1931 Т. I. ВЫП. 2.

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О НЕКОТОРЫХ СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ В ОБЛАСТИ КОЛЕБАНИЙ *

Н. Д. Папалекси, Ленинград

Мне досталась честь сделать на сегодняшнем заседании доклад „О некоторых современных проблемах в области колебаний". Прежде всего я просил бы позволения сказать несколько слов не в объяснение, конечно, того, почему одно из заседаний Секции электрических колебаний нашего съезда посвящается обсуждению вопросов из области колебаний — в этом разумеется нет никакой необходимости, а для того, чтобы пояснить, о каких именно проблемах будет итти речь и почему решено было сделать именно их обсуждение предметом настоящего заседания.

Всем хорошо известно, какую огромную роль играют колебательные процессы в самых разнообразных отделах физики и ее применении, и к каким коренным переворотам в наших понятиях и представлениях они уже привели и продолжают приводить в различных областях физики. Достаточно указать например на проблемы волновой механики, выдвинутые колебательными процессами в атомах, которым был посвящен ряд заседаний нашего съезда. Но и помимо этих „микрокосмических" явлений, для объяснения которых нам во многих отношениях приходится коренным образом ломать установившиеся понятия и представления, существует и другая, чрезвычайно обширная область колебательных процессов, также представляющая значительный

* Доклад на 1 Всесоюзном съезде физиков в г. Одессе 22 — 23 августа 1930 г.

интерес. Сюда относятся как многочисленные периодические процессы в астрономии, носящие сугубо „макрокосмический" характер, так и такие явления, которые составляют основу физики колебаний в более тесном смысле этого слова, в частности сущность и содержание электрических колебаний высокой частоты и их главного применения — радиотехники. Периодический процесс в ламповом генераторе, явление прерывистого тока при тлеющем разряде, релаксационные колебания типа мультивибратора Абрагам-Блоха, проблема генерации электрических колебаний вообще, колебания электромеханических систем, явление параметрического возбуждения и резонанса, звучание струны под действием смычка, действие таранного насоса, колебания маятника Фроуда, периодические химические реакции, деятельность сердечной мышцы, флюктуация видов животных в борьбе за существование, проблема переменных звезд (Цефеид) в астрономии и т. д. — вот ряд примеров колебательных процессов в самых разнообразных областях естествознания. Эти процессы хотя и не затрагивают основ нашего мировоззрения в такой мере, как первые, однако представляют много весьма интересных и принципиально важных особенностей, изучение которых приводит к ряду не всегда легко доступных анализу, но принципиально существенных проблем. Строгое решение этих проблем — о некоторых из них будет речь в дальнейшем — имеет значение не только для физики колебаний и физики электрических колебаний в частности, но и для самых разнообразных других отделов точного и прикладного знания. С математической стороны эти проблемы интересны тем, что они приводят к нелинейным диференциальным уравнениям особого рода, со свойствами и особенностями которых физики, а особенно занимающиеся прикладной физикой, еще далеко не в такой мере освоились, как с так близкими и как бы родными всем нам линейными диференциальными уравнениями. Нелинейные диференциальные уравнения требуют для своей полной дискуссии применения новых своеобразных методов и приемов. В последние годы некоторые из относящихся сюда проблем как например проблема автоколебаний томсоновского и не томсоновского типа, условия их возникновения и устойчивости, проблема взаимодействия таких систем друг на друга, специально проблемы „затягивания" и „увлечения" частоты, параметрического возбуждения и т. п. подверглись углубленному теоретическому и экспериментальному исследованию как за границей (особенно важны работы ван дер Поля, Хегнера, Ватанабе, Гюнтер-Винтера и др.), так и у нас. В частности, вот уже несколько лет, как весь круг относящихся сюда вопросов изучается с разных сторон как в смысле научного углубления, так и практического применения в Институте теоретической физики при Московском университете, в Научно-исследовательской лаборатории ЦРЛ, в Физической лаборатории ВЭИ и в Отделе связи ГФТИ. Так как эти исследования привели уже к обширному и во многих отношениях новому и принципиально интересному материалу и так как наметившиеся пути и приемы исследования, а также разработанные математические методы оказались вполне адэкватными и весьма плодотворными, то поэтому и было найдено желательным посвятить одно из заседаний секции их изложению и обсуждению. В виду обилия и характера самого материала, естественно распадающегося на две части — общую и специальную математическую, было решено разбить его на два доклада, которые в известном смысле дополняют друг друга. Один из них я имею честь делать, другой сделает А. А. Андронов.

ЧАСТЬ I. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Из всей обширной области колебательных процессов разрешите мне прежде всего остановиться на вопросах, связанных с самим возникновением и установлением колебаний, иными словами — с генерацией их. В частности позвольте мне рассмотреть несколько подробнее основные проблемы, возникающие при исследовании „автономных замкнутых систем, в которых колебательные процессы могут возникать и длительно поддерживаться и которые получили название „автоколебательных".

Я сначала немного остановлюсь на очень простых и всем хорошо известных вещах. Рассмотрим например такую колебательную систему, как груз (массу) с пружиной или электрический колебательный контур. Для того чтобы привести эту систему в колебания, мы очевидно должны вывести ее из положения равновесия, т. е. сообщить ей извне некоторый запас энергии и внезапно предоставить ее самой себе. Тогда система начнет совершать колебания вокруг своего положения равновесия, причем физическая сущность этого процесса заключается очевидно в том, что в виду наличия в этих системах двух разнородных форм накопления энергии (двух резервуаров энергии) энергия из одной (упругой или электрической) формы переходит в другую (кинетическую или магнитную) и обратно. Однако колебания не остаются неизменными, но вследствие неизбежных потерь (системы, как мы говорим, неконсервативны) они постепенно затухают. Как хорошо известно, такое поведение этих систем можно с достаточной полнотой описать линейным диференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэфициентами, например:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0, \tag{1}$$

и мы поэтому такие системы обозначаем как линейные колебательные системы (неконсервативного типа) с одной степенью свободы. Поведение более сложных колебательных систем этого рода, характеризуемых наличием нескольких резервуаров энергии, описывается не одним, а несколькими линейными диференциальными уравнениями. Дальнейшее обобщение приводит к сплошным колебательным системам с бесконечным числом степеней свободы, описываемых линейными диференциальными уравнениями в частных производных. Заметим, что поведение всякой системы вблизи положения устойчивого равновесия может быть для достаточно малых отклонений представлено системой линейных диференциальных уравнений, и таким образом при известных условиях она превращается в линейную колебательную систему. Свойства таких линейных колебательных систем сводятся главным образом к следующим:

1) наличие устойчивого положения равновесия;

2) возможность совершать затухающие колебания вокруг этого положения равновесия;

3) независимость периода колебаний от амплитуды колебаний (изохронизм).

