, что векторы  $\sqrt{\varepsilon} E$  и  $\sqrt{\mu} H$  удовлетворяют в полости, заполненной средой, таким же уравнениям, как векторы  $E$  и  $H$  в пустоте, но со скоростью  $c$ , заменённой на  $c/n$ . Поэтому поле в резонаторе, заполненном обычной (с постоянными  $\varepsilon$  и  $\mu$ ) средой, может быть без труда найдено, если известно поле соответствующей области пустого пространства. По этой причине, а в особенности ещё и потому, что на практике употребляются всегда именно пустотные резонаторы, мы во всех дальнейших формулах положим  $\varepsilon$  и  $\mu$  равными единице.

Беря  $\operatorname{rot}$  от третьего из уравнений (3.1) и производя простые преобразования, находим уравнение для напряжённости электрического поля  $E$

$$\Delta E + k^2 E = 0. \quad (3.2)$$

Если решение этого уравнения известно, то для нахождения напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  не нужно отдельно решать соответствующее уравнение, а вектор  $\mathbf{H}$  может быть найден непосредственно из третьего уравнения (3.2)

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Вычисленное таким образом магнитное поле автоматически удовлетворят граничным условиям. Граничные условия для электрического поля  $\mathbf{E}$  можно записать в виде  $\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ , где интеграл берётся по любому контуру, проведённому вдоль поверхности металла, поскольку на этой поверхности касательные слагающие вектора  $\mathbf{E}$  обращаются в нуль. Поэтому  $\iint \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$ , где интеграл распространяется на любой участок граничной поверхности. Из последнего соотношения следует, что нормальная слагающая  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  обращается в нуль в любой точке на граничной поверхности, откуда, в свою очередь, вытекает, что граничные условия для магнитного поля  $\mathbf{H}$  действительно будут автоматически выполнены [ср. формулу (3.3)].

Общих методов решения уравнения (3.2) для полости произвольной формы не существует и решение его может быть найдено только для небольшого числа случаев специально простой формы. Задача о нахождении электромагнитного поля в полости во многих отношениях сходна с соответствующей акустической задачей о нахождении стоячих звуковых волн в замкнутой полости.

Однако, электромагнитная задача является более сложной, так как электромагнитные волны являются векторными волнами, причём каждая компонента вектора  $\mathbf{E}$  в отдельности удовлетворяет уравнению (3.2) и, кроме того, их совокупность связана между собой условием  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . В акустической же задаче приходится иметь дело с одной скалярной величиной, например, давлением в волне.

Мы рассмотрим сейчас решение уравнения (3.2) для полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, стеки которого перпендикулярны к координатным осям и отсекают на них отрезки

$$0 < x < A, \quad 0 < y < B, \quad 0 < z < C.$$

Если мы попытаемся искать решение уравнения (3.2) в виде

$$E_x = E_1 \frac{\cos k_1 x}{\sin k_1} \cos k_2 y \cos k_3 z,$$

$$E_y = E_2 \frac{\cos k_1 x}{\sin k_1} \sin k_2 y \cos k_3 z,$$

$$E_z = E_3 \frac{\cos k_1 x}{\sin k_1} \sin k_2 y \sin k_3 z,$$

то уравнение будет удовлетворено при выборе любой комбинации синусов и косинусов, если только числа  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  связаны соотношением

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2.$$

Для того, чтобы выполнить граничное условие: перпендикулярность вектора  $\mathbf{E}$  ко всем стенкам полости, мы должны ограничиться либо синусами, либо косинусами и наложить на  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  условие:

$$k_1 = \frac{l\pi}{A}, \quad k_2 = \frac{m\pi}{B}, \quad k_3 = \frac{n\pi}{C}, \quad (3.4)$$

где  $l$ ,  $m$  и  $n$ —целые числа.

Поэтому решение имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \frac{l\pi x}{A} \sin \frac{m\pi y}{B} \sin \frac{n\pi z}{C}, \\ E_y &= E_2 \sin \frac{l\pi x}{A} \cos \frac{m\pi y}{B} \sin \frac{n\pi z}{C}, \\ E_z &= E_3 \sin \frac{l\pi x}{A} \sin \frac{m\pi y}{B} \cos \frac{n\pi z}{C}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Три амплитуды  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  не являются независимыми, но связаны соотношением

$$\frac{l\pi}{A} E_1 + \frac{m\pi}{B} E_2 + \frac{n\pi}{C} E_3 = 0. \quad (3.6)$$

Следовательно, каждой совокупности целых чисел  $l$ ,  $m$  и  $n$  отвечают две линейно независимые волны. Если  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  рассматривать, как три компоненты вектора,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , как компоненты другого вектора, то допустимым является любой вектор  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , перпендикулярный к вектору  $\mathbf{k}$ . Возможные резонансные частоты удовлетворяют условию

$$\left( \frac{v}{C} \right)^2 = \left( \frac{l}{2A} \right)^2 + \left( \frac{m}{2B} \right)^2 + \left( \frac{n}{2C} \right)^2, \quad (3.7)$$

где  $l$ ,  $m$  и  $n$ —целые числа, причём по крайней мере два из них одновременно отличны от нуля.

Для волн, у которых одна из компонент вектора  $\mathbf{k}$  равна нулю, т. е. равно нулю одно из чисел  $l$ ,  $n$ ,  $m$ , вектор электрического поля направлен параллельно той оси, вдоль которой отсутствует компонента вектора  $\mathbf{k}$ . В этом случае имеется только одно решение уравнения (3.6) и только один вектор, удовлетворяющий условию (3.7), хотя, как мы только что указывали, в общем случае имеется два линейно независимых решения, отвечающих данной совокупности  $l$ ,  $m$  и  $n$ .

Наименьшая резонансная частота волн в ящике получается в том случае, когда два числа, относящихся к осям, вдоль которых ящик имеет наибольшие размеры, равны единице, а третье — нулю. Если  $A$  и  $B$ —две большие стороны полости, то волна с наименьшей частотой поляризована вдоль третьей стороны ящика, и соответствующая длина волны равна

$$\lambda = \frac{2}{(A^{-2} + B^{-2})^{1/2}}.$$

В частности, для кубического ящика длина волны, отвечающая наименьшей резонансной частоте, равна длине диагонали грани ящика  $\lambda = \sqrt{2} A$ .

Число различных резонансных колебаний быстро возрастает по мере передвижения по шкале частот. Рассмотрим, например, ящик с одной стороной, значительно меньшей двух других (т. е.  $B = A$ ,  $C \ll A$ ). Колебания с наименьшей частотой отвечают  $n = 0$ . Значение величины  $2A$  определяется выражением

$$2A = \left[ l^2 + m^2 + n^2 \left( \frac{A}{C} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Легко подсчитать, что существует 33 различных набора целых чисел  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , приводящих к частотам больших, чем наименьшая частота в пять и менее раз. Можно также заметить, что частоты могут быть сгруппированы в серии: главная серия образуется по закону (110), (220), (330), (440); другая серия начинается с частот (120) и (210) и содержит частоты вида (240) и (420), (360) и (630) и т. д. Однако, закон образования высших частот путем образования целых кратных является специальным свойством прямоугольного ящика и отсутствует для полостей иной формы.

В заключение необходимо дать определение некоторых терминов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Каждую частоту, для которой существует решение уравнений поля, удовлетворяющее граничным условиям, мы будем называть собственной частотой. Наименьшая из собственных частот называется фундаментальной или основной. Если высшие частоты являются целыми кратными фундаментальной частоты, они называются гармониками. Частное решение уравнений для  $E$  и  $H$  образует собственное колебание в полости. Если при этом одной частоте отвечает несколько собственных колебаний, то такие колебания называются вырожденными. Степенью вырождения называется число различных линейно-независимых собственных колебаний, отвечающих одной и той же частоте.

Так, в только что рассмотренном примере фундаментальная частота является невырожденной, а все высшие частоты — двукратно вырожденными, поскольку, например, решения  $(1, 2, 0)$  и  $(2, 1, 0)$  линейно-независимы и имеют одинаковые частоты. Такой тип вырождения мы будем называть поляризационным вырождением. Вырождение, возникающее из-за симметрии формы полости, носит название вырождения симметрии. Например, колебания  $(1, 2, 0)$  и  $(2, 1, 0)$  имеют одинаковые частоты только в том случае, когда рёбра  $A$  и  $B$  равны между собой.

Слабое отклонение от условия  $A = B$ , преднамеренное или связанное с несовершенством прибора или характером включения резонатора в общую цепь, приводит к тому, что вырожденные частоты начинают слегка отличаться друг от друга. Мы будем говорить при этом, что вырождение снимается.

Очень важным моментом является отсутствие единственности в решении уравнений волнового поля, связанного с вырождением. Например, в случае поляризационного вырождения в качестве основных колебаний можно выбрать любые два (предпочтительно взаимно перпендикулярные) вектора, удовлетворяющие условию (3.6). Любая линейная комбинация их является возможным собственным колебанием, связанным с этой частотой.

Аналогично, в случае вырождения симметрии, истинное собственное колебание может быть линейной комбинацией вырожденных колебаний. Рассмотрим, например, колебания  $(1, 2, 0)$  и  $(2, 1, 0)$ . Согласно (3.5) у обеих комбинаций отлична от нуля только  $z$ -ая компонента вектора  $E$ , которая равна, соответственно,

$$E_{120} = C \sin\left(\frac{\pi x}{A}\right) \sin\frac{2\pi y}{A},$$

$$E_{210} = D \sin\left(\frac{2\pi x}{A}\right) \sin\frac{\pi y}{A},$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные амплитуды. В зависимости от относительных значений обеих амплитуд возможны самые разнообразные виды распределения поля в полости; некоторые из них схематически изображены на рис. 3.

Так как комбинация с  $C=D$  представляет собой колебания вдоль линии  $y=x$  так же, как вдоль  $y=0$  и  $x=0$ , она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к фундаментальному колебанию в прямоугольной призме, образованной этими тремя линиями. Таким образом, часто можно находить частные решения для полостей простой формы, которые сложно находить иными способами.

Этот приём, однако, непригоден уже для прямоугольной призмы с неравными сторонами, так как в ней собственные колебания не вырождены и не могут непосредственно складываться друг с другом.

Пример: Рассмотреть колебания, отвечающие соотношению амплитуды  $D=\pm iC$ .

#### § 4. Нормальные координаты\*)

Детально рассмотренное в предыдущем параграфе решение задачи о собственных колебаниях в прямоугольном резонаторе позво-

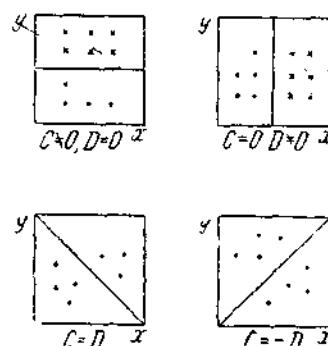


Рис. 3. Различные типы распределения поля, приводящие к вырождению собственных колебаний (120) и (210).

\*) Большая часть этого параграфа может быть опущена при первом чтении, но для дальнейшего нужно иметь в виду основные полученные в нём

лило нам познакомиться с основными чертами, характерными для задач о собственных колебаниях в полости любой формы. Именно, мы видели, что решения задачи, удовлетворяющие граничным условиям, существуют только для дискретного ряда частот, причём каждой частоте отвечает одно или несколько собственных колебаний.

Очевидно, в наиболее общем случае в полости резонатора одновременно возбуждены все собственные колебания, подобно тому как при ударе по закреплённой мемbrane в ней возбуждаются все возможные собственные колебания. Для математического описания собственных колебаний поля в полости в общем случае мы введём так называемые нормальные координаты, которые представляют совокупность амплитуд всех основных электромагнитных волн в полости.

**Вектор-потенциал.** Вместо того, чтобы пользоваться непосредственно напряжённостями электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , удобнее пользоваться скалярным и вектор-потенциалами  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , которые определяются с помощью соотношений:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (4.1)$$

При таком определении вектор-потенциал измеряется в тех же единицах, что и ток. Уравнения для  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  и  $\operatorname{div} \mathbf{H}$  при подстановке в них потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  будут удовлетворены автоматически. Подставляя (4.1) в два других уравнения электромагнитного поля, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 4\pi \mathbf{j}, \\ -\Delta \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 4\pi \rho. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Мы можем по своему произволу распорядиться величиной  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  так, чтобы упростить полученные уравнения. Если положить  $\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , мы получим следующие уравнения для потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -4\pi \mathbf{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 4\pi \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Эти уравнения будут основными в теории излучения системой движущихся зарядов и токов, которой будет посвящена IV глава.

результаты — ортогональность волновых функций [формула (4.5)] и динамические уравнения для амплитуд собственных колебаний [формула (4.10)]. Этот параграф представляет приложение к интересующей нас задаче формализма квантовой электродинамики — ср. 2.

Беря  $\operatorname{div}$  от первого уравнения, умножая на  $1/c$  второе и складывая их, мы найдём уравнение для временной зависимости величины  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \partial \varphi / \partial t$ , именно

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \varphi \right) = 0.$$

В правой части последнего уравнения стоит нуль потому, что ток и заряды должны удовлетворять уравнению непрерывности (1.5). Оно показывает, что если мы имеем решение, удовлетворяющие третьему уравнению (4.3) вместе с его производными по времени при  $t = 0$ , то тем самым мы удовлетворяем ему и во все остальные времена.

Предположим теперь, что задача о нахождении собственных частот и отвечающих им собственных волн в полости может быть решена таким же образом, как это делалось для прямоугольного ящика. Это означает, что нам известна совокупность величин  $k_1, k_2, k_3$  и т. д. и соответствующих решений  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  и т. д. уравнений для потенциала

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (4.4)$$

удовлетворяющих граничным условиям.

А перпендикулярно к границе области или обращается в нуль. Как мы видели, с каждым вырожденным числом  $k_n$  связано не одно, а несколько линейно-независимых решений  $\mathbf{A}_n$ . Поэтому для полной нумерации всех векторов  $\mathbf{A}$  нужно пользоваться ещё одним индексом, позволяющим различать  $\mathbf{A}$ , соответствующие одному и тому же значению  $k_n$ . Однако, обычно можно не вводить такого усложнения письма, а нумеровать одним индексом  $n$  все независимые волновые функции, так что в случае вырождения нескольким различным значениям индекса и отвечали бы одинаковые значения  $k_n$ .

Ортогональность волновых функций. Векторные волны  $\mathbf{A}_n$  обладают важным свойством ортогональности, что позволяет выражать через них остальные функции, подобно тому как это делается в теории рядов Фурье. Составим выражение

$$\mathbf{A}_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}_m = (k_n^2 - k_m^2) \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m.$$

Воспользовавшись известным тождеством векторного анализа

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

это уравнение можно написать в виде

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m + \operatorname{rot} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m) = (k_n^2 - k_m^2) \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m.$$

Проинтегрируем теперь обе части последнего уравнения по объёму полости. Интеграл в левой части может быть преобразован в поверхностный интеграл, распространённый по поверхности, ограничивающей полость. Однако, поскольку  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{A}_m$  перпендикулярны к по-

верхности, этот интеграл исчезает. Поэтому, имеем

$$\int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m dV = 0, \text{ если } n \neq m. \quad (4.5)$$

В случае вырожденных значений  $k$  всегда можно выбрать такую линейную комбинацию векторов  $\mathbf{A}_n$ , которая удовлетворяла бы условиям ортогональности даже и в том случае, если бы первоначально найденные  $\mathbf{A}$  этим условиям не удовлетворяли.

Поскольку частное решение уравнений для  $\mathbf{A}$  будет оставаться решением при умножении его на произвольную постоянную, мы можем подобрать при различных  $\mathbf{A}_n$  постоянные множители так, чтобы нормировать функции, т. е. чтобы имело место равенство

$$\int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* dV = V, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{A}_n^*$  — комплексно-сопряжённая  $\mathbf{A}_n$  функция, а  $V$  — объём полости, заполненной излучением. При такой нормировке функции  $\mathbf{A}_n$  считаются безразмерными.

Рассмотрим сперва случай, когда плотность заряда внутри полости всё время равна нулю. Тогда и  $\varphi = 0$ , и мы можем попытаться отыскать решение первого из уравнений (4.3) в виде

$$\mathbf{A} = \sum q_n(t) \mathbf{A}_n(x, y, z). \quad (4.7)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{A}_n$  безразмерны, временные множители  $q_n$  имеют размерность абсолютных амперов. Временные амплитуды, характеризующие возбуждение соответствующих электромагнитных колебаний, называются нормальными амплитудами поля.

Каждому собственному колебанию отвечает своя амплитуда, так что полное число их бесконечно велико.

Амплитуды токов возбуждения. Разложим ток в полости резонатора  $\mathbf{j}(x, y, z, t)$  в ряд Фурье по векторам  $\mathbf{A}_n$ , так что

$$\mathbf{j}(x, y, z, t) = \sum I_n(t) \mathbf{A}_n(x, y, z). \quad (4.8)$$

Для формального определения коэффициентов разложения воспользуемся условиями ортогональности и нормировки функций  $\mathbf{A}$  и, как это обычно делается в теории рядов Фурье, без труда найдём

$$I_n(t) = \frac{1}{V} \int \mathbf{j} \mathbf{A}_n^* dV. \quad (4.9)$$

Размерность  $I_n(t)$ , как и  $\mathbf{j}$  —  $\text{А/см}^2$ . Мы будем именовать коэффициенты  $I_n(t)$  амплитудами тока возбуждения  $n$ -го колебания. Заметим, кстати, что распределение токов  $\mathbf{j}$  является тем более эффективным для возбуждения  $n$ -го собственного колебания, чем ближе пространственное распределение его к пространственному распределению возбуждаемого колебания.

Уравнение для амплитуд поля. Подставляя (4.8) и (4.7) в первое из уравнений (4.3) и приравнивая коэффициенты при

векторах  $\mathbf{A}_n$ , мы получим следующее уравнение для амплитуд поля в резонаторе:

$$\ddot{q}_n(t) + (ck_n)^2 q_n(t) = 4\pi c^2 I_n(t). \quad (4.10)$$

Это уравнение совершенно идентично с уравнением вырожденных колебаний гармонического осциллятора, обладающего собственной частотой  $(ck_n) 2\pi$ .

Если амплитуда тока возбуждения  $I_n(t)$  равна нулю, соответствующая амплитуда  $q_n$  является гармонической функцией времени, изменяющейся с частотой  $(ck_n)$  с постоянной амплитудой. Отсутствие затуханий у свободных колебаний связано с тем, что мы предполагаем, что стеки полости сделаны из идеального проводника. Влияние конечного электрического сопротивления стенок будет учтено в § 8.

Выражение для энергии. Подставляя в общее выражение для энергии электрического поля в пустоте

$$W_e = \int \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_n j_n^2,$$

выражая  $E$  через  $\mathbf{A}$  и пользуясь формулами (4.5), (4.6) и (4.7), находим следующее выражение для энергии электрического поля в полости с излучением:

$$W_e = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_n \dot{q}_n^2. \quad (4.11)$$

Аналогично, для магнитной энергии имеем

$$W_m = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = \sum_{n,m} \int q_n q_m (\operatorname{rot} \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m) dV.$$

Для упрощения этого выражения вычислим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{rot} \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m) dV &= \int \operatorname{div} (\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m) dV + k_m^2 \int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m dV = \\ &= \int (\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m) ds + k_m^2 \int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m dV. \end{aligned}$$

Поверхностный интеграл исчезает, так как нормальная к поверхности компонента вектора  $\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m$  равна нулю. Следовательно,

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m dV = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ k_n^2 V & n = m. \end{cases}$$

Так что, окончательно, для магнитной энергии находим

$$W_m = \frac{V}{8\pi} \sum_n k_n^2 q_n^2. \quad (4.12)$$

Поскольку отдельные собственные колебания независимы и энергия взаимодействия между ними равна нулю, что видно из условия ортогональности векторов  $A_n$ , полная энергия поля равна просто сумме электрической и магнитной энергии, т. е.

$$W_n = \frac{V}{8\pi c^2} [q_n^2 + (ck_n^2) q_n^2]. \quad (4.13)$$

Выражение для  $dW_n/dt$  может быть найдено из (4.10) совершенно таким же способом, как находится интеграл энергии для системы частиц в механике. Простые вычисления дают

$$\frac{dW_n}{dt} = V \dot{q}_n(t) I_n(t), \quad (4.14)$$

т. е. скорость возрастания энергии электромагнитного поля  $n$ -го колебания равна скорости возрастания амплитуды этого колебания, умноженной на ток возбуждения, отвечающий этому колебанию, и на объём полости, заполненной полем.

Это выражение совершенно аналогично выражению для мощности в механике, равной произведению силы (в нашем случае  $I_n$ ) на скорость (в нашем случае пропорциональной скорости возрастания амплитуды  $q_n$ ).

**Эффективная индукция и ёмкость.** Для тех, кто привык мыслить в терминах резонансных контуров с их ёмкостями и индукциями, будет полезно ввести определение величин, играющих для полого резонатора роль эффективной ёмкости и индукции. Обычная индукция связана с магнитной энергией соотношением  $W_m = L_i^2/2$ , где  $W_m$  выражено в эргах,  $i$  в абсолютных амперах и  $L$  в сантиметрах.

В нашем случае амплитуда  $n$ -го колебания  $q_n$  играет в магнитной энергии роль тока, так что мы можем отождествить коэффициент при  $q_n^2$  в (4.12) с половиной эффективной индукции  $L_n$   $n$ -го собственного колебания

$$L_n = \frac{V k_n^2}{4\pi} = \frac{\pi V}{\lambda_n^2}. \quad (4.15)$$

Для перевода в практические единицы напомним, что индукция в 1 см равна  $10^{-9}$  генри.

Ёмкость  $n$ -го собственного колебания поля мы определим так, чтобы произведение  $L_n C_n$  давало правильную резонансную частоту в соответствии с известным соотношением

$$\lambda_n = 2\pi \sqrt{L_n C_n}.$$

Отсюда легко найти электростатическую ёмкость  $C_n$ , связанную с  $n$ -м собственным колебанием поля:

$$C_n = \frac{4\pi}{V k_n^4}. \quad (4.16)$$

Пример: Показать, что нормированный вектор  $\mathbf{A}_n$  для собственного колебания (110) в кубическом резонаторе с ребром  $A$  будет

$$A_n = 2k \sin \frac{\pi x}{A} \sin \frac{\pi y}{A},$$

где  $k$  — единичный вектор, направленный по оси  $z$ . Показать также, что электрическое поле достигает максимального значения на линии  $x = A/2, y = A/2$  и что если амплитуда  $q_{110} = 1$  абс. ед., то максимальное значение электрического поля равно  $4\pi/\lambda$  абс. ед., где  $\lambda = \sqrt{2}A$ .

Влияние объемных зарядов. Переходим теперь к рассмотрению более общего случая, когда в полости резонатора отличны от нуля и плотность тока, и плотность заряда. В этом случае разложение (4.7) уже не имеет места, так как оно приводит к невыполняющемуся уже более равенству  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

То же самое относится и к разложению (4.8). Необходимое обобщение полученных выше соотношений заключается в следующем.

Предположим, что однородная граничная задача для скалярной функции

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_m + k_m^2 \varphi_m &= 0 \\ \varphi_m &= 0 \text{ на границе области} \end{aligned} \quad (4.17)$$

решена и соответствующие собственные функции и собственные числа известны. Функции  $\varphi_m$  можно считать ортогональными и нормированными

$$\varphi_l \Delta \varphi_m - \varphi_m \Delta \varphi_l + (k_m^2 - k_l^2) \varphi_m \varphi_l = 0$$

или

$$\varphi_l \Delta \varphi_m - \varphi_m \Delta \varphi_l = \operatorname{div} (\varphi_l \operatorname{grad} \varphi_m - \varphi_m \operatorname{grad} \varphi_l) = (k_l^2 - k_m^2) \varphi_m \varphi_l.$$

Интегрируя по всему объему полости, имеем

$$\begin{aligned} (k_l^2 - k_m^2) \int \varphi_m \varphi_l dV &= \int \operatorname{div} (\varphi_l \operatorname{grad} \varphi_m - \varphi_m \operatorname{grad} \varphi_l) dV = \\ &= \int (\varphi_l \operatorname{grad} \varphi_m - \varphi_m \operatorname{grad} \varphi_l) dS = 0 \end{aligned}$$

при  $l \neq m$ .

Условие нормировки, накладываемое на функции  $\varphi_m$ , имеет тот же вид, что и (4.6):

$$\int \varphi_m^2 dV = V. \quad (4.18)$$

Мы предположим, далее, что плотность заряда  $\rho(x, y, z, t)$  может быть разложена в ряд по ортогональным функциям  $\varphi_m$ , т. е.

$$\rho(x, y, z, t) = \sum_m R_m(t) \varphi_m(x, y, z) \quad (4.19)$$

и аналогично, скалярный потенциал  $\varphi(x, y, z, t)$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_m \Phi_m(t) \varphi_m(x, y, z). \quad (4.20)$$

Подстановка этих разложений в уравнение для  $\varphi$  (4.3) приводит к уравнениям для коэффициентов  $\Phi_m$ , совершенно аналогичным (4.10):

$$\ddot{\Phi}_m(t) + (ck_m)^2 \Phi_m = 4\pi c^3 R_m. \quad (4.21)$$

В выражения для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{j}$  должны быть внесены такие добавки, чтобы их дивергенция не исчезала. Подходящими для этого функциями являются

$$\mathbf{B}_m = \frac{1}{k_m} \operatorname{grad} \varphi_m, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_m = 0. \quad (4.22)$$

Функции  $\mathbf{B}_n$  ортогональны друг к другу и к функциям  $\mathbf{A}_n$ . Чтобы проверить последнее утверждение, воспользуемся общей формулой

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{rot} \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}) dV = \\ = \int (\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}) dS + \int (\operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) dS. \end{aligned}$$

Отождествим вектор  $\mathbf{a}$  с  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{b}$  с  $\mathbf{B}_m$ . Тогда два первых интеграла в левой части исчезают, первый из-за равенства нулю  $\operatorname{div} \mathbf{A}_n$ , второй из-за равенства нулю  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_m$  и третий превращается в  $-k_n^2 \int \mathbf{A}_n \mathbf{B}_m dV$ .

В правой части первый интеграл исчезает, так как вектор  $\mathbf{B}_n$  перпендикулярен к поверхности, и второй из-за равенства  $\operatorname{div} \mathbf{A}_n = 0$ . Множитель  $1/k_m$  введен в (4.22) для того, чтобы  $\mathbf{B}_m$  было нормировано так же, как и  $\mathbf{A}_n$ :

$$\int \mathbf{B}_m \mathbf{B}_l dV = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ V, & m = l. \end{cases} \quad (4.23)$$

Последнее вытекает из соотношения

$$\int \operatorname{grad} \varphi_n \operatorname{grad} \varphi_l dV = \int \operatorname{div} (\varphi_n \operatorname{grad} \varphi_l) dV - \int \varphi_n \Delta \varphi_l dV.$$

Мы предположим теперь, что выражения (4.7) и (4.8) при наличии в полости объемных зарядов обобщаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_n q_n(t) \mathbf{A}_n + \sum_m P_m(t) \mathbf{B}_m, \\ \mathbf{j} &= \sum_n I_n(t) \mathbf{A}_n + \sum_m H_m(t) \mathbf{B}_m. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Подставляя эти выражения в уравнение для  $\mathbf{A}$  (4.3), находим уравнение для  $P_m$ :

$$\ddot{P}_m(t) + (ck_m)^2 P_m(t) = 4\pi c^3 H_m(t), \quad (4.25)$$

которое, совместно с уравнениями (4.21) и (4.10), образует полную систему уравнений для всех амплитуд волнового поля. Значительное усложнение возникает при учёте влияния объемных зарядов на зна-

чение ёмкости. При этом необходимо не только ввести в энергию скалярный потенциал, но и учесть изменение, возникающее в вектор-потенциале  $\mathbf{A}$ .

