

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
КОСМОЛОГИИ.

М. П. Бронштейн, Ленинград

От редакции

Космологическая проблема является одной из самых трудных, если не самой трудной проблемой современной физики. Классическая физика этой проблемы почти не ставила. Новейшее развитие физики и главным образом общая теория относительности позволяют подойти к постановке этой проблемы. Однако было бы неправильно думать, что современное состояние физики и астрономии дают достаточно материала для разрешения космологической проблемы. Те решения космологической проблемы, которые выдвигаются в настоящее время, отнюдь не могут претендовать даже на приблизительное разрешение проблемы. Все они зиждутся на произвольных предположениях, без которых теория не может быть построена (например, предположение о количестве материи во вселенной и о ее распределении), но для подтверждения которых у нас почти нет астрофизических данных.

На первом этапе своего развития общая теория относительности выдвинула положение о том, что структура пространства определяется расположением гравитирующих масс. В современных теориях принимается во внимание и лучистая энергия. Однако этого положения теории относительности еще недостаточно для того, чтобы разрешить проблему строения мира. Для этого необходимо определенное предположение о плотности распределения материи и излучения и кроме того необходимо выбрать определенный вид для ds , т. е. ввести соглашение о свойствах метрики. Неопределенностью этих предположений и обуславливается множественность построений космологической проблемы в современной физике.

Однако всем современным построениям присущи две

общие черты: конечность мира в пространстве (конечный радиус мира) и необратимость процесса перехода гравитирующих масс в излучение.

Даже динамические теории, принимающие неограниченный рост радиуса мира, все же по существу предполагают конечность мира в пространстве, так как в данный момент времени радиус мира всегда конечен.

Было бы, однако, совершенно неправильно выдавать этот вывод за столь же точное и непоколебимое достижение физики, как, например, радиус атома или величина постоянной Планка. Ревностные защитники конечного мира склонны, после того как вывод получен, забыть о тех предположениях, на основании которых он только и может получиться. Таким образом то, что является только следствием определенных предположений, возводится в абсолют и считается доказанным. Поэтому совершенно неправильно было бы утверждать, что современная физика и астрономия дают доказательство конечности мира.

Неудовлетворительность и неприемлемость теорий, утверждающих конечность мира, заключается именно в том, что они становятся всецело на точку зрения конечности, отрицая бесконечность и создавая тем самым специфическую ограниченность, свойственную всем теориям, кладущим в основу своих построений абстрактное понятие.

Возражение против теорий конечности мира отнюдь не предполагает отказа от познания бесконечного мира в его целостности. Все дело в том, чтобы понять истинное, диалектическое соотношение конечного и бесконечного.

В отдельном акте познания нам всегда дано конечное. Но „всякое реальное, исчерпывающее познание заключается лишь в том, что мы в мыслях извлекаем единичное из его единичности и переводим его во всеобщность, заключается в том, что мы находим бесконечное в конечном, вечное в преходящем. Но форма всеобщности есть форма в себе замкнутости, а следовательно бесконечности. Она есть соединение многих конечных вещей в бесконечное“ (Энгельс).

Эти общие положения не могут, конечно, рассматриваться как решение физической проблемы космологии, но они дают наиболее общую методологическую установку, в корне противоположную той установке, которая положена в основу современных космологических теорий. Еще с большей ясностью различие установок видно на проблеме перехода материи в излучение. Современная космология исходит из предпосылки необратимых процессов, т. е. по существу в новом аспекте возвращается к точке зрения

Клаузиуса. Мир стремится к неизбежному концу, т. е. конечен не только в пространстве, но и во времени.

В отличие от первых космологических теорий Эйнштейна в настоящее время космологические теории не могут не дать ответа на вопрос о развитии материи.

Однако признание абсолютной необратимости процессов с неизбежностью ведет к нематериальному акту творения, создавшему изначальное отступление от состояния равновесия. Таким образом предпосылка необратимости мировых процессов в целом находится в непреодолимом противоречии с материализмом,

Мы видим, что современное состояние космологической проблемы не только не может считаться в какой бы то ни было мере окончательным, но что все теории страдают ограниченностью и содержат целый ряд методологически неприемлемых и неправильных предпосылок. Мы не говорим уже о физических и астрономических невязках, которые отмечены в статье. Наши физические и астрономические знания еще слишком несовершенны, чтобы можно было дать сколько-нибудь удовлетворительное решение вопроса. Кроме того, должна быть в корне изменена методологическая установка: от одностороннего признания конечности мира необходимо поставить диалектически проблему соотношения конечного и бесконечного. Несмотря на указанные недостатки теории, редакция считает необходимым помещение статьи М. П. Бронштейна, дающей представление о трактовке космологической проблемы в современной физике.