Первое свойство, как вам известно, связано с наличием потерь диссипационного члена $R\frac{dq}{dt}$ в уравнении (1). Второе зависит от соотношения между сообщенной системе энергией и тратой ее в течение некоторого промежутка времени, определяемого параметрами системы (L, C), и выражается звестным условием колебательности и решения:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}. \tag{2}$$

Величина „периода" в этом случае дается известной формулой Томсона:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \tag{3}$$

или при малых логарифмических декрементах:

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{3$_1$}$$

причем эта последняя зависимость выполняется тем лучше, чем меньше затухание системы, т. е. чем меньше колебания отклоняются от синусоидальных. Системы, даже нелинейные, колебания которых с достаточным приближением определяются этой зависимостью, носят название систем *томсоновского* типа.

Если мы будем рассматривать такую линейную колебательную систему как некоторую изолированную замкнутую в себе автономную систему, то очевидно, длительных колебаний мы в ней не получим. Для этого мы должны либо действовать на нее извне периодической силой (но тогда система будет уже управляться диференциальным уравнением с свободным членом — она будет, как мы говорим, совершать *вынужденные* колебания), либо мы должны ввести в нее какое-то приспособление, позволяющее колебаниям возникать и поддерживаться за счет местного запаса энергии.

В первом случае, правда, особенно ярко сказываются резонансные свойства линейных колебательных систем, дающие так много интересного в теоретическом и экспериментальном отношении и представляющие ряд интересных проблем сами по себе. Однако этот случай не дает ничего нового для занимающей нас проблемы генерации колебаний, так как переносит трудность задачи в сущности на задачу создания периодического воздействия, т. е. снова на задачу генерации колебаний.

Что же касается второго случая, то тут для создания автономной системы, генерирующей колебания, возможны различные пути. Разрешите мне здесь и в дальнейшем пользоваться электрическими примерами, так как они во многих отношениях более разработаны и более удобны для иллюстрации рассматриваемых проблем, однако делаемые выводы относятся в равной мере и к другим системам.

Исторически первый — это классический способ искрового разряда конденсатора, способ Фессендена. Он долгое время был единственным практическим методом генерации электрических колебаний и сыграл (и продолжает, в известном смысле, играть и теперь) огромную роль как в науке, так и в технических применениях. Этот метод состоит в том, что заряженный до определенного напряжения конденсатор автоматически замыкается через самоиндукцию, причем роль такого автоматического замыкателя играет электрическая искра, снова гаснущая в конце колебательного процесса и тем дающая возможность возобновлению заряда конденсатора. Если мы присоединим к этой колебательной системе еще устройство для зарядки конденсатора, которая может производиться либо непосредственно источником постоянного тока, либо, как это было первоначально, с помощью индуктора с прерывателем (представляющего в свою очередь автономную колебательную систему другого типа,* к которому мы вернемся ниже) и

* Как на один из примеров подобных автономных колебательных систем можно указать на электрический прерыватель (звонок), теорию

источником тока, то получим действительно автономную колебательную систему — генератор колебаний. Мы имеем здесь пример автоколебательной системы, т. е. автономной системы, в которой за счет входящего в ее состав источника энергии генерируются, т. е. могут возникать и длительно поддерживаться, колебания. Так как очевидно, что полностью колебательный процесс в этой системе уже не может быть передан линейным диференциальным уравнением Томсона, то естественно возникает вопрос о теории такой системы. Замечу сразу, что полной и более или менее строгой математической теории, т. е. такой, которая принимала бы во внимание как процесс в искре, так и работу прерывателя, насколько я знаю, не существует и поныне. Поэтому теория, в особенности в первое время, довольствовалась тем, что давала отчет о наиболее важных сторонах процесса и с этой целью идеализировала самый процесс. Так как, с одной стороны, наиболее важной фазой процесса несомненно являлся колебательный разряд конденсатора, который с достаточной полнотой передается уравнением Томсона, с другой же стороны, процесс замыкания (образования искры) совершается очень быстро (по сравнению с периодом колебаний вплоть до самых коротких), то было естественно не рассматривать процесса в искре вовсе, а, учитывая потери в ней внесением добавочного сопротивления в систему, считать ее главную роль в мгновенном создании в определенные моменты новых начальных условий. Таким образом трудность трактовки самой задачи генерации колебаний была здесь обойдена введением разрыва непрерывности — скачков начальных условий, чем создавалась видимость линейной трактовки. Основные вопросы автоколебаний, как самое возникновение колебаний, установление определенной амплитуды и т. д., оставались — да это и не могло быть иначе — не рассмотренными.

Прежде чем перейти к рассмотрению способов трактовки как этих, так и других вопросов, что удобнее сделать на

которого дал М. А. Леонтович (ЖРФХО. Ч. физическая, *59*, стр. 261 — 268, 1927).

примере другой автоколебательной системы, а именно на ламповом генераторе, позвольте мне сделать несколько существенных, по моему мнению, замечаний. Все выше сказанное можно резюмировать следующим образом. Понятие автономной системы, т. е. системы, в которой исключены внешние воздействия, выражается математически в том, что в коэфициенты диференциального уравнения не входит явно время. Единственный тип линейных уравнений, удовлетворяющий этому требованию, — это диференциальные уравнения с постоянными коэфициентами. Но в этом случае стационарные (незатухающие) колебания характеризуются тем, что амплитуда колебаний зависит от начальных условий, и что здесь применим принцип суперпозиции. Оба эти свойства неразрывно связаны с „линейностью", тогда как главный интерес в процессе генерации колебаний сосредоточен как раз на независимости стационарной амплитуды от начальных условий и на неприменимости принципа суперпозиции. Иными словами, процесс генерации колебаний, наиболее существенные и важные стороны автоколебаний не могут быть переданы линейными диференциальными уравнениями. Однако несмотря на то, что еще Пуанкаре, Кауфманном, Баркгаузеном и др. были проанализированы и формулированы как условия превращения постоянного тока в переменный, так и условия возникновения колебаний, и казалось бы не вызывало сомнений положение о невозможности описать процесс генерации колебаний при помощи только линейных зависимостей, линейная трактовка вопросов колебаний, долгое время почти исключительно господствовала в теории колебаний. Даже в настоящее время очень часто приходится встречаться с попытками применения такой линейной трактовки для решения таких вопросов, где она является совершенно неподходящей (например во многих вопросах теории лампового генератора и т. д.). На создании такой „линейной" психологии несомненно отразились сама простота линейных диференциальным уравнений, их простые и „понятные" свойства (как принцип суперпозиции), получение полного решения при помощи хорошо известных функций

(e^x и $\sin x$) и т. д., нашедших обширное применение в теории колебаний с малыми амплитудами, приводящих к „линеаризации“ уравнений движения, особенно в явлениях вынужденных колебаний (явление резонанса). Следует заметить, что большое значение имела также в создании такой предвзятости — особенно в вопросах генерации колебаний — и по существу своему „линейная“ трактовка переменных процессов, как она отражается в так называемых „курсах переменного тока“. Эта линейная психология, эта предвзятость мысли, стремящейся объяснить все колебательные процессы „линейным“ образом, сыграла огромную роль в развитии нашей дисциплины, и она, несомненно, очень ценна и в настоящее время, поскольку, конечно, весьма важно стремление возможно проще описать явления. Однако она может — и часто это уже имеет место — оказать большое отрицательное влияние, стать тормозом на пути развития теории.