Аналогично (4.3) можно показать, что если в начальный момент имеют место равенства

$$\Phi_m - ck_m P_m = 0$$

и

$$\frac{d}{dt} (\Phi_m - ck_m P_m) = 0,$$

то они остаются выполненными во всё дальнейшее время. Следовательно, решения уравнений (4.10), (4.21) и (4.25) должны быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли этим условиям, как части начальных условий задачи.

Если вычислить электрическую и магнитную энергию поля, то окажется, что в магнитной энергии никаких изменений не произойдёт, так как ротор от добавленных в вектор-потенциал членов равен нулю; в электрической же энергии появятся новые члены и она приобретёт вид

$$W_t = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_n \dot{q}_n^2 + \frac{V}{8\pi c^2} \sum_m \dot{P}_m^2 + \frac{V}{8\pi} \sum_m k_m^2 \Phi_m^2. \quad (4.26)$$

### § 5. Цилиндрический резонатор\*)

Цилиндрическим резонатором мы будем называть резонатор, ограниченный плоскостями  $z=0$  и  $z=C$  с торцов, причём сечение в любой плоскости  $z=\text{const}$  представляет одну и ту же кривую. Для такого резонатора задача о пространственном распределении поля в самом общем виде может быть сведена к двухмерной задаче. Мы будем исходить из уравнений Максвелла (3.1), в которых положено  $\epsilon = \mu = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -ik\mathbf{H}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= +ik\mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Естественно предположить, что решение зависит от координаты  $z$  так же, как и в случае прямоугольного ящика, т. е. выражается через  $\cos k_z z$  и  $\sin k_z z$ .

Все возможные собственные колебания поля в цилиндрическом резонаторе могут быть разделены на два класса: колебания  $E$ -типа, для которых

$$E_z \neq 0, \text{ а } H_z = 0, \quad (5.2)$$

и колебания  $H$ -типа, для которых

$$H_z \neq 0, \text{ а } E_z = 0.$$

\*) Литература по этому вопросу весьма скучна. Некоторые общие вопросы освещены в книгах, см. §.

Колебания  $E$ -типа. Рассмотрим сперва колебания  $E$ -типа. Так как у этих колебаний  $H_z = 0$ , то уравнения для  $\text{rot} H$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} ikE_x &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ ikE_y &= +\frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ ikE_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

и, аналогично, уравнения для  $\text{rot} E$

$$\left. \begin{aligned} -ikH_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ -ikH_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Компоненты  $E_x$  и  $E_y$  можно выразить через  $E_z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Левая часть этих уравнений равна, соответственно  $(k^2 - k_3^2) E_x$  и  $(k^2 - k_3^2) E_y$  при любой зависимости  $E_z$  от координаты  $z$ . Поэтому, если обозначить через  $E_s$  компоненты вектора  $E$  в сечении резонатора, перпендикулярном оси  $z$ ,

$$E_s = E_x + kE_y,$$

то уравнения можно записать в векторном виде

$$(k^2 - k_3^2) E_s = \text{grad}_s \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (5.5)$$

где  $\text{grad}_s$  означает градиент в поперечном сечении.

Воспользовавшись далее уравнениями (5.4), чтобы исключить магнитное поле из третьего уравнения (5.3), мы получим основное уравнение, описывающее изменение  $E_s$  по сечению

$$\Delta_s E_s + (k^2 - k_3^2) E_s = 0, \quad (5.6)$$

где  $\Delta_s$  означает оператор Лапласа для сечения (равный обычному оператору Лапласа без производных по  $z$ ).

Наконец, с помощью (5.4) можно выразить магнитное поле через электрическое

$$H_x = \frac{ik}{k^2 - k_3^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad H_y = -\frac{ik}{k^2 - k_3^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (5.7)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{H} = -\frac{ik}{k^2 - k_3^2} \mathbf{k} \operatorname{grad}_s E_z, \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ .

Границным условием для электрического поля  $\mathbf{E}$  является нормальность вектора  $\mathbf{E}$  к границам поверхностям резонатора. Чтобы удовлетворить этому условию на концах цилиндра в  $E_z$ , нужно взять зависимость от  $\cos k_3 z$ , но не от  $\sin k_3 z$ . Условие на стенках цилиндра приводит к тому, что допустимыми являются только те решения уравнения (5.6), которые обращаются в нуль на границе области.

Обозначим через  $\phi_n(x, y)$  и  $k_n$  — собственные функции и собственные числа двухмерной краевой задачи

$$\Delta_s^2 \phi_n(x, y) + k_n^2 \phi_n(x, y) = 0, \quad (5.9)$$

$$\phi_n(x, y) = 0 \text{ на границе области.}$$

В математике хорошо известно решение этой задачи для самых разнообразных границ, так как задачи этого типа часто встречаются в других разделах математической физики.

Тогда для собственных колебаний  $E$ -типа имеем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= A \phi_n(x, y) \cos k_3 z, \\ k^2 &= k_n^2 + k_3^2, \\ E_s &= -\left(\frac{k_3}{k_n^2}\right) A \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \mathbf{k}\right) \sin k_3 z, \\ H_s &= -i \left(\frac{k}{k_n^2}\right) A \left(-\frac{\partial \phi_n}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \mathbf{j}\right) \cos k_3 z. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Для вектор-потенциала имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \left\{ \phi_n(x, y) \cos k_3 z \cdot \mathbf{k} - \frac{k_3}{k_n^2} \operatorname{grad}_s \phi_n \sin k_3 z \right\}, \quad (5.11)$$

где  $\mathbf{B}$  — постоянная нормировки, выбранная так, чтобы было выполнено условие (4.6). Именно, имеем:

$$\int \mathbf{A}^2 dV = B^2 \frac{C}{2} \left[ \int \phi_n^2 dx dy + \frac{k_3^2}{k_n^4} \int (\operatorname{grad} \phi_n)^2 dx dy \right].$$

Так как

$$(\operatorname{grad} \phi)^2 = \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi) - \phi \Delta \phi,$$

это условие сводится к

$$\int A^2 dV = B \frac{C}{2} \left[ 1 + \frac{k_3^2}{k_n^2} \right] \int \phi_n^2 dx dy,$$

так что, если через  $V$  обозначить объём резонатора, то

$$B^2 = \frac{2V k_n^2}{C k^2 \int \phi_n^2 dx dy}. \quad (5.12)$$

**Колебания  $H$ -типа.** Теория собственных колебаний  $H$ -типа совершенно аналогична только что изложенной теории колебаний  $E$ -типа. Вместо (5.3) и (5.4) мы имеем

$$\begin{aligned} ikE_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, & ikE_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ 0 &= ikE_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ -ikH_x &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}, & -ikH_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z}, & -ikH_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Эти уравнения позволяют выразить  $H_x$  и  $H_y$  через  $H_z$  и получить для компоненты поля, лежащей в сечении резонатора, уравнение

$$(k^2 - k_3^2) H_z = \text{grad}_s \left( \frac{\partial H_z}{\partial z} \right). \quad (5.13)$$

Для  $H_z$  имеем аналогично (5.6)

$$\Delta_s^2 H_z + (k^2 - k_3^2) H_z = 0 \quad (5.14)$$

и, наконец,

$$E_s = \frac{ik}{k^2 - k_3^2} k \text{grad}_s H_z, \quad (5.15)$$

аналогично (5.8).

Поскольку граничные условия требуют, чтобы  $H$  было параллельно стенке, в  $H_z$  нужно брать множитель  $\sin k_3 z$ . Из (5.13) мы видим, что для того, чтобы вектор  $H_s$  был тангенциальным к поверхности цилиндра, градиент по нормали от  $H_z$  должен обращаться в нуль на стенках.

Обозначим через  $\varphi_m(x, y)$  и  $k_m$  собственные функции и собственные числа двухмерной задачи

$$\begin{aligned} \Delta_s \varphi_m + k_m^2 \varphi_m &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \text{ на границе}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где  $\partial/\partial n$  означает дифференцирование по нормали к поверхности. Разница в граничных условиях (5.9) и (5.16) приводит к тому, что задача  $H$ -типа имеет другой набор собственных значений и собственных функций.

Для собственных колебаний  $H$ -типа имеем

$$\left. \begin{aligned} H_z &= A \varphi_m(x, y) \sin k_3 z, \\ k^2 &= k_n^2 + k_3^2, \\ H_s &= \left( \frac{k_3}{k_m^2} \right) A \operatorname{grad}_s \varphi_m \cos k_3 z, \\ E_s &= i \left( \frac{k}{k_m^2} \right) A \left( -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \mathbf{j} \right) \sin k_3 z. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Для вектор-потенциала этих колебаний можно положить

$$\mathbf{A} = B \left( -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \mathbf{j} \right) \sin k_3 z,$$

где  $B$  — нормирующий множитель, равный, как показывают расчёты,

$$B^2 = \frac{2V}{C k_m^2 \int \varphi_m^2 dx dy}. \quad (5.18)$$

Заметим, что среди колебаний  $E$ -типа имеется колебание с  $k_3 = 0$ , для которого резонансная частота не зависит от высоты цилиндра, тогда как колебания  $H$ -типа существуют только для  $k_3 \neq 0$ .

Дозволенными значениями  $k_3$  являются, конечно, лишь значения

$$k_3 = \frac{n\pi}{C} \quad (n \text{ — целое число}). \quad (5.19)$$

Нам понадобятся специальные обозначения для обоих видов собственных колебаний цилиндрического резонатора. Наиболее удобными обозначениями для колебаний  $E$ - и  $H$ -типов являются соответственно  $E(n, l)$  и  $H(m, l)$ . Для цилиндров со специальными формами сечения индексы  $n$  и  $m$  будут замещаться в некоторых случаях более удобными индексами.

Резонатор с двойными стенками. Если сечение цилиндрического резонатора ограничено с внешней стороны кривой  $C_1$ , а с внутренней — кривой  $C_2$ , как указано на рис. 4, то полость конденсатора не является более односвязной областью. Это значит, что произвольный замкнутый контур внутри области не может быть стянут в точку непрерывной деформации внутри области. Неодносвязность области влечёт за собой некоторые важные следствия.

На практике кривые  $C_1$  и  $C_2$  представляют, обычно, концентрические круги, но, как мы сейчас увидим, общие свойства резонаторов с двойными стенками не зависят от вида граничных кривых.

Двумя важнейшими особенностями таких резонаторов является: 1) то, что в полости резонатора может существовать чисто магнитное статическое поле и 2) что в них возможно существование



Рис. 4. Схема сечения резонатора с двойными стенками.

системы собственных колебаний с частотой, зависящей только от длины, но не поперечных размеров цилиндра, у которых одновременно исчезают слагающие  $E_z$  и  $H_z$ . Такие колебания мы будем называть колебаниями коаксиального кабеля.

Если  $E_z$  и  $H_z$  одновременно равны нулю, то система уравнений Максвелла (5.3) и (5.4) имеет вид

$$\begin{aligned} ikE_x &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}, & ikE_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ -ikH_z &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}, & -ikH_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Из выражений для  $z$ -компонент уравнений для электрического и магнитного полей вытекает, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут быть представлены, как градиент некоторой скалярной функции  $U(x, y, z)$ .

Именно, положим

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -\operatorname{grad}_S U(x, y, z); \\ \text{тогда} \\ ikH_S &= k \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + k^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + k^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

а из третьего находим

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0.$$

Границные условия гласят, что  $E_S$  исчезает при  $z=0$  и  $z=C$  и на боковых стенках сосуда. Чтобы удовлетворить этим условиям, положим

$$U(x, y, z) = u(x, y) \sin \frac{n\pi z}{C},$$

где

$$\Delta U = 0$$

и  $u$  обращается в постоянную на граничных кривых  $C_1$  и  $C_2$ . Если бы мы имели дело с односвязной областью, ограниченной одной кривой  $C_2$ , то, как известно из теории потенциала, функция  $u$ , удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри области и постоянная на её границе, была бы постоянной всюду. Поэтому электрическое и магнитное поле внутри области тождественно и

обратилось бы в нуль. Это показывает, что в односвязной полости невозможно существование электромагнитного поля с исчезающими одновременно  $z$ -ми компонентами  $E_z$  и  $H_z$ .

Иначе, однако, дело обстоит в двухсвязной области между кривыми  $C_1$  и  $C_2$ . Мы можем здесь удовлетворить граничным условиям, положив  $u=u_1$  на кривой  $C_1$  и  $u=u_2$  на кривой  $C_2$ , где  $u_1$  и  $u_2$  — различные постоянные. При этом функция  $u(x, y)$  будет уже не постоянной, а превратится в функцию, совпадающую с электростатическим потенциалом, удовлетворяющим указанным условиям. Так как волновое число  $k$  не входит в граничные условия на боковых поверхностях цилиндра, оно полностью определится условиями на торцовых поверхностях, т. е.  $k=n\pi/C$ . Отсюда следует, что при любом виде кривых  $C_1$  и  $C_2$  в резонаторе с двойными стенками могут существовать собственные колебания с длиной волны  $\lambda=2C/n$ , где  $n$  — целое число.

Если перейти к пределу  $k \rightarrow 0$ , то электрическое поле обратится, очевидно, в нуль [так как  $U(x, y, z)=u(x, y) \sin kZ$  стремится при этом к нулю]. Однако, напряженность магнитного поля будет отлична от нуля и равна

$$H_s = k \operatorname{grad} u.$$

Таким образом, в резонаторе может существовать постоянное магнитное поле, образованное циркуляцией постоянного тока, текущего по внутренней и внешней стенкам цилиндра. Такие статические поля всегда существуют в резонаторе, внутренность которого представляет многосвязную область.

Использование теории функций. Поскольку функция  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа в двух измерениях, ряд результатов можно получить с помощью теории функций.

Для дальнейшего, положим  $z=x+iy$  (не следует смешивать  $z$  с координатой  $z$  вдоль оси цилиндра). Пусть далее

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y) \quad (5.21)$$

является аналитической функцией  $z$ . Для того, чтобы  $w$  имела однозначную и непрерывную производную  $f'(z)$ , должны выполняться условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.22)$$

Из (5.19) следует, что

$$E_x = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad E_y = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$iH_x = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad iH_y = -\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

если отвлечься от синусоидальной или косинусоидальной зависимостей  $E$  и  $H$  от координаты  $z$ , направленной вдоль оси цилиндра.

Формулы (5.22) можно кратко записать в векторном виде, как

$$\mathbf{E} - i\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi. \quad (5.23)$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию  $\psi = f(z)$  такую, что уравнение  $u(x, y) = \text{const.}$  определяет семейство замкнутых кривых, каждая из которых охватывает все предыдущие. Любые две из этих кривых могут быть выбраны в качестве граничных кривых  $C_1$  и  $C_2$  полого резонатора с двойными стенками, следовательно, каждая из функций  $u$  может представлять решение уравнений поля для всего семейства полых резонаторов.

Круговой коаксиальный кабель. Простейшим из приложений общего метода служит решение для кругового коаксиального кабеля. Оно даётся функцией

$$\psi = \log z \quad (5.24)$$

или

$$e^{u+iv} = z,$$

откуда

$$e^u = |z| = r,$$

так что

$$u = \log r$$

и

$$v = \arg z = \varphi,$$

где

$$\log z = \log r + i\varphi.$$

Следовательно, линии  $u = \text{const.}$  представляют круги  $r = \text{const.}$ , а линии  $\varphi = \text{const.}$  — лучи, проведённые под углом  $\varphi = \text{const.}$

Электрическое и магнитное поля, согласно (5.23), будут

$$\mathbf{E} - i\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi = -\left(\frac{1}{r}\right)r_0 - i\left(\frac{1}{r}\right)\varphi_0. \quad (5.25)$$

Электрическое поле направлено по радиус-вектору, магнитное поле циркулярно и оба убывают обратно пропорционально радиусу. Если радиус внутреннего цилиндра будет  $a$ , а внешнего  $b$ , то плотность тока, текущего по поверхности внутреннего цилиндра, будет равна  $1/4\pi a$  абс. ед. см, внешнего  $1/4\pi b$ . Полные токи, текущие по обеим поверхностям, равны друг другу и составляют  $1/2$  абс. А; линейный интеграл от вектора поля в пределах от  $r = a$  до  $r = b$  равен  $\log(b/a)$  абс. ед. Поэтому, если амплитуда возбуждения резонатора такова, что максимальная амплитуда тока (в точках, где  $\cos \pi \varphi C = \pm 1$ , т. е.  $z = 0$  или  $v = \pm C/m$ ) равна 1 А, максимальная амплитуда напряжённости (в точках, где  $\sin \pi \varphi C = \pm 1$ ) равна  $60 \log b/a$ . Это часто выражают словами: «импеданс круглого коаксиального кабеля равен  $60 \log b/a$  ом».

Если граничными кривыми служат не окружности, а более сложные кривые, то решение может быть получено следующим образом: предположим, что координаты  $(x, y)$  являются периодическими функция-

ми  $v$ ; не ограничивая общности, можно считать, что период равен  $2\pi$  и что функция комплексного переменного, удовлетворяющая этому условию, является разложением Фурье

$$z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{m(u+iv)}; \quad (5.26)$$

член  $A_0$  можно исключить из разложения, так как если бы он был отличен от нуля, при сдвигании соответствующим образом начала координат в плоскости  $(x, y)$ , можно было бы добиться обращения его в нуль.

Круговой коаксиальный передатчик получается при  $A_1 = 1$ ,  $A_m = 0$  (при  $m \neq 1$ ).

Эллиптический коаксиальный кабель. Интересным является случай, когда

$$A_1 = A_{-1} = \frac{f}{2}, \quad A_m = 0 \quad \text{при } m \neq \pm 1.$$

Формула (5.26) даёт

$$z = f(\cos hu \cos v + i \sin hu \sin v).$$

Отсюда следует, что кривые  $u = \text{const.}$  являются конфокальными эллипсами

$$\left(\frac{x}{f \cos hu}\right)^2 + \left(\frac{y}{f \sin hu}\right)^2 = 1$$

с фокусами в точке  $(x, y) = (\pm f, 0)$ .

Таким образом, в этом мы получаем теорию резонатора, ограниченного двумя конфокальными эллиптическими цилиндрами.

Если внутренний и внешний цилиндры имеют большие полуоси  $a$  и  $b$ , соответственно, ( $a, b > f$ ) на внутренней и внешней стенках,

$$\cos hu_1 = \frac{a}{f} \quad \text{и} \quad \cos hu_2 = \frac{b}{f}.$$

Линейный интеграл, взятый от внутренней до внешней стенки, будет равен

$$u_2 - u_1 = \cos h^{-1} \left( \frac{b}{f} \right) - \cos h^{-1} \left( \frac{a}{f} \right).$$

Магнитное поле в точке  $(u, v)$  равно  $-\text{grad } v$ , так что аксиальный ток на единицу длины на каждой из стенок равен  $1/4\pi \text{grad } v$  а.с. единиц. Полный ток по стенке равен  $\frac{1}{2}$  а.с. единиц, так как интеграл от  $\text{grad } v$  по поверхности равен  $2\pi$ . Следовательно, определяя импеданц так же, как и для кругового коаксиального передатчика, мы находим для импеданца передатчика

$$60 \left[ \cos h^{-1} \frac{b}{f} - \cos h^{-1} \frac{a}{f} \right] = 60 \lg \frac{b + (b^2 - f^2)^{1/2}}{a + (a^2 - f^2)^{1/2}}. \quad (5.27)$$

Мы можем, наконец, получить общее выражение для импеданца резонатора, ограниченного двумя цилиндрами любой формы.

Независимо от формы поверхности полный ток, текущий по внутреннему проводнику, равен  $\frac{1}{2}$  абс. ед. и линейный интеграл от вектора электрического поля, взятый на пути от внутреннего до внешнего проводника, равен  $u_2 - u_1$  абс. ед., если проводники находятся при потенциалах  $u_1$  и  $u_2$ .

Следовательно, импеданс резонатора независимо от формы образующих цилиндров равен

$$60(u_2 - u_1). \quad (5.28)$$

### § 6. Круговой цилиндр

Общие выводы предыдущего параграфа могут быть иллюстрированы на примере кругового цилиндра радиуса  $R$ , имеющем большой практический интерес. Вместо декартовых координат  $x, y$  удобно ввести полярные координаты.

Уравнения (5.9) и (5.16) будут удовлетворены решениями типа

$$I_m(k_a r) e^{im\varphi}, \quad (6.1)$$

где  $I_m(x)$  — бесселева функция с целым индексом  $m$ . Границные условия для колебаний  $E$ -типа будут удовлетворены, если выбрать  $k_a$  так, чтобы

$$I_m(k_a R) = 0. \quad (6.2)$$

Последнее условие приводит нас к необходимости заменить индекс  $a$  при  $k$  двумя индексами  $m$  и  $p$ , где  $m$  — порядок бесселевой функции и  $p$  — номер корня соответствующей бесселевой функции. Некоторые из корней бесселевых функций приведены в табл. 1. Корни

Таблица 1  
Значения корней  $X_{mp}$  уравнения  $I_m(X_{mp}) = 0$

	$m = 0$	1	2	3
$p=1$	2,405	3,832	5,135	6,379
2	5,520	7,016	8,417	9,760
3	8,654	10,173	11,620	13,017
4	11,792	13,323	14,796	16,229

расположены в порядке возрастания их численного значения. Таким образом, мы будем обозначать каждое  $E$ -колебание через  $E = (n, m, p)$ , а соответствующее волновое число  $k_{E_{nmp}}$ .

Волновое число колебания, удовлетворяющего граничным условиям, будет

$$k_{E_{amp}}^2 = \frac{X_{mp}^2}{R^2} + \frac{n^2\pi^2}{C^2}. \quad (6.3)$$

Колебание  $E$ -типа наименьшей частоты будет  $E(001)$ . Его волновое число

$$k_{E001} = 2,405/R \text{ или длина волны } \lambda_{E001} = 2,61R. \quad (6.4)$$

Следующее колебание в симметричной серии  $m=0$  будет  $E(002)$ . Его волновое число и длина волны, соответственно,

$$k_{E002} = 5,520/R \text{ и } \lambda_{E002} = 1,14R. \quad (6.5)$$

Мы видим, что частота этого колебания более, чем вдвое, превышает наименьшую собственную частоту резонатора.

Аналогично, для колебаний  $H$ -типа граничные условия требуют, чтобы волновое число  $k_b$  удовлетворяло уравнению

$$I'_m(k_b R) = 0. \quad (6.6)$$

Корни этого уравнения приведены в табл. 2.

Частоты колебаний  $H$ -типа будут поэтому определены уравнением

$$k_{H_{amp}}^2 = \frac{Y_{mp}^2}{R_2} + \frac{n^2\pi^2}{C^2}. \quad (6.7)$$

Значения корней  $I_{mp}$  уравнения  $I_m(Y_{mp})=0$

	$m=0$	1
$p=1$	3,832	1,840
2	7,016	5,335
3	10,173	8,535
4	13,323	11,705

Из табл. 2 мы видим, что  $Y_{11}$  меньше, чем любой из  $X_{mp}$ . Однако, поскольку для волн  $H$ -типа значение  $n=0$  запрещено, легко видеть, что частота колебания  $E(001)$  ниже частоты  $H(111)$ , если только  $C < 1,15R$ . Если же  $C > 1,15R$ , то, наоборот, частота колебания  $H(111)$  оказывается ниже частоты колебания  $E(001)$ .

Легко обобщить полученные результаты на случай резонатора, имеющего форму сектора кругового цилиндра. Предположим, что сектор ограничен плоскостями  $\varphi=0$  и  $\varphi=a$ , где  $a < 2\pi$ . Для колебаний  $E$ -типа на этих плоскостях должно быть выполнено равенство  $E_z=0$ . Этому условию можно удовлетворить, положив вместо (6.1)

$$\Phi_a(r, \varphi) = I \frac{m\pi}{a} (k_ar) \sin\left(\frac{m\pi\varphi}{a}\right). \quad (6.8)$$

Границные условия требуют, чтобы при  $r=R$  бесселевы функции должного индекса  $m\pi/\alpha$  в (6.8) обращались в нуль. Это условие определяет дозволенные значения частот.

Аналогично, для колебаний  $H$ -типа мы должны положить

$$\varphi_b(r, \varphi) = \frac{Im\pi}{\alpha} (k_b r) \cos \frac{m\pi\varphi}{\alpha}, \quad (6.9)$$

причём дозволенные волновые числа  $k_b$  определяются из требования, чтобы производная бесселевой функции обращалась в нуль при  $r=R$ .

Пример: Показать, что если резонатор представляет сектор (с углом раствора  $\alpha$ ) концентрических круговых цилиндров радиусом  $A$  и  $B$ , то  $E$ -колебания имеют вид

$$\psi = [CI(k_a r) + DN(k_a r)] \sin \frac{m\pi\varphi}{\alpha},$$

где  $I$  и  $N$ —две сопряжённые бесселевы функции дробного порядка  $m\pi/\alpha$ . Рассмотреть зависимость фундаментальной частоты от  $\alpha$  и отношения  $A/B$ .

### § 7. Резонатор, имеющий форму фигуры вращения

На практике часто применяются резонаторы, имеющие вид фигуры вращения. При рассмотрении таких резонаторов удобно пользоваться цилиндрическими координатами  $r, \varphi, z$ , причём цилиндрическая ось их совпадает с осью симметрии резонатора.

В резонаторе такой формы могут существовать симметрические колебания, у которых  $E_\varphi = 0$  и  $H_\varphi$  не зависит от угла  $\varphi$ .

В этом параграфе будет развита теория колебаний этого типа. В цилиндрических координатах пара уравнений Максвелла для  $\text{rot } \mathbf{E}$  и  $\text{rot } \mathbf{H}$  будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} ikE_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\ ikE_\varphi &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\ ikH_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}, \\ -ikH_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \\ -ikH_\varphi &= \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\ -ikH_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Предположим теперь, что  $H_r = H_z = 0$  и что  $H_\phi$  не зависит от  $\varphi$ . Тогда уравнения сводятся к

$$\left. \begin{array}{ll} a. & ikE_r = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z}, \\ b. & ikE_\phi = 0, \\ c. & ikE_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi), \\ d. & 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\ e. & -ikH_\phi = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\ f. & 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}. \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

Уравнения (d) и (f) являются следствиями уравнений (c) и (a), так как  $H_\phi$  не зависит от  $\varphi$  по условию. Исключая из (e) компоненты электрического поля с помощью (a) и (c), находим следующее уравнение для  $H_\phi$ :

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) H_\phi = 0. \quad (7.3)$$

Границные условия для вектора  $\mathbf{H}$  не налагают ограничений на решения уравнения (7.3). Однако, ограничения накладываются граничными условиями для  $\mathbf{E}$ .

Из (a) и (c) имеем

$$\mathbf{E}_s = E_r \mathbf{r} + E_\phi \mathbf{\varphi}_0 = \frac{i}{kr} \varphi_0 \cdot \mathbf{grad} (rH_\phi). \quad (7.4)$$

Положим, что граничной поверхностью служит кривая  $f(r, z) = 0$ , нормаль которой будет

$$\mathbf{n} = \mathbf{grad} f.$$

Граничное условие для  $\mathbf{E}$  гласит, что тангенциальная слагающая вектора  $\mathbf{E}$  обращается в нуль на поверхности тела вращения, так что

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s = 0.$$

Это граничное условие можно в скалярном виде записать, как

$$\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (rH_\phi) = 0 \quad (7.5)$$

на кривой  $f(r, z) = 0$ .

Для решения (7.4) удобно ввести величину  $u$ , определяемую, как

$$u = H_\phi r. \quad (7.6)$$

Дифференциальное уравнение для  $u$  будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0;$$

$$u = 0 \text{ при } r = 0, \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ на кривой } f(r, z) = 0. \quad (7.7)$$

В качестве простого примера рассмотрим коаксиальный кабель, ограниченный цилиндрами радиуса  $r = A$  и  $r = B$  и длиной  $0 \leq z \leq C$ . Положим  $u(r, z) = v(r)w(z)$ .

