1936 г. Т. XVI, вып. 6
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ТАИНСТВЕННОЕ ЧИСЛО 137*

Макс Борн

1. Введение

В современной физике господствуют две основные теории: теория относительности Эйнштейна и квантовая теория Планка. Обе эти теории представляют обобщение классических законов механики и электродинамики. Теория относительности имеет дело с влиянием относительного движения на физические явления; классические законы справедливы в предельном случае малых скоростей (малых по сравнению со скоростью света $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*), а новые явления, например изменение массы со скоростью, поддаются измерению только в тех случаях, когда скорость частиц приближается к c. С другой стороны, квантовая теория имеет дело с тончайшей структурой света и материи; классические законы оказываются справедливыми в предельном случае макроскопических тел. Существует определенная величина, имеющая размерность энергии, помноженной на время (размерность „действия“), и равная $6{,}5 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*. Эта величина (планковская постоянная h) характерна для квантовых явлений. С квантовыми явлениями мы сталкиваемся всякий раз, когда „действие“ имеет порядок величины h или еще меньший. Обе теории — квантовая теория и теория относительности — развиты до высокой степени совершенства. Но они не слились воедино. Квантовая теория является замечательной математической конструкцией; она с удивительным успехом предсказывает явления природы во всех случаях, когда скорость рассматриваемых частиц мала по сравнению со скоростью света, т. е. когда можно пренебречь релятивистскими эффектами. К счастью, это ограничение действительно выполняется в большинстве задач, с которыми имеет дело атомная физика. Скорость электронов, из которых состоят внешние части атомов, большей частью мала по сравнению с c. Даже в ядерной физике движение протонов и нейтронов вследствие их большой массы (в 1840 раз превышающей массу электрона) происходит достаточно медленно для того, чтобы можно было пренебречь релятивистскими поправками. Это обстоятельство использовано в новейших попытках построения теоретической модели ядра, основанной на квантовой механике.

---

* Лекция, читанная в South Indian Science Association (Бангалор, Индия) 9 ноября 1935 г.; Proc. Indian Acad. Sci. (A), 2, 533, 1935. Перевод с английского А. Свешникова, редакция М. Бронштейна.

Однако существуют явления, в которых принимают уча(быстрые частицы, и в которых, следовательно, нерелятивист(теория квантов перестает быть применимой. Первое явление так типа — тонкая структура спектральных линий водорода — бы.. исследовано Зоммерфельдом в 1916 г. Он открыл, что в формул(которая описывает тонкую структуру линий, фигурирует числ($\frac{2\pi e^2}{\hbar c}$ — безразмерная комбинация основных физических постоянных — скорости света c, квантовой постоянной $\hbar$ и заряда электрона e. Безразмерная величина $\frac{2\pi e^2}{hc}$ („постоянная тонкой структуры") — это и есть то таинственное число, которое упомянуто в заглавии. Постоянная тонкой структуры играет важную роль в целой большой области явлений, далеко выходящей за пределы того специального вопроса, при изучении которого эта постоянная была впервые открыта. Настоящая лекция ставит своей целью выяснение роли постоянной тонкой структуры в законах атомной физики и изложение некоторых соображений о более глубоком физическом смысле этой безразмерной величины.

2. Боровские орбиты

Мы начнем с краткого повторения старой квантовой теории Нильса Бора, так как работа Зоммерфельда основывалась на этой теории.

Рассмотрим систему, состоящую из ядра, имеющего положительный заряд Ze, и электрона, имеющего отрицательный заряд $-e$, где e — элементарная порция электричества ($e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ эл. стат. единиц). Эти частицы движутся вокруг общего центра тяжести по кеплеровским эллипсам, так как согласно закону Кулона действующая между ними сила равна $-\frac{e^2 Z}{r^2}$, где r — их взаимное расстояние. Энергия E этого движения не зависит от эксцентриситета эллипса, а определяется только его большой полуосью a. Если принять за нулевой уровень энергии энергию неподвижного электрона, бесконечно удаленного от ядра, то энергия будет иметь отрицательное значение:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}.$$

Третий закон Кеплера устанавливает связь между большой полуосью a и периодом обращения T (или, что то же самое, между a и величиной $\nu = \frac{1}{T}$, т. е. числом оборотов в единицу времени):

$$\frac{a^3}{T^2} = a^3\nu^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m},$$

где m можно приравнять истинной массе электрона, так как тяжелое ядро может считаться практически неподвижным. (Влияние движения ядра, которое, вообще говоря, невелико, мы здесь не будем рассматривать.)

Согласно классическим законам, энергия E может принимать непрерывный ряд значений. Применив к рассматриваемой системе квантовую теорию Планка, Бор предположил, что в действительности допустимыми являются только некоторые значения E, образующие дискретный ряд. Простейший способ вычисления этих значений заключается в применении квантового принципа, согласно которому момент количества движения вращающейся системы всегда является целым кратным величины $\frac{h}{2\pi} = \hbar$ (символом $\hbar$, который ввел Дирак, мы в дальнейшем будем все время пользоваться). В случае круговой орбиты радиуса a длина окружности равна $2\pi a$, скорость равна $\frac{2\pi a}{T} = 2\pi a\nu$, количество движения составляет $2\pi a\nu m$, момент количества движения равен $2\pi a\nu m \cdot a = 2\pi a^2\nu m$. Поэтому квантовое условие имеет вид:

$$2\pi\nu m a^2 = \hbar n, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Из трех последних уравнений находим:

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2}\frac{n^2}{Z}, \qquad E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2}.$$

Эти выражения остаются в силе также и в случае эллиптических орбит с большой полуосью a.

Мы вывели здесь эти хорошо известные формулы потому, что встречающиеся в них комбинации постоянных играют весьма важную роль в дальнейшем. Введем следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}532 \cdot 10^{-8}\ см.$$

$$E_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 2{,}15 \cdot 10^{-11} эрг.$$

Стационарные состояния водородного атома и подобных ему одноэлектронных систем характеризуются следующими формулами:

$$a_n = a_1\frac{n^2}{Z}, \quad E_n = -E_1\frac{Z^2}{n^2},$$

где a_1 и $-E_1$ — это радиус и энергия первой орбиты атома водорода ($Z = 1$).

E_n называется „бальмеровским термом"; применяя условие частот Бора

$$h\nu = E - E'$$

к свету, испускаемому или поглощаемому водородным атомом, мы находим:

$$h\nu = E_1\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Эта формула дает при $n' = 2$, $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$ известную водородную серию Бальмера. Взяв другие значения n', мы получаем все другие известные серии этого атома. При $Z = 2, 3, \ldots$ получаются соответствующие серии одноэлектронных ионов He^+, $Li^{++}, \ldots$

Подробное исследование этих линий показывает, что они не простые, а сложные (тонкая структура спектральных линий); исследование тонкой структуры — это и была та задача, которую стал решать Зоммерфельд. Однако прежде чем рассказать об этом дальнейшем развитии теории мы рассмотрим физический смысл двух постоянных a_1 и E_1, введенных Бором.

3. Атомные единицы

Теория боровских орбит, основывающаяся на комбинации классической механики с квантовыми условиями, логически неудовлетворительна. Поэтому орбиты Бора были заменены более абстрактными теориями — различными формулировками квантовой механики. Однако основные постоянные a_1 и E_1, введенные Бором, сохранились и в новой теории. Во всех случаях, когда скорость электронов мала по сравнению с c, эти постоянные являются естественными единицами длины и энергии для всех атомов. Как показал Гартри, свойства всех атомов, выраженные в этих „атомных единицах“ a_1 и E_1, оказываются отвлеченными математическими числами или функциями. Гамильтонова функция атома, т. е. его энергия, рассматриваемая как функция электронных импульсов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots$ и координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots$, равна

$$H = \frac{1}{2m}\sum_k \mathbf{p}_k^2 - \sum_k \frac{Ze^2}{r_k} + \sum_{kl}{}' \frac{e^2}{r_{kl}},$$

где r_k — расстояние k-ого электрона от ядра, а r_{kl} — взаимное расстояние k-ого и l-ого электронов. Атом описывается волновым уравнением Шредингера

$$(H - E)\psi = 0,$$

где H — диференциальный оператор, полученный заменой компонент вектора $\mathbf{p}_k$ на

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Легко показать, что после введения a_1 и E_1 в качестве единиц волновое уравнение примет следующий вид:

$$\left\{-\frac{1}{2}\sum_k\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}\right)-\sum_k\frac{Z}{r_k}+\sum_{kl}{}'\frac{1}{r_{kl}}-\frac{1}{2}E\right\}\psi=0.$$

Это уравнение содержит только числовые постоянные. Если число электронов равно 1, то мы получим волновое уравнение водородного атома; энергии стационарных состояний оказываются в точности равными бальмеровским термам, которые в атомных единицах имеют следующий вид:

$$E_n=-\frac{Z^2}{n^2}.$$

Таким же образом энергии и геометрические размеры всех атомов, выраженные в атомных единицах, тоже оказываются безразмерными математическими постоянными.