Позвольте мне пояснить мою мысль следующей аналогией из пережитой многими из нас истории развития физики. После создания Максвеллом электромагнитной теории света и блестящих опытов Герца развитие теории света на долгое время определялось диференциальными уравнениями Максвелла. Сама генерация света и его превращения — процессы испускания и поглощения — просто постулировались, и исследованию подвергались лишь процессы распространения, отражения и т. д. Электронная теория Лоренца, внесшая в теорию чуждое максвелловской концепции понятие электрона, позволила подойти ближе к трактовке процессов испускания и поглощения света. Однако созданная им модель диполя и ее дальнейшее обобщение и развитие, несмотря на ряд блестящих успехов в описании известных и предсказании новых явлений, оказалась бессильной передать очень многие весьма существенные свойства генерации света и его превращений. Потребовалась коренная ломка понятий и представлений, связанных с классической теорией света, чтобы получить в теории квантов и волновой механике более адэкватное орудие для трактовки процессов генерации света. Я далек конечно от того, чтобы сопоставлять эту грандиозную научную революцию с необходимостью изменить „линейную“ установку в нашей скромной области. Мне кажется только, что нам при изыскании адэкватных средств для преодоления встречающихся на пути трудностей следует иметь в виду этот очень поучительный пример и не упорствовать в линейном уклоне.

Позвольте мне после этого отступления снова вернуться к проблеме автоколебаний. Задача превращения колебательного контура в автоколебательную систему была разрешена Мейсснером следующим, ставшим уже классическим, способом (рис. 1). Непрерывность восстановления потерь здесь достигается при помощи принципа обратной связи и нового органа — трехэлектродной электронной лампы. Действие всего этого приспособления можно с физической стороны грубо рассматривать как некоторое непрерывно действующее реле, пополняющее истраченную энергию из местного постоянного источника энергии.

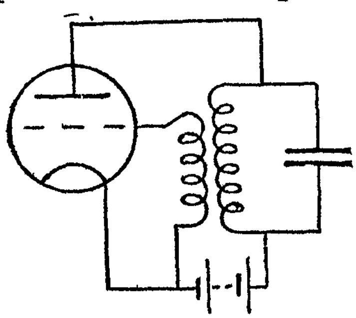

Рис. 1.

Математическая формулировка имеющих здесь место зависимостей (рис. 1) приводит к следующей системе уравнений:

$$i_A = i + CR\frac{di}{dt} + CL\frac{d^2i}{dt^2}; \qquad (4)$$

$$i_A = f(V_g + DV_A) = f\left[E_g + DE_A + (M - DL)\frac{di}{dt}\right]^* = f_1\left(\frac{di}{dt}\right), \qquad (5)$$

где уравнение (5) выражает так называемую статическую

* Так как $V_A = E_A - L\frac{di}{dt}$, а $V_g \cong E_g + M\frac{di}{dt}$ и для упрощения предположено, что сеточный ток отсутствует; одновременно здесь пренебрегаются влияния внутриламповых емкостей.

характеристику электронной лампы. Получаемое из уравнений (4) и (5) уравнение

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\delta\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 f_1\left(\frac{di}{dt}\right) \tag{6}$$

и является уравнением, управляющим всем процессом автоколебаний в рассматриваемой системе. Если сравнить его с уравнением (1) простого колебательного контура, то видно, что она отличается наличием выражения

$$\omega_0^2 f_1\left(\frac{di}{dt}\right),$$

определяющего собой действие обратной связи и электронной лампы. Это выражение, представляющее собой нелинейную зависимость от $\frac{di}{dt}$, обусловливает таким образом характер и свойства уравнения (6), делающие это уравнение способным описать поведение автоколебательной системы. На какие же вопросы должно дать ответ это уравнение, какие главные стороны колебательного процесса оно должно описывать? Прежде всего оно, конечно, должно выразить первое основное свойство автоколебательной системы, а именно возможность возникновения колебаний. Ведь при первом взгляде на рис. 1 естественно должен возникнуть вопрос: почему невозможно такое состояние системы, при котором i_A было бы постоянным и определялось бы уравнением:

$$i_{A0} = f(E_g + DE_A), \tag{5$_1$}$$

так как тогда уравнения (4) и (5) были бы оба удовлетворены? Такое состояние системы очевидно являлось бы равновесным $\left(\frac{di}{dt} = 0\right)$, и следовательно ответ на поставленный вопрос сводится к выяснению того, может ли случайное маленькое отклонение от положения равновесия вывести систему из него или нет. Исследование вопроса об устойчивости состояния системы, будь то состояние движения или покоя, является одной из важных проблем теории колебаний. Для случая возникновения колебаний, когда исходное состояние соответствует покою, эту задачу можно полностью разрешить, пользуясь методами и приемами, разработанными еще Раутсом и Гурвицом для механических систем. Эти методы сводятся к рассмотрению возможного бесконечно малого изменения (вариации) исходного состояния, благодаря чему нелинейное диференциальное уравнение превращается в линейное диференциельное уравнение для вариации α.