§ 1. Введение

Одним из наиболее замечательных следствий общей теории относительности явилась возможность нового подхода к космологической проблеме, т. е. к проблеме мира как целого. Древние представляли себе вселенную в виде хора семи светил, обращающихся вокруг земного шара; вся эта конструкция была заключена в непроницаемую хрустальную сферу, покрытую с внутренней стороны лучистыми иероглифами созвездий. Но представление о вселенной замечательным образом расширилось, когда астрономия освободилась от оков „математического синтаксиса“ Клавдия Птолемея; хрустальная сфера была разбита, и загадка Млечного пути разрешена в тот

самый вечер, когда Галилей впервые направил свой телескоп к таинственному миру неподвижных звезд, и вселенная вдруг представилась астроному в виде галактической системы, т. е. в виде огромного скопления звезд, подобных нашему Солнцу, но удаленных от нас на колоссальные (по сравнению с Солнцем) расстояния. Даже и эти расстояния оказалось возможным измерить: в 1838 г. Струве, Бессель и Гендерсон, работая совершенно независимо друг от друга, сумели измерить расстояния до трех сравнительно близких к нам звезд (α Лиры, α Кентавра и 61 Лебеда) и таким образом „сразу в трех местах разрушили стену, перед которой астрономия так долго стояла в бессильной ярости“ (слова Джона Гершеля). В настоящее время астрономы считают галактическую систему, в состав которой входит и наше Солнце, собранием нескольких десятков миллиардов звезд, распределенных с неравномерной плотностью по объему весьма сплюснутого сфероида, большой диаметр которого равен нескольким десяткам тысяч парсеков (парсек—употребительная в звездной астрономии единица длины $3,08 \times 10^{18}$ см).

Но вселенная современного астронома не ограничивается одной лишь галактической системой: наряду с нашей галактической системой существует огромное количество других таких же „островных вселенных“, состоящих из десятков миллиардов звезд и видимых в наши телескопы как слабо светящиеся туманности большей частью правильной формы (чаще всего встречаются спиральные формы, но попадаются и круглые, эллиптические и веретенообразные туманности, а также туманности неправильной формы). Расстояния до некоторых из этих объектов были измерены Хабблем, Лундмарком и Шэпли, которые воспользовались тем обстоятельством, что современные мощные астрономические инструменты позволяют усмотреть в ближайших к нам „островных вселенных“ наиболее яркие отдельные звезды; среди этих звезд попадаются и переменные звезды типа δ *Cephei*; для переменных звезд этого типа (так наз. цефеид) было установлено хорошо подтвердившееся в пределах нашей галактики соотношение между

их абсолютной яркостью (той яркостью, которой они обладали бы с точки зрения наблюдателя, удаленного от них на одно и то же стандартное расстояние в 10 парсеков) и периодом изменения их яркости; применение этого соотношения к открытым в „островных вселенных“ цефеидам позволяет определить абсолютную яркость этих цефеид, сравнение же с их наблюдаемой (кажущейся) яркостью дает расстояние до этих звезд, а следовательно и до звездных скоплений, в состав которых они входят. По этому методу Хэббл нашел например, что расстояние до большой туманности N.G.C. 224¹ в созвездии Андромеды составляет 285 тысяч парсеков, а расстояние до туманности N.G.C. 598 в созвездии Треугольника равно 263 тысячам парсеков. Так как диаметр нашей галактики по Сирсу не превосходит 90 тысяч парсеков, то ясно, что эти объекты являются скоплениями звезд, лежащими далеко за пределами нашей системы Млечного пути, т. е. отдельными „островными вселенными“, подобными нашей. Для краткости мы будем называть эти „островные вселенные“ галактиками.

Не все расстояния до галактик могли быть измерены столь же непосредственным способом, как расстояния до N.G.C. 598 и N.G.C. 224; в большинстве случаев приходится руководствоваться более косвенными соображениями, основанными на оценке видимых диаметров этих объектов и их наблюдаемых яркостей. Наиболее мощным из современных астрономических инструментов является знаменитый стодюймовый рефлектор Солнечной обсерватории (гора Вильсон, Южная Калифорния); спиральная туманность 18-й звездной величины, еще видимая в этот телескоп, оказывается звездной системой, удаленной от нас на расстояние $1,5 \times 10^{26}$ см, — это, по словам Джинса, величайшее расстояние, с которым приходится иметь дело в практической астрономии. В шаре с таким диаметром, по мнению

¹ Обозначение N.G.C. 224 имеет только тот смысл, что соответствующая туманность занесена под номером 224 в Dreyer's New General Catalogue (1888).

Хэббла, находится около двух миллионов галактик. Расстояния этого порядка таковы, что даже парсек, равный $3,08 \times 10^{18}$ см, оказывается слишком маленькой единицей длины для того, чтобы ею можно было удобно оперировать; в вопросах подобного рода всего удобнее пользоваться предложенной де-Ситтером так называемой единицей A , которая равна 10^{+24} см (расстояние в 1 A световые волны проходят в миллион лет). Таким образом по оценке Хэббла два миллиона галактик заключены в сфере, объем которой равен 2 миллионам кубических A ; иными словами, островные вселенные распределены в пространстве с приблизительно средней плотностью, равной одной галактике на кубический A .