Это же верно и по отношению к молекулам, если пренебрегать движением ядер, что вполне допустимо, так как массы ядер весьма велики по сравнению с массой электронов. Произвольно выбрав расположение ядер, мы можем определить движение электронов из уравнения Шредингера, которое в атомных единицах не содержит никаких других постоянных (если не считать отвлеченных математических чисел), кроме координат ядер. Тогда энергия электронов будет функцией этих ядерных координат $E(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots)$, а минимумы этой функции определят возможные расположения ядер. Если выразить $X_1, Y_1, Z_1, X_2, \ldots$ в атомных единицах, то очевидно, что относительные положения ядер в молекуле определятся чисто математическими числами. Отсюда следует, что все молекулы должны иметь размеры порядка a_1 и энергии порядка E_1. Кристаллы являются не чем иным, как очень большими молекулами. Если число атомов задано, то энергия и размеры кристалла при низких температурах должны определяться порядком величины a_1 и E_1.

Существует много случаев атомных столкновений, которые тоже принадлежат к числу явлений, управляемых постоянными a_1 и E_1. Сюда относятся все явления, при рассмотрении которых можно пренебречь движением ядер, если только скорость электронов мала по сравнению с c; например явления ионизации и возбуждения атомов медленными электронами. Эффективное поперечное сечение такого процесса и распределение по углам может быть вычислено с помощью тех же волновых уравнений, что и стационарные состояния; поэтому и здесь все будет выражено чисто математически, если за единицы выбраны a_1 и E_1.

Мы видим, что большая область физики управляется атомными единицами a_1, E_1. Однако есть много случаев, когда этих единиц недостаточно.

Первое, до некоторой степени тривиальное, исключение относится к движению ядер. Всякий раз, когда это движение играет какую-нибудь роль (например, в тепловом движении газов или твердых тел, в оптических явлениях), массы ядер становятся определяющим фактором.

Эмпирически массы ядер определяются посредством „атомных весов". Однако мы знаем из опытов Астона с масс-спектрографом, что химически определенные атомные веса относятся не к чистым веществам, а к смеси изотопов, т. е. ядер с одинаковым зарядом Ze, но с различными массами. Массы чистых изотопов оказываются почти в точности целыми кратными некоторой минимальной массы M — массы ядра водорода (протона). Встречающиеся малые отклонения от этих целых чисел легко объясняются посредством предположения, что ядра являются не простой суммой протонов, а механическими системами с некоторой энергией связи. Так как согласно закону Эйнштейна энергия и масса эквивалентны друг другу, то выделение энергии при образовании ядер из протонов приводит к уменьшению массы. Поэтому, когда нужно включить в рассмотрение атомные ядра, следует ввести еще одну новую физическую постоянную — массу протона M, примерно в 1840 раз превосходящую массу электрона. Число 1840—отношение масс $\frac{M}{m}$ — является вторым таинственным числом физики. Оно определяет порядок величины всех ядерных движений, например скорость молекул газа, вращение и колебание молекул, колебания кристаллических решеток и все свойства материи, зависящие от этих движений: удельную теплоемкость, теплопроводность, диффузию, поглощение инфракрасных лучей, явление Рамана, скорости химических реакций и т. д.

Однако я думаю, что проблема числа 1840 тесно связана с проблемой числа 137, составляющей предмет этой лекции. В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу.

4. Формула тонкой структуры Зоммерфельда

Перейдем теперь ко второму условию, ограничивающему применение атомных единиц a_1 и E_1, а именно: рассмотрим то предположение, что скорости электронов малы по сравнению с c. Всякий раз, когда это предположение перестает быть верным, мы должны принимать во внимание теорию относительности.

Впервые это было сделано Зоммерфельдом для объяснения тонкой структуры водородных линий. Как было упомянуто, он вывел свою формулу, исходя из модели Бора. Метод, которым он пользовался, ясно показывает, в каких именно случаях следует учитывать релятивистские поправки. Поэтому мы и начнем с краткого рассмотрения соображений Зоммерфельда. Выше было указано, что все эллиптические орбиты с одинаковой большой полуосью имеют одинаковую энергию, независимо от их эксцентриситетов. Однако в случае очень растянутых орбит перигелий очень близко подходит к ядру, и поэтому скорость электрона вблизи перигелия становится очень большой. В этих случаях законы классической механики перестают соблюдаться и должны быть заменены законами релятивистской механики. Это означает, что масса уже не остается постоянной, а растет с увеличением скорости. Если принять во внимание это изменение массы, то движение будет происходить уже не по эллипсу с неподвижными осями, а по кривой, имеющей форму розетки. Такое движение может быть представлено как результат сложения классического движения по эллипсу и прецессии перигелия. Период этой прецессии зависит от степени растянутости эллипса и квантуется с помощью нового квантового числа k, которое может принимать значения 0, 1, 2... Энергия становится функцией числа k, которая в первом приближении определяется формулой:

$$E = -E_1 \frac{1}{n^2}\left\{1 + \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 Z^2 \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Эта формула приводит к гораздо большему числу стационарных состояний, так как каждому значению n соответствует несколько состояний с различными k. Вследствие этого каждая спектральная линия расщепляется на ряд отдельных компонент.

Экспериментальное подтверждение формулы тонкой структуры Зоммерфельда может считаться блестящим доказательством как принципа относительности Эйнштейна, так и планковской теории квант.

Формула Зоммерфельда была первой попыткой объединения этих двух великих теорий. Как сказано выше, каждая из этих теорий характеризуется своей универсальной постоянной: теория относительности — постоянной c, квантовая теория — постоянной h. Поэтому естественно, что в формуле Зоммерфельда поправочный член зависит от обеих этих постоянных, имея коэфициентом квадрат величины

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c},$$

которую Зоммерфельд назвал *постоянной тонкой структуры*. Эта постоянная равна единице, деленной на таинственное число 137, которое фигурирует в заглавии моей лекции. Что же в этом числе таинственного? И почему вообще стоит говорить об этом числе?

Самым замечательным в величине $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ является то, что эта комбинация трех универсальных постоянных оказывается безразмерным числом. Это легко показать. Электрическая сила, действующая между двумя частицами с одинаковым зарядом e, находящимися на расстоянии r друг от друга, согласно закону Кулона равна $\frac{e^2}{r^2}$; энергия, необходимая для разделения этих частиц, равна $\frac{e^2}{r}$. Следовательно, e^2 может быть измерено в единицах *эрг·см*. С другой стороны, $\hbar$ имеет размерность *эрг·сек*, а размерность c есть *см/сек*; следовательно, $\hbar c$ измеряется в *эрг·см*, т. е. имеет ту же размерность, что и e^2. Подставляя известные значения e, $\hbar$, c, мы находим: $\alpha = 0{,}00734 \cong \frac{1}{137}$. Тот факт, что это число во много раз меньше единицы, не только дает нам право считать релятивистские эффекты малыми (и, следовательно, рассматривать их влияние как „тонкую структуру"), но и приводит к весьма важным следствиям в вопросе о строении материи вообще.

Таинственный характер числа, упомянутого в заглавии, особенно отчетливо выяснится, если мы сравним оба числовых коэфициента в формуле тонкой структуры, а именно: $\left(\frac{1}{137}\right)^2$ и $\frac{3}{4}$. Последний коэфициент — это арифметическая величина, выведенная из математических рассуждений. Первый же коэфициент имеет иную природу: он выведен как комбинация размерных физических величин, измеренных в произвольных единицах, а поэтому наше знание этого коэфициента зависит от точности измерений.

Является ли такое положение вещей удовлетворительным? Я думаю, что ни в коем случае. Мы должны потребовать, чтобы числовые коэфициенты в физических законах всегда являлись математическими числами, вроде $^3/_4$ или π и т. п. Если в данном случае дело, как будто, обстоит иначе, то это, надо думать, произошло вследствие несовершенства теории. Более совершенная теория должна была бы вывести число α с помощью чисто математических рассуждений, не ссылаясь на результаты измерений. Но в таком случае мы приходим к замечательному выводу: если α есть математическое число, то, значит, постоянные e, $\hbar$, c не могут считаться независимыми! Иными словами, если измерены две из них, третью можно вывести путем вычисления. Если, например, взять в качестве основных величин $\hbar$ и c, то идеальная теория должна дать нам возможность вычислить заряд электрона! Но, пожалуй, чересчур рискованно рассуждать о теории, которая еще не существует, а поэтому, прежде чем мы перейдем к дальнейшему разбору этих вопросов, мы сперва рассмотрим ту роль, которую число 137 играет в существующей теории.

5. Электронные единицы

Мы видим, что в нерелятивистском приближении свойства атомов и молекул могут быть выражены отвлеченными математическими числами, если длину и энергию выражать в атомных единицах Гартри a_1 и E_1. Результаты Зоммерфельда показывают, что этих единиц недостаточно для описания всех свойств атомов, так как релятивистские эффекты зависят от постоянной α. Но a_1 и E_1 выражены через величины e и m, характеризующие электрон, а также через квантовую постоянную $\hbar$. Последняя величина входит также и в α, а так как α есть отвлеченное число, то $\hbar$ можно исключить из a_1 и E_1:

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{e^2}{mc^2}\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^2 = \frac{e^2}{mc^2}\frac{1}{\alpha^2} = (137)^2\frac{e^2}{mc^2}.$$

$$E_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2}mc^2\left(\frac{e^2}{\hbar c^2}\right)^2 = \frac{1}{2}mc^2\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{(137)^2}mc^2.$$

Теперь a_1 и E_1 выражены только через величины, характеризующие электрон: через длину $a_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ и энергию $\varepsilon = mc^2$. Каков же физический смысл этих величин?