В нашем случае для вариации α тока мы имеем очевидно уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\delta\frac{d\alpha}{dt}+\omega_0^2(i_{A0}+\alpha)=\omega_0^2 f_1\left[E_g+DE_A+\right.$$
$$\left.+(M-DL)\frac{d\alpha}{dt}\right]. \qquad (6_1)$$

а так как, по условию, $i_{A0}=f(E_g+DE_A)$, то, ограничиваясь членами первого порядка малости (полагая, что $\frac{d\alpha}{dt}$ непрерывно), имеем:

$$f\left[E_g+DE_A+(M-DL)\frac{d\alpha}{dt}\right]=f\left[E_g+DE_A\right]=$$
$$(M-DL)\frac{d\alpha}{dt}f'\left[E_g+DE_A\right]$$

и таким образом для α получаем следующее линейное диференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\left[2\delta-\omega_0^2(M-DL)S\right]\frac{d\alpha}{dt}+\omega_0^2\alpha=0, \qquad (7)$$

где $s=f'[E_g+DE_A]$ есть крутизна характеристики в начальной точке. Вопрос об устойчивости или неустойчивости состояния сводится к исследованию корней характеристического уравнения

$$x^2+[2\delta-\omega_0^2(M-DL)S]x+\omega_0^2=0, \qquad (7_1)$$

знаком действительной части которых и определяется характер решения уравнения (7). Но это линейное уравнение, управляющее процессом только в самой начальной его стадии, существенно отличается от диференциального уравнения линейной колебательной системы обычного диссипативного типа. Отличие заключается в том, что в зависимости от знака выражения:

$$2\delta - \omega_0^2(M - MD)S = 0$$

система обладает прямо противоположными свойствами и из устойчивой может сделаться неустойчивой. Следует заметить, что помимо разбираемого здесь вопроса об устойчивости при малых изменениях состояния, так называемой устойчивости в малом, могут быть другие практически важные случаи, когда система, будучи устойчива при малых изменениях, становится неустойчивой, или, вернее, становится способной совершать колебания около другого положения равновесия при достаточно большом начальном изменении. * Мы здесь встречаемся с новой проблемой устойчивости при больших изменениях (Stabilität im Grossen), к которой мы вернемся ниже.

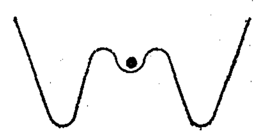

Рис. 2.

Обратимся снова к условию неустойчивости:

$$2\delta - \omega_0^2(M - DL)S < 0 \qquad (8_1)$$

или

$$RC - s(M - DL) < 0, \qquad (8_2)$$

Если оно выполнено, то тогда возникает новый вопрос: что же будет с системой? Если условия, которым подчинена система, таковы, что они не допускают другого положения устойчивого равновесия и состояние не может изменяться все время в одном и том же смысле (например ток расти до бесконечности), причем уравнения остаются в силе, то тогда для системы не остается другой возможности, как совершать колебания. Однако для того, чтобы произвести дальнейший анализ, недостаточно одних общих соображений. Нельзя например утверждать, будут ли колебания периодическими или нет. Нельзя также в случае периодичности указать величину амплитуды и основного периода ко-

* Такие случаи имеют место впрочем не только в автоколебательных системах. Например, случай шара, лежащего на подставке, представляющей собой тело вращения, с сечением, изображенным на рис. 2.

лебаний. *Для* того чтобы получить ответ на все эти вопросы, необходимо произвести строгий анализ уравнения системы. Однако уравнение (6) даже при самых простых формах функции $f_1\left(\frac{di}{dt}\right)$ не может быть решено в общем виде, как это имеет место при линейных уравнениях. Поэтому при анализе уравнения большей частью ограничивались приближенными методами решения, причем характер колебания (например периодичность его) просто постулировался. Эти методы (van der Pol, Ollendorf и др.) приводили в ряде случаев (например для систем томсоновского типа) к практически вполне удовлетворительным результатам. Такой способ трактовки задачи однако не может дать строгого обоснования получаемых результатов. Он также является недостаточным для решения ряда вопросов более тонкого характера. Для этого необходимы другие методы, более глубоко вникающие в природу этих диференциальных уравнений. Нужда в этом ощущалась уже давно, и Эппельтоном, Ван дер Полем и другими были сделаны попытки более углубленного подхода к теории. Такие методы однако у математиков имеются. Они были разработаны Пуанкаре и другими математиками в применении к вопросам небесной механики—к проблемам периодических процессов в макрокосмосе—и основываются на анализе топографии интегральных кривых. Заслуга применения этих весьма адэкватных методов к случаям автоколебаний принадлежит школе Л. И. Мандельштама. Его учеником А. А. Андроновым отдельно и совместно с А. А. Виттом в ряде интересных работ была разработана теория предельных циклов Пуанкаре и применена ими к проблемам колебаний. Так как в сегодняшнем докладе А. А. Андронов подробнее будет говорить об этой теории, то позвольте мне на ней не задерживаться и сказать только то немногое, без чего нам трудно будет обойтись в дальнейшем.

Прежде чем перейти к этому, мне хотелось бы сделать одно маленькое замечание в связи с проблемой возникновения колебаний. Рассмотрим следующую схему (рис. 8).

В этой системе колебательный контур связан с цепью сетки не непосредственно, а через некоторый апериодический контур. Если подобрать соответствующим образом взаимоиндукции M_1 и M_2 в самоиндукции L_1 и L_2, апериодического контура, то можно достигнуть того, что система, устойчивая при короткозамкнутых L_1 и L_2, станет неустойчивой при размыкании участка 1—2. Так как акт размыкания в виду отсутствия какого-либо тока в промежуточном контуре (при устойчивом статическом режиме токи в системе только постоянные) не может вызвать каких-либо индукционных толчков, то указанная схема дает возможность изучать поведение автоколебательной системы, находящейся как угодно строго в положении равновесия. В частности возникает вопрос о природе сил (изменений), выводящих систему из состояния неустойчивого равновесия и обусловливающих возникновение колебаний. Здесь мы вплотную подходим к вопросам самопроизвольных изменений токов и напряжений, т. е. к тем статистическим флюктуациям, которыми принципиально ограничивается степень постоянства целого ряда физических величин, мыслимых нами как результат усреднения. Рассматриваемая нами схема дает возможность выяснить этот вопрос, по крайней мере в принципе, непосредственно экспериментом. В самом деле, измеряя большое число раз через определенное время после размыкания возросшую, в виду линейности уравнения вариации по экспоненциальному закону, амплитуду случайного начального точка, мы сможем после статистической обработки опытных данных сделать заключение о вероятной величине случайных начальных амплитуд. Некоторые опыты в этом направлении уже делались в физической лаборатории ВЭИ и более систематически их предполагается поставить в ГФТИ. В связи с только-что сказанным интересно

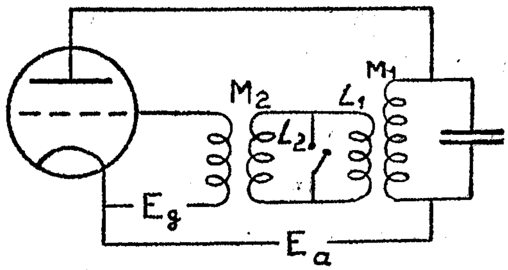

Рис. 3.