Такова вселенная, какой она представляется современному астроному: звездные скопления, заключающие по несколько десятков миллиардов звезд и отделенные друг от друга колоссальными пустыми пространствами (среднее расстояние между двумя соседними галактическими системами около 1 A); вот что может сказать о вселенной наблюдатель, вооруженный самыми могущественными астрономическими инструментами.

Но он ничего не может сказать о том, что лежит за пределами сферы радиуса 150 A ; он не знает, продолжает ли и там творческая фантазия природы неутомимо громоздить галактику на галактику все с той же плотностью, равной одной галактике на кубический A , или быть может эта плотность становится все меньше и меньше по мере удаления от некоторого центра скопления галактик, к которому относится и наш Млечный путь. Даже если бы „дальнозоркость“ астрономических инструментов увеличилась во много раз, все равно наблюдатель будет в состоянии лишь сказать о распределении галактик внутри той сферы (хотя и расширяющейся при улучшении астрономической техники), которая доступна его телескопическому зрению; он не сумеет сказать о том, что находится в необозримых пространствах за пределами этой сферы, он никогда не будет знать ничего о мире как о целом. Поэтому может казаться, что космологическая проблема

является неприступной крепостью, завоевание которой не может быть уделом эмпирической науки.

Но там, где астроном-наблюдатель пришел в отчаяние от своего бессилия, к решению безнадежной проблемы подходит физик. Он берется за рассмотрение вселенной с такой общей и с такой высокой точки зрения, с которой существование самих галактических систем представляется случайной неоднородностью; подобно тому, как в целом ряде дисциплин, рассматривающих тела, состоящие из атомов, зернистое (атомное) строение материи заменяется непрерывным (например, в гидродинамике жидкости трактуются как средины с плотностью, непрерывно меняющейся от точки к точке), — подобно этому и релятивист отвлекается от атомного строения мира, в котором атомами служат галактические системы звезд, и считает, что вещество распределено во вселенной с некоторой равномерной средней плотностью. Если в самом деле верно, что приблизительно равномерное распределение галактик в пространстве, наблюдаемое в стодюймовый рефлекс горы Вильсон, продолжается и во всей остальной вселенной, то эта средняя плотность конечна (считая, что масса галактики в среднем в 10^{11} раз больше массы Солнца, как утверждает Оорт, мы найдем, что предполагаемая средняя плотность вещества во вселенной равна $10^{11} \odot$ на один A^3 , или, что то же самое, $2,10^{-28}$ г/см³. Можно поражаться ничтожной величине этой плотности, которая соответствует приблизительно массе одного водородного атома на десять кубических дециметров! Настолько колоссальны пустые пространства между галактическими системами по сравнению с их собственными размерами). Но если равномерное распределение галактик в пространстве, доступном наблюдению современного астронома, ничего общего не имеет с распределением их во всей остальной вселенной и если нам только случайно посчастливилось жить в таком месте пространства, в котором особенно много островных вселенных, то средняя плотность вещества в

¹ Знаком $\odot$ обозначается в астрономии масса Солнца.

пространстве может быть значительно меньше этой и без того потрясающе ничтожной цифры; она может быть сколь угодно близка к нулю (равной нулю, строго говоря, она могла бы быть только в том случае, если бесконечное пространство содержит конечное число звезд или вообще конечную массу). Для того чтобы вместе с релятивистом взобраться на эту головокружительную высоту, с которой возможно рассматривать распределение вещества во вселенной как равномерное, и трактовать расстояния между галактическими системами как расстояния между атомами тел трактуются в „феноменологических“ теориях, основанных на представлении о непрерывном распределении вещества, необходимо вооружиться обычной релятивистской математикой, а именно геометрией Римана. Для читателя, у которого нет под рукой соответствующих курсов, может оказаться полезным нижеследующее небольшое отступление, в котором мы сопоставим все необходимые нам геометрические формулы.

§ 2. ЭКСКУРС В ОБЛАСТЬ МАТЕМАТИКИ.