Тогда уравнение (7.7) будет удовлетворено, если

$$v'' - \frac{1}{r} v' + k_a^2 v = 0,$$

$$w'' + k_3^2 w = 0,$$

где

$$k = k_a^2 + k_3^2. \quad (7.8)$$

Решением уравнения для  $w$ , удовлетворяющим граничным условиям, является

$$w(z) = \cos k_3 z, \text{ где } k_3 = \frac{4\pi}{C}.$$

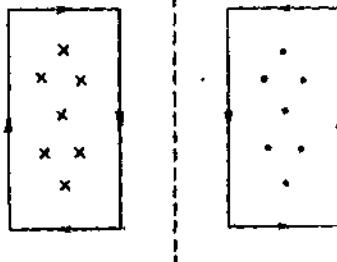


Рис. 5. Схема распределения токов и магнитного поля для собственного колебания с нулевой частотой коаксиального кабеля.

сит от радиусов  $A$  и  $B$  и получается из условия, что длина резонатора  $C$  была равна полуволне стоячих колебаний. Следующие волны этой серии имеют длины волн, равные  $C = \lambda/2$  и  $v = 1$ .

Уравнению для  $v(r)$  при  $k_a \neq 0$  можно удовлетворить, положив

$$v(r) = r Z_1(k_a r), \quad (7.9)$$

где  $Z_1$  — общий интеграл уравнения Бесселя первого порядка:

$$Z_1(x) = a I_1(x) + b N_1(x). \quad (7.10)$$

Отношение  $a/b$  и параметр  $k_a$  следует выбрать так, чтобы  $v'(r) = 0$  при  $r = A$  и  $r = B$ . Таким образом, могут быть вычислены частоты собственных колебаний высших порядков \*).

Эти граничные условия определяют последовательность значений  $k_a$ , каждое из которых может относиться к любому из значений  $n$ , приводя к определённой частоте собственных колебаний.

Коаксиальный резонатор в четверть волны. На практике часто пользуются так называемым коаксиальным резонатором в четверть волны. Он получается вращением вокруг вертикальной оси фигуры, изображённой на рис. 6.

Точная теория такого резонатора отсутствует; для приближённого рассмотрения \*\*) разобьём резонатор на три области I, II и III и рассмотрим каждую из них в отдельности.

В области I, особенно при  $z$ , близких к нулю, поле можно считать весьма близким к полю рассмотренного раньше коаксиального кабеля. Поэтому, мы предположим, что в этой области

$$u_I = a \cos kz \quad (0 < z < C). \quad (7.11)$$

Здесь  $k = k_3$ , так как  $k_a = 0$ .

Подобно тому, как это делается в теории цепей с сосредоточенными постоянными, мы можем считать, что на границе области I, при  $z = C$  или  $z = D$  имеется узел в волне напряжения, если только ёмкость области II достаточно велика. В области II мы положим

$$u_{II} = b_r J_1(kr) \quad (7.12)$$

( $k = k_a$ , так как здесь  $k_3 = 0$ ). В большинстве практически важных случаев длина  $B$  мала по сравнению с четвертью длины волны, т. е.  $kB \ll \pi/2$ . Поэтому в этой области  $rJ_1(r)$  практически равно первому члену разложения этого выражения в ряд по степеням  $r$ , так что можно в хорошем приближении положить

$$u_{II} = \frac{bkr^2}{2},$$

что соответствует существованию в области II однородного аксиального поля  $E_z = -ib$ . Следовательно, линейный интеграл от точки  $z = C$  до точки  $z = D$  на расстоянии  $r = A$  от оси равен

\*) Эта задача была детально рассмотрена в работе Боргниса <sup>4</sup>.

\*\*) Более точная теория дана в работе Ганзена <sup>5</sup>, некоторые интересные экспериментальные результаты у Барроу и Мичер <sup>6</sup>.

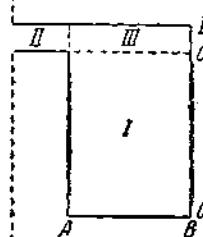


Рис. 6. Схема сечения коаксиального резонатора в четверть волны.

$-ib(C - D)$ . На линии  $z = C$ , при  $A \leq r \leq B$  мы имеем, приближённо

$$E_r = -\left(i \frac{a}{r}\right) \sin kC,$$

так что линейный интеграл по этому пути равен

$$-ia \sin kC \ln \left(\frac{B}{A}\right).$$

Если мы будем пренебрегать потоком, проходящим через область III, линейный интеграл от напряжённости поля  $E$ , взятый по контуру, охватывающему эту область, должен исчезать и, следовательно,

$$a \sin kC \ln \frac{B}{A} = b(D - C). \quad (7.13)$$

Магнитное поле на границе обеих областей остаётся непрерывным. Поэтому, приравнивая в точке  $r = A$ ,  $z = C$  магнитные поля обеих областей, мы имеем

$$a \cos kC = \frac{bkA^2}{2}. \quad (7.14)$$

В нашей приближённой теории с тем же успехом можно было бы приравнять значения магнитных полей и в любой другой точке в области III. Эта точка выбрана просто потому, что в ней  $u_1$  и  $u_{II}$ , вероятно, лучше аппроксимируются написанными выше выражениями, чем глубже в области III.

Деля (7.13) на (7.14), мы имеем

$$\operatorname{tg} kC = \frac{2(D - C)}{A'k \ln \frac{B}{A}}. \quad (7.15)$$

Последнее выражение определяет значение  $k$  через характерные размеры резонатора.

Предыдущий, весьма грубый, анализ может естественно не удовлетворить читателя. Однако, он соответствует результатам, полученным с помощью обычного инженерного расчёта в теории передачи, как будет показано в § 18. Последний способ имеет то преимущество, что сделанные приближения видны в нём более отчётливо.

Отношение  $a/b$  может быть получено из (7.13) или (7.14) и оказывается равным

$$\frac{a}{b} = \frac{D - C}{\sin kC \ln \frac{B}{A}} = \frac{kA^2}{2 \cos kC}. \quad (7.16)$$

Предыдущая теория может быть проиллюстрирована следующим численным примером.

Возьмём частоту в 150 мегациклов, что соответствует длине волны, равной 200 см. Предположим, что мы хотим пользоваться резонатором с габаритами  $D = C = 3$  дм,  $A = 6$  дм и  $B = 10$  дм. Каково при этом будет допустимое значение  $C$ ? Из (7.15), поскольку  $k = 1/12,5$ , имеем

$$\operatorname{tg} kC = 4,07 \text{ или } kC = 76,2^\circ,$$

откуда находим значение  $C$  равным

$$C = \frac{76,2}{90} \frac{\lambda}{4} = 16,6 \text{ дм.}$$

Следовательно, в этом случае резонатор должен быть на 15% короче, чем четверть длины волны. Из (7.16) получаем для отношения  $b/a$ :

$$\frac{b}{a} = 0,0647.$$

Таким образом, если возбуждение таково, что амплитуда магнитного поля в точке  $z=0$ ,  $r=A$  равна гауссу, амплитуда электрического поля на оси  $z$  в области II равна  $b=0,986$  абс. ед. (так как  $A=15,26$  и  $a=15,26$ ). Линейный интеграл от вектора электрического поля, взятый по прямой  $r=0$  от  $z=C$  до  $z=D$ , равен 2260 В.

Иногда для симметрических колебаний резонаторов, имеющих вид фигуры вращения, применяется другой метод расчёта. Если  $\phi$  — любая функция, удовлетворяющая скалярному волновому уравнению

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0, \quad (7.17)$$

то, как легко проверить, вектор

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} \phi, \quad (7.18)$$

где  $\mathbf{C}$  — постоянный вектор, удовлетворяет векторному волновому уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0. \quad (7.19)$$

Предположим, что нам заданы частные решения (7.17), не зависящие от угла  $\varphi$ , и мы выбираем в качестве вектора  $\mathbf{C}$  единичный вектор  $\mathbf{k}$ , направленный вдоль оси вращения. Тогда вектор  $\mathbf{A}$  будет ориентирован вдоль вектора  $\varphi_0$  и его удобно идентифицировать с магнитным полем симметрических колебаний.

Положив

$$\mathbf{H} = \mathbf{k} \operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{r}_0, \quad (7.20)$$

имеем для электрического поля

$$ik\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \mathbf{k}. \quad (7.21)$$

Границные условия гласят [ср. (7.5)], что нормальная производная  $u = r_0 (\partial \phi / \partial r)$  обращается в нуль на поверхности вращения и  $u = 0$  при  $r = 0$ . Решения (7.17), остающиеся конечными на оси вращения и не зависящие от угла  $\phi$ , имеют вид

$$\phi = J_0(ar) e^{i\beta z}, \quad a^2 + \beta^2 = k^2.$$

Поэтому общим решением служит

$$\phi(z, r) = \int_{-k}^{+k} g(\beta) J_0(\sqrt{k^2 - \beta^2} r) e^{i\beta z} d\beta,$$

где  $g(\beta)$  — произвольная функция. Так как  $J'_0(x) = -J_1(x)$ ,

$$u = r \frac{\partial \phi}{\partial r} = r \int_{-k}^{+k} h(\beta) J_1(\sqrt{k^2 - \beta^2} r) e^{i\beta z} d\beta,$$

где  $h(\beta)$  — новая произвольная функция.

### § 8. Скин-эффект

Для изучения вопроса о потерях в полом резонаторе, обусловленных конечной проводимостью ограничивающих его металлических стенок, необходимо сперва рассмотреть процесс распространения электромагнитных волн в хороших проводниках.

Из уравнений поля (1.1) для среды с постоянными  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  можно найти волновое уравнение, описывающее координатную зависимость векторов поля, если их временная зависимость имеет вид  $e^{i\omega t}$ . Именно, уравнения для амплитуд поля можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \text{rot} \mathbf{E} &= k^2 \mu \left( \epsilon - \frac{2i}{\sigma} \right) \mathbf{E}, \\ \text{rot} \text{rot} \mathbf{H} &= k^2 \mu \left( \epsilon - \frac{2i}{\sigma} \right) \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где, как всегда,  $k = \omega/c$ . Эти уравнения имеют такой же вид, как и в непроводящей среде, но среда теперь характеризуется комплексным показателем преломления

$$n^2 = \mu \left( \epsilon - \frac{2i}{\sigma} \right). \quad (8.2)$$

Так как электропроводность металлов  $\sigma$  порядка  $10^{-8} \text{ см}$ , чисто мнимая часть  $n^2$  даже в оптической области, а тем более в интересующей нас области длин волн, оказывается гораздо больше вещественной. Поэтому величиной  $\epsilon$  в (8.2) можно пренебречь. Физически это означает, что токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости. Тогда для показателя преломления имеем

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 - i). \quad (8.3)$$

Общее решение уравнения (8.1) может быть представлено в виде плоских волн

$$E = E_0 e^{i\omega t - knz} = E_0 e^{-z/\delta} \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right). \quad (8.4)$$

Величина  $\delta$ , равная

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta\lambda}{\mu}}, \quad (8.5)$$

носит название глубины проникновения. Она определяет глубину проникновения в металле быстро затухающего электромагнитного поля. Значения  $\delta$  для некоторых длин волн для меди приведены в табл. 3. В частности, при частоте 60 циклов/сек. значение  $\delta$  составляет у меди 0,85 см.

Если электромагнитные волны распространяются вдоль оси  $z$  в глубь металла так, что вектор электрического поля направлен по оси  $x$ , а вектор магнитного поля по оси  $y$

$$H_y = H_y^0 e^{-z/\delta} \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right), \quad (8.6)$$

то ток проводимости, индуцируемый в металле, равен, как известно,

$$j = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} H.$$

С помощью (8.6) имеем

$$j_y = j_z = 0, \\ j_x = - \left( \frac{H_y^0}{4\pi\delta} \right) e^{-z/\delta} \left[ \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \sin \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right]. \quad (8.7)$$

Количество энергии, превращающейся в джоулево тепло в единицу времени в 1 см<sup>3</sup> металла, равно  $\alpha c j^2$  эрг<sup>2</sup>/см<sup>2</sup>·сек, поэтому полная потеря мощности во всей толще металла, отнесённая на единицу площади и усреднённая по циклу, будет

$$\alpha c \frac{(H_y^0)^2}{4\pi\delta^2} \int_0^\infty e^{-2z/\delta} dz = \frac{\pi\delta}{\lambda} \frac{c\mu (H_y^0)^2}{8\pi}. \quad (8.8)$$

В последнем выражении множитель  $\mu (H_y^0)^2 / 8\pi$  представляет плотность энергии магнитного поля.

Вследствие того, что глубина проникновения  $\delta$  весьма мала, во всех практически встречающихся случаях (за исключением очень тонких проволочек) можно считать поверхность металла плоской и пользоваться для абсорбируемой энергии выражением (8.8). Тогда полная потеря мощности в стенах полого резонатора будет, очевидно, равна

$$\frac{c\delta}{8\pi} \int \mu H^2 dS, \quad (8.9)$$

Таблица 3  
Глубина проникновения  
 $\delta$  для меди

$\lambda$ см	$\delta$ см
1	0,368
3	0,670
10	1,22
100	3,86
1000	12,2

где интегрирование производится по поверхности всех стенок резонатора и  $\mathbf{H}$  — тангенциальная к граничным поверхностям слагающая вектора напряжённости магнитного поля.

Из-за наличия конечной проводимости стенок вектор напряжённости электрического поля не точно перпендикулярен к граничной поверхности. Из выражения для  $j_x$ , взятого при  $z=0$ , мы находим

$$E_x^0 = \sigma j_x = \frac{\sqrt{2}\sigma H_y^0}{4\pi\sigma} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (8.10)$$

Из (8.10) мы видим, однако, что тангенциальная слагающая электрического поля меньше соответствующей слагающей магнитного поля в отношении  $\sqrt{2}\sigma/4\pi\sigma$ .

Как будет показано в следующем параграфе, потери в полом резонаторе за 1 цикл малы по сравнению с энергией, запасённой в резонаторе. Поэтому для нахождения потерь в резонаторе можно применить приближённый способ вычислений, основанный на том, что распределение поля внутри резонатора пишется так, как будто бы проводимость стенок была бесконечно велика, а затем по заданному таким образом распределению поля находится величина потерь.

### § 9. Потери в резонаторе

В радиотехнике потери в колебательных системах принято характеризовать добротностью контура<sup>7</sup> величиной, обратной коэффициенту затухания,  $Q$ , определяемой законом убывания амплитуды:

$$e^{-\omega t/2Q}. \quad (9.1)$$

При этом полная энергия поля в системе изменяется по закону

$$W = W_0 e^{-\omega t/Q}. \quad (9.2)$$

Нетрудно видеть, что

$$Q = 2\pi \frac{\text{полная энергия колебательной системы}}{\text{потеря энергии за 1 цикл}}. \quad (9.3)$$

С помощью формул, полученных в предыдущем параграфе, выражение для  $Q$  можно написать в виде

$$Q = \frac{2}{\delta\mu} \frac{\iint H^2 dV}{\iint H^2 dS}. \quad (9.4)$$

Для грубой оценки величины  $Q$  заметим, что, так как  $\mathbf{H}$  имеет на поверхности пучность, среднее значение  $\mathbf{H}^2$  на поверхности приблизительно вдвое больше среднего значения в объёме и поэтому

$$Q \sim \frac{V}{\delta\mu S}, \quad (9.5)$$

где  $V$  и  $S$  — объём и площадь стенок резонатора. Для резонаторов, линейные размеры которых велики по сравнению с глубиной проникновения  $\delta$ , можно ожидать, что по порядку величины потери будут равны отношению линейных размеров к глубине проникновения. Поскольку отношение двух интегралов в формуле (9.4) имеет размерность в сантиметрах и  $\delta$  пропорциональна  $\sqrt{\lambda}$ , величины потерь  $Q$  двух геометрически подобных резонаторов относятся, как квадратные корни из линейных размеров или как квадратные корни длин волн различных собственных колебаний.

На практике потери полых резонаторов в области микрорадиоволн характеризуются значением  $Q > 1000$  и, следовательно, распределения полей в резонаторах мало отличаются от вычисленных на основе предположения об идеально проводящих стенках. Поэтому при использовании формулы (7.4) для нахождения потерь можно подставлять, вместо истинного значения магнитного поля, значение его, вычисленное в предположении, что стены резонатора являются идеально проводящими.

В качестве примера вычислим значение  $Q$  для  $(0, m, n)$  колебаний в прямоугольном резонаторе с ребрами  $A, B, C$ , рассмотренном в § 3. Нетрудно вычислить, что в этом случае

$$Q = \frac{1}{\delta \mu} \frac{\frac{ABC}{\left(\frac{m}{B}\right)^2 + \left(\frac{n}{C}\right)^2}}{BC + 2AC \left(\frac{m}{B}\right)^2 + 2AB \left(\frac{m}{B}\right)^2 + \left(\frac{n}{C}\right)^2}. \quad (9.6)$$

В частности, для квадратной призмы  $B = C$

$$Q = \frac{B}{\delta} \frac{\frac{A}{B}}{1 + 2 \frac{A}{B}}.$$

Для куба  $A = B = C$  и  $Q = \frac{A}{3\delta}$ .

Длина волны колебания с наименьшей частотой  $\lambda = 2\sqrt{2A}$  и, следовательно,

$$Q = \frac{\lambda}{3\sqrt{2\delta\mu}}.$$

Значение  $Q$  для куба со стенками из меди, заполненного средой с  $\mu = 1$  равно, следовательно,

$$Q = 5920\sqrt{\lambda} = 7040\sqrt{A}.$$

Для  $\lambda = 10 \text{ см}$ ,  $Q = 18800$ .

Посмотрим теперь, как изменяется уравнение для нормальных координат  $g(t)$ , введённых в § 4, при учёте потерь в резонаторе.

Чтобы учесть потери в резонаторе, необходимо ввести в (4.10) член с затуханием. Нетрудно убедиться, что затухание будет

правильно учтено, если это уравнение будет переписано следующим образом:

$$\ddot{q}_a + \left(\frac{\omega_a}{Q_a}\right) \dot{q}_a + \omega^2 q_a = 4\pi c^3 I_a(t). \quad (9.7)$$

Умножая на  $V/4\pi c^2 q_a$ , мы найдём уравнение для  $W_a$ , которое заменяет (4.14):

$$\dot{W}_a = V I_a(t) \dot{q}_a(t) - V \frac{\omega_a}{4\pi c^2 Q_a} q_a^2(t). \quad (9.8)$$

Второй член справа, который представляет потери в резонаторе, является, очевидно, существенно отрицательным. В стационарном состоянии, когда  $q_a(t)$  выражаются гармоническими функциями времени, средняя скорость превращения энергии электромагнитного поля в джоулево тепло равна

$$P = \left(\frac{V\omega_a}{4\pi c^2 Q_a}\right) \frac{\dot{q}_a^2}{2} = \frac{2\pi^2 V c}{\lambda_a^3 Q_a} \frac{q_a^2}{2},$$

где  $q_a$  представляет амплитуду нормальной координаты  $q_a(t)$ . Коэффициент при  $q_a^2$  мы будем именовать сопротивлением резонатора для  $a$ -го колебания  $R_a$ :

$$R_a = \frac{60\pi^2 V}{Q_a \lambda_a^3}. \quad (9.9)$$

Для кубического резонатора с ребром куба, равным  $A$ , и медными стенками для  $(0,1,1)$ -колебания  $R_a = 0,0112 \text{ ом}$ .

Шунтовое сопротивление. Другой величиной, которая часто оказывается более удобной для выражения потерь, является

Таблица 4

Значения величин, входящих в выражение для шунтового сопротивления  $S_P$

$P$	$X_{op}$	$J_1(X_{op})$	$V \bar{X}_{op} J_1^2(X_{op})$
1	2,4048	+ 0,5191	0,417
2	5,5207	- 0,3403	0,272
3	8,6337	+ 0,2705	0,216
4	11,7915	- 0,2325	0,186
5	14,9309	+ 0,2065	0,165

так называемое шунтовое сопротивление резонатора. Для некоторых расчётов в теории электроннолучевых генераторов, содержащих полые резонаторы, нам понадобится определять амплитуды величины линейного интеграла от вектора напряжённости электрического поля вдоль некоторого пути в резонаторе. Мы имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{C} \mathbf{A}_a \dot{q}_a.$$

Поэтому амплитуда электрического поля, выраженного в вольтах на сантиметры, равна  $30k_a q_a \mathbf{A}_a$ , если  $q_a$  выражено в амперах. Линейный интеграл от  $\mathbf{E}$

$$V_a = 30k_a q_a \int A_a \, dl. \quad (9.10)$$

Мы можем теперь определить щунтовое сопротивление резонатора, как такое сопротивление, что если бы им была зашунтована разность потенциалов  $V_a$ , то диссилируемая в этом сопротивлении мощность была бы равна мощности фактически диссилируемой в резонаторе. Щунтовое сопротивление резонатора зависит не только от резонатора и вида колебаний, но также и от пути, вдоль которого вычисляется  $V_a$ . Обозначая щунтовое сопротивление через  $S_a$ , имеем

$$\frac{V_a}{2S_a} = \frac{60\pi^2 V}{Q_a \lambda_a^3} \frac{q_a^2}{2},$$

и, следовательно,

$$S_a = 60Q_a \lambda_a \frac{(\int A_a dl)^2}{\iint A_a^2 dv}. \quad (9.11)$$

Подставляя для  $Q_a$  его выражение из (9.4) и пользуясь формулой векторного анализа, приводившейся ранее [формулы, предшествующие (4.12)], можно преобразовать это выражение к иному виду:

$$S_a = \frac{480\pi^3}{\lambda_a \delta \mu} \frac{(\int A_a dl)^2}{\iint H^2 ds}. \quad (9.12)$$

Так например, для кубического резонатора с медными стенками с длиной ребра  $A$  см, выбирая за путь интегрирования прямую, проходящую через ток пересечения линий  $x=A/2$ ,  $y=A/2$  от  $z=0$  до  $z=A$ , для (110)-колебания  $S_a$  равно  $105\,600 A^6$ .

$E(00p)$ -колебания кругового цилиндра. В качестве примера вычислим  $Q_a$  и  $S_a$  для  $E(00p)$ -колебаний в круговом цилиндре.

Как было показано в § 6, в таком резонаторе напряжённость электрического поля выражается формулой

$$E_z = AJ_0(kr) \text{ абс. ед. см,}$$

где  $kR = x_0 p$ ,  $p$ -му корню уравнения  $J_0(x) = 0$ . Следовательно, падение потенциала на пути вдоль оси  $z$  от  $z=0$  до  $z=C$  равно

$$V = AC \text{ абс. В.}$$

Согласно (5.8) напряжённость магнитного поля с точностью до временного множителя, не представляющего интерес для этого вычисления, имеет вид

$$H = AJ_1(kr) \varphi_0 \text{ гаусс.}$$

Из (8.9) для мощности, выделяющейся на торцовых сторонах цилиндра, имеем

$$P_E = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4k} \right) \int_0^R J_1^2(kr) r dr = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4k} \right) \frac{R^2}{2} J_1^2(X_0 p)$$

и для мощности, выделяющейся на боковых сторонах цилиндра,

$$P_C = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4 \lambda} \right) R C J_1^2(X_{0p}),$$

так что полная мощность, превращающаяся в джоулево тепло

$$P_C + 2P_E = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4 \lambda} \right) (R^2 + RC) J_1^2(X_{0p}).$$

Полный запас энергии в резонаторе

$$W = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{A^2}{8} CR^2 J_1^2(X_{0p}).$$

Следовательно, по определению (9.3) для  $Q$  имеем

$$Q_p = \left( \frac{2\pi R}{\rho \mu} \right)^{1/2} \frac{C}{R + C} (X_{0p})^{1/2}. \quad (9.13)$$

Интересно отметить влияние изменения  $C$  при заданном  $R$  на картину собственных колебаний в резонаторе. Изменение  $Q$  не влияет на частоту собственных колебаний резонатора, так как она зависит только от  $R$ . При  $C$  малых по сравнению с  $R$ , значение  $Q$  также мало; с ростом  $C$  значение  $Q$  сперва возрастает, но при  $C \gg R$  стремится к постоянному пределу.

Шунтовое сопротивление  $S_p$  можно получить, приравнивая  $V^2/2S_p$  полной теряемой мощности. Это даёт

$$S_p = 120 \left( \frac{2\pi R}{\rho \mu} \right)^{1/2} \frac{C^2}{R^2 + RC} \frac{1}{(X_{0p})^{1/2} J_1^2(X_{0p})} \text{ ом.} \quad (9.14)$$

Сравнивая формулу для  $S_p$  с формулой для  $Q_p$ , мы видим, что обе величины связаны между собой простым соотношением

$$S_p = 120 \left( \frac{C}{R} \right) \left[ \frac{1}{X_{0p}} J_1^2(X_{0p}) \right] Q_p. \quad (9.15)$$

Для нахождения численных значений  $S_p$  может служить табл. 4. ( $X_{0p}$  в этой таблице означает  $p$ -й корень уравнения

$$J_0(x) = 0.)$$

Колебания коаксиального кабеля. Другим примером, имеющим большое практическое значение, служит коаксиальный кабель, ограниченный внутренним и внешним цилиндрами радиуса  $r = a$  и  $r = b$ , соответственно и плоскостями  $z = 0$  и  $z = C$ .

Поле в таком резонаторе было рассмотрено в § 5 и описывается формулой (5.25). Подставляя в (5.25) явно не выписанную там зависимость от координаты  $z$ , имеем

$$\mathbf{H} = \frac{A}{2} \cos \frac{\pi \alpha z}{C} \varphi_0 \text{ гаусс.}$$

С помощью (8.9) находим потери на обоих концах резонатора:

$$P_E = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4 \lambda} \right) \frac{b}{a}$$

и внутренней и внешней стенках

$$P_I = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4 \lambda} \right) \frac{C}{2a},$$

$$P_0 = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4 \lambda} \right) \frac{C}{2b}.$$

Полная потеря мощности в резонаторе будет

$$P_I + P_0 + 2P_E = A^2 \left( \frac{\pi c \delta \mu}{4 \lambda} \right) \left( 2 \lg \frac{b}{a} + \frac{C}{2a} + \frac{C}{2b} \right).$$

Энергия, запасённая в резонаторе,

$$W = \frac{A^2}{8} C \lg \frac{b}{a}.$$

Поэтому для  $Q$  получаем следующее выражение:

$$Q_n = \left( \frac{2C}{\rho \mu} \right)^{1/2} \frac{\lg \frac{b}{a}}{4 \lg \frac{b}{a} + \frac{C}{a} + \frac{C}{b}} \sqrt{n}. \quad (9.16)$$

Наиболее естественным путём, по отношению к которому можно определить шунтовое сопротивление, является прямая из точки  $r=a$  до точки  $r=b$ , проведённая в такой плоскости  $z=\text{const}$ , что  $\sin \pi n z / C = \pm 1$ , т. е. в которой имеется пучность волны напряжения. На таком пути

$$V = A \lg \frac{b}{a} \text{ абс. ед.}$$

Вычисляя из этого выражения и выражения для полной потери мощности шунтовое сопротивление  $S_n$ , имеем

$$S_n = 120 \left( \frac{2C}{\rho \mu} \right)^{1/2} \frac{2 \left( \lg \frac{b}{a} \right)^2}{4 \lg \frac{b}{a} + \frac{C}{a} + \frac{C}{b}} \sqrt{n}. \quad (9.17)$$

По аналогии с (9.15) можно написать соотношение, связывающее  $Q_n$  с  $S_n$ :

$$S_n = \left( 120 \frac{Q_n}{\pi n} \right) \lg \frac{b}{a} \text{ ом.}$$

Пример. Рассмотрите резонатор, для которого  $C = 150 \text{ см}$  и, следовательно, длина волны, отвечающая колебанию с самой низкой частотой, равна 3 м. Пусть  $a = 30 \text{ см}$  и  $b = 45 \text{ см}$ . Какую мощность

ность должен иметь резонатор с медными стенками для того, чтобы амплитуда напряжённости электрического поля в пучности составляла 1 млн. В?

Ответ: 1720 kW.

### § 10. Сферический резонатор

Теория собственных колебаний в полом резонаторе сферической формы может быть развита, как частный случай некоторого общего метода,ющего иметь гораздо более общее применение.