отметить еще следующее. Как мы видим из условий (8), граница неустойчивости представляет собой некоторое соотношение между определенными параметрами системы. Замечательно при этом то, что это соотношение имеет место в момент возникновения колебаний, т. е. тогда, когда через цепи начинают протекать бесконечно малые переменные токи, иными словами, практически, при отсутствии тока. Это обстоятельство заслуживает внимания, так как оно может быть использовано для разных измерений или исследований, при которых через измеряемые величины практически не должны проходить заметные токи. Оно может также оказаться полезным и для разных практических применений, как это например уже было предложено *С. Э.* **Хайкиным**.

Вернемся теперь назад к теории автоколебательных систем. Уравнение (6) можно путем подстановки $y=\frac{di}{dt}$ и $i=x$ легко заменить системой двух диференциальных уравнений первой степени:

$$\frac{dx}{dt}=y=P(x, y) \tag{9_1}$$

$$\frac{dy}{dt}=\omega_0^2 f(y)-2\delta y-\omega_0^2 x=Q(x, y). \tag{9_2}$$

Мы очевидно сможем считать нашу задачу решенной, если будем например знать зависимость $\frac{di}{dt}$ от i, т. е. y как функцию от x. Ибо если $\frac{di}{dt}=\Phi(i)$, то простая квадратура дает

$$t=\int\frac{di}{\Phi(i)}, \tag{10}$$

т. е. t как функцию от i, откуда легко вывести свойства i как функцию от t. В частности, если представить такую зависимость графически, в виде кривых на плоскости $x(=i)$ и $y\left(=\frac{di}{dt}\right)$, то из свойств этих кривых можно вывести ряд очень важных заключений относительно характера решения уравнения (10), а следовательно, и колебательной системы. Например, если окажется, что существует замкнутая кривая $y=\Phi(x)$, не проходящая через особую точку, то это означает, что уравнение имеет периодическое решение. В самом деле, из этого следует, что интеграл $\int\frac{dx}{\Phi(x)}$, взятый по замкнутой кривой, имеет некоторое определенное значение τ_0, независимо от начальной точки на кривой, а это по уравнению (10) означает, что через определенные промежутки времени, равные t, значения x и y, т. е. i и $\frac{di}{dt}$ снова повторяются. Иными словами, i и $\frac{di}{dt}$ суть периодические функции времени с периодом τ_0. Такие замкнутые кривые в случае, если они изолированы, называются циклами или, точнее, предельными циклами Пуанкаре, и установление их наличия или отсутствия в топографии интегральных кривых чрезвычайно важно, так как их наличие можно считать основной характеристикой автоколебательной периодической системы.

Чем характеризуются в такой топографической картине положения равновесия системы? Так как в них $\frac{di}{dt}$, т. е. $y=o$, а $i=f(o)$, то из уравнения (9_1) и (9_2) следует, что их правые части в таких точках обращаются в нуль, а следовательно $\frac{dy}{dx}$ обращается в неопределенность. Таким образом состояния равновесия соответствуют таким точкам, в которых направление кривой не определено, т. е. таким точкам, через которые может проходить не одна только кривая, как это имеет место для любой другой точки топографической системы x, y, а неопределенное число их Такие точки в теории диференциальных уравнений носят название „особых" точек. В них дальнейшее течение процесса неоднозначно определяется начальными условиями: Исследование характера особых точек, а именно поведение интегральных кривых вблизи их, показывает (об этом подробнее расскажет А. А. Андронов), что существуют как такие точки, к которым интегральные кривые сходятся, так и такие, от которых кривые расходятся. Наконец, бывает еще третий тип особых точек, к которым часть интегральных кривых сходится, другая же часть от них расходится.

Очевидно, что только точки первого типа соответствуют положениям устойчивого состояния, а остальные, по характеру своему, неустойчивы. Легко показать, что условие неустойчивости особых точек идентично с выведенным раньше условием (8), что конечно отнюдь не удивительно, ибо метод исследования в сущности один и тот же — метод бесконечно малой вариации, примененный к уравнению (6) и приводящий к линейному характеристическому уравнению.

Особые точки и предельные циклы являются основными элементами топографической теории диференциальных уравнений Пуанкаре, и их анализ позволяет получить наглядный ответ на наиболее существенные вопросы периодических автоколебаний. С точки зрения этой теории, точки на плоскости x, y обозначают состояние системы. Если точка, соответствующая начальному состоянию, неустойчива, то это означает, что система в этом состоянии оставаться не может. Соответствующая ей точка будет поэтому двигаться, смотря по роду случайного начального толчка, по той или иной интегральной кривой, которая, в случае наличия предельного цикла, будет постепенно приближаться к нему, как бы навиваться на него, стремясь в пределе слиться с ним. Нахождение такого цикла решает задачу определения стационарной амплитуды (так как дает i_{max} и i_{min}), а время его

$$t = \oint \frac{ds}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \tag{11}$$

дает основной период. Наконец, анализ формы позволяет определить наличие и величину гармоник. Здесь следует заметить, что если основу автоколебательной системы составляет достаточно слабозатухающий контур, то тогда, благодаря резонансным свойствам такого контура, форма кривой колебаний близка к синусоидальной, а период, как уже было отмечено выше, с большой точностью выражается формулой Томсона — мы здесь имеем дело с колебаниями томсоновского типа. Нахождением непрерывного периодического решения задача, в случае автоколебательной системы с одной степенью свободы, типа рассмотренного нами лампового генератора, еще полностью не исчерпывается. Как объяснить например такие явления, как „мягкое“ и „жесткое" возбуждение, явление „затягивания" и „срыва"? Я не думаю, чтобы в нашу эпоху радиовещания было необходимо подробно объяснить эти термины. Напомню только, что под „мягким" возбуждением мы разумеем такой режим автоколебательной системы, при котором, при плавном изменении одного из параметров, например взаимоиндукции M, стационарная амплитуда, начинаясь с нуля, плавно возрастает, причем это изменение обратимо. При „жестком" возбуждении амплитуда колебаний при прохождении точки самовозбуждения сразу, как бы скачком, приобретает некоторое определенное значение. Обычно „жесткое" возбуждение связано с явлением „затягивания", которое состоит в том, что колебательный режим не „следует" при обратном изменении параметра например, колебания не перекращаются после прохождения точки самовозбуждения, а сохраняются еще некоторое время и снова внезапно прекращаются (рис. 4), но уже при таком значении параметра, при котором они возбуждаться не могут. Эти явления, о теории которых подробнее расскажет А. А. Андронов, ставят на очередь ряд вопросов, из которых принципиально наиболее важный — проблема динамической устойчивости состояния. В случае периодических процессов эта задача сводится к вопросу об устойчивости предельных циклов.