Геометрия Римана, которой пользуется теория относительности, представляет не что иное, как обобщение обыкновенной геометрии Евклида. Рассмотрим в обыкновенном евклидовском пространстве две точки A и B и введем прямоугольную систему координат. Пусть координаты точки A в этой системе окажутся равными x_A, y_A, z_A , а координаты точки B пусть будут x_B, y_B, z_B . Тогда по формулам аналитической геометрии расстояние AB между обеими точками равно

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \quad (1)$$

Если вместо прямоугольных координат мы введем какие-нибудь другие (например, сферические координаты, эллипсоидальные координаты и т. п.), то формула для вычисления расстояния между двумя точками окажется куда более сложной. Дело упрощается однако, если мы условимся брать постоянно две точки бесконечно близкие друг

к другу. Пусть $x_A = x$, $y_A = y$, $z_A = z$, $x_B = x + dx$, $y_B = y + dy$, $z_B = z + dz$, где dx , dy , dz — бесконечно малые величины. Если обозначить расстояние между бесконечно близкими точками A и B через ds , то формула (1) дает

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (2)$$

Предположим теперь, что вместо координат x , y , z введены какие-то новые (не обязательно прямоугольные, а какие угодно) координаты λ , μ , ν ; это значит, что по координатам x , y , z можно вычислять λ , μ , ν , и наоборот, по λ , μ , ν можно вычислять x , y , z , т. е. что каждая из величин x , y , z дана в виде функции от λ , μ , ν :

$$x = f_1(\lambda, \mu, \nu),$$

$$y = f_2(\lambda, \mu, \nu),$$

$$z = f_3(\lambda, \mu, \nu),$$

Отсюда следует

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial f_1}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial f_1}{\partial \nu} d\nu,$$

$$dy = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial f_2}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial f_2}{\partial \nu} d\nu,$$

$$dz = \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial f_3}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial f_3}{\partial \nu} d\nu,$$

Подставляя это в (2) и вводя обозначения:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \lambda}\right)^2,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \mu}\right)^2,$$

$$g_{33} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \nu}\right)^2,$$

$$g_{23} = \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \frac{\partial f_1}{\partial \nu} + \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \frac{\partial f_2}{\partial \nu} + \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \frac{\partial f_3}{\partial \nu} = g_{32},$$

$$g_{31} = \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \nu} \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_3}{\partial \nu} \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} = g_{13},$$

$$g_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{\partial f_2}{\partial \mu} + \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \frac{\partial f_3}{\partial \mu} = g_{21},$$

мы получим

$$ds = \sqrt{g_{11}d\lambda^2 + g_{22}d\mu^2 + g_{33}d\nu^2 + 2g_{23}d\mu d\nu + 2g_{31}d\nu d\lambda + 2g_{12}d\lambda d\mu}.$$

Если ввести для удобства вместо λ , μ , ν новые обозначения x_1 , x_2 , x_3 , то можно будет писать

$$ds = \sqrt{\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k}. \quad (3)$$

Выражение (3) для дифференциала длины позволяет вычислять и длину любой линии (прямой или кривой), проведенной между двумя точками A и B , находящимися на конечном расстоянии друг от друга. Эта длина представится в виде интеграла

$$\int_A^B \sqrt{\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k},$$

взятого по кривой, соединяющей A и B (для того чтобы эта кривая была задана, например, в параметрической форме, нужны такие три функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ переменной t , которые при некотором значении $t=t_0$ дают координаты x_1 , x_2 , x_3 точки A , при другом значении $t=t_1$ дают координаты точки B , а при промежуточных значениях t дают промежуточные точки кривой. Коэффициенты g_{ik} , которые являются, вообще говоря, функциями от x_1 , x_2 , x_3 , станут функциями t , которые мы обозначим $g_{ik}(t)$, вместо dx_i нужно будет написать $\frac{dx_i(t)}{dt} dt$ и длина линии от A до B выразится определенным интегралом

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) dt, \text{ где } \varphi(t) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^3 g_{ik}(t) \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{dx_k(t)}{dt}}.$$

В частном случае, когда $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, а все прочие g_{ik} равны нулю, формула (3) дает

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

т. е. то же самое, что и формула (2). Ввести такую координатную систему, чтобы коэффициенты g_{ik} обладали этим свойством, т. е. чтобы при $i=k$ они равнялись единице, а при $i \neq k$ нулю, всегда можно; для этого необходимо и доста-

точно взять одну из возможных систем прямоугольных координат, что никогда и никем в евклидовском пространстве не возбраняется. Если от координат x_1, x_2, x_3 мы переходим к новым координатам x'_1, x'_2, x'_3 , которые являются функциями старых и функциями от которых в свою очередь являются старые координаты, то достаточно ввести функции

$$g_{ik}' = \sum_{j,l=1}^3 g_{jl} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k}, \quad (4)$$

чтобы было

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}' dx'_i dx'_k &= \sum_{j,l,i,k=1}^3 g_{jl} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} dx'_i dx'_k = \\ &= \sum_{j,l=1}^3 g_{jl} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dx'_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} dx'_k = \sum_{j,l=1}^3 g_{jl} dx_j dx_l = ds^2. \end{aligned}$$