Введём ортогональные криволинейные координаты  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , такие, чтобы элемент длины дуги выражался в этих координатах формулой

$$ds^2 = e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2 + e_3^2 dx_3^2. \quad (10.1)$$

Например, в сферических координатах

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (10.2)$$

и, следовательно,

$$x_1 = r; x_2 = \theta; x_3 = \varphi; e_1 = 1; e_2 = r; e_3 = r \sin \theta.$$

В таких криволинейных координатах уравнения Максвелла для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} ike_2 e_3 E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} (e_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (e_2 H_2), \\ ike_3 e_1 E_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} (e_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (e_3 H_3), \\ ike_1 e_2 E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (e_1 H_1), \\ -ike_2 e_3 H_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} (e_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (e_2 E_2), \\ -ike_3 e_1 H_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} (e_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (e_3 E_3), \\ -ike_1 e_2 H_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (e_1 E_1). \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Предположим, что координата  $x_1$  выбрана так, чтобы  $e_1 = 1$ , как и в случае обычных сферических координат и, кроме того, чтобы в выбранной системе координат отношение  $e_2/e_3$  не зависело от  $x_1$ .

В этом случае, как будет сейчас доказано, собственные колебания распадаются на два независимых класса, причём каждый класс колебаний описывается своей волновой функцией.

Эти два класса колебаний мы будем называть колебаниями  $E$ -типа и  $H$ -типа, в соответствии с введённой ранее классификацией.

В случае колебаний  $E$ -типа  $H_1 = 0$ . Четвёртое из уравнений (10.3) будет удовлетворено, если мы положим

$$e_2 E_2 = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad e_3 E_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3}.$$

Если ввести скалярную функцию  $U$  такую, что  $P = \partial U / \partial x_1$ , второе и третье уравнение дают

$$H_2 = \frac{ik}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad H_3 = -\frac{ik}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

Первое и пятое из уравнений (10.3) дают два различных выражения  $E_1$  через  $U$ . Условие совместности обоих выражений приводит к уравнению для  $U$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) + k^2 U = 0. \quad (10.4)$$

Наиболее удобное выражение  $E_1$  через  $U$  имеет вид

$$E_1 = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}.$$

При таком выборе связи  $U$  и  $E_1$  шестое уравнение (10.3) будет удовлетворено тождественно.

Колебания  $H$ -типа получаются, если положить  $E_1 = 0$ . Это приводит к аналогичной системе уравнений, позволяющих выразить компоненты поля через скалярную функцию  $U$ , удовлетворяющую волновому уравнению (10.4). В итоге мы получаем следующие соотношения, связывающие компоненты поля со скалярной функцией  $U$ :

$E$ -тип:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, & H_1 &= 0, \\ E_2 &= \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, & H_2 &= \frac{ik}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \\ E_3 &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}, & H_3 &= -\frac{ik}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

$H$ -тип:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 0, & H_1 &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \\ E_2 &= -\frac{ik}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, & H_2 &= \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ E_3 &= \frac{ik}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}, & H_3 &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Специализируем теперь наше общее решение для случая сферы. Для этого выберем в качестве координат  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  сферические координаты  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Тогда уравнение для  $U$  приобретает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) + k^2 U = 0. \quad (10.7)$$

Общее решение его ищем в виде

$$U = R(r) \Theta(\theta, \varphi),$$

где функция  $\Theta(\theta, \varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \Theta = 0, \quad (10.8)$$

а функция  $R(r)$  уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0. \quad (10.9)$$

Для того, чтобы существовало конечное и однозначное решение уравнения (10.8), необходимо, чтобы параметр  $l$  принимал только ряд целых значений.

Функции, удовлетворяющие уравнению (10.8), носят название гармонических. Теория гармонических функций полно разработана, и содержание её изложено в большом числе математических руководств.

Решения уравнения (10.9) носят название цилиндрических функций

$$R(r) = (kr) z_l(kr), \quad (10.10)$$

где

$$z_l(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^{\frac{l}{2}} z_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

Функции Бесселя удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\left. \begin{aligned} z_{n-1} + z_{n+1} &= \frac{2n+1}{x} z_n, \\ \frac{dz_n}{dx}(x) &= [nz_{n-1} - (n-1)z_{n+1}] \frac{1}{2n+1}, \\ \frac{dx^{n+l} z_n}{dx} &= x^{n+1} z_{n-1}, \\ \frac{dx^{-n} z_n}{dx} &= -x^{-n} z_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Нам нужно выбрать те из функций Бесселя, которые остаются конечными при  $x=0$ . Мы будем обозначать их  $j_l(x)$ . Первые функции  $j_l(x)$  приведены в табл. 5.

Значение для  $j_l(x)$

Таблица 5

$l$	$j_l(x)$
0	$\sin x/x$
1	$\sin x/x^2 - \cos x/x$
2	$(3/x^3 - 1/x) \sin x - (3/x^2) \cos x$
3	$(15/x^4 - 6/x^2) \sin x - (15/x^3 - 1/x) \cos x$

Для сферических функций мы введём следующее обозначение

$$\Theta(\theta, \varphi) = \Theta(l, m) e^{im\varphi}, \quad (10.12)$$

где

$$m \geq 0 \left\{ \begin{array}{l} \Theta(l, m) = \left\{ (-1)^m \left[ (2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} \times \right. \\ \left. \times P_l(\cos \theta) \right\} \\ \Theta(l, -m) = \end{array} \right.$$

Здесь  $P_l(\cos \theta)$  — полином Лежандра  $l$ -го порядка.

Первые сферические функции имеют вид

$$\Theta(0, 0) = 1,$$

$$\Theta(1, 0) = \sqrt{3} \cos \theta,$$

$$\Theta(2, 0) = \frac{\sqrt{5}}{2} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$\Theta(3, -0) = \frac{\sqrt{7}}{2} (2 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta).$$

Коэффициенты в  $\Theta(l, m)$  выбраны так, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\iint |\Theta|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi,$$

интегрирование ведётся по всем углам  $\theta, \varphi$ .

В дальнейшем нам понадобятся следующие формулы из теории сферических функций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta(l, m) &= \frac{1}{2} [(l-m)(l+m+1)]^{1/2} \Theta(l, m+1) - \\ &\quad - \frac{1}{2} [(l+m)(l-m+1)]^{1/2} \Theta(l, m-1), \\ \cos \theta \Theta(l, m) &= \Theta(l+1, m) \left[ \frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} + \\ &\quad + \Theta(l-1, m) \left[ \frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2}, \\ \sin \theta \Theta(l, m) &= -\Theta(l+1, m+1) \left[ \frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} + \\ &\quad + \Theta(l-1, m-1) \left[ \frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} = \\ &= \Theta(l+1, m-1) - \Theta(l-1, m-1). \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Окончательно, функция  $U$  может быть записана в виде

$$U = krj_l(kr) \Theta(l, m) e^{im\varphi}, \quad (10.14)$$

где  $|m| \leq l$  и  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

С помощью (10.5) можно найти следующие выражения для компонент поля в случае колебаний  $E$ -типа:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{k^2}{r^2} l(l+1) U, \\ E_\theta &= \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial(kr)} [krj_l(kr)] \frac{\partial}{\partial\theta} \Theta(l, m) e^{im\varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{ikm}{r \sin\theta} \frac{1}{\partial(kr)} [krj_l(kr)] \Theta(l, m) e^{im\varphi}, \\ H_r &= 0, \\ H_\theta &= -\frac{km}{r \sin\theta} U, \\ H_\varphi &= -\frac{ik}{r} [krj_l(kr)] \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} e^{im\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Границные условия требуют, чтобы на границе, при  $r=R$ , где  $R$  — радиус сферы, компоненты  $E_\theta$  и  $E_\varphi$  обращались в нуль. Следовательно, для колебаний  $E$ -типа волновое число  $k$  должно удовлетворять соотношению

$$kR = S_{nl} \quad (10.16)$$

где  $S_{nl}$  — корни уравнения

$$\frac{d}{dx} x j_l(x) = 0.$$

Аналогично, для колебаний  $H$ -типа имеем следующие выражения для компонент поля:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0, \quad H_r = \frac{k^2}{r^2} l(l+1) U, \\ E_\theta &= \frac{km}{r \sin\theta} U, \quad H_\theta = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial(kr)} [krj_l(kr)] \times \frac{\partial\Theta(l, m)}{\partial\theta} e^{im\varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{ik}{r} krj_l(kr) \frac{\partial\Theta(l, m)}{\partial\theta} e^{im\varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ikm}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial(kr)} \times \\ &\quad \times [krj_l(kr)] \Theta(l, m) e^{im\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

Для колебаний магнитного типа граничные условия приводят к равенству

$$kR = T_{nl} \quad (10.18)$$

где  $T_{nl}$  — корни уравнения  $j_l(x) = 0$ .

Мы будем обозначать оба типа колебаний символами  $E(n, l, m)$  и  $H(n, l, m)$ . Анализ уравнений (10.5) и (10.17) показывает, что не существует решений, соответствующих значениям  $l=0$  и  $m=0$ . Наименьшее значение  $l$ , при котором существует решение, —  $l=1$ .

Так как корни  $S_{nl}$  и  $T_{nl}$  не зависят от числа  $m$ , при каждом

значении  $n$  и  $l$  существует  $2l+1$  различных колебаний  $E$ -типа и  $H$ -типа, отличающихся друг от друга значением  $m$ , но имеющих одну и ту же частоту. Это  $2l+1$ -кратное вырождение возникает из-за сферической симметрии резонатора.

Значения корней уравнений (10.16) и (10.18), отвечающих фундаментальным частотам колебаний, равны

$$S_{11} = 2,74, \quad T_{11} = 4,49. \quad (10.19)$$

Следовательно, резонансная длина волны для колебания  $E$  (11) равна  $2,29 R$ . Сферические функции, определяемые уравнением (10.12), остаются конечными на всей сфере, включая и особые точки  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$  уравнения (10.8), и представляют поэтому решение задачи на всей сфере.

Сферическими координатами можно пользоваться также при рассмотрении конического резонатора, ограниченного поверхностями  $r=R$  и  $\theta=\theta_0$ , а также для резонатора в виде сферы с двумя коническими вырезами, т. е. области  $0 < r < R$ ,  $\theta_0 < \theta < \theta_1$ . В этих случаях, однако, нужно пользоваться несколько более общим решением (10.5), имеющим особенность в полюсах  $\theta=0$ ,  $\theta=\pi$ , которые исключаются из области.

Резонатор в виде сферы с коническими вырезами. Рассмотрим, например, фундаментальное колебание  $E$ -типа для сферы с коническими вырезами<sup>8</sup>. Для этого случая удобно выбрать функцию  $U$  в виде

$$U = \left( \lg \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{kr}{r}. \quad (10.20)$$

При нахождении решения для всей сферы этот вид  $U$  не годился, так как  $U$  имеет при этом логарифмическую особенность при  $\theta=0$ . Он соответствует, очевидно, исключенному из предыдущего решения случаю  $l=0$ . С помощью (10.15) можно найти, что неисчезающими компонентами поля являются только

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= k^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\cos kr}{kr}, \\ H_\varphi &= -ik^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\sin kr}{kr}. \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

Так как  $E_r$  и  $E_\varphi$  равны нулю всюду, граничное условие на поверхности  $r=R$  гласит  $E_\theta=0$ . Это требование будет выполнено, если

$$kR = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

независимо от положения других границ области.

Колебанию с наименьшей частотой отвечает значение  $n$ , равное нулю. При этом его длина волны в точности равна учетверенному радиусу сферы. В написанном решении  $E_\theta$  стремится к бесконеч-

ности при приближённом  $r$  к нулю. Однако, линейный интеграл от вектора напряжённости поля  $E$ , взятый по кривой  $r = \text{const.}$  от одного выреза до другого, остаётся при этом конечным.

Примеры. 1. Показать, что значение  $Q$  для фундаментальной частоты такого резонатора равно

$$Q = \left(\frac{4R}{\rho\mu}\right)^{1/2} \frac{\lg \frac{\theta_1}{2} - \lg \frac{\theta_0}{2}}{\lg \frac{\theta_1}{2} - \lg \frac{\theta_0}{2}} + I(\csc \theta_1 + \csc \theta_0),$$

где

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = 0,825.$$

Показать, что если  $\theta_1 = \pi - \theta_0$ ,  $Q$  как функция угла  $\theta_0$  имеет максимум при  $\theta_0 = 34^\circ$ .

2. Показать, что шунтовое сопротивление этого собственного колебания, если разность потенциалов измеряется между вершинами

$$S = 120 \left(\frac{4R}{\rho\mu}\right)^{1/2} \frac{\lg^2 \left(\lg \frac{\theta_1}{2} : \lg \frac{\theta_0}{2}\right)}{\lg \left(\lg \frac{\theta_1}{2} : \lg \frac{\theta_0}{2}\right) + I(\csc \theta_1 + \csc \theta_0)}.$$

Показать, что при  $\theta_1 = \theta_0 - \pi$  оно имеет максимум при  $\theta_0 \approx 9^\circ$ .

(Окончание в следующем выпуске.)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jeans, *Dynamical Theory of Gases*, Cambridge Univ. Press, London, 1921, 3th Edit., Ch. 16; Fowler, *Statistical Mechanics*, ibid. 2-nd Edit., Ch. 4.
2. E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87, 1932; W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation*, Oxford Univ. Press, London, 1936, p. 40; Гейтлер, Квантовая теория излучения, ГГТИ, 1940.
3. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New-York, 1941, Ch. 6; Bateman, *Electrical and Optical Wave Motion*, Cambridge Univ. Press, London, 1915; Borgnis, *Ann. d. Physik*, **35**, 359, 1939.
4. Borgnis, *Z. Hochfrequenztech.*, **56**, 47, 1940.
5. W. W. Hansen, *J. App. Phys.*, **10**, 38, 1939.
6. Barrow a. Mieher, *Proc. I. R. E.*, **28**, 184, 1940.
7. Terman, *Radio Engineering*, McGraw-Hill, New-York, 1937, a. 37 a. Ch. 3.
8. W. W. Hansen a. R. D. Richtmyer, *J. App. Phys.*, **10**, 189, 1939.

## ВЯЗКИЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫСОКОПОЛИМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВ\*)

*P. Пуэлл и Г. Эйринг*

В статистической термодинамике показывается, что, исходя из определённых представлений о структуре вещества, можно вывести все основные его термодинамические свойства<sup>22</sup>. В равной мере оказывается возможным, исходя из определённого закона взаимодействия между молекулами и пользуясь статистическими методами расчёта, находить скорости химических реакций и другие кинетические свойства вещества.

В последнее время статистические и кинетические методы были применены к высокополимерам, веществам с длинными молекулами, представляющим большой технический интерес. Исследовалось поведение этих веществ в растворах, диэлектрические их свойства и законы течения.

Целью настоящей статьи является краткое изложение метода активированного комплекса и его приложений к простым системам и, в особенности, его распространение на случай больших молекул.

### I. ТЕРМОДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ С ПРОСТЫМИ МОЛЕКУЛАМИ

Удовлетворительная физическая модель жидкости должна обладать такими свойствами, чтобы из неё можно было бы вывести не только равновесные свойства жидкости, но также и неравновесные её свойства, определяющие скорости идущих процессов. Поэтому, например, изучение вязкости или диффузии должно привести к более совершенной модели жидкого состояния, которая в свою очередь позволит найти значения теплоёмкости или давления насыщенного пара.

Интересно было бы показать, что модели, предназначенные для нахождения скоростей процессов в простых жидкостях и в растворах, приводят к тождественным термодинамическим свойствам<sup>96</sup>.

Из анализа данных по диффузии и вязкости можно заключить, что простые жидкости должны обладать следующими свойствами:

1. Диффузия или перемещение молекул в жидкости происходит

\*) *Advances in Colloid Science*, vol. 1, 183, 1942, перевод В. Г. Левица.

путём перехода молекул в соседние незаполненные положения равновесия, или «дырки». В неассоциированных жидкостях наличие таких дырок является основным фактором, определяющим их течение. Таким образом, жидкость может рассматриваться, как бинарная смесь молекул и дырок.

2. Для нормальных жидкостей теплота активации для диффузии или вязкого течения равна, примерно, одной трети теплоты испарения. Так как теплота испарения затрачивается на создание пустот, по размерам равных размерам молекул жидкости, ясно, что «дырки» значительно меньше молекул. Истинный объём, идущий на образование новых положений равновесия, т. е. объём дырок, может быть вычислен из зависимости вязкости жидкости от давления. Таким путём было найдено, что в нормальных неметаллических жидкостях объём дырок равен, примерно, одной седьмой объёма молекул.

3. Если расширение при плавлении (составляющее около 10% для типичных случаев неметаллических веществ) обусловлено появлением новых положений равновесия в твёрдом кристалле, то вещество при плавлении приобретает около 0,7 моля новых положений равновесия на каждый моль молекул. Распределение моля молекул между 1,7 моля положений равновесия приводит к возрастанию энтропии при плавлении на 2 CGS-ед., которое наблюдается для многих простых веществ.

Исходя из данных, полученных при изучении скоростей процессов в жидкостях, Вальтер и Эйринг<sup>95</sup> построили функцию распределения для жидкого состояния. Авторы принимают, что в жидкости  $N$  молекул распределены случайным образом между  $N$  первоначальными положениями равновесия, имевшимися в твёрдом теле, и  $n_b$  новыми положениями равновесия. Часть молекул жидкости колеблется около положений равновесия, как в твёрдом теле; другая часть движется хаотически, как в газе. Из полного числа  $3N$  трансляционных степеней свободы  $N$  молекул доля  $V_s/V$  приходится на колебательные степени свободы, а остальные  $(V - V_s)/V$  на степени свободы хаотического трансляционного движения. Здесь  $V$  означает объём 1 моля жидкости и  $V_s$  — объём 1 моля твёрдого тела в точке плавления.

Следует заметить, что эта модель отличается от обычной модели жидкости, в которой принимается, что все молекулы находятся в эквивалентных положениях равновесия и на каждую молекулу приходится определённый средний свободный объём, причём каждая молекула движется в некотором среднем потенциальном поле. Модель Эйринга и Вальтера отличается также от модели, предложенной Ленард-Джонсом и Девонширом<sup>52</sup>, которые предполагают, что число возникающих при плавлении новых положений равновесия  $n_b$  как раз равно числу молекул  $N$  в теле. В теории Вальтера и Эйринга число новых положений равновесия  $n_b$  считается линейной функцией  $V - V_s$ , возрастающей с ростом  $V$  и не стремящейся ни к какому пределу.

В теории принимается, что функция распределения для молекул, находящихся в кристаллоподобных положениях равновесия, имеет вид

$$f_s e^{E_s/RT} = \left( \frac{e^{-\theta/2T}}{1 - e^{-\theta/T}} \right)^3 e^{E_s/RT}, \quad (1)$$

где  $E_s$  — потенциальная энергия молекулы в твёрдом теле и  $\theta = 3/4 \theta_{\text{деб}}$ , где  $\theta_{\text{деб}}$  — дебаевская температура.

Для молекул, находящихся в газоподобных положениях равновесия, функция распределения будет

$$f_g e^{-\delta E_s/RT} = \left\{ \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{V_s}{n} \right\} e^{-\delta E_s/RT}, \quad (2)$$

где  $\delta E_s$  — энергия взаимодействия молекул и  $n$  — отношение объёма молекулы к объёму «дырки».

Прежде чем функция распределения для газоподобных состояний может быть применена для расчётов, необходимо выбрать надлежащий вид функции  $\delta$  и численное значение  $n$ .

Если  $N$  молекул жидкости распределены случайным образом между  $N + n_k$  положениями равновесия, в функцию распределения войдёт множитель  $(N + n_k)! / N! n_k!$ , так что полная функция распределения будет иметь вид

$$f = \left\{ (f_s e^{E_s/RT})^{V_s/V} (f_g e^{-\delta E_s/RT})^{(V - V_s)/V} \right\}^N \frac{(N + n_k)!}{N! n_k!}. \quad (3)$$

Функция распределения  $f$  переходит в соответствующую функцию распределения для твёрдого тела или для газа, если  $\delta \rightarrow 0$ , а  $V \rightarrow \infty$ .

Расчёты, основанные на функции распределения (3), были проверены для случаев жидкого аргона, азота и бензола. Из наблюдённых значений изменения объёма и энтропии при плавлении было найдено значение  $n$ , равное 8,35 для всех трёх жидкостей. Простейший вид функции  $\delta$ , который приводит к превосходному согласию расчётных и экспериментальных данных,

$$\delta = \frac{(V_s/V)^2}{2\gamma + 0.18}$$

для аргона, где  $\gamma = \frac{n}{N} = \frac{V - V_s}{V_s/n}$ . Для азота и бензола  $\delta$  имеет аналогичный вид.

Исходя из указанной функции распределения, авторы вычислили значения скрытых теплот плавления, критических постоянных, объёмов и упругостей пара во всём интервале жидкого состояния, теплоёмкостей, сжимаемостей и вторых вириальных коэффициентов. Результаты вычислений находятся в согласии с экспериментальными данными. В табл. 1 приведены вычисленные и наблюдённые значения некоторых из этих величин для аргона.

Таблица I  
Наблюдённые и вычисленные значения различных величин для аргона

T°K	Объём в см <sup>3</sup>		Давление пара, at	
	Вычисл.	Наблюдён.	Вычисл.	Наблюдён.
83,85	28,27	28,03	0,660	0,674
87,44	28,81	28,69	1,000	1,000
89,95	29,17	29,07	1,310	1,323
97,71	30,42	30,15	2,735	2,671
111,87	32,9	32,63	8,02	7,40
122,34	35,9	35,08	15,04	13,58
137,59	43	41,02	33,14	28,29
147,93	52	51,68	48	43,19

Точка плавления		Критическая постоянная	
Вычисл- ная	Наблюдён- ная	Вычисл- ная	Наблюдён- ная
$T_m$ 82,9° $V_m$ 3,14 см <sup>3</sup> $S_m$ 3,40	83,85° 3,05 см <sup>3</sup> 3,35	$T_c$ 154,2° $V_c$ 78,7 см <sup>3</sup> $P_c$ 59,4 at	150,66° 75,26 см <sup>3</sup> 48,00 at

### II. ТЕРМОДИНАМИКА ВЫСОКОПОЛИМЕРОВ

Как и в случае жидкостей с простыми молекулами, экспериментальное изучение скоростей процессов в жидких полимерах может способствовать выяснению их равновесных термодинамических свойств<sup>69</sup>.

Так, экспериментальные работы Флори<sup>19</sup>, измерявшего вязкость жидких полиэфиров, позволили Каузману и Эйрингу<sup>40</sup> заключить, что при течении жидкостей с длинными молекулами происходит перемещение отдельных подвижных звеньев молекулы, содержащих лишь около 25 атомов цепочки, а не молекулы, как целого. Эта же модель, в которой молекула считается состоящей из отдельных подвижных «сегментов», была затем использована для изучения термодинамических свойств жидкостей с длинными молекулами. Предположение о том, что длинная молекула состоит из более мелких «кинетических единиц», высказывалось и раньше для качественного описания осмотического давления<sup>84</sup> и поверхностного натяжения<sup>65</sup>. Однако это предположение подвергалось критике, поскольку наличие таких кинетических частей не вытекало из каких-либо прямых

экспериментальных данных и казалось придуманным ad hoc для описания термодинамических свойств<sup>36</sup>.

Поэтому то обстоятельство, что исследования в совершенно иной области привели непосредственно к сегментной модели линейных макромолекул, представляется весьма благоприятным для этой гипотезы.

### 1. Плавление

Как мы видели в теории простых жидкостей, процесс плавления может рассматриваться со статистической точки зрения, как появление новых равновесных положений в твёрдом теле. С этой точки зрения скрытая теплота плавления расходуется на деформацию и преодоление сил сцепления между молекулами и образование в теле дополнительного свободного пространства для новых положений равновесия; энтропийная же часть свободной энергии возрастает при плавлении от части за счёт беспорядочного распределения молекул между старыми и новыми положениями равновесия, а от части — за счёт дополнительно возникающих при плавлении возможностей вращения молекул.

Если длинные макромолекулы состоят из движущихся почти независимо друг от друга сегментов, то новые положения, возникающие при плавлении, представляют положения равновесия этих сегментов. Термодинамические свойства сегментов определяются значением теплоты плавления  $\Delta H_f$ , изменением энтропии при плавлении  $\Delta S_f$  и температурой плавления, равной отношению  $\Delta H_f / \Delta S_f$ .

Температура плавления для гомологических рядов соединений с макромолекулами сперва возрастает с ростом цепи и затем стремится к постоянному пределу. Значение предельной температуры плавления оказывается одинаковым для всех гомологических рядов. На рис. 1 представлены экспериментальные значения температур

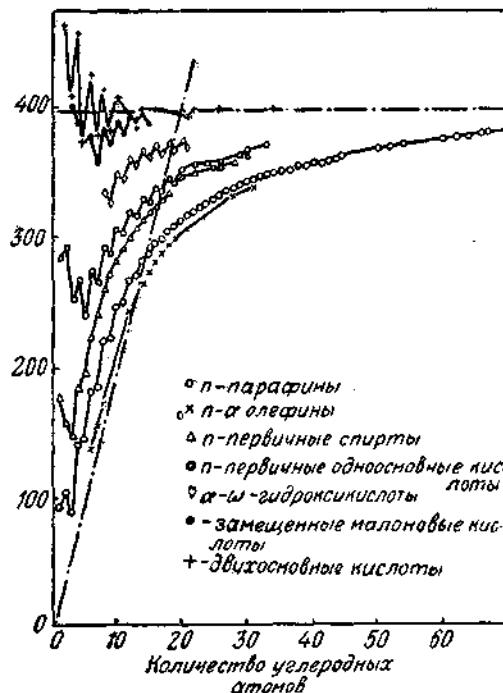


Рис. 1. Точки плавления гомологического ряда.

плавления. Предельная температура плавления находится при  $122^{\circ}\text{C}$  или  $395^{\circ}\text{K}$ . Поскольку возрастание температуры плавления при добавлении каждой  $\text{CH}_2$  группы составляет около  $20^{\circ}$  (для низких гомологов), средняя длина сегментов, ответственных за плавление, составляет  $395/20$  или около 20 углеродных атомов.

Фуллер, Бекер и Пейп<sup>27</sup> изучали полиамиды при температурах, лежащих ниже их точки плавления, с помощью рентгеновских лучей, а также измеряли их упругие константы. Эти измерения показали, что если образец отжигается или закаляется при температуре, близкой к точке плавления, рентгенограмма образца становится более резкой и одновременно менее эластичной. Эти авторы пришли к выводу, что при высоких температурах сегменты молекул полимера в твёрдом состоянии могут вращаться и аморфный образец может превращаться в кристаллический.

## 2. Осмотическое давление

Осмотическое давление идеальных разбавленных растворов определяется законом Вант-Гоффа

$$\frac{\pi V_1}{RT} = N_2. \quad (4)$$

Если длинные молекулы движутся по-сегментно, осмотическое давление их раствора должно определяться некоторой эффективной величиной  $n_2^*$  такой, что

$$\frac{\pi V_1}{RT} = N_2^* = \frac{n_2^*}{n_1 + n_2}, \quad (5)$$

где  $n_1$  — число молекул растворителя и  $n_2^*$  — эффективное число молекул в растворе. Эффективное число молекул в растворе может быть выражено через истинное с помощью следующего рассуждения.

Если сегмент полимерной молекулы находится в окружении других молекул полимера, он может перемещаться в любую из пустот достаточно больших размеров. Если же, однако, этот сегмент окружён маленькими молекулами растворителя, то пустоты с давляюще большой вероятностью будут заполняться этими последними. Поэтому, можно предположить, что вероятность перемещения сегмента молекулы полимера зависит от природы окружающих его соседей и является линейной функцией доли полного объёма, занятого полимерными молекулами.

Если каждая полимерная молекула, будучи окружённой только полимерными же молекулами, ведёт себя, как состоящая из  $Q$  отдельных сегментов, то

$$n_2^* = n_2 [1 + (Q - 1) \varphi_2], \quad (6)$$

где  $n_2$  — полное число растворённых молекул и  $\varphi_2$  — доля объёма, заполненная полимером.