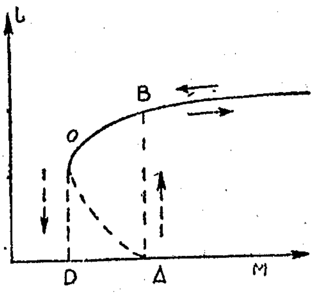

Рис. 4.

Вопросы динамической устойчивости уже давно служили предметом исследования механиков. В работах Ляпунова этот вопрос получил для малых вариаций состояний свое полное разрешение. Разработанные им методы можно применить и к нашей задаче. Так как для равновесного динамического состояния мы имеем $i = \Phi(t)$, которое должно удовлетворять уравнению (6)

$$i_A = i + CR\frac{di}{dt} + LC\frac{d^2i}{dt^2}$$

$$i_A = f(Z),$$

где

$$Z = (M - DL)\frac{di}{dt} + Eg + DE_A,$$

то, предположив, что ток испытал вариацию ξ, получаем

$$\delta Z = (M - DL)\frac{d\xi}{dt};\ \delta i_A = f'(z)\,\delta z;$$

$$\delta i_A = \xi + CR\frac{d\xi}{dt} + LC\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

откуда для ξ получаем уравнение

$$LC\frac{d\xi^2}{dt^2} + [RC - (M - DL)F(t)]\frac{d\xi}{dt} + \xi = 0, \tag{12}$$

где

$$F(t) = f'\left[(M - DL)\frac{di}{dt} + Eg + DE_A\right] = f'[(M - DL)\varphi(t) + $$
$$+ Eg + DE_A]$$

есть некоторая периодическая функция времени.

Таким образом, вопрос динамической устойчивости сводится к исследованию решения линейного диференциального уравнения с периодическими коэфициентами. Такие уравнения встречаются в небесной механике и были разработаны Матье, Гиллом и др.

Решение этих уравнений всегда имеет вид

$$e^{-\varphi(t)}[Ae^{+\beta t}\varphi(t) + Be^{-\beta t}\varphi(-t)],$$

где $\varphi(t)$ есть периодическая функция. В зависимости от отношения между постоянными и переменными частями коэфициентов уравнения действительная часть величины β может быть либо больше, либо равна или меньше постоянной части функции $\varphi(t)$.

В первом случае мы очевидно имеем дело с неустойчивым равновесным динамическим состоянием: колебания на таком цикле не могут удержаться.

Заметим, что уравнения с периодическими коэфициентами, помимо их важности для вопросов динамической устойчивости, играют большую роль в явлениях параметрического возбуждения, с которыми мы встретимся ниже, а также для теории модуляции, явлений затягивания в теории сложного лампового передатчика и т. д.

Вернемся снова к нашей автоколебательной системе. Вместо схемы рис. 1 такую схему можно осуществить и другим, несколько более сложным образом, например, при помощи схемы, изображенной на рис. 5. *

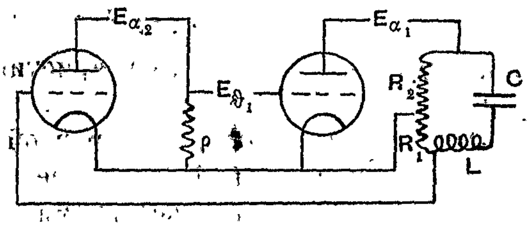

Рис. 5.

В самом деле здесь лампа 2 играет только роль линейного усилителя и обратителя фазы, так что уравнения, управляющие процессом, принимают вид:

$$i_{a1} = i_1 + i_2 = i_1 + C\frac{dV}{dt} = f[E_{g1} - \rho i_{a2}] \tag{13$_1$}$$

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} + V, \tag{13$_2$}$$

или

$$R_1 i_{a1} = V + C(R_1 + R_2)\frac{dV}{dt} + CL\frac{d^2V}{dt^2}. \tag{14}$$

Так как далее по условию

$$i_{a2} = S_2 \psi_{g2} = -S_2 R_2 i_2,$$

откуда

$$i_{a1} = f_1\left[S_2 \rho C R_2 \frac{dV}{dt}\right], \tag{15}$$

то следовательно:

$$CL\frac{d^2V}{dt^2} + C(R_1 + R_2)\frac{dV}{dt} + V = R_1 f_1\left[S_2 R_2 \rho C\frac{dV}{dt}\right] \tag{16}$$

или

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2\delta\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = R_1 \omega_0^2 f_1\left[S_2 R_2 \rho C\frac{dV}{dt}\right]. \tag{16$_1$}$$

Таким образом мы приходим к такому же уравнению, как и уравнение (6). В частности мы получим условие само-

---

* Эта схема предложена Л. И. Мандельштамом и автором, как наглядно иллюстрирующая переход от автоколебаний томсоновского типа к автоколебаниям релаксационным.

возбуждения, если вместо $M - DL$ подставим величину $R_1 R_2 \rho C S_2$.

$$R_1 + R_2 - S_{10} S_2 R_1 R_2 \rho < 0, \tag{17}$$

здесь S_{10} — крутизна характеристики лампы 1 в исходной точке.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если мы будем постепенно уменьшать L. Условие самовозбуждения будет, очевидно, выполняться все время вплоть до $L = 0$. Что же касается до контура, то собственные колебания его, слабо затухающие вначале, будут становиться все более и более затухающими, и затем, после того как будет перейдена граница колебательности, процесс станет апериодическим. Как отразится такое изменение на характере автоколебаний? Предельный цикл, имевший вначале приблизительно форму круга, будет постепенно все более и более сильно отходить от нее, а величина периода будет все больше и больше отклоняться от значения, даваемого формулой Томсона. Однако колебания будут оставаться периодическими и при этом непрерывно периодическими, т. е. колебания будут таковы, что определяющие их величины (например токи и напряжения) будут все время оставаться непрерывными.

Что же будет, если мы положим $L = 0$, иными словами, идеализируем схему так, что совершенно не будем принимать во внимание имеющихся всегда налицо, хотя и чрезвычайно малых, самоиндукций (так называемых „паразитных“)? Обратимся к уравнению (16). Оно в этом случае примет следующий вид:

$$C(R_1 + R_2)\frac{dV}{dt} + V = R_1 f_1\left[S_2 \rho\, C R_2 \frac{dV}{dt}\right] \tag{16_2}$$

и следовательно оно представляет в плоскости $\left(x = V_1\ y = \frac{dV}{dt}\right)$ некоторую кривую, которая однако, как легко видеть из графического построения (рис. 6), не может ни в коем случае быть замкнутой. Отсюда следует, что уравнение (16_2) не имеет цикла Пуанкаре и значит не может передать непрерывного периодического колебания. Возникает естественно вопрос: допустима ли такая идеализация задачи?