По отношению к энергии ε ответ на вопрос дает закон Эйнштейна, вытекающий из теории относительности. Этот закон гласит, что масса и энергия физически тождественны и что отношение энергии к массе равно c^2. Следовательно, величина

$$\varepsilon = mc^2$$

есть энергия электрона.

Аналогичным образом длина $a_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ может рассматриваться как радиус электрона. По этому поводу необходимо сделать некоторые замечания.

В настоящее время физики большей частью считают электрон точечным зарядом, и всякую попытку определить размеры и форму электрона отвергают как принципиально недопустимую и бессмысленную. Но не всегда дело обстояло так. Четверть века назад считалось хорошим тоном рассматривать электрон как тело конечных размеров, например как шар радиуса a_0, обладающий зарядом, распределенным по его поверхности или по всему его объему. Исходя из этих представлений, электромагнитную энергию электрона и его электромагнитный импульс p можно выразить с помощью уравнений Максвелла через заряд e и радиус a_0. В случае сферической формы электрона и при малых скоростях результат имеет следующий вид:

$$\varepsilon = A\frac{e^2}{a_0}, \quad p = B\frac{e^2}{a_0}\frac{v}{c^2},$$

где A и B — численные коэфициенты, зависящие от распределения заряда.

Оба эти выражения обращаются в бесконечность при $a_0 = 0$. Поэтому гипотеза, что электрон является точечным зарядом, оказывается немыслимой, если только исходить из предположения о строгой правильности уравнений Максвелла.

Вторая формула, имеющая вид $p = mv$, наводит на мысль, что коэфициент $m = B\frac{e^2}{a_0 c^2}$ можно истолковать как электромагнитную массу электрона.

Согласно закону Эйнштейна ($mc^2 = \varepsilon$) следует ожидать, что $mc^2 = B\frac{e^2}{a_0}$ будет равно $\varepsilon = A\frac{e^2}{a_0}$, т. е. что $A = B$. Однако вычисления с помощью уравнений Максвелла показывают, что эти коэфициенты не равны друг другу. Так например, в случае поверхностного заряда $A = \frac{2}{3}B$.

Для того чтобы объяснить это противоречие, физики предполагали, что заряд удерживается в объеме электрона какими-то очень большими силами сцепления, природа которых нам неизвестна. Этим силам соответствует добавочная энергия, что приводит к появлению недостающей величины $\frac{1}{3}B$.

Впрочем, это объяснение выглядит несколько искусственным и не вполне удовлетворительным. Форма электрона и распределение заряда в нем имеют в рамках такой теории столь же произвольный характер, как и эти силы сцепления. Поэтому физики стали вообще воздерживаться от каких-либо гипотез относительно внутреннего строения электрона. Однако, с другой стороны, соотношение между массой или энергией электрона и его радиусом казалось настолько привлекательным, что физики не решились от него отказаться. Поэтому уравнение

$$\frac{e^2}{a_0} = mc^2 = \varepsilon = 8{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ эрг},$$

где произвольно выбран коэфициент $A = 1$, начали рассматривать как условное определение радиуса электрона:

$$a_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Радиус и энергия первой орбиты водородного атома выражаются через a_0 и ε:

$$E_1 = \frac{\alpha^2}{2}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\,(137)^2} = \frac{\varepsilon}{2 \cdot 18770},$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha^2}a_0 = (137)^2 a_0 = 18770 a_0.$$

Теперь становится очевидным важное значение числа 137: его квадрат определяет отношение энергии и радиуса водородного атома (E_1 и a_1) к энергии и радиусу электрона (ε и a_0).

Назовем ε и a_0 электронными единицами энергии и длины. Так как $e^2 = a_0\varepsilon$, то значение e в этих единицах равно 1. То обстоятельство, что

$$\frac{1}{\gamma^2} = (137)^2 = 18\,770 \gg 1,$$

подтверждает наше право трактовать электроны в атомах и молекулах как точечные заряды с постоянными массами. Если увеличить электрон до размеров горошины (диаметр 0,5 *см*), то атом водорода превратится в шар с диаметром в 100 *м*. Энергия связи атома в такое же число раз меньше, чем собственная энергия электрона.

Теперь мы покажем, что все законы атомной физики, выраженные в электронных единицах, обращаются в безразмерные уравнения, содержащие только числовые коэфициенты. Эти коэфициенты, однако, не являются чисто математическими числами, так как среди них встречается постоянная α. Большим числовым значением $\frac{1}{\alpha}=137$ определяется порядок величины всех физических явлений, выраженных в электронных единицах.

6. Релятивистские волновые уравнения

Объяснение тонкой структуры, данное Зоммерфельдом, явилось важной первой попыткой, которая, однако, обладала теми же недостатками, что и вся теория Бора в целом. Поэтому пришлось заменить теорию Зоммерфельда другой теорией, основанной на современных методах квантовой механики.

Перейдем поэтому к рассмотрению попыток построить волновое уравнение для электрона, удовлетворяющее принципу относительности.

Первое релятивистское волновое уравнение для одного электрона в заданном электромагнитном поле было предложено Гордоном и Клейном; оно имеет следующий вид:

$$\left\{-\left(\frac{W}{c}+\frac{eA_0}{c}\right)^2+\left(\mathbf{p}+\frac{e\mathbf{A}}{c}\right)^2+m^2c^2\right\}\psi=0,$$

где оператор W означает $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ (по аналогии с соотношениями $p_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ldots$); при этом A_0 есть скалярный, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал внешнего поля. Так как это поле вызывается электронами или ядрами, то мы можем выделить из потенциалов множитель $\frac{e}{a_0}$, равный потенциалу точечного заряда e на расстоянии a_0. Мы получаем

$$A_0=\frac{e}{a_0}\varphi_0, \qquad \mathbf{A}=\frac{e}{a_0}\bar{\varphi},$$

где φ_0 и $\bar{\varphi}_0$ — безразмерные функции пространства и времени.

Если в качестве единицы длины выбрать a_0, а единицы времени $\frac{a_0}{c}$, то волновое уравнение примет вид:

$$\left\{-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\varphi_0\right)^2+\left(\frac{1}{i}\nabla+\alpha\bar{\varphi}\right)^2+\alpha^2\right\}\psi=0.$$

Оно содержит только безразмерную постоянную α. Однако это уравнение не выражает некоторых важных свойств электрона, а именно: электронного спина, т. е. того факта, что электрон обладает механическим моментом количества движения, равным $\frac{1}{2}\hbar$, т. е. половине механического момента, соответствующего первой орбите Бора, и в то же время обладает магнитным моментом $\frac{e\hbar}{2mc}$, равным магнитному моменту этой орбиты. Кроме того, с истолкованием этого уравнения связаны теоретические трудности, так как оно содержит вторую производную от ψ по времени. Статистическая интерпретация квантовой механики предполагает, что $|\psi|^2\,dx\,dy\,dz$ есть вероятность нахождения электрона в определенном элементе объема $dx\,dy\,dz$. При этом знание распределения функции ψ в момент времени $t=0$ должно быть достаточным для того, чтобы уметь вычислить это распределение в любой следующий момент времени; а значит, диференциальное уравнение должно быть первого порядка относительно $\frac{\partial}{\partial t}$. Но так как приведенное выше уравнение оказывается не первого, а второго порядка, то в число начальных условий должно входить задание $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ в момент времени $t=0$, что трудно истолковать физически.

На основании этих соображений Дирак нашел свое знаменитое волновое уравнение первого порядка относительно x, y, z, t:

$$\left\{\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)+\bar{\gamma}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)+\gamma_0 mc\right\}\psi=0,$$

которое содержит в качестве коэфициентов четыре числовые (безразмерные) оператора, а именно: матрицы γ_0, $\bar{\gamma}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Наиболее важным свойством уравнения Дирака является то, что оно приводит к объяснению электронного спина. Это свойство уравнения станет понятным, если попробовать в качестве первого приближения вывести из него уравнение Гордона-Клейна: при этом выводе появляется добавочный член, который имеет вид

$$\frac{\hbar e}{2mc}\bar{\sigma}\mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}$ — напряжение магнитного поля, а $\bar{\sigma}$ — векторный оператор, составленный *из матриц* γ. *Кроме этого члена, появляется* аналогичный ему электрический член (чисто мнимый и не обладающий непосредственным физическим смыслом). Магнитный член можно истолковать как энергию взаимодействия поля $\mathbf{H}$ с магнитным моментом электрона, который равен $\frac{\hbar e}{2mc}$ (так называемый м а г н е т о н).

Если ввести электронные единицы, то уравнение Дирака примет вид:

$$\left\{\left(-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\varphi_0\right)+\bar{\gamma}\left(\frac{1}{i}\nabla+\alpha\bar{\varphi}\right)+\gamma_0\alpha\right\}\psi=0.$$

Оно содержит только постоянную $\alpha=\frac{1}{137}$.