Окончательно, выражение для осмотического давления приобретает вид

$$\frac{\pi V_1}{RT N_2} = 1 + (Q - 1) \varphi_2, \quad (7a)$$

$$\frac{\pi V_2}{RT \varphi_2} = 1 + Q \varphi_2, \quad (7b)$$

$$\frac{\pi M_2}{RT c_2} = 1 + \frac{Q c_2}{d_2}, \quad (7c)$$

где  $N_2$  — число молей растворённого полимера,  $\varphi_2$  — доля объёма раствора, занятая полимером,  $c_2$  — концентрация в граммах на кубические сантиметры,  $M_2$  — молекулярный вес,  $V_2$  — молярный объём и  $d_2$  — плотность полимера. Члены, содержащие степени  $\varphi_2$  выше первой, в этих формулах опущены.

Уравнение (7) превращается в закон Вант-Гоффа при низких концентрациях и приводит к линейному росту приведённого осмотического давления  $\pi/c$  с концентрацией раствора  $c$ . Уравнение этого типа удовлетворительно описывает экспериментальные данные для многих растворов полимеров. В качестве примера на рис. 2 приведена серия кривых для растворов ацетата целлюлозы различного молекулярного веса<sup>88</sup>. Наклон кривых определяет размеры подвижных сегментов, а отрезок, отсекаемый на оси ординат, — средний молекулярный вес. Как видно из рис. 2, наклон всех кривых приблизительно одинаков. Из наклона кривых зависимости  $\pi/c$  от  $c$  были определены размеры подвижных сегментов для большого числа полимеров.

В полистиролах и полиэтиленоксидах длина подвижных сегментов составляет около 20—30 атомов; в нитрате целлюлозы, ацетате целлюлозы и метилцеллюлозе — около 9—14 атомов; в резине длина сегментов колеблется между 42 и 460 и сильно варьирует от образца к образцу. Всякие разветвления и боковые связи делают молекулы полимера менее подвижными, так что кажущаяся длина цепи оказывается большей. Вероятно в большинстве случаев изменение длины подвижных сегментов в резине и некоторых других типах полимеров связано с различием в степени разветвленности молекул. Растворитель в концентрированных растворах полимеров имеет аномально высокое значение давления насыщенного пара, как будто бы в нём было растворено вещество значительно меньшего молекулярного веса. Так, например, в растворе четырёх хлористого углерода олеил-олеат имеет молекулярный вес 242 вместо 532,5; образец каучука с молекулярным весом 270 000 в растворе толуола имел средний молекулярный вес 417.

Такое поведение полимеров в растворах легко объясняется с точки зрения принимаемой нами модели полимерной молекулы, 9 ТУФН, т. XXVII, вып. 2

состоящей из подвижных сегментов с длиной цепи около 20 атомов. Аналогичная термодинамическая трактовка может быть предложена и для выяснения особенностей поверхностного натяжения высокополимеров.

Таблица 2

Поверхностное натяжение высших нормальных углеводородов ряда парафинов

Углеводороды	Поверхностное натяжение, 20°С
<i>n</i> -C <sub>8</sub> H <sub>14</sub>	18,43
<i>n</i> -C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	21,80
<i>n</i> -C <sub>10</sub> H <sub>22</sub>	23,91
<i>n</i> -C <sub>18</sub> H <sub>38</sub>	~ 28,1
<i>n</i> -C <sub>38</sub> H <sub>54</sub>	~ 29,4
<i>n</i> -C <sub>60</sub> H <sub>122</sub>	~ 29,1

Как видно из табл. 2, поверхностное натяжение высокомолекулярных нормальных парафинов при достаточно длиной цепи перестаёт зависеть от её длины, что указывает на независимость размеров подвижных частей молекул, ответственных за поверхностное натяжение, от размеров самих молекул.

Фактические размеры подвижных сегментов могут быть оценены из температурного коэффициента поверхностного натяжения с помощью уравнения

$$\text{Этвеши } \frac{d}{dT}(\sigma V^{3/2}) = 2,12.$$

При таких оценках средний молекулярный вес соединений с истинным молекулярным весом 350—900 оказывается равным около 150—200.

Таким образом, оценка размеров подвижных сегментов по осмотическому давлению растворов (18—23 для полистиролов и полиэтиленоксида) и температур плавления (20—25 для углеводородов) находятся в согласии с оценкой, основанной на измерениях вязкости полимеров сходной структуры (20—25 атомов для углеводородов, 28—34 атома для полиэфиров).

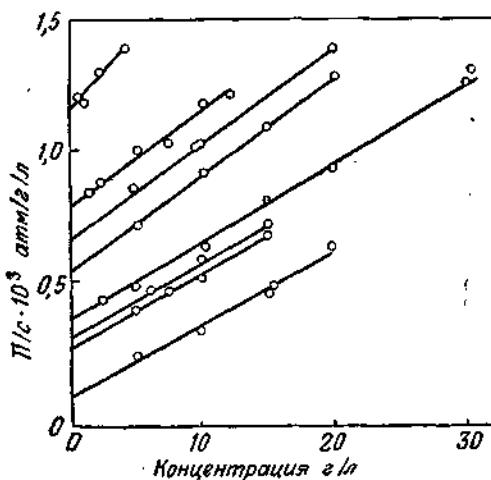


Рис. 2. Осмотическое давление растворов уксуснокислой целлюлозы.

### 3. Набухание (наполнение)

Измерения вязкости чистых полимеров показывают, что в полимерах имеются свободные положения равновесия — пустоты достаточно больших размеров, могущие заполняться подвижными сегмен-

тами молекул. При набухании полимера некоторые из этих пустот заполняются маленькими молекулами растворителя. При этом можно сделать три качественных заключения.

1. При набухании должно происходить уменьшение объема.
2. Размеры и количество пустот, а следовательно, и набухание не должны зависеть от степени полимеризации.
3. Процесс набухания сопровождается убытком энтропии, так как подвижные сегменты молекул полимера теряют возможность перемещаться в заполняемые растворителем пустоты.

Все эти заключения находятся в согласии с опытными фактами: наблюдалось уменьшение объема полимера при набухании<sup>24</sup>; при наполнении нитрата целлюлозы ацетоном давление набухания при данном количестве ацетона не зависит от молекулярного веса<sup>75</sup>; наконец, наблюдалось уменьшение энтропии порядка нескольких CGS-ед. при растворении газов в синтетическом каучуке и наполнении водой агара, казеина, кератина и целлюлозы<sup>8, 25, 79, 92</sup>.

### III. МЕТОД АКТИВИРОВАННОГО КОМПЛЕКСА

Метод активированного комплекса удачно применялся к многим химическим процессам — газовым реакциям, реакциям в растворах, гетерогенным реакциям<sup>32</sup>. Он оказался в равной мере мощным методом исследования при изучении ряда физических процессов, как, например, вязкого течения, диффузии в твердых телах и жидкостях или диэлектрической релаксации. Этот метод имеет так много возможных приложений, что нам представляется целесообразным вывести здесь лишний раз его основные соотношения в наиболее удобной форме.

Рассмотрим две молекулы, могущие вступить друг с другом в химическую реакцию. Первоначально эти молекулы разделены друг от друга. По мере их сближения потенциальная энергия системы возрастает. На вершине потенциального барьера обе молекулы образуют квазимолекулу или активированный комплекс. Этот активированный комплекс отличается от обычной молекулы лишь тем, что он неустойчив по отношению к одной степени свободы, соответствующей завершению реакции. Поэтому система пересекает потенциальный барьер и активированный комплекс распадается на окончательные продукты реакции. Этот процесс изображен на рис. 3, который схематически представляет течение реакции типа  $H_2 + I_2 \rightarrow 2HI$ .

Самый метод трактовки не зависит от числа реагирующих или образующихся в результате реакции молекул и от физической или химической природы процесса превращения.

Скорость реакции  $k'$  связана следующим соотношением с концентрацией активированных комплексов  $c_a$ , средней скоростью их движения через барьер  $\bar{u}$  и длиной реакционного пути  $\delta$ :

$$k' = \frac{c_a \bar{u}}{\delta} \quad (8)$$

Средняя скорость движения активированных комплексов через барьер равна

$$\bar{u} = \frac{\int_0^{\infty} ue^{-mu^2/2kT} du}{\int_0^{\infty} e^{-mu^2/2kT} du} = \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Чтобы найти концентрацию активированных комплексов, необходимо знать только концентрацию реагентов и константу равновесия (закона действующих масс) между активированным и начальным состояниями системы. Тогда

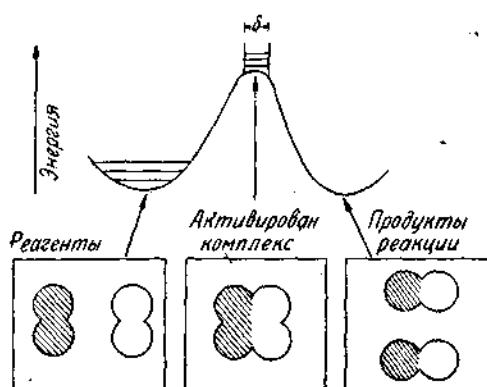


Рис. 3. Ход энергии для типичных реакций.

свободы активированного комплекса, соответствующей завершению реакции. Поэтому скорость реакции можно представить в виде

$$k' = c_0 \frac{kT}{h} K^* \quad (11)$$

и удельную скорость реакции, отнесённую к концентрации реагентов, равной единице:

$$k'_0 = \frac{k'}{c_0} = \frac{kT}{h} K^*.$$

Таким образом, скорость распада активированного комплекса для всех реакций одна и та же. Он распадается с частотой, равной  $\frac{kT}{h}/h$  или численно  $\sim 10^{13}$  в 1 сек. при комнатной температуре. Концентрация активированного комплекса определяется постоянной равновесия  $K^*$ .

Константу равновесия можно представить несколькими эквивалентными способами. Её можно определить, как отношение статистических сумм активированного и нормального состояний. В этом случае скорость процесса может быть представлена в виде

$$k' = \frac{kT}{h} \frac{F_a}{F_0}. \quad (12)$$

где  $h$  — постоянная Планка. Множитель  $(2\pi mkT)^{1/2} \frac{\delta}{h}$ , вынесенный из постоянной  $K_a$ , представляет статистический интеграл для одной трансляционной степени

Далее, константу равновесия можно выразить через термодинамические величины. При этом способе обозначений скорость процесса можно записать, как

$$k' = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT} \quad (13a)$$

или

$$k' = \frac{kT}{h} e^{\Delta S^*/R} e^{-\Delta H^*/RT}, \quad (13b)$$

где  $\Delta F^*$ ,  $\Delta H^*$  и  $\Delta S^*$  — свободная энергия, энтропия и теплота активации. Метод активированного комплекса может применяться непосредственно, если известен механизм реакции, т. е. если теплота активации может быть определена из графиков потенциальной энергии, а статистические суммы для нормального и активированного состояний могут быть вычислены из известных моментов инерции и постоянных закона сил реагирующих молекул. Такие вычисления были проделаны для ряда газовых реакций.

Однако, это не всегда выполнимо и во всяком случае всегда приводит к сложным выкладкам. Поэтому более простой путь состоит в том, что значение теплот активации берётся из опыта, а предэкспоненциальные множители вычисляются из известных свойств молекул.

Другой, часто применяемый способ применения уравнения (13) состоит в том, что значение свободной энергии находится из экспериментальных данных по скоростям реакций. Если измерения последних проводятся при двух различных температурах, свободная энергия активации может быть разбита на теплоту активации и энтропийный член.

Во многих случаях знание этих величин позволяет выяснить или уточнить механизм протекающей реакции. Например, величина  $\Delta F^*$  для вязкого течения тесно связана с термодинамической величиной энергии испарения; при денатурации протеинов большие положительные значения  $\Delta S^*$  означают, что в ходе процесса разрывается большое число связей; большее значение  $\Delta H^*$  при диэлектрической релаксации, чем при вязком течении для одной и той же жидкости, указывает на то, что при первом процессе должно быть нарушено большое число связей. Метод активированного комплекса является, таким образом, простым и удобным для изучения скоростей процессов. Следующие параграфы будут посвящены некоторым приложениям этого метода. Можно надеяться, что метод активированного комплекса будет применён и к другим, до сих пор не разрешённым проблемам.

#### IV. ВЯЗКОСТЬ ПРОСТЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотренная ранее схема течения жидкости может быть иллюстрирована рис. 4. Данная молекула (заштрихованная на рисунке) непрерывно меняет своё положение равновесия и, пробираясь мимо

своих соседей (проходя при этом через соответствующий энергетический барьер) и попадает в ближайшее незаполненное положение равновесия. Это движение происходит одинаково часто во всех направлениях. Если, однако, на молекулу действует какая-либо сила, она будет чаще смещаться в направлении действующей силы и реже — в противоположном.

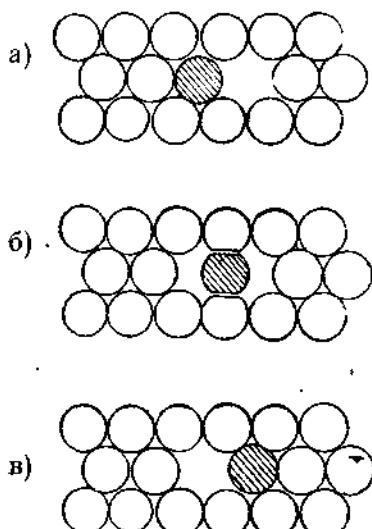


Рис. 4. Модель для процессов течения. а) Начальное состояние. б) Активированное состояние. в) Конечное состояние.

молекулами в направлении, перпендикулярном к действующей силе, обозначим через  $\lambda_1$ , в направлении течения  $\lambda_2$  и в перпендикулярном к обеим этим направлениям  $\lambda_3$ . Тогда подвижность — величина, обратная вязкости, — определится, как разность скоростей в двух параллельных слоях жидкости, находящихся на расстоянии 1 см, отнесенная к действующей силе  $f$ , т. е.

$$\varphi = \frac{1}{\eta} = \frac{\Delta u}{\lambda_1 f}. \quad (14)$$

Разность скоростей  $\Delta u$  равна произведению частоты переходов молекулы из одного положения равновесия в другое на путь, проходимый при каждом таком перескоке:

$$\Delta u = \lambda (k_p - k_{p'}) \quad (15)$$

где  $k_p$  — частота переходов при наличии действующей силы и  $k_{p'}$  — в её отсутствии.

Одна и та же схема применима при рассмотрении нескольких процессов переноса: 1) когда приложенная сила представляет собой силу вязкого трения, возникает вязкое течение; 2) когда сила является градиентом соответствующей активности, происходит диффузия; 3) если приложенная сила представляет градиент электрического потенциала, имеет место процесс ионной проводимости и, наконец, 4) если приложенной силой является сила тяжести, происходит процесс седиментации.

Выражение для вязкости жидкости может быть без труда найдено с помощью следующего рассуждения. Пусть вязкая сила  $f$  действует на 1 см<sup>2</sup> в двух слоях молекул. Расстояние между соседними положениями равновесия обозначим через  $\lambda$ , расстояние между молекулами в направлении, перпендикулярном к действующей силе,

обозначим через  $\lambda_1$ , в направлении течения  $\lambda_2$  и в перпендикулярном к обеим этим направлениям  $\lambda_3$ . Тогда подвижность — величина, обратная вязкости, — определится, как разность скоростей в двух параллельных слоях жидкости, находящихся на расстоянии 1 см, отнесенная к действующей силе  $f$ , т. е.

Если  $\Delta F^*$  — величина свободной энергии активации для перехода молекулы из одного положения равновесия в другое в отсутствии внешней силы, то переход, происходящий в направлении приложенной силы, происходит с энергией активации, равной  $\Delta F^*$  минус работа этой силы на пути  $\frac{\lambda}{2}$  т. е.

$$\Delta F^{**} = \Delta F^* - f \lambda_2 \lambda_3 \frac{\lambda}{2}.$$

Переход в обратном направлении с энергией активации

$$\Delta F^{**} = \Delta F^* + f \lambda_2 \lambda_3 \frac{\lambda}{2}.$$

Поэтому

$$k_f = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT} (e^{-f \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda/2 kT}) \quad (16a)$$

и

$$k_{b'} = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT} (e^{-f \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda/2 kT}). \quad (16b)$$

Комбинируя (16a) и (16b) и разлагая второй экспоненциальный множитель в ряд, находим для подвижности следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{\eta} = \frac{\lambda^2 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 h} e^{-\Delta F^*/RT}. \quad (17)$$

В хорошем приближении первый множитель равен объёму одной молекулы, так что уравнение (17) можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{V}{Nh} e^{-\Delta F^*/RT}, \quad (18a)$$

$$\varphi = \frac{V}{Nh} e^{\Delta S^*/R} e^{-\Delta H^*/RT}. \quad (18b)$$

Формула (18b) показывает, что если отложить график зависимости  $\lg \eta$  от  $1/T$ , должна получиться кривая линия. Это уравнение будет проверено в дальнейшем несколькими способами.

### 1. Связь с испарением

Связи, которые должны быть разорваны для того, чтобы молекула могла перейти из одного равновесного положения в другое при течении жидкости, имеют ту же природу, что и связи, нарушающиеся при испарении. Разница между первым и вторым процессом состоит в том, что при течении молекулам не приходится производить работу, равную  $kT$ , против атмосферного давления и не происходит выигрыша в энтропии  $\Delta S_{\text{пар}}$  за счёт перехода в газообразное состояние с соответствующим увеличением объёма.

Следовательно, должно иметь место равенство

$$\Delta F_{\text{исп}} + T \Delta S_{\text{пар}} - RT = \Delta E_{\text{исп}}.$$

На рис. 5 изображена зависимость  $\Delta F^*$  от  $\Delta E_{\text{исп}}$  для ряда жидкостей. Квадратики в верхней части прямой относятся к сжиженным азоту, кислороду и аргону; кружки в средней её части — к различ-

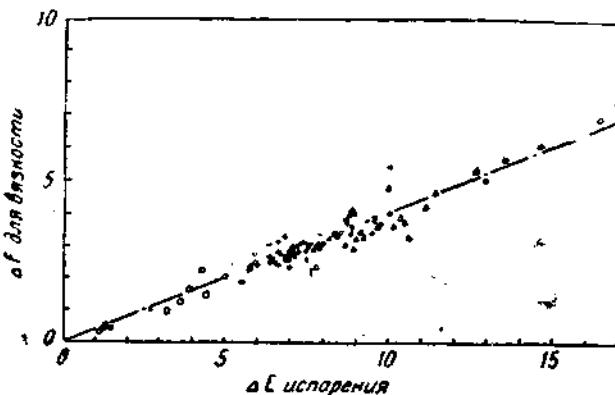


Рис. 5. Связь между процессами вязкого течения и испарения.

ным органическим жидкостям и треугольники — к воде и различным спиртам. Уравнение прямой, изображённой на рис. 5, будет

$$\eta = \frac{Nh}{V} e^{-\Delta E_{\text{исп}}/2,45 RT} \quad (19)$$

Часто с энергией испарения  $\Delta E_{\text{исп}}$  связывают теплоту активации вязкого течения<sup>16</sup>. Для типичных органических жидкостей теплота активации вязкого течения равна одной трети или четверти энергии испарения.

## 2. Значение дырок

После всего вышесказанного возникает естественный вопрос: что является главным фактором, определяющим вязкое течение жидкостей — наличие в жидкости незаполненных состояний равновесия — дырок или барьер, который приходится преодолевать молекуле, перескакивающей в новое положение равновесия.

Как показывает опыт, основным фактором является наличие дырок. Бачинский показал, что при таких изменениях давления и температуры жидкости, при которых объём её остаётся неизменным, вязкость жидкости также почти постоянна<sup>4</sup>. Исследования Бингама подтвердили этот результат<sup>5</sup>. Однако, именно объём жидкости определяет число имеющихся в ней дырок. Таким образом, при неизменном числе дырок вязкость жидкости также остаётся постоянной. Более обстоятельное изучение вопроса на основе «дырочной» модели показало, что для неассоциированных жидкостей теплота активации вязкого течения при постоянном объёме действительно мала, и при-

вело к удовлетворительным оценкам значений вязкости близ точки плавления для ряда жидкостей<sup>74</sup>. Эти результаты тесно связаны с рассмотренными в предыдущем разделе результатами, относившимися к термодинамическим свойствам простых жидкостей.

### 3. Размеры дырок

При больших давлениях вязкость жидкости может быть представлена в виде

$$\eta_p = \frac{Nh}{V} e^{(\Delta F_0 + P \overline{\Delta V^*})/RT} \quad (*), \quad (20)$$

где  $P$  — давление и  $\overline{\Delta V^*}$  — среднее изменение объема при активации.

Строго говоря,  $P \overline{\Delta V^*} = \int_0^P \overline{\Delta V^*} dP$ . Однако, поскольку кривая зависимости  $\lg \eta_p / \lg \eta_0$  от давления в хорошем приближении аппроксимируется прямой, можно считать, что  $\overline{\Delta V^*}$  не зависит от давления.

Как показывает опыт, объем активации равен одной шестой или одной седьмой объема молекулы.

### 4. Вязкость смесей<sup>74</sup>

Как мы только что выяснили, основным фактором, определяющим вязкое течение жидкости, является наличие в ней дырок — незаполненных состояний равновесия. Образование дырок требует затраты определенной энергии, равной, примерно, одной трети теплоты испарения. Если мы имеем дело не с одной жидкостью, а со смесью двух жидкостей, энергия, идущая на образование дырок в такой жидкости, должна иметь среднее значение между энергиями образования дырок в в обеих жидкостях. Для идеальных растворов, следовательно, вязкость можно представить в виде

$$\eta = \frac{Nh}{V} e^{(N_1 \Delta F_1^* + N_2 \Delta F_2^*)/RT} \quad . \quad (21)$$

В хорошем приближении формула (21) совпадает с эмпирическим правилом Аррениуса и Кендалла

$$\eta = \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \quad . \quad (22)$$

Если учесть в свободной энергии испарения отклонение от идеальности, уравнение (21) будет описывать вязкость неидеальных смесей.

\*) Индекс нуль в  $\Delta F_0$  означает, что при всех концентрациях раствор остаётся идеальным, т. е. коэффициент активности  $\gamma$  равен единице. То же относится и к формулам (38) — (41), (43) и (44).

Рис. 6 иллюстрирует результаты применения формулы (21), а также некоторых эмпирических законов к системе бензол — фенол.

### V. ВЯЗКОСТЬ ВЫСОКОПОЛИМЕРОВ

Если откладывать на графике теплоту активации вязкого течения нормальных жидкых парафинов, как функцию числа углеродных атомов в молекуле, то с ростом последнего кривая имеет насыщение (рис. 7) так же, как и аналогичная кривая для температуры плавления.

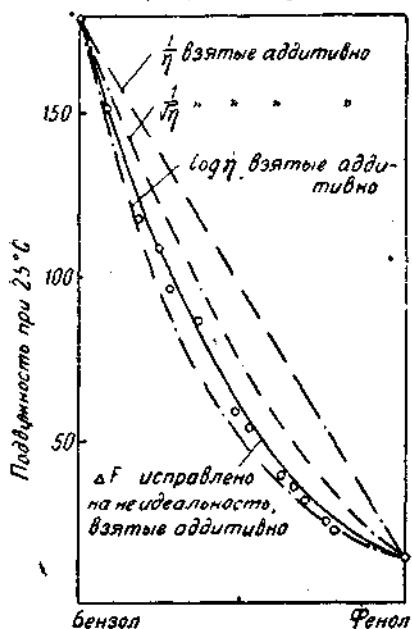


Рис. 6. Влияние концентрации на вязкость в случае простых жидкостей.

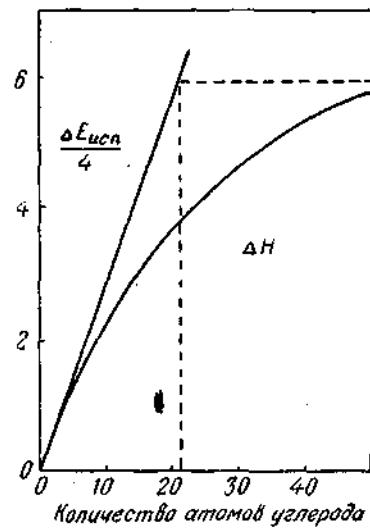


Рис. 7. Зависимость теплоты активации для вязкого течения от длины цепи.

Отсюда можно заключить, что когда число углеводородных групп в молекуле становится достаточно большим, течение жидкости осуществляется путем смещений отдельных подвижных сегментов, размеры которых не зависят от общей длины молекулы<sup>40</sup>. Предельное значение теплоты активации  $\Delta H^*$  — 6—7 ккал отвечает длине подвижных сегментов, составляющей 20—25 углеродных атомов. Некоторые данные о характере такого течения могут быть получены из данных Флори по вязкостям расплавов полиэфиров<sup>19</sup>.

Оказалось, что теплота активации для вязкости не зависит от молекулярного веса вещества. Это указывает на то, что размеры перемещающихся при течении частей молекул также не зависят от молекулярного веса.

Вязкости полиэфиров со средней (по молекулярному весу) длиной цепи  $Z_w$  выражаются следующей эмпирической формулой:

$$\ln \eta = \frac{A}{R} + \frac{B Z_w^{1/2}}{R} + \frac{C}{RT}, \quad (23)$$

где постоянные имеют следующие значения:  $A = -28$ ,  $B = 0,5$ ;  $C = 8,3$  ккал. Из формулы (18) для вязкости следует, что

$$\ln \eta = \ln \frac{Nh}{V} - \frac{\Delta S^*}{R} + \frac{\Delta H^*}{RT}. \quad (24)$$

Таким образом, значение  $\Delta H^*$  оказывается равным 8,3 ккал. Из известной теплоты испарения простых молекул и соотношения  $\Delta H^* = \Delta H_{\text{ исп}}/4$  можно оценить длину сегментов для ряда полиэфиров в 28—34 углеродных атома.

Отсюда может быть найден молярный объём, занимаемый сегментами (около 500 см<sup>3</sup>), и значение

$$\Delta S^* = 6,8 - 0,5 Z_w^{1/2}.$$

Последнее соотношение показывает, что при течении сегмент получает дополнительную (вращательную) энтропию в 6,8 CGS-ед. и проигрывает в энтропии величину, зависящую от полной длины молекулы. Второй член может быть интерпретирован, как возникающий из-за связи между сегментами, которая должна существовать для того, чтобы молекула, как целая, могла перемещаться. Зависимость вязкости от длины цепи  $Z$  может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\eta} = K e^{-B Z_w^{1/2} / R} \quad (25)$$

или в эквивалентном этому виде

$$\frac{1}{\eta} = K \left( 1 - \frac{B Z_w^{1/2}}{R n} \right)^n,$$

где  $n$  — большое число.

Последнее соотношение по своему виду совпадает с выражением для вероятности того, что произойдёт последовательно  $n$  событий, если  $B Z_w^{1/2} / R n$  — вероятность того, что рассматриваемое событие не произойдёт.

Запутанная углеводородная цепь занимает объём, в среднем равный 3,4  $Z^{1/2}$  куб. Å. Если  $n$  — число подвижных сегментов, то на каждый сегмент приходится  $1/n$  часть этого объёма. Сама цепь занимает объём 20  $Z$  куб. Å.

Тогда вероятность того, что сегмент займет невыгодное для движения положение, равна

$$3,4 Z^{1/2} / n : 20 Z = 0,17 Z^{1/2} / n.$$

Таким образом, значение параметра  $B$  оказывается равным 0,34, тогда как наблюденное в опытах Флори значение  $B$  составляло 0,5.

Интересно применить такие же формулы к вязкости жидкой серы. Термоплота активации вязкого течения серы составляет около 10 ккал. Из известной теплоты испарения можно оценить размеры подвижной части молекулы в 20 атомов. Такой сегмент имеет значение  $\Delta S^* = -37$ . Если это значение  $\Delta S^*$  обязано члену  $BZ^{1/2}$ , то при значении  $B = 0,5$  для средней длины цепи серы находим величину в 5500 атомов!