Ведь физически колебательный процесс должен несомненно иметь место, так как возможное положение равновесия неустойчиво, а величины $\left(V, \frac{dV}{dt}\right)$ по условию задачи (форма характеристики) не могут расти бесконечно. Такое сомнение действительно возникало, и некоторые исследователи (например van der Pol) были склонны думать, что подобная идеализация недопустима и физически и что необходимо принимать во внимание L (или C), как бы малы они ни были. Однако более углубленное рассмотрение вопроса показывает, что есть в известном смысле естественный выход из затруднения. Дело в том, что из уравнения (16_2) вытекает только невозможность непрерывного периодического процесса, т. е. такого, при котором движения и их скорости остаются все время конечными

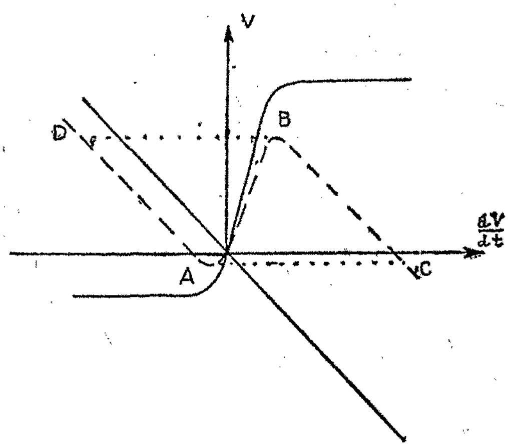

Рис. 6.

и непрерывными, процесс, определяемый уравнением (16_2), такими свойствами не обладает. В самом деле, для скорости изменения $y = \frac{dv}{dt}$ имеем из уравнения (16_2):

$$C(R_1 + R_2)\ \frac{dV}{dt} + y = S_2\, R_1 R_2 \rho C f_1{}' \left[S_2 R_2\, \rho C \cdot y\right] \frac{dy}{dt},$$

откуда, так как $f_1{}'\,[S_2 R_2 \rho C y] = S_1$ (крутизне характеристики лампы 1 в точке (x, y), а $R_1 + R_2 = S_0 S_2 R_1 R_2 \rho$, где S_0 — критическая крутизна характеристики 1, при которой как раз еще возможно самовозбуждение (ср. уравнение 17), получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{S_2 R_1 R_2 \rho C (S_1 - S_0)}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что $\frac{dy}{dt}\left(\text{или } \frac{dy}{dx}\right)$ превращается в $\sim$ и, следовательно испытывает скачок непрерывности в тех точках, в которых крутизна пробегаемой характеристики равна критической. Как видно из рис. 6, такой разрыв непрерывности должен иметь место в A и B. Если таким образом непрерывный периодический процесс невозможен, то спрашивается, как представить себе разрывной периодический процесс. В частности, возникает вопрос: чем определяется продолжение процесса после всякого скачка непрерывности? Так как заряд конденсатора очевидно не может изменяться скачком, то, следовательно, V (или x) должно при всяком разрыве непрерывности оставаться неизменным. С другой стороны, уравнение (16_2) естественно должно оставаться в силе во все время процесса. Эти два требования позволяют найти положение системы (точки x, y) после скачка, а знак $\frac{dy}{dx}$ дает дальнейшее направление процесса.

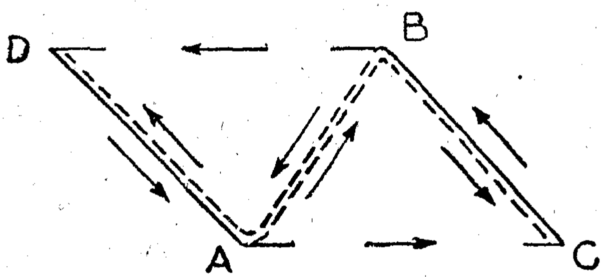

Рис. 7.

В рассматриваемом нами случае (рис. 7) система из состояния, определяемого точкой A, скачком переходит в точку C, а из точки B скачком в точку D. Таким образом, разрывной периодический процесс, заключающийся в движении по участкам DA и CB интегральной кривой с перескоками в A и B, может быть действительно описан уравнением (16_2) в связи с указанными условиями непрерывности, и следовательно, такая идеализация системы ($L=0$) вполне допустима. Заметим, что с подобной идеализацией процессов мы встречаемся и в других областях физики, причем мы так привыкли в некоторых случаях к разрывной трактовке проблемы, что часто перестаем обращать внимание на необыкновенность этого. Может быть, наиболее ярким примером этого является трактовка отражения упругого шара от упругой плоскости или от другого шара, как это например имеет обычно место в элементарной кинетической теории газов. Не рассматривая детально упругой по существу задачи, мы обыкновенно трактуем акт отражения, как разрывной, считая, что направление нормальной компоненты скорости изменяет скачком свой знак. Величина же самой скорости, как определяющей запас кинетической энергии, остается при этом неизменной.

Такая идеализация, как и в нашем случае, существенно упрощает проблему и в то же время дает с достаточным приближением ответ на главные интересующие нас вопросы: величина периода, стационарной амплитуды и т. д. Но это достигается конечно ценой отказа от рассмотрения процесса во время самого „скачка". Например не может быть определено время самого соприкосновения при ударе и т. д.

Такие случаи разрыва непрерывности встречаются часто при рассмотрении квазистационарных электрических процессов. Укажу например на разряд конденсатора через омическое сопротивление (R): здесь ток в начальный момент изменяется скачком от нуля до значения $i=\frac{V_0}{R}$, где V_0 — начальное напряжение конденсатора.* Следует заметить, что во всех подобных случаях разрыв непрерывности испытывают величины, изменение которых не связано с изменением запаса энергии (например напряжение на концах сопротивления и самоиндукции, ток через сопротивление или емкость). С другой стороны, физически необходимо, чтобы как раз величины, определяющие собой запас энергии, оставались неизменными при всяких разрывах непрерывности.

Вернемся снова к нашей идеализированной схеме. Как видно из рис. 8, основной контур системы состоит теперь только из C и сопротивлений R_1 и R_2, так что действие всей схемы можно рассматривать как регенерацию апериодического разряда конденсатора. Вместо двух разнородных резервуаров (L, C) энергии мы здесь имеем дело только с одним (C), почему естественно не может быть и речи

* Другой пример: скачок напряжения между A и B (рис. 9) от нуля до пробивного напряжения искры в момент начала разряда.