Функции g_{ik}' в новой системе координат играют ту же самую роль, какую функции g_{ik} играли в старой. Формула (4) представляет, следовательно, закон преобразования функций g_{ik} . В евклидовском пространстве мы согласно сказанному всегда можем таким образом подыскать новую координатную систему, чтобы формула (4) дала $g_{ik}' = 1$ при $i=k$ и $g_{ik}' = 0$ при $i \neq k$. Если дана координатная система, т. е. дан способ обозначать любую точку системой трех чисел x_1, x_2, x_3 и даны коэффициенты g_{ik} , представляющие функции от этих переменных x_1, x_2, x_3 , то в евклидовском пространстве всегда можно найти такие функции x_i (x'_1, x'_2, x'_3), ($i=1, 2, 3$), чтобы формула (4) дала нужные g_{ik} . Что же будет в том случае, если g_{ik} таковы, что такие функции найти невозможно? Ясно, что это не будет евклидовским пространством. Таким образом совершенно естественно и просто мы приходим к идее неевклидовой геометрии. Стоит только отбросить совершенно несущественное ограничение числа измерений пространства, накладываемое нашим бедным пространственным воображением, чтобы прийти к формулировке геометрии Римана.

Пространством или континуумом Римана называется совокупность точек, характеризующихся заданием n координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, меняя которые в известных пределах (в частном случае от $-\infty$ до $+\infty$) мы получим все точки континуума, и кроме того заданием n^2 функций g_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) от этих n координат при том условии, что $g_{ik} = g_{ki}$ для всех i и k и что определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} \quad (5)$$

не обращается в нуль ни в одной точке континуума. Непрерывный ряд точек, соединяющих две точки A и B , называется линией; длина линии вычисляется в виде взятого вдоль нее интеграла

$$\int_A^B \sqrt{\sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k}.$$

Таким образом расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n)$ по определению задается формулой (мероопределением)

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k, \quad (6)$$

причем формулой

$$g_{ik}' = \sum_{j,l=1}^n g_{jl} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial x_l}{\partial x_k'}$$

определяются те коэффициенты g_{ik}' , которые становятся на место коэффициентов g_{ik} , когда от координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ мы переходим к другой системе координат $x_1', x_2', \dots, x_n'$. В том частном случае, когда возможно ввести такое преобразование координат, чтобы было $g_{ik}' = 0$ при $i \neq k$ и $g_{ik}' = 1$ при $i = k$, пространство с мероопределением (6) называется n -мерным евклидовским пространством. Но это не всегда возможно, и евклидова геометрия оказывается

лишь маленьким частным случаем гораздо более всеобъемлющей геометрии Римана.

Перед тем как перейти к формулировке законов теории тяготения и закона распространения света в общей теории относительности, выведем одну теорему, которой нам в дальнейшем придется пользоваться. Для этого рассмотрим задачу: в n -мерном пространстве Римана с мероопределением (6) даны две точки A и B ; требуется соединить их кратчайшей линией (кратчайшей с точки зрения законов геометрии этого пространства, т. е. такой линией, чтобы интеграл

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k}$$

принимал наименьшее возможное для него значение). Это условие удовлетворится только такими линиями, для которых

$$\delta \int_A^B ds = 0, \quad (7)$$

т. е. длина которых (с точностью до бесконечно малых второго порядка) равна длине всякой другой бесконечно близкой к ним линии, соединяющей те же точки A и B . Линии, удовлетворяющие условию (7), называются геодезическими линиями. Выведем дифференциальные уравнения геодезической линии. Имеем

$$\begin{aligned} \delta(ds) &= \delta \sqrt{\sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k} = \frac{1}{2} \delta \frac{\sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k}} = \\ &= \frac{1}{2ds} \sum_{i,k=1}^n dx_i \dot{dx}_k \delta g_{ik} + \frac{1}{2ds} \sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i \delta dx_k + \\ &\quad + \frac{1}{2ds} \sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_k \delta dx_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left\{ \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta g_{ik} + g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{d}{ds} (\delta x_k) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \frac{d}{ds} (\delta x_i) \} ds = \\
 = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j,k=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \delta x_j + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g_{ik} \frac{dx_i}{ds} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{dx_j}{ds} \right) \frac{d}{ds} (\delta x_k) \right\} ds.
 \end{aligned}$$

Поэтому условие геодезической линии получит вид

$$\begin{aligned}
 0 = \delta \int_A^B ds = \int_A^B \delta (ds) = \frac{1}{2} \int_A^B \sum_{i,j,k=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \delta x_j ds + \\
 + \frac{1}{2} \int_A^B \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{k=1}^n g_{jk} \frac{dx_k}{ds} \right) \frac{d}{ds} (\delta x_j) ds.
 \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл по частям, причем будем помнить, что производится сравнение искомой кривой с такими бесконечно близкими к ней кривыми, которые проходят через те же точки A и B , иными словами, что δx_j исчезает в начале и в конце пути интегрирования. Поэтому интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}
 0 = \delta \int_A^B ds = \frac{1}{2} \int_A^B \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i,k=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \right. \\
 \left. - \frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{k=1}^n g_{jk} \frac{dx_k}{ds} \right) \right\} \delta x_j ds.
 \end{aligned}$$