## VI. ВЯЗКОСТЬ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ<sup>89</sup>

Как показали измерения Штаудингера<sup>80</sup> и других авторов, вязкость разбавленных растворов полимеров может быть представлена в виде

$$\eta = \eta_0 (1 + kZ\varphi), \quad (26)$$

где  $\eta_0$  — вязкость чистого растворителя,  $Z$  — длина цепи,  $\varphi$  — объёмная концентрация полимера и  $k$  — постоянная и характерная для данного полимера. Формула этого типа может быть выведена из представлений о линейной полимерной молекуле, как о совокупности сфер, связанных жёсткими связями, направленными под определёнными валентными углами, движущейся в сплошной среде<sup>37</sup>.

В случае расплавов полимеров вязкость может быть выражена формулой Флори

$$\eta_p = \frac{Nh}{V_p} e^{-\Delta S_p^*/R} e^{BZ^{1/2}/R} e^{\Delta H_p^*/RT}, \quad (27)$$

где  $Z$  — длина цепи и  $V_p$ ,  $\Delta S_p^*$  и  $\Delta H_p^*$  — объём, энтропия и теплота активации отдельного сегмента. При средних концентрациях вязкость раствора можно приближённо описывать формулой, представляющей некоторую комбинацию соотношений для слабых растворов и расплавов чистых полимеров.

Для обоих предельных случаев, не ограничивая общности, можно представить вязкость в виде

$$\eta = \frac{Nh F_0}{VF^*}, \quad (28)$$

где  $F_0$  и  $F^*$  — свободные энергии нормального и активированного состояния. Если полимерная молекула находится в концентрированном растворе, то одни её участки окружены полимерными молекулами, а другие — молекулами растворителя. В первом приближении можно считать, что те сегменты, которые окружены растворителем, движутся так, как будто бы они находились в слабом растворе, тогда как сегменты, находящиеся в окружении полимерных молекул, движутся как в расплаве чистого полимера, причём взаимодействием между различными частями одной и той же молекулы можно пренебречь. Тогда с помощью общего соотношения (28) вязкость концентрированного раствора полимера можно представить в виде

$$\eta = \frac{Nh}{V_{cp}} \left( \frac{F_0}{F^*} \right)_{\text{разб}}^{1-\varphi} \left( \frac{F_0}{F^*} \right)_{\text{полимер}}^\varphi. \quad (29)$$

Способ усреднения медленно меняющегося множителя  $Nh/V$  является несущественным. Объёмная концентрация полимера  $\varphi$  является мерой того, как часто полимерные молекулы могут попадать в окружение других полимерных молекул.

При усреднении уравнения (29) ещё не использованы явные выражения для вязкости в обоих предельных случаях. Если в предельном случае разбавленного раствора вязкость выражается уравнением Штаудингера [уравнение (26)] и в предельном случае чистого расплава полимера — уравнением Флори [уравнение (27)], вязкость концентрированного раствора будет

$$\eta = [\eta_0 (1 + kZ\varphi)]^{1-\varphi} \left[ \frac{Nh}{V_P} e^{-\frac{\Delta S_P^*}{R}} e^{\frac{BZ^{1/2}}{R}} e^{\frac{\Delta H_P^*}{RT}} \right]^\varphi. \quad (30)$$

Для разбавленных растворов уравнение (30) может быть записано в эквивалентной форме

$$\frac{\ln \eta / \eta_0}{\varphi} = \left[ kZ + BZ^{1/2}R + \frac{\Delta H_P^* - \Delta H_0^*}{RT} - \frac{\Delta S_P^* - \Delta S_0^*}{R} - \ln \frac{V_P}{V_0} \right] + \varphi \left[ -\frac{k^2 Z^2}{2} - kZ \right] + \varphi^2 \left[ \frac{k^3 Z^3}{3} + \frac{k^2 Z^2}{2} \right] + \dots, \quad (31)$$

которая приводит к логарифмическому возрастанию вязкости с концентрацией. При экстраполировании к нулевой концентрации формула (31) даёт «истинную вязкость»<sup>46</sup>.

Сейчас мы перейдём к проверке применимости уравнений (30) и (31).

### 1. Зависимость от молекулярного веса

Уравнение (31) позволяет найти зависимость истинной вязкости от молекулярного веса. Именно, как видно из уравнений (31) и (26), постоянная уравнения Штаудингера  $K_m$  (с точностью до постоянной, зависящей от выбора системы единиц) будет равна

$$\frac{1}{Z} \left[ \frac{\ln \frac{\eta}{\eta_0}}{\varphi} \right]_{\varphi=0} = k + \frac{B}{RZ^{1/2}} + \frac{P}{Z}, \quad (32)$$

где три последних (малых) члена в первой скобке уравнения (31) объединены и обозначены через  $P$ .

В случае очень большого молекулярного веса второй и третий члены в (32) можно опустить, и  $K_m$  превращается в постоянную, не зависящую от молекулярного веса. Однако, при уменьшении молекулярного веса можно ожидать, что значение  $K_m$  будет смещаться в сторону больших численных значений. Экспериментальные данные по растворам поливенилхлоридов и полистиролов, действительно, обнаруживают этот рост  $K_m$ <sup>81, 85, 86</sup>. Другими примерами могут служить полимер полиэтиленоксид<sup>21</sup> и полиэфиры<sup>20, 45</sup>.

## 2. Зависимость от концентрации

Как видно из уравнения (31), если представить в логарифмической шкале зависимость  $\ln \frac{\eta}{\eta_0}$  от  $\varphi$ , то должно наблюдаться

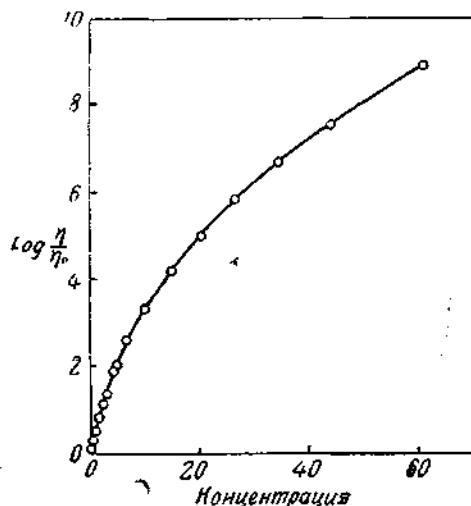


Рис. 8. Влияние концентрации на вязкость полимерных растворов (уксуснокислая целлюлоза в циклогексаноне).

такого чисто качественного заключения.

систематическое отклонение от прямой пропорциональности — уменьшение  $\frac{\ln \eta/\eta_0}{\varphi}$  с ростом  $\varphi$ . Такой ход кривой отмечался многими исследователями. Он ясно виден на рис. 8, на котором изображена зависимость  $\ln \eta/\eta_0$  от  $\varphi$  для раствора ацетата целлюлозы в циклогексаноне<sup>64</sup>.

Из независимых измерений молекулярного веса и экспериментальной кривой вязкости можно найти значения параметров  $k$  и  $B$ . В табл. 3 приведены их значения для нескольких типов полимеров. Мы видим, что значения параметра  $k$  имеют тот же порядок величины, что и длина сегментов полимерных молекул, определённая из осмотического давления.

С увеличением жёсткости полимерной молекулы растут обе эти величины. Однако, неточность данных не позволяет пойти дальше

Таблица 3  
Вязкости высокополимеров

Вещество	$k$	$B/R$
Азотнокислая целлюлоза 1, 17, 18, 85 . . . . .	0,00845	2,33
Уксуснокислая целлюлоза 17, 86, 64 . . . . .	0,0194	2,21
Сложные полиэфиры <sup>19</sup> . . . . .	0,025	0,62
Полистеарин <sup>84</sup> . . . . .	0,0447	0,845
Резина 17, 18 . . . . .	0,0835	3,27

Растворы глобулярных макромолекул могут изучаться с помощью тех же методов, что и растворы линейных макромолекул. При этом оказывается, что: 1) вязкость раствора хорошо описывается

уравнением Эйнштейна<sup>14</sup> и Гута и Симга<sup>53</sup>, выведенным из гидродинамических соображений:

$$\eta = \eta_0 (1 + \frac{5}{2} \varphi + \frac{109}{14} \varphi^2 + \dots). \quad (33)$$

В качестве примеров можно привести фенолальдегидный золь резины<sup>44</sup> или сернистый золь<sup>64</sup>. 2) Численное значение вязкости растворов глобулярных макромолекул на один или два порядка величины меньше, чем у линейных макромолекул, так как в случае глобулярных макромолекул в выражении для вязкости отсутствуют большие слагаемые  $kZ$  и  $BZ^{1/2}$ . Так, например, уже 2%-%ные растворы каучука или нитрата целлюлозы являются предельно-вязкими, тогда как не представляет труда получение 70%-%ных растворов батавской даммаровой смолы<sup>53</sup>. 3) Наблюдается заметное возрастание вязкости растворов фенольной резины с ростом степени полимеризации.

### 3. Зависимость от растворителя

В ранних работах неоднократно указывалось, что истинная вязкость растворов одна и та же для всех растворителей, если только ограничиваться хорошими гомополярными растворителями.

Однако, хорошо известно, что для каждого высокополимера существуют растворители, дающие как вязкие, так и маловязкие растворы.

С точки зрения полимерной молекулы «хорошим» является, очевидно, такой растворитель, молекулы которого стремятся окружать и группироваться возле полимерной молекулы так, что последняя находится как бы в эффективно более разбавленном растворе. В этом случае молекулы полимера настолько редко встречаются друг с другом, что их сегментная природа проявляется слабо, осмотическое давление приближается к давлению идеального раствора, а вязкость уменьшается. Истинная вязкость каучука в бензоле уменьшается на 40% при прибавлении 15% метилового спирта, причём осмотическое давление становится практически равным давлению в идеальном растворе<sup>50</sup>.

Эффективная объёмная концентрация полимера в неидеальном растворе может быть записана в виде  $\gamma\varphi$ , где  $\gamma$  — коэффициент активности. Тогда вязкость раствора будет иметь вид

$$\eta = [\eta_0 (1 + kZ\varphi)]^{1-\gamma\varphi} (\eta_p)^{\gamma\varphi}. \quad (34)$$

Для растворов одинаковой концентрации в двух различных растворителях уравнение (34) даёт

$$\ln \frac{\eta_1/\eta_{01}}{\eta_2/\eta_{02}} = \varphi \left[ (\gamma_1 - \gamma_2) \ln \frac{\eta_0/\eta_{01}}{1 + kZ\varphi} - \gamma_2 \ln \frac{\eta_{01}}{\eta_{02}} \right]. \quad (35)$$

Второй член в скобках может считаться малым по сравнению

с первым. Разность ( $\gamma_1 - \gamma_2$ ) будет положительной или отрицательной в зависимости от того, какой из растворителей лучше. В малом интервале концентраций можно приближенно считать, что

в правой части (35) стоит линейная функция концентрации  $\phi$ , если пренебречь слабой зависимостью  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и логарифмического множителя от  $\phi$ . Возможно, что длина сегментов  $Z$  также изменяется от растворителя к растворителю, но этот эффект не может изменить качественной картины.

Куртц, Гарвей и Лиркин<sup>49</sup> исследовали вязкость фенольных и натуральных резин в ряде технических растворителей и получили для отношений кинематической вязкости одного раствора к кинематической вязкости другого раствора, как функций концентрации, семейство кривых, изображённых на рис. 9.

Рис. 9. Влияние растворителя на вязкость полимерных растворов.

гого раствора, как функций концентрации, семейство кривых, изображённых на рис. 9.

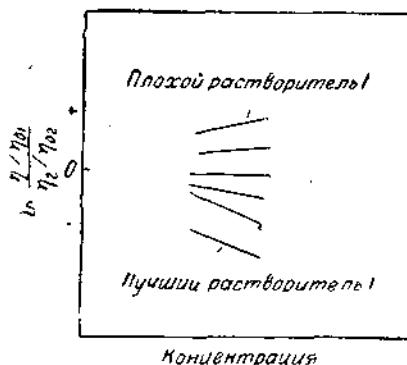
#### 4. Зависимость от температуры

В обоих предельных случаях разбавленных растворов и расплывов полимеров зависимость вязкости от температуры имеет вид  $\eta = \text{const. exp}(\Delta H^*/RT)$ , так что вязкость падает с ростом температуры. Для неидеальных растворов существует, однако, дополнительный эффект. В случае хорошего растворителя каждая молекула полимера окружена большим числом молекул растворителя, чем это было бы при случайному распределении, т. е.  $\gamma < 1$ . С ростом температуры распределение молекул растворителя приближается к случайному, так что  $\gamma$  приближается к единице. Однако, приближение раствора к идеальному означает в этом случае, что полимерные молекулы чаще встречаются и сталкиваются друг с другом. Поэтому вес вязкости чисто полимерного типа в общей вязкости раствора увеличивается. В результате может даже оказаться, что вязкость раствора растёт с возрастанием температуры.

Точнее говоря, зависимость вязкости от температуры определяется в этом случае из соотношения

$$\frac{d}{dT} \ln \eta / \eta_0 = \phi \left[ \frac{d\gamma}{dT} \frac{\ln (\eta_0 / \eta)}{\ln (1 + kZ\phi)} - \gamma \frac{\Delta H_p^* - \Delta H_0^*}{RT^2} \right]. \quad (36)$$

Второй член в скобках даёт обычный температурный коэффициент



вязкости.  $\Delta H_p^*$  составляет обычно около 10 ккал и  $\Delta H_0^*$  около 2 ккал. Если  $\gamma$  меньше единицы,  $d\gamma/dT$  — положительно. Численный коэффициент при  $d\gamma/dT$  быстро растёт с длиной цепи, так что у полимеров большого молекулярного веса положительный член становится преобладающим.

Предсказываемый ход температурной зависимости иллюстрируется кривыми на рис. 10. Экспериментальные данные этого типа получены для полистиролов и поливинилхлоридов <sup>84, 85</sup>. Для сферических или сильно разветвлённых молекул, у которых сегментный тип движения играет небольшую роль или вовсе не осуществляется, вязкость всегда убывает с ростом температуры, как это видно из нижней прямой на рис. 10.

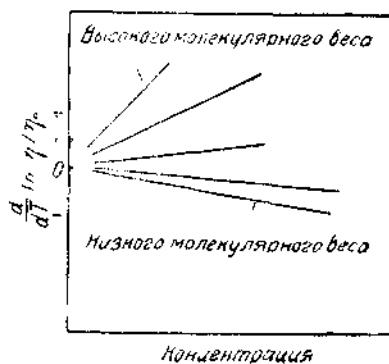


Рис. 10. Влияние температуры на вязкость полимерных растворов.

### 5. Зависимость от градиента скорости

Под влиянием вязких напряжений в жидкости межмолекулярные связи всё время разрываются и изменяются. В случае малых молекул восстановление нормальных положений равновесия происходит почти мгновенно. В случае же полимерных молекул дело обстоит иначе. Если связи между двумя полимерными молекулами нарушаются, то прежде чем произойдёт их восстановление, молекулы могут быть увлечены растворителем и унесены друг от друга. При течении устанавливается некоторое равновесное состояние, в котором числа разрываемых и восстанавливающихся связей равны друг другу. В этом равновесном состоянии число полимерных молекул, окружённых молекулами растворителя, несколько больше, чем в покоящемся растворе, т. е. знак производной  $d\gamma/d\sigma$ , где  $\sigma$  — вязкое напряжение, отрицательный.

Поэтому

$$\frac{d}{d\sigma} \ln \eta / \eta_0 = \varphi \left[ \frac{d\gamma}{d\sigma} \frac{\ln (\eta_p / \eta_0)}{\ln (1 + kZ\varphi)} + \gamma \frac{d}{d\sigma} \ln \frac{\eta_p / \eta_0}{1 + kZ\varphi} \right]. \quad (37)$$

Второй член, характеризующий зависимость предельных вязкостей от вязких напряжений, по видимому, мал. Следовательно: 1) эффект тиксотропии должен возрастать с ростом концентрации раствора и 2) поскольку числитель коэффициента при  $d\gamma/d\sigma$  быстро растёт с увеличением длины полимерной цепи, эффект тиксотропии должен возрастать с молекулярным весом.

Оба эти утверждения находятся в согласии с экспериментальными данными, полученными для растворов полистиролов <sup>80</sup>.

## VII. ДИФФУЗИЯ В ПРОСТЫХ ЖИДКОСТЯХ

Выражение для коэффициента диффузии в простых жидкостях может быть выведено из тех же представлений, что и выражение для вязкости<sup>88</sup> (см. рис. 4).

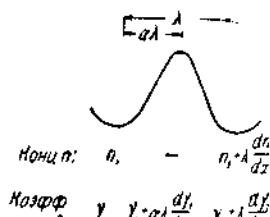


Рис. 11: Модель для диффузии.

Концентрация и коэффициент активности раствора при различных положениях диффундирующей молекулы представлены на рис. 11.

Общее выражение скорости процесса, идущего с активацией, имеет вид

$$k' = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F_0^*/RT} \frac{\gamma_2}{\gamma_1^*}. \quad (38)$$

Скорости прямого и обратного процессов будут

$$v_f = n_1 \lambda \frac{kT}{h} e^{-\Delta F_0^*/RT} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 \left[ 1 + \frac{\lambda}{\gamma_1} \frac{d \gamma_1}{dx} \right]}, \quad (39)$$

$$v_b = \left( n_1 + \lambda \frac{dn_1}{dx} \right) \lambda \frac{kT}{h} e^{-\Delta F_0^*/RT} \frac{\gamma_1 \left[ 1 + \frac{\lambda}{\gamma_1} \frac{d \gamma_1}{dx} \right]}{\gamma_1 \left[ 1 + \frac{\lambda}{\gamma_1} \frac{d \gamma_1}{dx} \right]}. \quad (40)$$

Результирующая скорость процесса

$$V = - \frac{dn_1}{dx} \lambda^2 \frac{kT}{h} e^{-\Delta F_0^*/RT} \left[ 1 + \frac{d \ln \gamma_1}{d \ln n_1} \right]. \quad (41)$$

Коэффициент диффузии  $D$  определяется, как

$$V = - D \frac{dn_1}{dx}. \quad (42)$$

Комбинируя уравнения (41) и (42), имеем

$$D = \lambda^2 \frac{kT}{h} e^{-\Delta F_0^*/RT} \left[ 1 + \frac{d \ln \gamma_1}{d \ln n_1} \right]. \quad (43)$$

Если молярный объём «растворённого вещества»  $V_1$  и «растворителя»  $V_2$  не очень сильно отличаются друг от друга, уравнение (43) приобретает вид

$$D = \lambda^2 \frac{kT}{h} e^{-\Delta F_0^*/RT} \left[ \frac{d \ln a_1}{d \ln N_1} \right], \quad (44)$$

$$D\eta = \frac{\lambda_1 kT}{\lambda_2 \lambda_3} \left[ \frac{d \ln a_1}{d \ln N_1} \right]. \quad (45)$$

Тесная связь, существующая между процессом диффузии и вязкостью течения, хорошо подтверждается соответствием между теплотами активации обоих процессов.

На рис. 12 изображена зависимость  $D\eta$  и  $D\eta/(d \ln a_1 / d \ln N_1)$  от концентрации в системе хлороформ-эфир. Мы видим, что имеется

хорошее согласие с формулой (45), которая требует прямой пропорциональности между  $D\eta$  и  $d \ln a_1 / d \ln N_1$ <sup>51</sup>.

Абсолютные значения коэффициентов диффузии, вычисленные по уравнению (45), оказываются больше наблюдённых экспериментально в 2—5 раз. Это можно объяснить тем, что при течении молекулы ориентируются таким образом, что  $\lambda_1$  представляет их наименьший размер, а  $\lambda_2 \lambda_3$  — наибольшую площадь. Действительно, у чистых жидкостей при течении возникает оптическая анизотропия (эффект Максвелла). Величина этой анизотропии может быть без труда вычислена<sup>54</sup>. Пусть показатель преломления текущей молекулы при течении ориентирован так, что её площадь, подвергающаяся действию вязких напряжений, равна  $\lambda'_2 \lambda'_3$ . При некоторой средней ориентации в потоке, когда площадь молекулы, подвергающаяся действию вязких напряжений, равна  $\lambda_2^0 \lambda_3^0$ , показатель преломления её будет  $n_0$ . Если обе ориентации молекулы отличаются друг от друга энергией и молекулы будут распределены между обеими ориентациями по Больцману, то

$$\frac{n'}{n_0} = \exp [ -f(\lambda'_2 \lambda'_3 - \lambda_2^0 \lambda_3^0)x/kT] = 1 - f(\lambda'_2 \lambda'_3 - \lambda_2^0 \lambda_3^0)x/kT \quad (46)$$

где следует ещё произвести усреднение по всем значениям от нуля до вершины барьера. Тогда экспериментально измеряемая величина оптической анизотропии будет равна

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{n_0 - n'}{n_0} = 1 - \frac{n'}{n_0} = f(\lambda'_2 \lambda'_3 - \lambda_2^0 \lambda_3^0)/kT \left\{ \frac{\int_0^{\lambda/2} x e^{-E/RT} dx}{\int_0^{\lambda/2} e^{-E/RT} dx} \right\}. \quad (47)$$

Последнее выражение имеет такой же вид, как и установленная Максвеллом экспериментальная формула

$$\frac{\Delta n}{n} = fM, \quad (48)$$

где  $M$  — постоянная, характерная для данной жидкости.

Оценим значение  $M$  для бензола при 300°К. Произведение  $\lambda'_2 \lambda'_3$  будет составлять около  $16 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ ,  $\lambda_2^0 \lambda_3^0$  около  $11 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ . Величина, стоящая в фигурных скобках в формуле (47), может быть оценена с помощью численного интегрирования для барьера, рав-

10\*

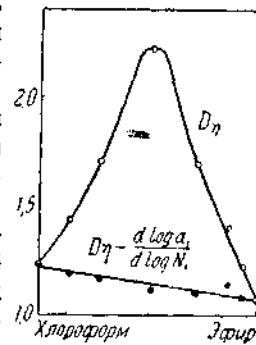


Рис. 12. Влияние концентрации на диффузию.

ного 3  $\text{мккал}$ . Она оказывается равной  $0,145 \cdot \lambda/2$ . При этом постоянная Максвелла равна примерно  $0,52 \cdot 10^{-10}$ . В табл. 4 для сравнения приведены измеренные значения этой постоянной для ряда жидкостей<sup>8</sup>.

Таблица 4  
Постоянное Максвелла

Вещество	$M \cdot 10^{10}$	Вещество	$M \cdot 10^{10}$
о-дихлорбензол . . .	1,85	Толуол . . . . .	1,04
<i>p</i> -ксилол . . . . .	1,84	Фенилэтанол . . .	0,67
Мезитилен . . . . .	1,31	Бензол . . . . .	0,64
<i>m</i> -ксилол . . . . .	1,29	Гептанол-1 . . . .	0,41
Хлорбензол . . . . .	1,22	Четырёххлористый углерод . . . . .	0,06
о-ксилол . . . . .	1,21	Циклогексан . . .	0,03

### VIII. ДИФФУЗИЯ МАКРОМОЛЕКУЛ

Большое число экспериментальных работ по диффузии макромолекул было выполнено для глобулярных макромолекул (например, протеинов), для которых можно ожидать применимости гидродинамической теории<sup>50, 62, 63, 68</sup>. Для линейных макромолекул число работ по определению коэффициентов диффузии невелико. В табл. 5

Таблица 5  
Коэффициенты диффузии высокополимеров

	Концентр. $g/100 \text{ см}^3$	$D \cdot 10^7$ $\text{см}^2/\text{сек}$	$D_\eta \cdot 10^7$	Мол.
Метил- целлюлоза	0,5	4,38	4,45	14,100
	0,5	3,00	3,05	24,300
	1,0	3,07	3,11	24,300
	0,5	2,43	2,47	38,100
	1,0	2,26	2,31	38,100
Уксусно- кислая целлюлоза	0,61	10,85	3,46	20,000
	1,15	10,9	3,48	20,000
	0,5	4,48	1,48	53,000
	1,46	4,30	1,37	53,000
	0,516	3,29	1,05	90,000

приведены результаты измерений Рольсона по диффузии производных целлюлозы<sup>67</sup>. Как видно из этой таблицы, коэффициенты диффузии, грубо говоря, обратно пропорциональны молекулярному

весу, но коэффициент диффузии изменяется несколько медленнее, чем молекулярный вес.

Как и следовало ожидать, величина произведения  $D_1$  у растворов метилцеллюлозы и уксусно-кислой целлюлозы приблизительно одна и та же. Коэффициент диффузии не обнаруживает никакого регулярного хода с концентрацией раствора, но значения его в разбавленных растворах заметно выпадают из приведённого в табл. 5 ряда значений.

### IX. СКОРОСТЬ СЕДИМЕНТАЦИИ

Если жидкость помещена в центрифугу, вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$ , на молекулу, движущуюся в жидкости, будет действовать сила  $m\omega^2 x$ , где  $m$  — разность между массой молекулы и массой растворителя в том же объёме и  $x$  — расстояние от оси вращения. Эта сила будет помогать продвижению молекулы к новому положению равновесия при движении в одном направлении (т. е. на длине  $a\lambda$ ) и тормозить при движении в другом направлении [т. е. на длине  $(1-a)\lambda$ ]. Скорости прямого и обратного процессов

$$v_f = n_1 \lambda \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT} [e^{m\omega^2 x a \lambda / kT}] \frac{\gamma_1}{\gamma_1 \left[ 1 + \frac{a\lambda}{\gamma_1} \frac{d\gamma_1}{dx} \right]}, \quad (49)$$

$$v_b = \left( n_1 + \lambda \frac{dn_1}{dx} \right) \lambda \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT} (e^{-m\omega^2 x (1-a)\lambda / kT}) \times \\ \times \frac{\gamma_1 \left[ 1 + \frac{\lambda}{\gamma_1} \frac{d\gamma_1}{dx} \right]}{\gamma_1 \left[ 1 + \frac{a\lambda}{\gamma_1} \frac{d\gamma_1}{dx} \right]}. \quad (50)$$

Суммарную скорость после упрощений можно представить в виде

$$v = \frac{n_1 \lambda^2 m \omega^2 x}{h} e^{-\Delta F^*/RT} - \frac{dn_1}{dx} \lambda^2 \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT} \cdot \left[ 1 + \frac{d \ln \gamma_1}{d \ln n_1} \right]. \quad (51)$$

Но, как видно из (43), второй член в уравнении (51) есть просто коэффициент диффузии. Первый же член эквивалентен обычному уравнению седиментации Сведберга

$$s = \frac{dx/dT}{n_1 \omega^2 x} = \frac{m \lambda^2}{h} e^{-\Delta F^*/RT} \quad (52a)$$

$$= \frac{m \lambda_2}{\eta h \lambda_2 \lambda_3} \quad (52b)$$

$$= \frac{m D}{kT} / \left[ \frac{d \ln a_1}{d \ln N_1} \right], \quad (52c)$$

где  $s$  — постоянная седиментации молекулы<sup>39</sup>. Как видно из уравнения (52), эта последняя обратно пропорциональна вязкости. На практике обычно проверяют правильность наблюдённых значений

постоянной седиментации по постоянству произведения её на вязкость<sup>89</sup>. На рис. 13 приведены типичные результаты, полученные для скоростей седиментации полистиролов в хлороформе<sup>76</sup>. На

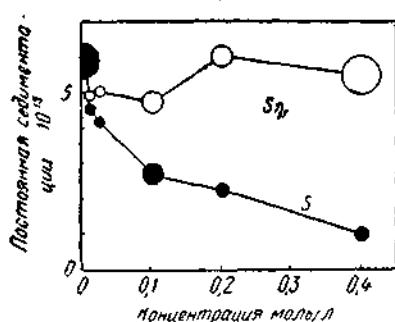


Рис. 13. Постоянная седиментации полистеарина в хлороформе.

влияниях постоянной седиментации и коэффициента диффузии от концентрации раствора не наблюдается.