Выражение для магнетона можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\hbar e}{2mc}=\frac{1}{2}e\frac{e^2}{mc^2}\frac{\hbar c}{e^2}=\frac{ea_0}{2\alpha},$$

где ea_0 есть дипольный момент двух элементарных зарядов, удаленных друг от друга на расстояние a_0, которое в электронных единицах равно 1. В этих единицах магнетон равен $\frac{1}{2\alpha}=68{,}5$.

Если потенциалы остаются постоянными во времени, то существуют стационарные состояния, которые можно определить, положив функцию ψ пропорциональной $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, или, в электронных единицах, $e^{-i\alpha Et}$. Волновое уравнение после сокращения на α получит вид:

$$\left\{E+\varphi_0+\bar{\gamma}\left(\frac{1}{i\alpha}\nabla+\bar{\varphi}\right)+\gamma_0\right\}\psi=0.$$

В случае водородоподобного атома или иона поле ядра описывается скалярным потенциалом $A_0=\frac{Ze}{r}$ в то время, как $\mathbf{A}=0$, т. е. в электронных единицах $\varphi_0=\frac{Z}{r}$, $\bar{\varphi}=0$. Уравнение в этом случае возможно решить точно: стационарные состояния определяются формулой

$$E=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2Z^2}{\{n-k+\sqrt{k^2-\alpha^2Z^2}\}^2}}},$$

где n и k — такие же квантовые числа, как и в теории Зоммерфельда. Такую же самую формулу вывел и Зоммерфельд, исходя из атомной модели Бора. Легко показать, что та приближенная формула, которая была приведена выше, может быть получена из точной формулы путем разложения в ряд по степеням α^2. Член нулевого порядка — это энергия покоя электрона (т. е. 1 в электронных единицах); он не написан в формуле Зоммерфельда. Член первого порядка относительно α^2 соответствует бальмеровскому терму, а следующий член дает зоммерфельдовскую поправку.

Полное согласие точной формулы с найденным на опыте строением термов рентгеновских лучей у всех элементов (вплоть до самого высокого атомного номера) показывает, что стационарные состояния электрона в поле ядра весьма точно подчиняются закону, связанному с числом 137.

7. Взаимодействие электронов с излучением

Наиболее важным из всех тех случаев, когда постоянная α входит в формулировку законов физики, является взаимодействие электронов с электромагнитным излучением.

Выше мы имели дело со стационарными состояниями атомов и молекул, с размерами атомов и их энергиями в этих состояниях. При этом мы не учитывали, что возбужденные состояния неустойчивы, так как окружающий эфир может забирать у атома энергию и уносить ее в форме радиации (света). Этот процесс зависит от постоянной α, что легко можно показать с помощью полуклассических рассуждений.

Электрон, колеблющийся с частотой ν, излучает энергию в форме электромагнитных волн, согласно уравнению

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{1}{\tau}E,$$

где постоянная τ, имеющая размерность времени, определяется следующим образом:

$$\tau=\frac{3}{8\pi^2}\frac{mc^3}{e^2\nu^2}.$$

Этот классический закон может быть перенесен в квантовую теорию. В этом случае мы имеем не непрерывную потерю энергии, а мгновенный переход из возбужденных состояний в состояния с меньшей энергией. Каждое возбужденное состояние имеет некоторую продолжительность жизни; она определяется матричным элементом дипольного момента системы, который может быть вычислен с помощью волнового уравнения Шредингера.

Теория приводит к тому результату, что все продолжительности жизни имеют вид $f\tau$, где τ — указанная выше величина, а f — математическое число, характеризующее рассматриваемое состояние.

Вычислим теперь продолжительность жизни водородного атома в первом возбужденном состоянии и сравним ее с периодом колебания, соответствующим переходу в нормальное состояние. В этом частном случае число f оказывается приблизительно равным 1. Следовательно, продолжительность жизни равна τ, а так как период $T=\frac{1}{\nu}$, то мы получаем:

$$\frac{\tau}{T}=\nu\tau=\frac{3}{8\pi^2}\frac{mc^3}{e^2\nu}.$$

Подставляя сюда значение ν из формулы Бальмера

$$\nu = \frac{1}{h} E_1 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4h} E_1 = \frac{3}{8h} mc^2\alpha^2,$$

мы находим:

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha^3} = \frac{2}{\pi} (137)^3 = 1{,}64 \cdot 10^6.$$

Величина, обратная этому числу, есть относительная ширина спектральной линии:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 6{,}1 \cdot 10^{-7}.$$

Эту дробь можно также рассматривать, как отношение энергии взаимодействия электронной орбиты с полем излучения ($h\Delta\nu$) к испускаемой энергии ($h\nu$).

Огромная величина продолжительности жизни, измеренной в периодах колебания испускаемого света (или, что то же самое, чрезвычайная малость энергии взаимодействия атома и эфира), играет весьма большую роль в окружающем нас мире явлений и определяет наш метод описания этого мира. Она дает нам возможность рассматривать атомы отдельно от окружающего поля и приписывать им стационарные состояния. Если бы α была больше, чем на самом деле, то мы не могли бы провести грань между материей и эфиром, и задача нахождения законов природы была бы для нас безнадежно трудной. Но ведь то обстоятельство, что α имеет значение $\frac{1}{137}$, а не какое-нибудь другое, конечно же, является не делом случая, а законом природы. Ясно, что объяснение числа α есть одна из центральных проблем естествознания. Однако, прежде чем обсуждать этот вопрос, следует упомянуть о некоторых других явлениях, которые определяются величиной α.

Одно из наиболее простых в принципиальном отношении явлений (проще даже, чем только что рассмотренное излучение связанного электрона) — это взаимодействие свободных электронов с полем излучения. Введя в уравнение Дирака переменное поле световой волны, можно рассмотреть это явление исчерпывающим образом. В этой задаче потенциал φ_0 является периодической функцией от $\nu t - \mathbf{kr}$, образуя плоскую волну с частотой ν и с волновым вектором $\mathbf{k}$ (волновой вектор — это вектор, направленный по перпендикуляру к фронту волны и имеющий длину $\frac{1}{\lambda}$, где λ — длина волны).

Действие световой волны на свободные электроны заключается в рассеянии света. Если частота велика, как например в случае рентгеновских лучей, то рассеянная волна имеет меньшую частоту, чем первичная волна. В этом заключается эффект Комптона. Известно, что это явление можно объяснить, применяя законы сохранения энергии и количества движения, если приписать световому кванту энергию $h\nu$ и количество движения $\frac{h\nu}{c}$. Путем простого вычисления получается результат:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

где φ — угол рассеяния светового кванта, а

$$\lambda_0 = \frac{h}{mc} = 2{,}42 \cdot 10^{-10} \text{ см} —$$

так называемая комптоновская длина волны. Эта длина характерна для чисто квантовых эффектов подобно тому, как электронный радиус

$$a_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

характерен для чисто электронных эффектов. Их отношение, т. е

$$\frac{a_0}{\lambda} = \frac{e^2}{hc} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

оказывается равным постоянной тонкой структуры, деленной на 2π.

Поэтому существование таинственного числа сводится к тому факту, что в законах природы существуют две различные „естественные" единицы длины — бо́льшая единица λ_0, вытекающая из квантовой теории, и меньшая единица a_0, связанная с электроном.

Статистические законы рассеяния света, а именно — закон углового распределения и суммарная вероятность рассеяния, могут быть выражены с помощью эффективного поперечного сечения q. Для длинных волн эффективное поперечное сечение может быть выведено с помощью уравнений Максвелла и кла́ссической механики; результатом этого вывода является известная формула Дж. Дж. Томсона:

$$q = \frac{8\pi}{3} a_0^2.$$

Для более коротких волн было использовано уравнение Дирака. Вычисление, впервые выполненное Клейном и Нишиной, дает для поперечного сечения выражение, которое отличается от томсоновского множителем, зависящим от $\eta = \frac{\lambda_0}{\lambda}$, где λ — длина волны падающего света, а $\lambda_0 = \frac{h}{mc}$ — комптоновская длина волны:

$$q = \frac{8\pi}{3} a_0^2 f(\eta),$$

где

$$f(\eta)=\frac{3}{4}\left\{\frac{1+\eta}{\eta^2}\left[\frac{2(1+\eta)}{1+2\eta}-\frac{1}{\eta}\lg(1+2\eta)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\eta}\lg(1+2\eta)-\frac{1+3\eta}{(1+2\eta)^2}\right\}.$$

Так как

$$\lambda_0=\frac{2\pi a_0}{\alpha}=2\pi\cdot 137 a_0,$$

то

$$\eta=\frac{2\pi}{\alpha\lambda},$$

если λ измерена в электронных единицах. В тех же единицах поперечное сечение

$$q=\frac{8\pi}{3}f\left(\frac{2\pi}{\alpha\lambda}\right)=\frac{8\pi}{3}f\left(\frac{2\pi\cdot 137}{\lambda}\right)$$

оказывается числовой функцией от λ, содержащей постоянную $\alpha=\frac{1}{137}$.