Так как вариации δx_j независимы друг от друга, то обращение интеграла в нуль требует, чтобы коэффициенты при вариациях δx_j обращались в нуль во всех точках пути интегрирования, иными словами, для всех значений j должно быть

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,k=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{dg_{ij}}{ds} \frac{dx_i}{ds} - \sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{d^2 x_i}{ds^2} - \\
 - \sum_{k=1}^n \frac{dg_{jk}}{ds} \frac{dx_k}{ds} - \sum_{k=1}^n g_{jk} \frac{d^2 x_k}{ds^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Последняя сумма, как нетрудно видеть, равна третьей от конца, поэтому можно писать

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right) + \\ + \sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0, \quad (8)$$

если воспользоваться очевидными равенствами

$$\frac{dg_{ij}}{ds} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds}, \quad \frac{dg_{jk}}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds}.$$

Введем теперь следующее обозначение: обозначим через g^{ik} (со значками i и k наверху) алгебраическое дополнение элемента g_{ik} в определителе g (формула 5), деленное на этот самый определитель. Из элементарных свойств определителей следует, что

$$\sum_{j=1}^n g^{ij} g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=l \\ 0 & \text{при } i \neq l. \end{cases}$$

Если, как это принято в физике, обозначим символом δ_{il} число, равное единице при $i=l$ и нулю при $i \neq l$, то получим

$$\sum_{j=1}^n g^{ij} g_{ij} = \delta_{il}. \quad (9)$$

Помножим обе части формулы (8) на g^{ij} и просуммируем по j ($=1, 2, \dots, n$). Мы получим с помощью формулы (9)

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \sum_{j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right) + \\ + \sum_{i=1}^n \delta_{il} \frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0.$$

В последней сумме исчезают все члены, за исключением того, в котором $i=l$ (по свойству символа δ_{il}). Учтя это и введя обозначение

$$\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right), \quad (10)$$

мы получим окончательные уравнения геодезической линии

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{i,k=1}^n \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \quad (11)$$

в которых символы $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$, называемые скобками Христоффеля, определяются формулой (10). Скобки Христоффеля являются, как видно из (10), функциями координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые можно вычислить, если только известны функции g_{ik} от тех же координат. Так как всегда должно иметь место равенство $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} ki \\ l \end{matrix} \right\}$,

что нетрудно проверить по формуле (10), то число независимых друг от друга скобок Христоффеля в пространстве n измерений должно равняться $\frac{n^2(n+1)}{2}$ (произведение числа возможных значений значка l на число $n + \frac{n(n-1)}{2}$ возможных комбинаций чисел $1, 2, \dots, n$ с повторениями). Так, напр., в случае $n = 4$, имеющем значение для общей теории относительности (четырехмерный континуум), имеем $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ независимых скобок Христоффеля.

§ 3. Основные уравнения и космологическая проблема. Решение Эйнштейна и де-Ситтера.

Вооружившись этим минимумом необходимых сведений по дифференциальной геометрии, вновь отойдем от математических абстракций для того, чтобы притти в соприкосновение с действительностью. Мир вещей и событий, с которыми имеет дело физика, представляет собой четырехмерный континуум. Ведь для характеристики какого-нибудь физического явления необходимо указать, что именно происходило в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

Каждая точка пространства характеризуется тремя координатами — пространство трехмерно, как учит нас ежедневный опыт; каждый момент времени характеризуется одной координатой (показанием часов или, что то же самое,

промежутком времени, протекшим от некоторого вполне определенного момента, напр., от полудня). Совокупность пространства и времени является формами существования материи; для характеристики всякого физического явления должны быть известны все характеризующие его физические величины в каждой точке этого четырехмерного фона,* т. е. в функции четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4 , из которых одна есть время, измеренное некоторым вполне определенным наблюдателем, а три другие — измеренные им же пространственные координаты (под наблюдателем в теории относительности подразумевается определенная координатная система, т. е. определенный способ измерять эти четыре координаты). При этом теория относительности постулирует: существуют (в данной координатной системе) такие величины g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$), удовлетворяющие условию симметричности ($g_{ik} = g_{ki}$) и неисчезновения определителя (5) (где $n = 4$), которые обладают следующими свойствами: 1°, если в выражении

$$ds^2 = \sum_{i, k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k$$

положить равным нулю дифференциал той координаты (напр., x_4), которая у данного наблюдателя обозначает время, и, кроме того, переменить знак, то получится выражение $ds^2 = - \sum_{i, k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k$, определяющее геометрию про-

странства с точки зрения этого наблюдателя (т. е. определяющее для данного наблюдателя поведение масштабов, служащих для определения длин, объемов, углов и т. д.); 2°, если световой сигнал, поданный в точке с пространственными координатами x_1, x_2, x_3 в момент времени x_4 , был принят в момент времени $x_4 + dx_4$ в точке $x_1 + dx_1$,