При выполнении расчётов по центрифугированию обычно предполагается, что  $s$  (или  $D$  и  $\eta$ ) остаётся постоянной в данном опыте. Однако раствор в центрифуге испытывает гидростатическое давление, величина которого на протяжении центрифугальной камеры изменяется от нуля до нескольких сот, а в некоторых случаях и тысяч атмосфер. При таких давлениях вязкость воды возрастает по сравнению с вязкостью при нормальных условиях на 50%, а вязкость органических растворителей — в несколько раз<sup>6</sup>. Следовательно, значение  $s$  оказывается переменным вдоль камеры.

Это обстоятельство может быть выявлено при измерениях скорости седиментации при различных скоростях вращения ротора. Если эти измерения указывают на уменьшение  $s$  с ростом скорости, при расчёте ультрацентрифуги необходимо учитывать изменение вязкости со скоростью [ср. уравнение (20)].

Измерения скорости седиментации метилцеллюлозы, уксусно-кислой целлюлозы и полихлорпрена указывают на слабое изменение постоянной седиментации при значительных вариациях молекулярного веса<sup>47, 77</sup>. Этот факт также указывает на то, что движение полимерной молекулы происходит путём перемещения более или менее независимых сегментов.

#### X. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

Если измерять диэлектрическую постоянную дипольного вещества в достаточно широком интервале частот, то при некоторой частоте наблюдается резкое уменьшение диэлектрической постоянной (рис. 14, верхняя кривая).

На оси абсцисс отложена концентрация раствора, на оси ординат — значение постоянной седиментации. Заштрихованные кружки представляют значения постоянной седиментации, а незаштрихованные — значение произведения  $D\eta$ . Радиус кружка представляет вероятную ошибку соответствующего измерения.

Мы видим, что в пределах точности эксперимента произведение  $s$  на  $\eta$  действительно остаётся постоянным. Следует заметить, что параллелизма в за-

Для объяснения этой «аномальной дисперсии», Дебай высказал предположение о том, что диполи ориентируются приложенным полем и что при высоких частотах эта ориентировка прекращается, так как диполи не могут более следовать за внешним полем из-за сил вязкого трения среды<sup>12</sup>. Известное уравнение Дебая гласит:

$$\epsilon = \epsilon_\infty + \frac{\mu^2}{3\epsilon_0 kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau}, \quad (53)$$

где  $\epsilon$  — поляризуемость,  $\epsilon_\infty$  — значение её при оптической частоте,  $\mu$  — постоянный дипольный момент молекулы,  $\omega$  — частота в радианах на секунду,  $\tau$  — время релаксации и  $i$  равно  $\sqrt{-1}$ . Время релаксации представляет средний промежуток времени, который требуется для того, чтобы молекулы вернулись к случайному распределению пространственных ориентаций после снятия приложенного ориентирующего поля. Дебай принимает, что вязкое трение, действующее на сферу, вращающуюся в жидкости, выражается законом Стокса, и получает для времени релаксации следующее выражение:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{kT}{4\pi r^3 \eta}, \quad (54)$$

где  $r$  — радиус сферы и  $\eta$  — вязкость среды.

Среди других гипотез, предложенных для объяснения явления аномальной дисперсии, можно указать следующие:

- смещение заряженных частиц под действием упругих и вязких сил<sup>13, 61</sup>,
- поляризация в двухслойном диэлектрике<sup>64</sup>,
- высокочастотное сопротивление на границе электрод-диэлектрик<sup>69</sup>,
- включение супензий в виде диэлектрических сфер в диэлектрической среде<sup>31, 63</sup>,
- проводимость частиц, помещённых в диэлектрической среде<sup>43</sup>,
- наличие проводящих слоёв в диэлектрической среде<sup>56</sup>.

Оказывается, что в выражение для диэлектрической постоянной, выводимое из всех перечисленных теорий, входит частотный множитель  $1/(1 + i\omega\tau)$ . Отсюда можно сделать замечательное заключение, что такой вид зависимости диэлектрической постоянной от частоты не зависит от характера того механизма, который приводит к этой зависимости.

И, действительно, зависимость диэлектрической постоянной от частоты, имеющую характер дебаевской, удалось получить, исходя из весьма общей схемы явления<sup>48</sup>.

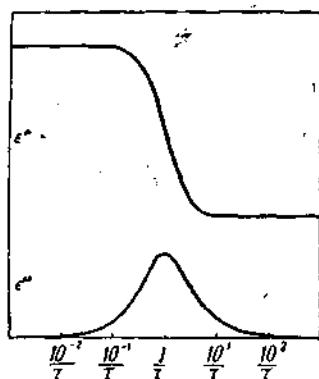


Рис. 14. Аномальная дисперсия диэлектрической постоянной.

Предположим, что молекула может находиться только в двух состояниях. Величины, относящиеся к этим состояниям, мы будем снабжать индексами 1 и 2. Скорость изменения числа молекул в первом состоянии ( $-dN_1/dt$ ) из-за перехода их во второе состояние будет

$$-\frac{dN_1}{dt} = N_1 k_1 - N_2 k_2, \quad (55)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — число молекул и  $k_1$  и  $k_2$  — удельные скорости (вероятности) прямого  $1 \rightarrow 2$  и обратного  $2 \rightarrow 1$  переходов.

Пусть число молекул в обоих состояниях и вероятности переходов изменяются приложенной внешней силой  $X$ . Предположим, что эта сила является настолько слабой, что новые числа молекул и вероятности переходов могут быть выражены через те же величины без поля с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_1^0 + X \frac{dN_1}{dX}, \quad k_1 = k_1^0 + X \frac{dk_1}{dX} \\ N_2 &= N_2^0 - X \frac{dN_2}{dX}, \quad k_2 = k_2^0 + X \frac{dk_2}{dX} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Так как в отсутствии поля система находится в равновесии, то

$$\frac{N_2^0}{N_1^0} = \frac{k_1^0}{k_2^0} = e^{\Delta F/RT}, \quad (57)$$

где  $\Delta F$  — разность свободных энергий обоих состояний.

Из уравнения (57) находим

$$\frac{dk_1}{dX} = k_2^0 e^{\Delta F/RT} \left( \frac{d}{dX} \frac{\Delta F}{RT} \right) + e^{\Delta F/RT} \frac{dk_2}{dX} = k_2^0 \frac{N_2^0}{N_1^0} \left( \frac{d}{dX} \frac{\Delta F}{RT} \right) + \frac{N_2^0}{N_1^0} \frac{dk_2}{dX} \quad (58)$$

Подставляя уравнения (56) и (58) в (55), находим

$$\begin{aligned} -\frac{dN_1}{dt} &= \left[ N_1^0 + X \frac{dN_1}{dX} \right] \left[ k_1^0 + X k_2^0 \frac{N_2^0}{N_1^0} \left( \frac{d}{dX} \frac{\Delta F}{RT} \right) + X \frac{N_2^0}{N_1^0} \frac{dk_2}{dX} \right] - \\ &\quad - \left[ N_2^0 - X \frac{dN_2}{dX} \right] \left[ k_2^0 + X \frac{dk_1}{dX} \right] = \\ &= X \left[ k_1^0 \frac{dN_1}{dX} + k_2^0 \frac{dN_1}{dX} + k_2^0 N_2^0 \left( \frac{d}{dX} \frac{\Delta F}{RT} \right) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Если приложенное поле является периодическим, зависящим от времени по закону  $X = X_0 e^{i\omega t}$ , уравнение (59) превращается в простое дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( X \frac{dN_1}{dX} \right) + (k_1^0 + k_2^0) \left( X \frac{dN_1}{dX} \right) = -k_2^0 N_2^0 \left( \frac{d}{dX} \frac{\Delta F}{RT} \right) X_0 e^{i\omega t}, \quad (60)$$

решение которого можно сразу написать в виде

$$-X \frac{dN_1}{dX} = \frac{k_2^0 N_2^n \left( \frac{d}{dX} \frac{\Delta F}{RT} \right) X_0 e^{i\omega t}}{i\omega + (k_1^0 + k_2^0)}. \quad (61)$$

Уравнение (61) может быть также переписано в эквивалентной форме

$$-\frac{dN_1}{dX} = \frac{N \left( \frac{d}{dX} \frac{dF}{RT} \right)}{2 \left[ 1 + ch \left( \frac{\Delta F}{RT} \right) \right]} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{k_1^0 + k_2^0}}. \quad (62)$$

Дебаевский вид частотной зависимости получается, таким образом, при любом механизме переходов из первого состояния во второе для любого свойства системы, т. е.

$$A = A_1 + \frac{A_2}{1 + i\omega\tau}, \quad (63)$$

где  $A$  — количественное выражение какого-либо свойства системы,  $A_1$  — часть его, не зависящая от частоты, и  $A_2$  — часть, зависящая от частоты.

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  выражаются обычно через предельные значения  $A$ , отвечающие нулевой и бесконечно большой частоте. При бесконечно большой частоте  $A_\infty = A_1$ , при нулевой  $A_0 = A_1 + A_2$ . Следовательно,

$$A = A_\infty + \frac{(A_0 - A_\infty)}{1 + i\omega\tau}. \quad (64)$$

В частности, одним из таких свойств системы является величина её поляризуемости, определяющая дипольный момент, индуцируемый в единице объёма. Поэтому можно написать

$$\alpha = \alpha_\infty + \frac{(\alpha_0 - \alpha_\infty)}{1 + i\omega\tau}. \quad (65)$$

На опыте измеряют не поляризуемость, а диэлектрическую постоянную среды. Если справедлива формула Клаузинуса-Мосотти, связывающая поляризуемость и диэлектрическую постоянную  $4\pi\alpha_3 = (\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$ , то уравнение (65) приобретает вид

$$\epsilon = \epsilon_\infty + \frac{(\epsilon - \epsilon_\infty)}{1 + i\omega\tau \left( \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_\infty + 2} \right)}. \quad (66)$$

Величину  $\tau(\epsilon_0 + 2)/(\epsilon_\infty + 2)$  называют иногда временем релаксации диэлектрика  $\tau^*$ . Для ряда веществ значение  $\tau^*$  немного превышает значение  $\tau$ . Но для воды, например,  $\tau^* = 23\tau$ . Ряд авторов изучали применимость формулы Клаузинуса-Мосотти для полярных жидкостей и пришли к выводу, что зависимость  $\epsilon$  от  $\alpha$  скорее приближается к линейной<sup>10, 38, 66, 72, 73, 92, 99</sup>. Если  $\epsilon$  зависит от  $\alpha$  линейно, множи-

тель  $(\epsilon_0 + 2)/(\epsilon_\infty + 2)$  в предыдущей формуле следует заменить единицей.

Разделяя вещественную и мнимую части, можно переписать уравнение (64) в виде

$$\epsilon = \epsilon_\infty + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)}{1 + \omega^2 t^{*2}} - i \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \omega t^*}{1 + \omega^2 t^{*2}}, \quad (67)$$

что можно также кратко записать, как

$$\epsilon = \epsilon' - i \epsilon''. \quad (68)$$

На рис. 14 верхняя кривая изображает ход вещественной части диэлектрической постоянной, а нижняя кривая — мнимой её части. При частоте  $\omega = \frac{1}{t^*}$  мнимая часть диэлектрической постоянной имеет максимальное значение  $\epsilon'' = (\epsilon_0 + \epsilon_\infty)/2$ , а вещественная часть имеет среднее значение между обоими предельными значениями  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_\infty$ , т. е.  $\epsilon' = (\epsilon_0 + \epsilon_\infty)/2$ . Измерение хода вещественной или мнимой части диэлектрической постоянной с частотой приложенного поля представляет удобный способ измерения времени релаксации.

Мнимая часть диэлектрической постоянной не может быть измерена непосредственно, но находится из электропроводности системы в переменном электрическом поле<sup>61</sup>.

Последняя определяется соотношением

$$\gamma = \frac{1}{E} \frac{dq}{dt}, \quad (69)$$

где  $E$  — электрическое поле и  $q$  — плотность поверхностного заряда. Для плоского конденсатора

$$4\pi q = \epsilon E \quad (70)$$

и

$$\gamma = \frac{1}{E_0 e^{i\omega t}} \frac{\epsilon' - i\epsilon''}{4\pi} \frac{d}{dt} E_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega}{4\pi} (\epsilon' - i\epsilon'') = \frac{\epsilon'' \omega}{4\pi} + i \frac{\epsilon' \omega}{4\pi}. \quad (71)$$

Последняя формула показывает, что мнимая часть диэлектрической постоянной определяется вещественной частью электропроводности.

Если диэлектрическая дисперсия возникает вследствие того, что в системе происходит не один, а несколько переходов, диэлектрическая постоянная будет снова выражаться суммой членов типа (62), но с различными временами релаксации. В частности, если в системе имеются бесконечно большие количества времён релаксации, образующих непрерывное распределение, область дисперсии диэлектрической постоянной будет шире, кривая диэлектрических потерь также шире, а максимальное значение потерь меньше, чем  $\frac{1}{2} (\epsilon_0 - \epsilon_\infty)$ . Фуосс и Кирквид, обратив формулы для диэлектрической постоянной, нашли из экспериментальных данных распределение времён релаксации<sup>29, 100</sup>.

Вторым заключением, которое можно вывести из уравнения (62), является то, что диэлектрическая постоянная и другие соответствующие величины будут малы, если энергии обоих состояний, между которыми происходят переходы, заметно отличаются друг от друга: гиперболический косинус в знаменателе быстро возрастает, если разность свободных энергий  $\Delta F$  превышает 1 ккал. Уайт пришёл к подобному же качественному заключению, исходя из иных соображений<sup>96</sup>. Это заключение находится в согласии с тем фактом, что диэлектрическая постоянная чистого вещества в твёрдом состоянии меньше, чем в жидком.

В-третьих, уравнение (62) показывает, что время релаксации  $\tau$  представляет величину, обратную удельной частоте переходов. Поскольку частотная зависимость диэлектрической постоянной не связана однозначным образом с механизмом релаксации, требование, предъявляемое к полной теории, должно состоять лишь в том, чтобы она могла предсказывать значение  $\tau$  и  $(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)$  и их зависимость от температуры и структуры вещества.

Так, дебаевское выражение для  $(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)$ , полученное для свободно вращающихся диполей, подтвердилось большим числом экспериментальных работ для веществ с полярными молекулами в парах и разбавленных растворах. В жидком состоянии, однако, выражение (54) для временных релаксаций приводит к значениям вязкости жидкости, существенно меньшим, чем полученным из прямых макроскопических измерений. Эта разница колеблется от десяти до нескольких тысяч раз.

Метод активированного комплекса может быть успешно применён к рассмотрению времён релаксаций<sup>16, 23, 87</sup>. Свободная энергия активации для диэлектрической релаксации может быть найдена из уравнения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F^*/RT}, \quad (72)$$

в то время как свободная энергия активации для вязкого течения связана с самой вязкостью уравнением

$$\frac{1}{\eta} = \frac{V}{Nh} e^{-\Delta F^*/RT}. \quad (73)$$

На рис. 15 приведены значения обеих свободных энергий для ряда жидкостей. Мы видим, что для целого ряда жидкостей экспериментальные точки лежат на прямой с наклоном, равным единице. Соответствие свободных энергий указывает на существование тесной связи между процессами диэлектрической релаксации и вязкого течения, что находится в качественном согласии с механизмом релаксации, предложенным Дебаем. Для сопоставления с этой теорией на рис. 15 пунктиром изображено уравнение (54).

Мы видим, что количественное совпадение экспериментальных данных с теорией Дебая отсутствует. Представление о сферических

диполях, вращающихся в сплошной вязкой среде, приводит, очевидно, к менее удовлетворительной картине, чем представление об отдельных дискретных молекулах, движение которых сопровождается разрывом связей с соседними молекулами. Вращение диполей происходило бы значительно свободнее, чем вязкое течение в таких ассоциированных жидкостях, как вода или глицерин, а также в растворах полярных молекул в вязких углеводородных растворителях (для некоторых из таких растворов дисперсия вообще отсутствует; экспериментальные точки для таких растворов на рис. 15 попали бы значительно левее нанесённых на рисунке<sup>65</sup>).

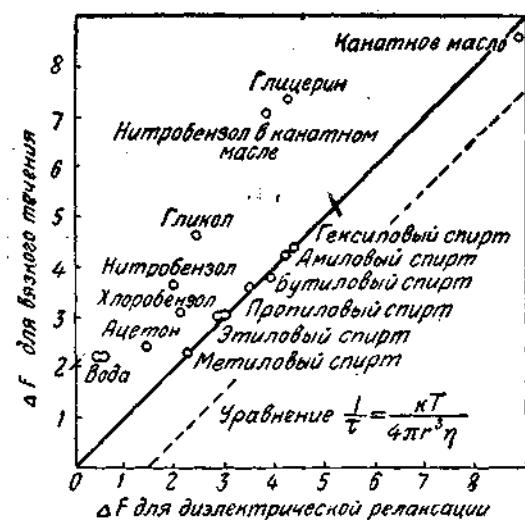


Рис. 15. Связь между диэлектрической постоянной и вязкостью.

тилбромидному и изоамилбромидному стеклу, не нанесены на рис. 15, так как вязкость твёрдых веществ может быть оценена лишь весьма грубым и неточным образом. Диэлектрическая дисперсия разбавленных растворов высокополимеров была исследована для одного из полимеров. Как и следовало ожидать, исходя из предположения о сегментной структуре полимерных молекул в области частот, отвечающих ориентации молекулы, как целого, дисперсия отсутствует<sup>7</sup>.

Размеры частей полимерной молекулы, которые могут ориентироваться внешним полем, ещё не установлены. Кирквуд и Фуосс принимают, что каждый отдельный диполь в полимерной молекуле ориентируется самостоятельно, причём эта ориентировка ограничена только направлениями валентных связей с соседями<sup>29</sup>.

Дополнительные сведения относительно диэлектрической дисперсии можно получить, если разбить свободную энергию на теплоту активации и энтропийный член. Тогда уравнение (72) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\tau} = \frac{kT}{h} e^{\frac{\Delta S^*}{R} - \frac{\Delta H^*}{RT}}. \quad (74)$$

Из температурного наклона кривой  $1/\tau$  можно вычислить  $\Delta H^*$  и, вычитая его из  $\Delta F^*$ , получить значение  $\Delta S^*$ . В табл. 6 приведены

Таблица 6  
Диэлектрическая дисперсия различных веществ

Вещества	$t^{\circ}\text{C}$	$\Delta F^*$	$\Delta H^*$	$\Delta H^*$ вязк.	$\Delta E$ пара	$\Delta S^*$	Число вращ. молекул
<b>Жидкости</b>							
Этиловый спирт <sup>41</sup>	25	2,90	5,7	3,44	8,93	9,40	< 1
Пропиленовый »	25	3,57	6,1	4,53	9,1	8,50	
Бутиловый »	25	3,90	6,4	4,61	9,7	8,40	
Амиловый »	25	4,18	6,6	6	10,1	8,11	
Гексиловый »	25	4,09	6,8	6	10,5	8,19	
Нитробензол в веретён- ном масле <sup>59</sup>	20	3,82	5,8	—	—	6,77	
Веретённое масло <sup>71</sup>	25	8,84	16,4	—	—	25,3	
Касторовое масло <sup>48</sup>	—	9,95	16,7	—	—	24,6	
Смола (деревянная)	101	15,3	23,9	—	—	22,2	
<b>Твёрдые вещества</b>							
Цетилов. спирт в параф. <sup>23</sup>	14	4,45	12,6	—	—	28,4	1
<i>dl</i> -камфора <sup>101</sup>	— 132	4,85	10,2	—	—	38,0	
3, <i>х</i> -дихлорная камфора	— 61	7,00	20,4	—	—	63,2	
Циклопентанол	— 67	6,98 <sub>6</sub>	9,73	—	—	17,7	
Бромистый изобутил <sup>2</sup>	— 157	3,79 <sub>3</sub>	23,1	—	—	167,1	
Бромистый изоамил	— 145	4,42	18,0	—	—	106,1	
«Галовакс»-хлорированный нафталин <sup>57</sup>	— 51,5	7,77	31,0	—	—	104,8	5
Фталиевый гликоль <sup>42</sup>	30	11,21	53,5	—	—	139,0	5
Хлористый поливинил <sup>28</sup>	99	16,9	43,0	—	—	70,3	5—10
Резина 10% S <sup>58</sup>	30	9,69	27,0	—	—	57,0	2
<i>«Пермитол» четырёх-<sup>23</sup></i>							
хлористый дифенил	8,5	11,85	56,5	—	—	158,6	~ 5
	12,5	11,22	56,7	—	—	159,1	
	16,7	10,57	53,2	—	—	147,0	
	19,9	10,00	40,8	—	—	104,8	
	25,3	9,50	42,0	—	—	108,9	
	29,8	9,05	37,5	—	—	122,0	
	34,5	8,67	34,6	—	—	84,4	
Глицерин <sup>57</sup>	— 65	9,10	38,2	—	—	140	5
	— 60	8,60	32,7	—	—	113	—
	— 50	7,66	24,7	—	—	76,3	—
	— 40	6,97	21,0	—	—	60,3	—
	— 20	5,68	17,6	—	—	47,2	—
	0	4,75	14,3	—	—	35,0	2
	20	4,22	11,1	—	—	23,5	1
Лёд <sup>60</sup>	— 45,9	9,34	14,52	—	—	22,8	7
	— 32,6	9,01	14,52	—	—	22,9	
	— 20,6	8,85	14,52	—	—	22,5	
	— 11,9	8,62	14,52	—	—	22,6	
	— 8,5	8,47	14,52	—	—	22,9	
	— 7,5	8,49	14,52	—	—	22,7	
	— 3,9	8,40	14,52	—	—	22,7	
	— 2,8	8,39	14,52	—	—	22,7	—
	— 0,9	8,39	14,52	—	—	22,5	—

вычисленные таким образом  $\Delta H^*$  и  $\Delta S^*$  для ряда жидких и твёрдых диэлектриков. Мы видим, что теплота активации  $\Delta H^*$  для диэлектрической релаксации оказывается значительно большей, чем теплота активации для вязкого течения, которая составляет обычно 2—3 ккал и лишь в редких случаях достигает значений порядка 10 ккал.

Физически это означает, что для того, чтобы молекула могла притти во вращение, она должна разорвать большее число связей с соседями, чем при течении. Так, для спиртов теплота активации дипольного вращения составляет  $2/3$  теплоты испарения, тогда как теплота активации вязкого течения — всего лишь от  $2/3$  до  $1/2$  этой теплоты (ср. табл. 6).

Интересно отметить, что для некоторых веществ энтропия активации достигает огромных значений, порядка 150 CGS-ед (табл. 6).

Таблица 7  
Диэлектрическая дисперсия четырёхзамещённых бензолов

	Обычная <i>kc</i>	<i>t</i> °C	$\Delta F^*$	$\Delta H^*$	$\Delta S^*$
Хлорпентаметил бензол . . . . .	1	—80	8,88	8,53	—1,96
	3	—80	8,90	—	—1,92
	10	—68	9,00	—	—2,30
	30	—59	8,96	—	—2,01
	100	—42	9,13	—	—2,60
1, 2-дихлортетраметил бензол . . . . .	1	—108	7,85	7,98	0,79
	3	—100	7,85	—	0,75
	10	—90	7,89	—	0,49
	30	—81	7,88	—	0,52
	100	—69	7,91	—	0,34
1, 2, 4-трихлортриметил бензол . . . . .	1	—85	9,09	9,01	—0,43
	3	—77	9,07	—	—0,31
	10	—64	9,19	—	—0,86
	30	—55	9,13	—	—0,55
	100	—40	9,22	—	—0,90
1, 2, 3-трихлортриметил бензол . . . . .	1	—90	8,76	8,80	0,22
	10	—70	8,83	—	—0,15
	100	—47	8,84	—	—0,18
1, 2, 3, 4-тетрахлордиметил бензол . . . . .	1	—70	9,79	9,50	—1,43
	10	—46	9,95	—	—1,98
	100	—21	9,94	—	—1,74
1, 2, 3, 5-тетрахлордиметил бензол . . . . .	1	—78	9,51	9,27	—1,23
	10	—56	9,61	—	—1,57
	100	—31	9,66	—	—1,61
Пентахлорметил бензол . . . . .	1	—42	11,34	11,27	—0,30
	3	—32	11,31	—	—0,25
	10	—18	11,39	—	—0,47
	30	—6	11,38	—	—0,41
	100	—11	11,48	—	—0,74

Таблица 8

Дизэлектрическая дисперсия пластического поливинилхлорида

% трикремилфосфата	$t^{\circ}\text{C}$ ( $t=60$ цикл.)	$\Delta F^*$	$\Delta H^*$	$\Delta S^*$
0	98	16,7	40,7	64,7
10	80	15,9	29,2	37,7
20	65	15,2	22,7	22,2
30	48	14,4	17,6	10,0
40	32	13,6	14,2	1,97
50	16	12,88	12,6	-0,97
60	3	12,88	12,1	-0,65

Молекула в активированном состоянии может находиться в значительно большем числе вращательных состояний и иметь соответственно значительно большую вращательную энтропию, чем неактивированная молекула, что и приводит к большим значениям  $\Delta S^*$ . В случае особенно больших значений  $\Delta S^*$  происходит, повидимому, вращение целых групп молекул. Вращательная энтропия отдельной молекулы может быть оценена из величины энтропии плавления или просто из размеров молекулы; тогда, исходя из наблюдённых значений  $\Delta S^*$ , можно найти число вращающихся молекул; оно приведено в последнем столбце табл. 6. Для обычных жидкостей вращается лишь примерно одна молекула. У спиртов, повидимому, вращается не целая молекула, а лишь какая-то часть её, например, группа  $\text{CH}_2\text{OH}$ . В твёрдых телах число вращающихся молекул в группе составляет около 5. Если полярные молекулы, находящиеся в нормальном состоянии, могут свободно вращаться, то при переходе их в активированное состояние возрастание энтропии должно быть очень невелико или даже равно нулю. Уайт, Биггс и Морган<sup>97</sup>, действительно, не наблюдали возрастания энтропии при активации молекул гексазамещённых бензола (табл. 7). Возрастание энтропии отсутствовало вплоть до самых низких температур, применявшихся в этих измерениях.

Предположение о свободном вращении также находится в согласии с результатами этих исследователей, которые не наблюдали никаких ротационных переходов в исследованных веществах вплоть до самых низких температур.

Величина энтропии активации при дизэлектрической релаксации позволяет весьма точно судить о наличии вращения в твёрдом состоянии. В табл. 6 приведены два примера — глицерин и пермитол.

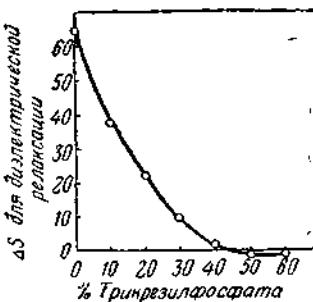


Рис. 16. Дизэлектрическая релаксация для пластифицированного хлористого поливинила.

При возрастании температуры  $\Delta S^*$  заметно уменьшается, что указывает на то, что в нормальном состоянии свобода вращения молекул всё более и более возрастает. Другим примером служит система из поливенилхлорида и трирезилфосфата (табл. 8 и рис. 16).