Существует много других возможных типов взаимодействия световых квантов с заряженными частицами. Важным случаем такого взаимодействия является рассеяние пучка электронов, проносящихся мимо ядер и испускающих при этом свет. Оказывается, что этот процесс есть самая эффективная причина поглощения электронного пучка, более эффективная, чем, например, возбуждение или ионизация, если только энергия заметно больше, чем $\varepsilon=mc^2$ (т. е. больше, чем 1 в электронных единицах); этим процессом определяется поглощение космических лучей при прохождении через материю. В качестве примера приведем формулу Бете и Гейтлера, которой определяется (в случае электронов с энергией большей, чем ε, но меньшей, чем $\frac{\varepsilon}{\alpha}=137\,\varepsilon$) потеря энергии на единицу длины в среде, содержащей N атомов с атомным номером Z на единицу объема:

$$-\frac{dE}{dx}=NqE,$$

где эффективное сечение q в электронных единицах равно

$$q=Z^2\alpha\left(4\lg 2E-\frac{4}{3}\right),$$

т. е. равно некоторой числовой функции, зависящей от $\alpha=\frac{1}{137}$. Эти примеры, число которых можно было бы легко увеличить, показывают, что постоянная 137 играет исключительно важную роль во всех явлениях природы.

8. Унитарная теория электромагнитного поля

Тем не менее само это число 137 не объяснено существующими теориями. Такое положение вещей совершенно неудовлетворительно. Необходимо искать способы его исправить. Для этой цели попробуем обнаружить слабые стороны теории — противоречия между нею и опытом, а также ее внутренние логические противоречия. Что касается разногласий между теорией и опытом, то общее мнение физиков гласит, что такие разногласия действительно существуют. Очень быстрые частицы поглощаются во много раз слабее, чем предсказывает теория. Это доказывается огромной проникающей способностью космических лучей. Торможение электронов ядрами, сопровождающееся излучением света (об этом упоминалось в предыдущем параграфе, как о наиболее эффективной причине поглощения), заставило бы космическую радиацию поглотиться на протяжении 1 *м* воды. В действительности же эту радиацию обнаруживают в воде глубоких озер чуть ли не на глубине 500 *м*. В нескольких случаях торможение отдельных электронов при прохождении сквозь свинцовую пластинку было непосредственно измерено. В камере Вильсона, помещенной в сильное магнитное поле, получаются искривленные пути, и торможение можно вычислить по увеличению кривизны пути после прохождения через свинцовую пластинку. Для частиц, обладающих энергией большей, чем 100 ε, измеренное таким способом уменьшение скорости оказалось явно менее значительным, чем предсказывала теория.

Переходя к внутренним логическим противоречиям, вспомним, каким предосудительным способом в теорию было введено понятие „радиус электрона“. Не будучи в состоянии согласовать предположение о конечных размерах электрона с уравнениями Максвелла, физики молчаливо согласились пользоваться понятием „электронный радиус“, положив его равным $a_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ и в то же время рассматривать электрон как точечный заряд!

Очевидно, уравнения поля должны быть изменены таким образом, чтобы у электрона был конечный радиус и чтобы „силы сцепления“, необходимые для удержания в равновесии всех элементов электронного заряда, удовлетворяли принципу относительности.

Так как постоянная $\hbar$ не входит в a_0, то кажется весьма мало вероятным, что эта проблема имеет отношение к теории квант. Поэтому ее неоднократно пытались решать в рамках классической теории. Нужно указать на две руководящие идеи, на которых были основаны такие попытки. Одна из этих идей, принадлежащая Эйнштейну, заключается в том, что тяготение рассматривается как источник внутренних сил сцепления электрона; попытки решения проблемы электрона основаны на объединении поля тяготения с электромагнитным полем в некую единую схему. Было опубликовано много „единых теорий поля“ (Эйнштейном, Вейлем, Эддингтоном, Вебленом и др.), но безуспешно. Мне это представляется вполне понятным. Тяготение — это очень маленькая сила, экспериментально изученная только в случае макроскопических, электрически нейтральных тел. Позволительно сомневаться, имеет ли вообще смысл говорить о силах тяготения, действующих между двумя электронами. Гравитационное притяжение между двумя электронами на расстоянии r равно

$$\varkappa \frac{m^2}{r^2}, \text{ где } \varkappa = 6{,}664 \cdot 10^{-8} \textit{ см} \cdot \textit{г}^{-1} \textit{ сек}^{-2}$$

(постоянная тяготения), в то время как электрическое отталкивание равно $\frac{e^2}{r^2}$. Отношение силы тяготения к электрической силе равно $\varkappa \frac{m^2}{e^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-43}$. Чрезвычайно малая величина этого отношения убедительно говорит о том, что попытки объяснить существование элементарных частиц тяготением, равно как и все попытки построить единую теорию поля, абсолютно ошибочны.

Другой путь — изменение уравнений Максвелла — впервые был испробован Густавом Ми в 1912 г. Ми показал, что уравнения Максвелла могут быть подвергнуты существенному обобщению, не теряя при этом ни своего внешнего вида, ни свойств инвариантности. Он создал удивительную конструкцию — нелинейную теорию поля, но при этом ввел ряд ненужных предположений, которые привели его к столь большим трудностям, что этот путь вскоре был заброшен, и только в недавнее время я снова воскресил эту теорию.

Непосредственное введение длины (радиуса электрона) в любые уравнения поля представляется невозможным, если рассматривать заряды как точечные. Ведь эти уравнения, согласно Ми, имеют, вообще говоря, следующий вид:

$$\dot{\mathbf{D}} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где компоненты векторов **D**, **H** являются функциями компонент **B**, **E**; так как уравнения однородны по отношению к x, y, z, ct, то они никак не могут быть упрощены посредством введения какой-либо „естественной“ единицы длины. Но так как связь между **D**, **H** и **B**, **E** не имеет линейного характера, то существует возможность ввести естественную единицу поля. Оказалось, что удачным является следующее предположение:

$$D_x = -\frac{\partial L}{\partial E_x}, \ldots, \quad H_x = \frac{\partial L}{\partial B_x} \ldots,$$

где

$$L = b^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{b^4}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2} - 1 \right\}.$$

Функция L называется функцией Лагранжа. В случае обыкновенных уравнений Максвелла для пустого пространства функция Лагранжа равна $L=\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)$, откуда следует $\mathbf{D}=\mathbf{E}$, $\mathbf{H}=\mathbf{B}$. Новая функция L является обобщением этой функции Лагранжа. Она содержит постоянную b, которая называется „абсолютным полем"; предполагается, что b очень велико. Если $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ малы по сравнению с b, то L в первом приближении превращается в максвелловское выражение $L=\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)$. Вместе с Инфельдом я показал, что L — это простейшая функция, удовлетворяющая требованиям принципа относительности.

Как уже показал Ми, законы сохранения электромагнитной энергии и количества движения могут быть выведены из уравнений поля и написаны в виде уравнений типа „четырехмерный дивергенц равен нулю". Например, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{S}=0,$$

где $U=L+\mathbf{E}\,\mathbf{D}$ (плотность энергии) и $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ (плотность количества движения). Существует статическое решение ($\mathbf{H}=0$, $\mathbf{B}=0$), соответствующее точечному заряду. Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ имеет решение с центром симметрии $D_r=\frac{e}{r^2}$, а так как

$$D_r=-\frac{\partial L}{\partial E_r}=\frac{E_r}{\sqrt{1-\frac{1}{b^2}E_r^2}},$$

то

$$E_r=\frac{D_r}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}D_r^2}}=\frac{e}{\sqrt{r_0^4+r^4}},$$

где r_0 определяется равенством

$$b=\frac{e}{r_0^2}.$$

E_r повсюду остается конечным; на расстояниях r, больших сравнительно с r_0, имеем $E_r\to\frac{e}{r^2}$, т. е. поле E_r подчиняется закону Кулона; в случае же малых r поле E_r не обращается в бесконечность, а принимает значение $\frac{e}{r_0^2}=b$ при $r=0$. Итак, постоянная b равна полю в центре электрона. Вследствие того, что эта теория релятивистски инвариантна, закон Эйнштейна $E=mc^2$ выполняется точно. Простое вычисление дает для энергии покоя следующее выражение:

$$E = mc^2 = \int U\,dx\,dy\,dz = 1{,}236\,\frac{e^2}{r_0}.$$

Эта формула может рассматриваться как точное определение „радиуса электрона“ r_0, который отличается от „условного“ радиуса a_0 числовым множителем:

$$r_0 = 1{,}236\,\frac{e^2}{mc^2} = 1{,}236\,a_0.$$

Отметим принципиальные особенности новой теории: она рассматривает материю и поле не как две различные реальности, а как одну и ту же реальность. Частица является лишь особой точкой поля, а ее масса — это энергия поля, связанная с особой точкой. Такая теория является унитарной теорией поля, в противоположность принятым дуалистическим теориям, в которых отдельно вводятся массы для каждого типа частиц.

Мы не можем вдаваться в обсуждение других следствий этой теории, а ограничимся только рассмотрением вопроса о таинственном числе 137. Нельзя надеяться на то, что эта новая теория электромагнитного поля сможет непосредственно помочь нам объяснить это число: ведь в число 137 входит постоянная $\hbar$, а поэтому оно должно быть связано с квантовыми идеями и никогда не сможет быть выведено из чисто классической теории. Новая теория поля устраняет трудности, связанные с „радиусом электрона“ (или, что то же самое, с бесконечной собственной энергией электрона, рассматриваемого как точечный заряд), но, конечно, эта теория является лишь предельным случаем квантовой электродинамики, подобно тому, как классическая механика есть предельный случай квантовой механики (принцип соответствия Бора).