$x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$, то $ds^2 = \sum_{i, k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k = 0$; 3°, при переходе от одного наблюдателя к другому, т. е. при переходе

* См. примечания в конце статьи. *Ред.*

от одной координатной системы (x_1, x_2, x_3, x_4) к другой (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) функции g_{ik} заменяются такими g'_{ik} , что

$$\sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{i,k=1}^4 g'_{ik} dx'_i dx'_k, \text{ т.-е. что величина } ds^2 \text{ оста-}$$

ется неизменной (величина ds , представляющая важнейший инвариант теории относительности, называется интервалом между событиями x_1, x_2, x_3, x_4 и $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4$). 4°, если наблюдатель, пользующийся вещественными координатами, установил такую систему координат, в которой в данной точке все g_{ik} , где $i \neq k$, исчезают, то из остальных g_{ik} , т. е. из чисел $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}$, три будут иметь один знак, а четвертое (стоящее коэффициентом при квадрате дифференциала времени) другой знак; 5°, незаряженные электричеством тела (или, точнее, тела, не подверженные действию электромагнитных сил) движутся таким образом, что линия, соединяющая их последовательные положения на четырехмерном пространственно-временном фоне, оказывается геодезической линией $\delta f ds = 0$; то же самое относится и к перемещению световых частиц (фотонов), т. е. к распространению электромагнитных колебаний по линиям световых лучей.

Претензии всех этих постулатов, как видит читатель, весьма велики; ими определяется геометрия пространства (постулат 1°), скорость распространения световых сигналов (постулат 2°) и тем самым и поведение часов (поскольку в физике пользуются для идеальной сверки двух находящихся в различных местах часов следующим условием: если из пункта А подан в пункт В световой сигнал, отразившийся в пункте В и попавший обратно в пункт А, то время приема сигнала в пункте В, измеренное по часам пункта В, должно быть средним арифметическим между моментами подачи сигнала из А и обратного его приема, измеренными по часам пункта А). Кроме этого, 5-й из перечисленных постулатов, определяющий законы движения тел, на которые не действуют силы, дает, следовательно, поле инерции рассматриваемого четырехмерного фона. Простейший случай применения перечисленных постулатов

имеет место тогда, когда существует возможность ввести такую координатную систему x, y, z, t , что

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (12)$$

где c — положительная постоянная. В этом случае ds^2 , получаемый для пространства согласно 1-му постулату, имеет вид $dx^2 + dy^2 + dz^2$, следовательно, поведение масштабов в этом пространстве соответствует обыкновенной геометрии Евклида; согласно 2-му постулату скорость света равняется c , так как для того, чтобы световой сигнал, поданный из точки x, y, z , достиг точки $x + dx, y + dy, z + dz$ через промежуток времени dt , требуется условие

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = c;$$

4-й постулат удовлетворен; 5-й постулат требует, чтобы траектория тела, на которое не действуют силы, определялась уравнениями $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2} = 0$ (так как все скобки Христофеля исчезают, см. формулы 10 и 11), откуда вытекает, что x, y, z и t являются линейными функциями s ; исключая s , найдем, что x, y и z суть линейные функции t , т. е. тело, не подверженное действию сил, движется равномерно и прямолинейно (первый закон Ньютона); наконец, из того же 5-го постулата вытекает, что лучи света — прямые линии. Итак, все обстоит замечательно просто в том случае, когда четырехмерный континуум (четырехмерный мир, как говорят физики) обладает по крайней мере в некоторой своей части мероопределением (12); но нет никакой необходимости в том, чтобы мероопределение было действительно таким; в частности, опыт показывает, что вблизи больших масс (напр., вблизи земли или небесных тел) мероопределение четырехмерного мира существенно отличается от (12); тела, на которые не действуют силы, уже не подчиняются первому закону Ньютона в форме $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2} = 0$; вместо этого они движутся по закону (11), где нужно положить $n=4$, $x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=t$. В этом случае физика говорила, что на эти тела действует „сила тяготения“, исходя-

щая от упомянутых больших масс; по терминологии же релятивистской физики эти тела движутся по инерции, но поле инерции видоизменено близким присутствием массивных тел. Закон, которому удовлетворяет поле инерции g_{ik} в присутствии материальных тел и лучистой энергии, называется законом тяготения; мы перейдем теперь к формулировке этого закона, причем заметим заранее, что хотя из этого закона и вытекает, что мероопределение (12) возможно только в случае отсутствия материальных тел, но ничуть не вытекает обратное заключение, а именно, что в случае отсутствия материальных тел мероопределение (12) должно обязательно иметь место. Этот результат, согласно которому тяготение [а под тяготением мы обычно подразумеваем несовпадение мероопределения четырехмерного мира с его простейшей формой (12)] может проявляться и в отсутствии массивных „притягивающих“ тел, имеет громадное значение для релятивистской космологии.