Значение  $\Delta S^*$  для чистого поливенилхлорида равно 65  $EV$ . Оно резко уменьшается при прибавлении трирезилфосфата и при введении 40% последнего обращается в нуль. Дальнейшее прибавление трирезилфосфата не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на  $\Delta S^*$ . Таким образом, при введении в поливенилхлорид 40% и более трирезилфосфата диполи получают почти полную свободу вращения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Baker, J. Chem. Soc., **103**, 1653, 1913.
2. W. O. Baker a. C. P. Smyth, Ann. N. Y. Acad. Soc., **40**, 447, 1930.
3. R. M. Barrer, Trans. Faraday Soc., **35**, 628, 1939.
4. A. J. Batschinski, Z. phys. Chem., **84**, 643, 1913.
5. E. C. Bingham, H. E. Adams and G. R. McCauslin, J. Am. Chem. Soc., **63**, 466, 1941.
6. P. W. Bridgman, The Physics of High Pressures, New York, 1931.
7. W. B. Bridgman, J. Am. Chem. Soc., **60**, 330, 1938.
8. W. Buchheim, H. A. Stuart and H. Menz, Z. Physik, **112**, 407, 1939.
9. K. S. Cole and R. H. Cole, J. Chem. Phys., **9**, 341, 1941.
10. R. H. Cole, Ibid., **6**, 385, 1938.
11. J. M. Davies, R. F. Miller and W. F. Busse, J. Am. Chem. Soc., **63**, 361, 1941.
12. P. Debye, Polar Molecules, New York, 1929.
13. P. Drude, Ann. Physik, **64**, 131, 1898.
14. A. Einstein, ibid., (4) **19**, 289, 1906; **34**, 591, 1911.
15. R. H. Ewell and H. Eyring, J. Chem. Phys., **5**, 726, 1937.
16. H. Eyring, ibid., **4**, 283, 1936.
17. H. Fikentscher, Cellulosechem., **13**, 58, 1932.
18. H. Fikentscher and H. Mark, Kolloid Z., **49**, 135, 1930.
19. P. J. Flory, J. Am. Chem. Soc., **62**, 3036, 1940.
20. P. J. Flory and P. B. Stickney, ibid., **62**, 3032, 1940.
21. R. Fordyce and H. Hibbett, ibid., **61**, 1912, 1939.
22. R. H. Fowler and E. A. Guggenheim, Statistical Thermodynamics, Cambridge, 1939.
23. F. C. Frank, Trans. Faraday Soc., **32**, 1634, 1936.
24. H. Freundlich, Kapillärchemie, Leipzig, 1932, Vol. 2, p. 650.
25. R. Fricke and J. Lüke, Z. Elektrochem., **36**, 318, 1930.
26. D. Frisch, H. Eyring and J. F. Kincaid, J. Applied Phys., **11**, 75, 1940.
27. C. S. Fuller, W. O. Baker and N. R. Pape, J. Am. Chem. Soc., **62**, 3275, 1940.
28. R. M. Fuoss, ibid., **63**, 369, 1941.
29. R. M. Fuoss and J. G. Kirkwood, ibid., **63**, 385, 1941; idem, J. Chem. Phys., **9**, 329, 1941.
30. G. Gee, Trans. Faraday Soc., **36**, 1171, 1940.
31. A. Glasstone, K. J. Laidler and H. Eyring, The Theory of Rate Processes, McGraw-Hill, New York, 1941.
32. A. Gemant, Die Elektrophysik der Isolierstoffe, Berlin, 1930.
33. E. Guth and R. Simha, Kolloid Z., **74**, 266, 1933.
34. W. Haller, ibid., **56**, 257, 1931.

35. K. Hess and W. Philippoff, *Ber.*, **B 68**, 688, 1935; **B 70**, 639, 1937.
36. E. Hückel, *Z. Elektrochem.*, **42**, 753, 1936.
37. M. L. Huggins, *J. Phys. Chem.*, **42**, 911, 1938; **43**, 439, 1939; *J. Applied Phys.*, **10**, 700, 1939.
38. G. Jaffe, *J. Chem. Phys.*, **6**, 385, 1938.
39. A. Joffe, *The Physics of Cryst. I*, New York, 1928.
40. W. Kauzmann and H. Eyring, *J. Am. Chem. Soc.*, **62**, 3113, 1940.
41. E. Keutner, *Ann. Physik*, **27**, 29, 1936.
42. R. H. Kienle and H. H. Race, *Trans. Electrochem. Soc.*, **65**, 87, 1934.
43. D. W. Kitchin and H. Mueller, *Phys. Rev.*, **32**, 979, 1928.
44. K. H. Klaasens and R. Houwing, *Kolloid Z.*, **76**, 217, 1936.
45. E. O. Kraemer and F. J. Van Natta, *J. Phys. Chem.*, **36**, 3175, 1932.
46. E. O. Kraemer, *Ind. Eng. Chem.*, **30**, 1200—1203, 1938.
47. E. O. Kraemer and J. B. Nichols, *The Ultracentrifuge*.
48. R. de L. Kronig, *Physik. Z.*, **39**, 823—830, 1938.
49. S. S. Kurtz, W. T. Harvey and M. R. Lipkin, *Ind. Eng. Chem., Anal. Ed.*, **11**, 476, 1939.
50. O. Lamm and A. Polson, *Biochem. J.*, **30**, 538, 1936.
51. H. Lemoine, *Ann. Phys.*, **9**, 539, 1938.
52. J. E. Lennard-Jones and A. F. Devonshire, *Proc. Roy. Soc., London, A*, **169**, 317, 1939.
53. C. L. Mellor and A. Skett, *Ind. Eng. Chem.*, **30**, 417, 1938.
54. E. W. Mardles, *J. Chem. Soc.*, **123**, 1951, 1923.
55. K. H. Meyer and R. Lüdemann, *Helv. Chim. Acta*, **18**, 1307, 1935.
56. J. B. Miles and H. P. Robertson, *Phys. Rev.*, **40**, 583, 1932.
57. S. O. Morgan, *Trans. Electrochem. Soc.*, **65**, 109, 1934.
58. F. H. Mueller, *Kolloid Z.*, **77**, 260, 1936.
59. W. Mueller, *Ann. Physik*, **24**, 99, 1935.
60. E. J. Murphy, *Trans. Electrochem. Soc.*, **65**, 133, 1934.
61. E. J. Murphy and S. O. Morgan, *Bell System Tech. J.*, **18**, 502, 1939; **17**, 640, 1938.
62. H. Neurath, *Cold Spring Harbor Symposia Quant. Biol.*, **8**, 80, 1940.
63. H. Neurath, G. R. Cooper and J. O. Erickson, *J. Biol. Chem.*, **138**, 411, 1941.
64. Sven Odén, *Z. physik. Chem.*, **80**, 709, 1912.
65. J. L. Oncley and J. W. Williams, *Phys. Rev.*, **43**, 341, 1933.
66. L. Onsager, *J. Am. Chem. Soc.*, **58**, 1486, 1936.
67. A. Polson, *Kolloid Z.*, **83**, 172, 1928.
68. Idem, *ibid.*, **87**, 149, 1939.
69. R. E. Powell, C. R. Clark and H. Eyring, *J. Chem. Phys.*, **9**, 268, 1941.
70. Idem, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1941.
71. H. H. Race, *Phys. Rev.*, **37**, 430, 1931.
72. W. H. Rodebush and C. R. Eddy, *J. Chem. Phys.*, **8**, 424, 1940.
73. W. H. Rodebush, C. R. Eddy and L. D. Eubank, *ibid.*, **8**, 889, 1940.
74. W. E. Roseveare, R. E. Powell and H. Eyring, *J. Applied Phys.*, **12**, 1941, *Ind. Eng. Chem.*, **33**, 430, 1941.
75. G. V. Schultz, *Naturwissenschaft*, **25**, 346, 1937.
76. R. Signer and R. Gross, *Helv. Chim. Acta*, **17**, 59, 1934.
77. R. Signer, *The Ultracentrifuge*.
78. Исследования Смидта и сотр. (не опубликовано).
79. A. J. Stamm and W. K. Loughborough, *J. Phys. Chem.*, **39**, 121, 1935.
80. H. Staudinger, *Die hochmolekularen organischen Verbindungen*, Berlin, 1932.
81. Idem, *ibid.*, p. 179.
82. Idem, *ibid.*, pp. 189—208.
83. H. Staudinger and G. Daumiller, *Ann.*, **529**, 219, 1937.

84. H. Staudinger and W. Heuer, *Z. physik. Chem.*, **A 171**, 129, 1934.
  85. H. Staudinger and J. Schneiders, *Ann.*, **541**, 151, 1939.
  86. H. Staudinger and H. Warth, *J. prakt. Chem.*, **155**, 261, 1940.
  87. A. E. Stearn and H. Eyring, *J. Chem. Phys.*, **5**, 113, 1937.
  88. A. E. Stearn, E. M. Irish and H. Eyring, *J. Phys. Chem.*, **44**, 981, 1940.
  89. T. Svedberg and K. O. Pedersen, *The Ultracentrifuge*, Oxford, 1940.
  90. *Idem, ibid.*, p. 37.
  91. A. R. Urquhart and A. M. Williams, *J. Textile Inst.*, **15**, 559, 1924; **20**, 125, 1929.
  92. J. H. Van Vleck, *J. Chem. Phys.*, **5**, 556, 1937.
  93. K. W. Wagner, *Arch. Elektrotech.*, **2**, 371, 1914.
  94. K. W. Wagner, *Die Isolierstoffe der Elektrotechnik*, Berlin, 1934.
  95. J. Walter and H. Eyring, *J. Chem. Phys.*, **9**, 393, 1941.
  96. A. H. White, *ibid.*, **7**, 58, 1939.
  97. A. H. White, B. S. Biggs and S. O. Morgan, *J. Am. Chem. Soc.*, **62**, 16, 1940.
  98. A. H. White and W. S. Bishop, *ibid.*, **62**, 8, 1940.
  99. J. Wyman, *ibid.*, **58**, 1482, 1936.
  100. W. A. Yager, *Physics*, **7**, 434, 1936.
  101. W. A. Yager and S. O. Morgan, *J. Am. Chem. Soc.*, **57**, 2071, 1935.
-

## СЪЕЗДЫ И КОНФЕРЕНЦИИ

### КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ЭЛЕКТРОНИКЕ

С 6 по 9 июля 1944 г. включительно в Москве в конференц-зале Сейсмологического института Академии Наук СССР состоялись заседания Сессии Отделения физико-математических наук АН СССР, проведённые совместно с Всесоюзным научным советом по радиофизике и радиотехнике, посвящённые вопросам электроники.

В программе Сессии значилось 23 доклада; два сообщения были сделаны дополнительно. По своей тематике доклады могут быть разбиты на следующие основные группы:

1. Электронная оптика (теоретическая и прикладная) — 2 доклада.
2. Электронная эмиссия (экспериментальные данные по термоэлектронной, фотоэлектрической, вторичной и автоэлектронной эмиссии, а также по молтер-эффекту, некоторые вопросы теории) — 7 основных докладов и 1 дополнительный.
3. Электронные приборы: электронные умножители, фотоэлементы, вопросы теории — 8 основных докладов и 1 дополнительный.
4. Газовый разряд — 2 доклада.
5. Теория электричества — 1 доклад.
6. Свойства электровакуумных материалов — 1 доклад.

Таким образом, наиболее широко в количественном отношении был представлен раздел электронных приборов. Однако, в качественном отношении он не являлся наиболее значительным. Так, например, один из двух ведущих докладов этого раздела — доклад П. В. Тимофеева, озаглавленный «Роль поверхностных зарядов в электронных приборах», содержал лишь указание на то, что ныне заряды на стеклах колб электронных приборов уже не являются только помехой для их работы, но используются в так называемых «кенотронах с холодной эмиссией» (явившихся темой краткого сообщения В. В. Сорокиной «Механизм работы кенотронов с холодной эмиссией»), и рекомендацию применить поверхностные заряды на эмиттирующих электродах с целью повышения их эффективности. Поскольку автор не дал конкретных примеров или описания методов такого использования, сообщение не произвело впечатления обоснованного указания новых путей развития электронных приборов.

В связи с этим докладом уместно упомянуть сообщение Р. М. Ароновича «Электронные приборы с эффективными эмиттерами вторичных электронов». Предметом этого сообщения были кислородно-магниевые и подобные им (кислородно-барниевые, цинковые и т. д.) эмиттеры, изготавляемые посредством особых приёмов. Как известно, раньше утверждалось, что такие эмиттеры могут давать значения коэффициента вторичной эмиссии в несколько десятков единиц, не обнаруживая инерционности, свойственной молтер-эффекту, несмотря на то, что считалось, что столь высокие  $\alpha$  обусловлены поверхностными зарядами. Поэтому наиболее интересной чертой данного сообщения явилось подчёркнутое автором утверждение, что предельным значением  $\alpha$  для этих эмиттеров, допустимым при использовании в практических приборах (с точки зрения шумов и инерции), является 12.

Из всего этого следует сделать вывод, что положительная роль поверхностных зарядов в электронных приборах ещё настолько незначительна, что пока их следует рассматривать скорее, как отрицательный фактор.

Второй из ведущих докладов этого раздела, сделанный пионером в области вторичной эмиссии Л. А. Кубецким и озаглавленный «Некоторые результаты истекшего периода в области осуществления и применения принципа вторично-электронного преобразования»\*) который, как можно было ожидать, долженствовал подвести итоги работам по вторичной эмиссии в Союзе (если не во всём мире), в действительности содержал лишь изложение результатов работ лаборатории автора, в основном полученных ещё в 1937—1938 гг.

Наибольший интерес из сообщений этого раздела представляли, несомненно, доклады В. С. Лукошкова «Некоторые электростатические свойства сечатых электродов» и С. Д. Гвоздовера «О прохождении высокочастотных токов в электронных приборах», посвящённые теоретическим вопросам, существенным с точки зрения расчёта и конструирования электронных приборов.

В работе, доложенной В. С. Лукошковым, им была показана справедливость принципа замещения сечатого электрода сплошным, при условии постоянства характеризующего сетку параметра  $\delta$ , для случаев плоско-параллельных, коаксиально-цилиндрических и концентрических сферических электродов, установлены общие условия сводимости триода (к диоду) для произвольной конфигурации электродов и исследованы некоторые свойства несводимых триодов.

В работе С. Д. Гвоздовера был подвергнут математическому рассмотрению случай движения электронов между эмиттером и коллектором при условии, когда пролётную фазу  $\theta$  (равную  $\omega T$ , где  $\omega$  — частота и  $T$  — время пролёта, определяемое постоянной разностью потенциалов, наложенной между обоями электродами) нельзя рассматривать как малую величину.

Последним и весьма кратким сообщением этого раздела было сделанное Н. С. Хлебниковым и А. Е. Меламидом о разработанных ими на основе сурьмяно-цизиневого катода новых типов фотоэлементов, один из которых предназначен для работы на ультрафиолетовом излучении (до  $\lambda = 2587 \text{ \AA}$  и даже далее в сторону коротких волн), а второй представляет собой фотоэлемент, не обнаруживающий утомления даже при работе на больших световых потоках.

Вторым по числу докладов явился раздел электронной эмиссии. В отличие от предыдущего доклады этого раздела представляли в своём значительном большинстве интерес и новизну. Этот раздел включал три доклада общего характера, касавшихся автоэлектронной эмиссии, вторичной эмиссии и фотоэффекта сложных катодов.

Первый из перечисленных докладов «Вырывание электронов полем» был сделан Н. И. Лукирским. В этом докладе были освещены вопросы испускания электронов под действием электрических полей любой напряжённости и при любых температурах, автоэлектронной эмиссии монокристаллов и исследования распределения электронов в металле по энергиям методом анализа распределения энергий автоэлектронов.

В докладе С. Ю. Лукьянова «Вторичная электронная эмиссия» особый интерес представляла попытка установления черт сходства и различия между эмиссией вторичных электронов, вызываемой бомбардировкой электронами, с одной стороны, и положительными ионами ( $\text{H}^+$ ,  $\text{He}^{++}$ ) настолько больших энергий, что скорости их имеют величину того же порядка, что и скорости первичных электронов в обычных опытах по вторичной эмиссии (т. е. примерно до 1000).

В докладе «Сложные фотокатоды», сделанном Н. С. Хлебниковым, была подвергнута критике принадлежащая де Буру концепция фотоэффекта сложных

\*) Напомним, что термином «принцип вторично-электронного преобразования» Л. А. Кубецкий обозначает усиление электронных потоков с помощью вторичной эмиссии.

фотокатодов. Далее, на основе анализа физического смысла формулы Шоттки для термоэлектронной эмиссии полупроводников, а также имеющихся в литературе данных по Sb—Cs и Cs—O—Ag катодам, было показано, что фотоэмиссии этих материалов должны рассматриваться, как переход в вакуум электронов с различных разрешённых энергетических уровней полупроводника.

В докладе Д. В. Зернова «О влиянии сильных электрических полей на вторичную эмиссию тонких диэлектрических пленок», наряду с обзором экспериментальных работ автора, одним из важнейших результатов которых является установление критерия для разделения вторичной эмиссии в собственном смысле слова от моллер-эффекта в различных стадиях его развития, был дан также набросок основных черт теории моллер-эффекта на основе современных представлений о твёрдом теле.

Вопроса о моллер-эффекте классического для этого явления материала — окиси алюминия — касалось и сделанное дополнительно, по поручению И. Ф. Кварухава, Л. А. Арцимовичем сообщение об исследовании этого вида эмиссии под одновременным воздействием двух первичных электронных пучков разных скоростей.

Сообщение А. М. Андрианова «Эмиссия оксидного катода в импульсном режиме» было посвящено описанию наблюдаемых в указанных условиях исключительно высоких значений плотности эмиссионного тока с катода, достигавших в опытах автора 30 А/см<sup>2</sup>. К сожалению, ограниченный характер постановки опыта не дал автору возможности наметить определённой точки зрения на это в высшей степени интересное и полезное явление.

Одним из наиболее замечательных по широте охвата проблемы и глубине эксперимента ей разработки явился доклад М. М. Бутелова и П. М. Морозова «Физические свойства кислородно-серебряно-цезиевых катодов». Важнейшим выводом, к которому пришли авторы на основе исследования структуры исходного слоя серебра, являющегося основой такого катода, кривых спектрального распределения чувствительности и распределения фотоэлектронов по энергиям, явилось заключение, что фотоэмиссия Cs—O—Ag является, как и в случае Sb—Cs катодов, эффектом объёмным, а не поверхностным, как считал де Бур.

В докладе А. И. Пятницкого «Распределение скоростей фотоэлектронов у полупрозрачных кислородно-цезиевых фотокатодов» помимо изложения его результатов исследования распределения электронов по энергиям были описаны также и наблюдения автора над зависимостью фототока от угла падения света для Cs—O—Ag катодов.

Раздел электронной оптики, представленный четырьмя докладами, был возглавлен весьма содержательным докладом Л. А. Арцимовича «Электронная оптика эмиссионных систем».

Два доклада по вопросам расчёта электронно-оптических систем: «Короткая магнитная линза с минимальной сферической аберрацией» и «Способ расчёта полей простейших электростатических линз» были сделаны А. Г. Власовым.

В. Н. Верцинер сделал доклад «Электронный микроскоп ГОИ». Этот прибор, целиком сконструированный и построенный в ГОИ, содержит ряд конструктивных элементов, выгодно отличающихся его в смысле простоты и эффективности от аналогичных приборов заграничных фирм (например, RCA). При питающем напряжении в 40—60 кВ он позволяет получать увеличение до 25 000 раз, а при условии достаточной стабилизации, питающей напряжения, осуществить разрешение до 50 Å.

Другие тематические разделы были представлены значительно меньшим числом докладов. Так, вопросу газового разряда было посвящено два доклада: Н. А. Капкова «Изменение подвижности отрицательных ионов в сильных электрических полях и роль этого явления в коронном разряде» и Г. В. Спивака, совместно с О. Н. Репковой «Поведение электронно-ионной плазмы в магнитном поле».

Последним докладом, имеющим непосредственное отношение к вопросам электроники, является чрезвычайно интересное сообщение С. А. Векшинского «О некоторых свойствах серебряных пленок, полученных испарением в вакууме». В этой работе, которую всего правильнее отнести к области электро-вакуумного материаловедения, автор, со столь характерной для всех его исследований убедительностью, основанной на безусловленной постановке и проведении эксперимента, используя доведённую им до высокой степени совершенства технику получения металлических слоёв в вакууме, разъяснил ряд свойств, получаемых этим методом тонких серебряных слоёв. Он также смог показать, что в процессе окисления серебра разрядом в кислороде при низком давлении (применяется, например, при изготовлении кислородно-серебряно-цезиевых фотокатодов) образуется целая гамма соединений серебра с кислородом, а не только  $\text{Ag}_2\text{O}$ , как считалось до сих пор.

Доложенная А. А. Власовым работа касалась не столько электроники, сколько основных вопросов теории электричества. Исходя из кинетического уравнения, при учёте «дальних сил», т. е. взаимодействий электронов электронной плазмы на расстояниях, превышающих среднее, автор рассмотрел вибрационные свойства электронного газа и показал необходимость возникновения в таком газе, при нужных значениях температуры и давления, кристаллической структуры.

Сравнивая эту конференцию с последней из предвоенных по той же тематике — Киевской, состоявшейся в июне 1940 г., необходимо, конечно, отметить и менее широкое представительство исследовательских учреждений и меньший (примерно вдвое по числу докладов) объём представленного материала. И то, и другое является результатом различных трудностей, связанных с войной, выразившихся в перебазировании ряда исследовательских организаций на Восток и т. п. Тем не менее эта конференция с несомненною свидетельствует о росте советской науки за годы войны и в этой области. Этот рост проявляется прежде всего в качестве доложенных работ, а также в том, что у нас появилось новое направление, ни на одной из прежних конференций не представленное: электронная оптика как теоретическая, так и прикладная, прежде являвшаяся, так сказать, «предметом импорта».

Что касается качества работ, то изменение в этом отношении характеризуется в основном тем, что на данной конференции было доложено меньше (не только в абсолютном, но и в процентном выражении) работ, не представляющих собой чётких законченных этапов исследования и не имеющих самостоятельной ценности. Одним из важнейших результатов конференции нам представляется установление нового взгляда на природу и механизм действия сложных фотокатодов.

Таким образом, мы с удовлетворением можем констатировать, что и работники области электроники, вместе со всеми советскими учёными, далеко не бесплодно провели трудные годы войны, а сумели поднять свою область на новую, более высокую ступень.

*Н. Хлебников.*

## БИБЛИОГРАФИЯ

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. Pp. XV + 615. Mc Graw-Hill Book Comp. New York and London, 1941.

Книга Стрэттона представляет собою значительное явление в физической литературе. Это — как видно из заглавия — курс теории электромагнитного поля. Однако, это не элементарный курс, предназначенный для начинающих; для изучения его целесообразно иметь уже знакомство с обычными изложениями теории поля. Точка зрения автора, формулированная в его предисловии, состоит в следующем. Существующие в англо-американской литературе руководства, начиная с классического «Трактата» Максвелла, характеризуются тем, что в них главное внимание уделяется электростатике и постоянному току. Так, в книге Максвелла общим уравнениям поля, распространению плоских волн и электромагнитной теории светаделено несколько десятков страниц из 1000 страниц, имеющихся во всей книге. Таков же, приблизительно, характер весьма распространенного в Англии и Америке руководства Джинса. В противоположность этому Стрэттон поставил своей задачей дать «более адекватное изложение теории переменного электромагнитного поля и распространения волн. Некоторое вниманиеделено также и стационарному состоянию, но с целью введения основных понятий в более простых условиях и всегда имея в виду позднейшие приложения в общих случаях» (Предисловие, стр. V).

В соответствии сформулированной точкой зрения книга построена следующим образом:

Глава I. Уравнения поля. Здесь в первом разделе прежде всего постулируются уравнения Максвелла, которые пишутся сначала в дифференциальной, а затем — в интегральной форме. В следующем разделе учитываются макроскопические свойства материи (коэффициенты  $\epsilon$  и  $\mu$ , поляризация электрическая и магнитная, проводимость).

Далее вводятся электромагнитные потенциалы — скалярный и векторный. В §§ 1, 13 устанавливаются граничные условия. Следующий раздел (§§ 1, 14 — 1, 19) посвящен криволинейным координатам; после вывода основных формул пишутся уравнения поля в общих ортогональных координатных и подробно рассматриваются свойства различных конкретных координатных систем (цилиндрические, сферические, эллиптические, параболические и т. д. — всего 8 различных систем).

Последний раздел первой главы — «Тензоры поля». В этом разделе излагаются элементы тензорного анализа, после чего уравнения поля приводятся к четырехмерной симметричной форме и излагаются основы специальной теории относительности.

Приведенный обзор содержания первой главы уже достаточно характеризует книгу. Следующая глава II — «Напряжения и энергия». Задача этой главы формулируется следующим образом: «Для того, чтобы согласовать математическую структуру, развитую в предшествующей главе, с экспериментами, которые могут быть выполнены в лаборатории, мы должны иметь возможность вычислять механические силы, испытываемые в поле элементами зарядов и токов, а также нейтральными телами. В настоящей главе будет

показано, как путём соответствующего выбора векторов **E** и **B** эти силы могут быть выведены непосредственно из уравнений Максвелла».

Следующие две главы III и IV посвящены статическим полям — электрическому и магнитному. Начиная с V главы и до конца книги (стр. 268—599), рассматриваются вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн и излучением. Обширная и интересно составленная глава V специально посвящена плоским волнам. Исследуются свойства плоских волн общего типа, а также волны гармонических в пространстве и во времени в нелодиссипативных и в диссипативных средах. Попутно излагаются математические вопросы: анализ Фурье и преобразование Лапласа. Отметим чрезвычайно очётливое и строгое изложение сложного вопроса о скоростях распространения плоских волн (фазовая, групповая и скорость сигнала). В следующих двух главах специально рассматриваются цилиндрические и сферические волны.

В введении к этим главам указывается на то, что в то время, как скалярное трёхмерное волновое уравнение разделяется в 11 различных системах координат, полное решение векторного волнового уравнения в форме, пригодной для решения краевых задач, известно только для некоторых разделяющихся цилиндрических координат и для сферических координат. Изложению соответствующих математических методов, имеющих большое значение для современной радиотехники, и посвящены эти главы.

Глава VIII — «Излучение». Глава IX — «Краевые задачи». Здесь даётся теория отражения и преломления для диэлектриков и металлов, распространение волн вдоль проволок и в полых проводниках, решение задачи о дифракции плоских волн на сфере, включая теорию рассеяния света, и наконец, — влияние земли на распространение электромагнитных волн.

Книга снабжена большим количеством интересных, хотя и трудных задач, заимствованных преимущественно из оригинальной литературы. Эти задачи отнюдь не являются простыми упражнениями в математических вычислениях, но имеют совершенно конкретный физический или технический характер. Таков же и общий характер всей книги: читателю всегда ясно, для какой цели необходимо рассмотрение тех или иных сложных вопросов, большое число этих практических применений показано в специальных параграфах или в задачах, формулы доведены до числовых коэффициентов. Всякий физик, занимающийся оптикой или электромагнитными колебаниями, а также и радиоинженер, перелистив эту книгу, испытывает желание иметь её всегда под рукой, изучать её и пользоваться ею для справок, так как сразу становится ясным, что труд, затраченный на изучение этой книги, с избытком окупится той пользой, которую она приносит.

Э. Шпольский

Редактор Э. В. Шпольский.

Подписано к печати 12/VI 1945 г. 10,5 печ. л. 14,6 уч.-изд. л. 43 600 тип. зн. в печ. л. А19853. Тираж 3 000 экз. Цена книги 8 р. Заказ № 3765.

Техн. ред. Н. А. Тумаркана.

1-я Образцовая тип. треста „Полиграфкнига“ ОГИЗА при СНК РСФСР, Москва, Валовая, 28.

XXXXXX  
XXXXXX  
XXXXXX  
XXXXXX

ЦЕНА 8 РУБ.

## СОДЕРЖАНИЕ

### Н. Д. ПАПАЛЕКСИ

- Краткий очерк жизни и научной деятельности Леонида Исааковича  
Мандельштама . . . . . 143

### В. ФАБРИКАНТ

- Физика и техника люминесцентных ламп . . . . . 159

### Р. И. ЛУКИРСКИЙ

- Вырывание электронов электрическим полем . . . . . 199

### Э. Ю. КОНДОН

- Микрорадиоволны . . . . . 213

### Р. ПОУЕЛЛ и Г. ЭЙРИНГ

- Вязкие и термодинамические свойства высокополимерных веществ . . . . . 265

### СЪЕЗДЫ И КОНФЕРЕНЦИИ

- Конференция по электронике (Н. Хлебников) . . . . . 305

### БИБЛИОГРАФИЯ

- J. A. STRATTON. *Electromagnetic Theory* (Э. В. Шпольский) . . . . . 309