9. Квантовая электродинамика

Идея световых квантов (фотонов) в том виде, в каком она была предложена Эйнштейном для объяснения фотоэлектрического эффекта, явилась первым указанием на то, что к электромагнитному полю в пустом пространстве следует применять квантовые принципы.

Для этой цели, с помощью анализа Фурье, разлагают поле на совокупность гармонических волн; каждый коэфициент разложения Фурье, представляющий амплитуду монохроматической волны, можно рассматривать как механическую координату, к которой следует применять квантовые условия. Таким способом оказалось возможным придать точный смысл понятию „фотон“ и вывести законы статистики фотонов, т. е. получить формулу Планка и рассчитать флуктуации излучения. Дираку удалось построить последовательную теорию испускания, поглощения и рассеяния света, в которой атом и окружающее его поле рассматриваются как квантованная механическая система.

Впоследствии Паули и Гейзенберг придали теории такую форму, в которой компоненты векторов поля уже не разлагаются в ряд Фурье, а сразу рассматриваются как квантовые переменные. Метод Паули и Гейзенберга возможно применить и к унитарной теории поля. Это делается следующим образом: компоненты векторов **D** и **B** выбираются в качестве основных переменных; подобно тому, как в квантовой механике координата q и импульс $p=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ не коммутируют друг с другом*, точно так же и здесь предполагается, что некоторые компоненты векторов **D** и **B** некоммутативны. **D** и **B** суть функции пространственного вектора **r** (x, y, z) и времени t; переменные x, y, z, t считаются коммутирующими. Предполагается, что любые компоненты **D** и **B** коммутируют, если они относятся к двум точкам на конечном расстоянии друг от друга, но что это перестает выполняться, когда обе точки сближаются. Вводятся следующие перестановочные соотношения:

$$D_y(\mathbf{r}_1, t)B_z(\mathbf{r}_2, t)-B_z(\mathbf{r}_2, t)D_y(\mathbf{r}_1, t)=$$

$$=\hbar c\frac{\partial}{\partial x}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2),$$

где

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\delta(x_1-x_2)\,\delta(y_1-y_2)\,\delta(z_1-z_2)$$

(произведение трех дираковских „несобственных“ функций**).

Если **D** и **B** выражены в единицах поля, равных постоянной b, то получается

$$D_y^{(1)}B_z^{(2)}-B_z^{(2)}D_y^{(1)}=\frac{\hbar c}{b^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

---

* $$(pq-qp)f(q)=\frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial q}(qf)-q\frac{\partial f}{\partial q}\right]=\frac{\hbar}{i}f,$$

откуда

$$pq-qp=\frac{\hbar}{i}.$$

** $\delta(x)=0$ при $x\neq 0$, а при $x=0$ $\delta(x)$ делается бесконечным таким образом, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$.

Так как $b = \frac{e}{r_0^2}$, то коэфициент равен

$$\frac{\hbar c}{b^2} = \frac{\hbar c}{e^2} r_0^4 = \frac{r_0^4}{\alpha}.$$

Множитель r_0^4 перед δ-функцией появился потому, что δ-функция не безразмерная величина, а обладает размерностью $\frac{1}{r^3}$; ведь ее интеграл по всему пространству равен единице; вследствие этого выражение $r_0^4 \frac{\partial}{\partial x} \delta$ не имеет размерности.

Эти перестановочные соотношения следует дополнить диференциальными уравнениями, определяющими изменение любого оператора F в пространстве и во времени:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial t} = WF - FW,$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial x} = -(p_x F - F p_x);$$

где

$$W = \int U \, dv, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{S} \, dv$$

(полная электромагнитная энергия и полный импульс).
Плотность энергии U может быть какой угодно функцией векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. В частном случае функции Лагранжа L, введенной в предыдущем параграфе, мы получаем (если положить $b = 1$).

$$U = \sqrt{1 + \mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{S}^2} - 1, \quad \mathbf{S} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}.$$

Можно, наоборот, принять эти выражения для U и $\mathbf{S}$ в качестве основных допущений и вывести из них обобщенные уравнения поля.

Можно также показать, что изолированная система в целом удовлетворяет обычным законам квантовой механики. В частности, полный момент количества движения такой системы

$$\mathbf{M} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{S}) \, dv$$

квантуется и оказывается всегда равным целому кратному постоянной $\hbar$. Этот результат показывает, что в такой форме теория не полна, так как из нее не вытекают явления спина: ведь мы знаем, что электроны (и протоны) имеют момент количества движения, равный $\frac{1}{2}\hbar$. Поэтому мой сотрудник Прайс предложил такой вариант теории, в котором за новые квантовые переменные приняты координата $\mathbf{q}$ и импульс $\boldsymbol{\xi}$ точечного заряда. Эти переменные связаны с полем квантовыми соотношениями:

$$[D_x, \xi_x] = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{q})...$$

Выражения для энергии и импульса изменены таким образом, чтобы из них вытекали явления спина; в случае одной особой точки энергия и импульс имеют следующий вид:

$$W = \int U dv + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{S}\, dv + \boldsymbol{\xi}.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ есть вектор, компоненты которого равны дираковским матрицам α_1, α_2, α_3. Можно показать, что уравнения поля при этом оказываются такими:

$$\dot{\mathbf{D}} - \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi e\boldsymbol{\alpha}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}),$$

$$\dot{\mathbf{B}} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Эти уравнения теперь содержат в правой части δ-функции, соответствующие точечному заряду, находящемуся в точке $\mathbf{q}$ и движущемуся со скоростью $\boldsymbol{\alpha}$.

Полный момент количества движения замкнутой системы теперь оказывается равным векторной сумме электромагнитного момента количества движения $\int (\mathbf{r} \times \mathbf{S})\, dv$ и спинового момента $\frac{1}{2}\hbar$. Метод Прайса, повидимому, дает возможность связать дираковскую теорию спина с общими идеями нелинейной теории поля, в которой частицы рассматриваются как особые точки.

Однако, с другой стороны, уравнения Прайса не вполне пригодны для нашей задачи объяснения числа 137. Так как перестановочные соотношения для компонент поля уже содержат постоянную $\hbar$, то идеальная теория не должна была бы вводить e как новую независимую константу, а это как раз и делается в перестановочных соотношениях Прайса

$$[D_x, \xi_x] = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}), \ldots$$

Тем не менее теория Прайса, как мы убедимся в дальнейшем, есть все-таки некоторый шаг в правильном направлении.

10. Масса протона

Как мы видели, общий момент количества движения замкнутой системы равен векторной сумме настоящего электромагнитного момента $l\hbar$, при $l = 0, 1, 2, \ldots$, и спинового момента $\frac{1}{2}\hbar$, принадлежащего особой точке. Поэтому квантовое число j, которым определяется результирующий момент количества движения, принимает значения $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, причем каждому значению j соответствуют два состояния: $l+\frac{1}{2}$ и $(l+1)-\frac{1}{2}$. Все это хорошо нам знакомо по теории спектров, где азимутальное квантовое число орбитального момента l складывается со спином $\frac{1}{2}$, образуя так называемое внутренне квантовое число j. Но в теории спектров два состояния с одинаковыми j имеют приблизительно одинаковую энергию, и поэтому наличие спинового вырождения приводит лишь к тонкой структуре линий, в то время как здесь применение того же самого представления к точечному заряду, который рассматривается как особая точка нелинейных уравнений поля, должно привести не к „тонкой", а к „грубой" структуре, т. е. должно объяснить огромную разницу внутренних энергий покоя протона и электрона.

Эту идею высказал Прайс. Он исходил из следующего экспериментального факта: оба рода частиц, протоны и электроны, имеют одинаковый момент количества движения. Так как наличие спина не связано с накоплением энергии, то состояние $0+\frac{1}{2}$ без электромагнитного момента $(l=0)$ должно иметь только электростатическую энергию, между тем как состояние $1-\frac{1}{2}$, имеющее конечный электромагнитный момент $(l=1)$, должно иметь также добавочную электромагнитную энергию, которой можно было бы объяснить большую разницу в массе.

Покажем, что приближенный подсчет энергии подтверждает эту гипотезу. Строгое вычисление, разумеется, предполагает наличие точного решения наших уравнений поля и притом не только в рамках классической теории, но и с учетом квантовых соотношений. Пока мы еще очень далеки от такого точного решения. Но этого и не требуется. Для нужной оценки достаточно сопоставить между собой некоторые хорошо установленные факты.

Мы знаем из опытов Штерна магнитный момент протона. Правильный порядок величины получится, если в выражении боровского магнетона $\mu = \frac{\hbar e}{2mc}$ массу электрона заменить массой протона M. Однако измеренное на опыте значение магнитного момента протона не равно в точности ожидаемой величине („ядерному магнетону" $\frac{m}{M}\mu = \frac{1}{1840}\mu$), а оказывается примерно в $2^1/_2$ раза больше.