о колебаниях в самом контуре, как в таковом, а следовательно и вычислении периода как функции только параметров самой системы. Поэтому принято говорить, что мы имеем здесь дело с колебаниями не-томсоновского типа. В частности, в виду того, что время апериодического разряда конденсатора определяется так называемым временем релаксации, то такие колебания называют также релаксационными (ван дер Поль). Рассмотренная нами система является одним из простейших примеров обширного класса автоколебательных систем релаксационного типа, к числу наиболее известных представителей

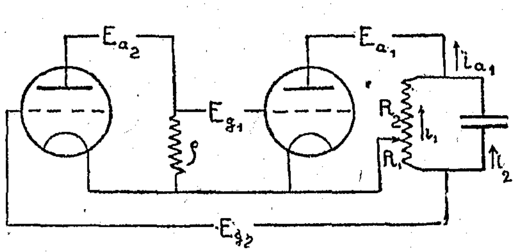

Рис. 8.

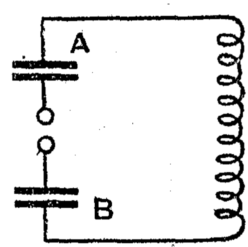

Рис. 9.

которого относится получивший столь большое значение в измерительной технике мультивибратор Абрагам-Блоха. Сюда относятся также, кроме многочисленных других ламповых схем, предложенных Фридлендером, Хегнером, Ватанабе и др., такие автоколебательные системы, как например схема „мигающей“ неоновой лампы, таранный насос и др. Повидимому сюда следует также отнести и такие колебательные процессы, как деятельность сердечной мышцы (ван дер Поль), флюктуация видов животных в борьбе за существование (Вольтерра) и ряд других. Всем этим автоколебательным системам обще то, что входящие в их состав основные системы при бездействии регенерации неспособны совершать колебаний. Это в известном смысле равносильно тому, что в них имеются только однородные формы накопления энергии (однородные резервуары ее) и течение процесса при отсутствии регенерации определяется некоторым временем релаксации.

Автоколебательные релаксационные системы рассмотренного нами типа занимают последнее место в ряду автоколебательных систем, в начале которого можно поставить ламповый генератор с контуром, обладающим очень малым собственным затуханием. Колебательный процесс в них имеет, как мы видели, разрывной периодический характер. С другой стороны, из топографической теории диференциальных уравнений Пуанкаре следует, что основной характеристикой автоколебательной системы является наличие предельных циклов, т. е. замкнутых непрерывных кривых. Естественно поэтому возникает вопрос, как обстоит тут дело с математической стороны, и в частности, можно ли совместить понятие о предельных циклах с разрывными периодическими решениями? Как показали А. А. Андронов и А. А. Витт,* можно провести аналогию случаев разрывных периодических решений с предельными циклами. Так как С. Э. Хайкин подробнее изложит эту теорию в своем докладе, то позвольте мне на ней не останавливаться и перейти к другому вопросу, связанному с релаксационными колебаниями.

Автоколебательные релаксационные системы, подобные идеализированной схеме рис. 6 (сюда относится между прочим и мультивибратор Абрагам-Блоха), приводят, как мы видели, к разрывным периодическим колебаниям, т. е. колебаниям, весьма сильно отличающимся от синусоидальных и чрезвычайно богатым интенсивными гармониками высших порядков. Эти свойства, делающие релаксационные схемы чрезвычайно пригодными для разных измерительных целей (например для абсолютных измерений частоты), первое время считали непременной характеристикой вообще всяких релаксационных колебаний. Однако, как показали Хегнер, Хегнер-Ватанабе** и др., возможны релаксационные схемы, состоящие либо только из емкостей и омических сопротивлений, либо только из самоиндукций

* А. Андронов и А. Витт. Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагам-Блоха. Доклады Академии СССР, 1930, стр. 189.

** Например, K. Hegener u. Y. Watanabe. Jahrbuch für drahtlose Telegraphie und Telephonie, B. 34, Heft 2, 1929.

и сопротивлений, в которых автоколебания имеют приблизительно синусоидальный характер (рис. 10). Поэтому было весьма интересно рассмотреть этот вопрос с точки зрения топографической теории автоколебаний. В частности было важно выяснить зависимость того или иного рода колебаний от наличия и характера предельных циклов. Рассмотрение этих вопросов привело С. Э. Хайкина к ряду интересных выводов, о которых он подробнее расскажет в своем докладе. Мне хотелось бы только указать на то, что, как показал С. Э. Хайкин, возможны такие релаксационные схемы, которые при плавном изменении одного определенного параметра возможно перевести из состояния, характеризуемого наличием замкнутого цикла Пуанкаре, в состояние, соответствующее разрывным периодическим решениям. Одна из таких схем изображена на рис. 11.

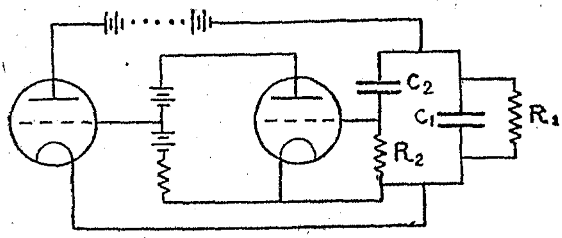

Рис. 10.

Автоколебательные системы томсоновского и релаксационно-разрывного типа занимают крайние положения в ряду автоколебательных систем. Как мы видели на примере схемы рис. 5, можно от системы томсоновского типа через ряд промежуточных систем перейти в пределе к релаксационной системе разрывного типа. Можно также от схемы разрывно-релаксационной перейти к релаксационной схеме непрерывного типа (например схема Хайкина). Все эти системы характеризуются наличием неустойчивой равновесной точки и устойчивого непрерывного или обоб-

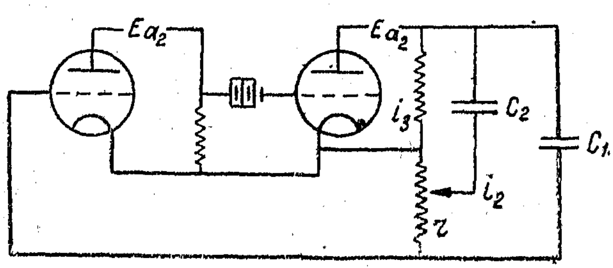

Рис. 11.

щенного предельного цикла. Иными словами, стационарный колебательный процесс во всех рассмотренных нами автоколебательных системах был периодический (непрерывно или разрывно периодический). Естественно возникают вопросы: является ли периодичность непременным признаком автоколебаний? Возможны ли, другими словами, автоколебания не периодические? Какого рода например процесс в такой автоколебательной системе, как прерывистой ламповый генерератор, исследованный Б. Введенским и С. Н. Ржевкиным еще в 1921 г.? Эти вопросы выдвигают ряд новых проблем теорий колебаний и предъявляют новые требования к математической трактовке их. Указанием на эту значительно более трудную и еще мало разработанную область позвольте мне закончить сегодня эту столь затянувшуюся первую часть своего доклада.