Это, повидимому, значит, что магнитный момент протона не есть первичное явление, как магнитный момент электрона, а получается в результате наложения двух приблизительно компенсирующихся явлений. Это хорошо согласуется с представлениями Прайса, по которым протон следует рассматривать как состояние элементарного заряда $j=1-\frac{1}{2}$. Мы знаем, что в атоме магнитные моменты спина и орбитального движения электрона вокруг ядра оба равны магнетону Бора, несмотря на разницу в соответствующих моментах количества движения. Естественно предположить, что то же самое имеет место и по отношению к магнитному моменту электромагнитного поля элементарного заряда. Магнитные моменты, соответствующие квантовым числам $l=1$ и $s=-\frac{1}{2}$, скомпенсировали бы друг друга, если бы между ними не было взаимодействия. Такое взаимодействие — это и есть возможная причина появления небольшой разности, составляющей около $2^1/_2$ ядерных магнетонов; впрочем, этот вопрос нас сейчас не интересует.

Попробуем теперь оценить энергию вращающегося электромагнитного поля с магнитным моментом μ. Так как точное вычисление произвести невозможно, то мы воспользуемся аналогичной электростатической задачей. Мы уже знаем, что в унитарной теории получается для энергии точечного заряда выражение $A\frac{e^2}{a_0}$ — такое же, какое в классической теории получается для энергии заряженной сферы, но только с несколько иным числовым коэфициентом A. Можно смело предположить, что то же самое имеет место и в магнитном случае. Магнитная энергия намагниченной сферы радиуса a_0, имеющей момент μ, равна $\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{a_0^3}$. Можно быть уверенным, по крайней мере по отношению к порядку величины, что это соотношение сохраняется также и в унитарной теории. Подставим в него величину $\mu=\frac{ea_0}{2\alpha}$. Как мы сейчас увидим, вытекающее отсюда значение магнитной энергии велико по сравнению с электростатической энергией, а поэтому его можно отождествить с полной энергией вращающегося заряда Mc^2. Итак:

$$Mc^2=\frac{1}{2}\frac{e^2a_0^2}{(2\alpha)^2}\frac{1}{a_0^3}=\frac{1}{8\alpha^2}\frac{e^2}{a_0}.$$

С другой стороны, электростатическая энергия точечного заряда есть

$$mc^2=\frac{e^2}{a_0}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{M}{m}=\frac{1}{8\alpha^2}=\frac{(137)^2}{8}=\frac{18\,770}{8}=2340.$$

Это неплохо согласуется с действительным отношением масс протона и электрона, которое равно 1840: ведь использованные нами числовые коэфициенты были до некоторой степени произвольными. Один лишь множитель $\frac{1}{\alpha^2}$ появляется совершенно однозначным образом, а ведь им-то и определяется порядок величины.

Если изложенные взгляды правильны, то позитрон, протон, электрон и (гипотетический) отрицательный протон являются состояниями одного и того же элементарного заряда, а поэтому следует ожидать, что возможны переходы, например, протона в позитрон с испусканием световых квантов. Энергия этих квантов должна быть порядка Mc^2, т. е. 1840 mc^2, а так как mc^2 приблизительно равно $^1/_2$ млн. электрон-вольт, то испускаемая лучистая энергия будет порядка миллиарда вольт.

Возможно следующее возражение: почему же в таком случае вообще существует протон? Если протон образуется из позитрона путем поглощения энергии, почему он самопроизвольно не переходит обратно в свое первоначальное состояние?

На это можно ответить, если принять во внимание, что вращающееся симметричное распределение элементов заряда одного и того же знака не имеет дипольного момента, вследствие чего протон может испускать не дипольное, а лишь квадрупольное излучение (магнитного типа). Но ведь известно, что в этом случае вращательное квантовое число меняется не на 1, а на 2. Поэтому состояние $l = 1$ оказывается метастабильным и не может перейти в состояние $l = 0$ путем испускания лучистой энергии.

Впрочем, такие переходы могут быть вызваны столкновением с быстрыми электронами. Значит, можно ожидать, что переходы протонов в позитроны будут происходить в веществе, бомбардируемом космическими лучами. Такой переход должен сопровождаться бурным испусканием световых квантов из одной точки пространства — чем-то вроде мощного взрыва, который может отрывать электроны от окружающих атомов или производить множество электронных пар (явление, о котором мы будем говорить в следующем параграфе).

Взрывы такого рода наблюдались Гоффманом как „толчки" („Stösse") в ионизационной камере; возможно, что и „ливни" частиц (электронов и позитронов), открытые Блэккетом и Оккиалини, тоже являются не чем иным, как небольшими „ионизационными толчками", хотя это, впрочем, еще окончательно не установлено. Общепринятые теории не дают удовлетворительного объяснения взрывов („ионизационных толчков" и ливней). Я склонен думать, что при взрывах мы имеем дело с явлением превращения протонов в позитроны.

Гипотеза об одинаковой природе легких и тяжелых частиц, которые являются различными состояниями вращения одной и той же особой точки электромагнитного поля, сводит таинственное число 1840 к другому таинственному числу — 137. Но проблема числа 137 не только не решена, но еще и не приблизилась к своему разрешению. Чрезвычайно трудно понять большой числовой коэфициент в формуле для магнетона: $\mu = \frac{ea_0}{2\alpha} = 68{,}5ea_0$. Очень мало вероятно, чтобы классические соображения могли здесь принести какую-нибудь пользу. Общая формула для магнитного момента вращающихся зарядов такова:

$$\mu = \frac{1}{2c}\sum e(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Если взять для $\mathbf{v}$ максимальную величину c и распределить весь заряд на одном и том же расстоянии R, то получится $\mu = \frac{1}{2} eR$. Следовательно, эффективный радиус должен равняться $\frac{a_0}{\alpha} = 137a_0 = = \frac{\lambda_0}{2\pi}$, где λ_0 — комптоновская длина волны. Это рассуждение обнаруживает нам источник трудности — существование двух естественных единиц длины: электростатической единицы a_0 и квантовой единицы $\frac{\lambda_0}{2\pi}$, которые находятся в отношении α друг к другу.

11. Попытки объяснения таинственного числа

Мы приписали величине $\frac{1}{\alpha}$ целочисленное значение 137. Это мы сделали по той простой причине, что точность измерения α не достаточна для того, чтобы с уверенностью определить следующий десятичный знак. Для определения α существуют два способа: во-первых, измерение величин e, $\hbar$ и c, из которых затем уже можно вычислить $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, а, во-вторых, непосредственное измерение тонкой структуры водородоподобных атомов. Последний метод недавно был усовершенствован благодаря использованию тяжелого водорода (дейтерия). Посредством сравнения тонкой структуры H и D можно свести определение α к относительному измерению. Полученные результаты с несомненностью указывают на то, что $\frac{1}{\alpha}$ больше, чем 137 (примерно $\frac{1}{\alpha} = 137{,}2$). Я думаю, что мы не имеем оснований считать $\frac{1}{\alpha}$ целым числом.

Несколько лет назад, когда численное значение α было известно еще меньше, чем теперь, Эддингтон предложил теорию, согласно которой α должна в точности равняться целому числу 136. Это число получалось (при $n = 4$) из выражения $\frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1)$, представляющего нечто вроде „числа степеней свободы“ дираковского электрона (который описывается с помощью матриц с четырьмя строчками и столбцами). Позднее, когда стало ясным, что $\frac{1}{\alpha}$ ближе к 137, чем к 136, Эддингтон изменил свою теорию таким образом, чтобы прибавилась единица. Он также вывел формулу для отношения масс протона и электрона: это отношение, согласно Эддингтону, есть корень некоторого квадратного уравнения, в котором, наряду с числом 136, играет роль число 10 [значение $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$ при $n=2$].

Я лично никогда не мог понять эту теорию. Она мне кажется мистической.

Теперь следует вернуться к вопросу о том, как можно объяснить число 137 с точки зрения излагаемых здесь теорий.

Так как число $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$ связывает e и $\hbar$ друг с другом, то можно или предположить существование наименьшего электрического заряда e и пытаться вывести из него квантовую постоянную $\hbar$, или наоборот.

Мы теперь знаем, что заряды могут рождаться и исчезать. Этот факт, впервые предсказанный дираковской теорией позитрона и очевидный с точки зрения унитарной теории поля, был установлен на опыте с полной достоверностью. Световой квант, проходя через поле ядра, может образовать электронную пару, состоящую из положительного и отрицательного электрона; такая пара может исчезнуть и нейтрализоваться, испуская световые кванты.

Как мы сейчас увидим, законы этих явлений могут быть выведены из квантовомеханической теории Дирака. Поэтому представляется вполне естественным рассматривать $\hbar$ как основную величину и пытаться объяснить возникновение электрических элементарных зарядов. Рассмотрим сперва этот процесс с точки зрения непроквантованной унитарной теории поля. Электрон и позитрон в этой теории представляются двумя одинаковыми точечными зарядами противоположного знака, окруженными статическим полем. Если расстояние между особыми точками велико по сравнению с a_0, то поле каждого заряда можно рассматривать в отдельности. Но когда электроны сближаются, их поля сливаются, так как уравнения не линейны. Во всех деталях этот процесс удалось проследить в некотором частном случае, а именно: в случае двух измерений и бесконечно медленных движений. Мой сотрудник Прайс вывел точное решение для этого случая. Его формулы описывают постепенную концентрацию и исчезновение поля, когда заряды сближаются вплоть до полного совпадения. Однако для осуществления этого квазистатического процесса понадобились бы силы, удерживающие оба заряда в их мгновенных положениях. Если сделать заряды свободными, то они будут ускоряться друг по направлению к другу, создавая магнитное поле. Так как это поле имеет тенденцию сохраняться (электромагнитная инерция), то заряды промчатся через положение нейтрализации и появятся с обратными знаками. Образуется своего рода осциллятор или диполь, сила связи которого определяется самим полем. Так как будет происходить испускание энергии в форме сферических волн, то колебания должны затухать, и амплитуды должны уменьшаться до тех пор, пока нейтрализация не станет полной и вся энергия не будет испущена.

Следовательно, аннигиляция пары связана с колебаниями „вокруг ничего". Частота этих колебаний должна определяться постоянными теории поля c, b, e. Но $c\sqrt{\frac{b}{e}}=\frac{c}{r_0}$ есть единственная величина, имеющая размерность, обратную времени, которую можно сконструировать из этих постоянных. Следовательно, частота нейтрализации должна иметь вид $\nu=\gamma\frac{c}{r_0}$, где γ — числовая постоянная.

Если существует какое-нибудь соответствие между этими классическими соображениями и действительным квантовым процессом нейтрализации, то частота ν должна быть комптоновской частотой $\nu_0=\frac{c}{\lambda_0}=\frac{mc^2}{h}$. Ведь вследствие сохранения количества движения испускаемый свет должен состоять, по крайней мере, из двух фотонов; исчезает энергия $2mc^2$, следовательно $mc^2=h\nu_0$. Подставляя сюда $mc^2=1{,}236\,\frac{e^2}{r_0}$ и $\nu_0=\gamma\,\frac{c}{r_0}$, мы находим:

$$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{2\pi\gamma}{1{,}236}.$$

Так мы получаем новую интерпретацию постоянной α: она определяется частотой нейтрализации электронной пары.

Единственная сделанная до сих пор реальная попытка вычисления α находится в тесной связи с этими соображениями.

Как было сказано выше, Дирак объяснил существование положительных электронов и нейтрализацию пар с точки зрения своего волнового уравнения. Это уравнение обладает одним свойством, которое прежде считалось большим недостатком: уравнению Дирака удовлетворяют состояния с отрицательной энергией. Энергия свободного электрона определяется релятивистской формулой $E=c\sqrt{m^2c^2+p^2}$, где p — импульс; при этом квадратный корень может иметь оба знака. Следовательно, возможными значениями являются положительные числа $\geqslant mc^2$ и отрицательные числа $\leqslant -mc^2$. Чтобы преодолеть эту трудность, Дирак предположил, что все состояния с отрицательной энергией обычно заполнены (отрицательными) электронами, причем, согласно принципу Паули, ни одно состояние не может содержать больше одного электрона (этот принцип проверен на законах атомных спектров). Но время от времени, например под действием фотона, электрон может быть выброшен из состояния с отрицательной энергией. Тогда он появляется в качестве обычного электрона, но в то же время в резервуаре электронов с отрицательной энергией образуется „дырка", которая ведет себя точно так, как вел бы себя положительный электрон с положительной энергией. Если электрон снова падает в дырку, испуская фотоны, то пара опять исчезает.

Эта странная идея оказалась очень плодотворной, так как она позволила вычислять вероятности образования и исчезновения пар, причем результаты этих вычислений прекрасно согласуются с опытом. Явления образования и исчезновения пар можно трактовать как обычные акты испускания или поглощения, причем только одно из рассматриваемых состояний имеет отрицательную энергию. Теория дает возможность вычислить эффективное поперечное сечение для образования пар фотоном $h\nu$ в поле ядра с зарядом Ze:

$$q = \frac{1}{2\pi} r_0^2 Z^2 \alpha^2 \frac{28}{9} \left(\lg \frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{218}{27} \right).$$

Эта формула с изумительной точностью описывает наблюдаемые явления.

Однако, с другой стороны, теория Дирака приводит к тяжелым внутренним противоречиям. Она вынуждена исходить из предположения, что бесконечное количество электронов, обладающих отрицательной энергией, не вызывает никакого поля, хотя сами они подвержены действию поля (в противном случае свет ведь не мог бы создавать пар). Резкая грань между положительными и отрицательными значениями энергии существует только в случае свободных электронов; при наличии поля эта грань перестает быть ясной. Наконец, трудность „бесконечной собственной энергии" электрона, присущая всякой теории, исходящей из уравнений Максвелла, усложняется здесь наличием еще и других бесконечностей, появляющихся вследствие бесконечного числа электронов в состояниях с отрицательной энергией.

Дирак и Гейзенберг попытались преодолеть эти трудности путем вычитания плотности заряда электронов, находящихся в отрицательных состояниях, из полной плотности. Однако, так как обе эти плотности бесконечно велики, то их разность не может быть определена однозначно, а поэтому Дирак и Гейзенберг были вынуждены в ести целый ряд произвольных допущений.

Так или иначе, существуют определенные уравнения, выведенные этими авторами и претендующие на описание движения позитронов и электронов. Эти уравнения имеют одно общее свойство с унитарной теорией поля: они нелинейны. Нелинейные члены в этих уравнениях приводят к одному явлению, которое может быть выведено также и из унитарной теории поля (но не из уравнений Максвелла) — к рассеянию света светом. Рассеяние света светом можно интерпретировать с точки зрения теории Дирака следующим образом. Два фотона могут временно поглотиться, образовав электронную пару, которая немедленно вслед за этим снова исчезает, испуская два других фотона. Происходит нечто вроде столкновения двух фотонов. Но механизм этого столкновения тесно связан с возникновением и уничтожением пар. Таким образом теория Дирака оказывается связанной с непроквантованной унитарной теорией поля. Хотя с точки зрения такой унитарной теории и нельзя вычислять образование пар, но рассеяние света светом вычислить можно, и сравнение результатов, полученных с помощью обеих теорий, позволяет найти искомую связь между e и $\hbar$.

Это и было сделано двумя учениками Гейзенберга — Эйлером и Коккелем. Они вычислили рассеяние света светом по теории „дырок" Дирака — Гейзенберга и показали, что это рассеяние может быть выражено как следствие нелинейного поправочного члена к уравнениям Максвелла, соответствующего лагранжевой функции

$$L=\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)-\frac{1}{90\pi}\left(\frac{e^3}{m^2c^4}\right)^2\frac{1}{\alpha}\{(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)^2+7(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2\}.$$

Эту лагранжеву функцию можно сравнить с лагранжевой функцией унитарной теории поля, разложенной в степенной ряд:

$$L=b^2\left\{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)-\frac{1}{b^4}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2}-1\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)-\frac{1}{8b^2}\{(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)^2+4(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2\}+\ldots$$

Между обоими поправочными членами нет полного совпадения, так как коэфициенты при $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2$ различны.

Не обращая внимания на это обстоятельство, приравняем коэфициенты:

$$\frac{1}{90\pi}\left(\frac{e^3}{m^2c^4}\right)^2\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{8b^2}.$$

Выше мы имели:

$$b=\frac{e}{r_0^2},\qquad mc^2=1{,}236\,\frac{e^2}{r_0},$$

а поэтому

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{45\pi\,(1{,}236)^4}{4}=82{,}4.$$

Полученное число в 1,66 раза меньше экспериментального значения 137, но все же оно имеет правильный порядок величины. Если вспомнить произвольные предположения, сделанные в теории Дирака — Гейзенберга, то различие не должно показаться обескураживающим. Во всяком случае, теория Дирака — Гейзенберга дает поправочные члены, в первом приближении совпадающие с тем, что дает унитарная теория поля. Заметим также, что числовой множитель 1,236 в соотношении между mc^2 и $\frac{e^2}{r_0}$ основывается на классическом вычислении, которое в действительности является неоправданной экстраполяцией классической теории на внутреннее строение электрона.

Наблюдать рассеяние света светом практически невозможно вследствие малости эффекта. Поперечное сечение этого явления имеет порядок величины

$$q = r_0^2 \frac{1}{\alpha^4} \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^6,$$

т. е. примерно 10^{-30} *см*² для γ-лучей и 10^{-70} *см*² для видимого света.

12. Заключение

Предлагая унитарную теорию поля, я знаю, что иду вразрез со взглядами наиболее выдающихся физиков — Бора, Паули, Гейзенберга. Они, повидимому, считают, что окончательная теория должна выражать законы движения элементарных частиц с помощью волновых уравнений, в которых каждой частице приписываются определенный заряд и масса. Электромагнитное же поле должно играть лишь роль фикции, вводимой для того, чтобы удобным образом описать конечную скорость распространения взаимодействия частиц. Против этой программы я выдвигаю следующее возражение: я не могу понять, как возможно этим способом объяснить существование тяжелых и легких частиц с их отношением масс, равным числу 1840, а также связь между зарядом и квантовой постоянной, характеризуемую числом 137.

Тем не менее, может оказаться, что оба пути приведут к одному результату, так как в предыдущем параграфе была показана тесная связь между ними. Подобно тому, как квантовую механику можно рассматривать как синтез идеи частиц и идеи волн, достигнутый путем критического анализа основных понятий пространства-времени и энергии-импульса, таким же образом и физика будущего, возможно, окажется синтезом идеи кванта и идеи элементарного заряда, который будет достигнут с помощью критического изучения понятий, употребляемых при описании поля и его особых точек.