Для того, чтобы написать закон тяготения в той форме, в которой он был открыт Эйнштейном, введем величины G_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$), называемые „компонентами сокращенного тензора Римана-Христоффеля“. Определение этих величин таково:

$$\begin{aligned}
 G_{ik} = & - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{i k}{j} \right\} + \sum_{j, l=1}^4 \left\{ \frac{i j}{l} \right\} \left\{ \frac{k l}{j} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \log \sqrt{-g} - \\
 & - \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{i k}{j} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \sqrt{-g}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

откуда между прочим видно, что $G_{ik} = G_{ki}$. Мы не будем здесь входить в подробное объяснение того, почему именно это сложное выражение, а не какое-либо другое играет роль в формулировке закона тяготения; заметим только, что с этим связано важное свойство этой формулировки, а именно то, что она не зависит от специальной координатной системы, выбранной тем или иным наблюдателем. Обозначим буквой G величину

$$G = \sum_{i, k=1}^4 g^{ik} G_{ik}. \quad (14)$$

Если мы обозначим буквой ρ плотность в данной точке четырехмерного мира (включая сюда не только число грамм материи в кубическом сантиметре, но и число грамм лучистой энергии в той же единице объема), ** а буквой p давление лучистой энергии, то закон тяготения Эйнштейна, которым определяется зависимость геометрии мира от присутствия в нем материальных тел и лучистой энергии, выразится в следующей форме:

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} + \lambda g_{ik} + \kappa \left(\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 g_{i\alpha} g_{k\beta} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{dx_{\alpha}}{ds} \frac{dx_{\beta}}{ds} - g_{ik} \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (15)$$

где величины $\frac{dx_{\alpha}}{ds}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) определяют скорость движения материи в данной точке (если в выбранной координатной системе $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$, то $\frac{dx_1}{ds} : \frac{dx_2}{ds} : \frac{dx_3}{ds} : \frac{dx_4}{ds} = v_x : v_y : v_z : 1$, где v_x, v_y, v_z — слагающие скорости материи, причем $\sum_{i,k=1}^4 g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 1$), величина λ есть некоторая универсальная постоянная, значение которой еще неизвестно,¹ а буквой κ обозначена помноженная на 8π и деленная на квадрат скорости света постоянная Ньютона закона тяготения ($\kappa = 1,87 \times 10^{-27} \text{ г}^{-1} \text{ см}$). Мы не будем здесь объяснять, почему закон тяготения (15) имеет именно эту, а не какую-либо другую форму;² все подроб-

¹ Постоянная λ во всяком случае очень мала: ее вероятное значение имеет порядок величины 10^{-54} см^{-2} . Если допустить, что λ не нуль, то

величина $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ представит „естественную“ единицу длины; по мнению Эддингтона (см. его „Mathematical Theory of Relativity“), существование такой единицы длины необходимо, так как в противном случае „электрон не знал бы, каких ему быть размеров“.

² Читатель, который сравнит формулу (15) с той формулой закона тяготения, которая приводится, напр., у Эйнштейна в его Kosmologische Betrachtungen (см. список литературы), заметит разницу между ними, которая объясняется тем, что у Эйнштейна рассматривается тот случай, когда лучистая энергия отсутствует, но частицы материи движутся с самыми

ности об этом вопросе читатель найдет в любом хорошем курсе теории относительности (напр., у Эддингтона, Вейля или Лауэ). Если мы вспомним, что в изотропном поле лучистой энергии плотность лучистой энергии равна утроенному ее давлению, то найдем, что величина ρ может быть представлена в виде

$$\rho = \rho_0 + \frac{3p}{c^2}, \quad (16)$$

где ρ_0 — материальная плотность (число единиц массы материи в единице объема), а $\frac{3p}{c^2}$ — число единиц массы лучистой энергии в единице объема. Величины ρ и p в данной точке четырехмерного мира оказываются одинаковыми для всех возможных наблюдателей, т. е. не зависят от координатной системы; тогда, как доказывается в курсах теории относительности, закон тяготения (15) также не зависит от координатной системы; иными словами, если он выполняется в форме (15) для одного наблюдателя, то точно в такой же форме он будет выполняться и для другого наблюдателя, хотя координаты x_i , а следовательно и $\frac{dx_i}{ds}$ и также все g_{ik} и G_{ik} будут уже другие (в этом заключается известное „требование ковариантности“, деспот современной физики, которому должен подчиниться всякий физический закон, претендующий на то, чтобы его считали истинным).

Теперь мы в состоянии подойти непосредственно к космологической проблеме и к тем ее решениям, которые до последнего времени были известны. Если мы станем на ту высокую точку зрения, о которой было упомянуто в § 1,

разнообразными и хаотически распределенными скоростями (молекулы жидкости или газа): p в его формулах обозначает давление жидкости или газа (а не давление лучистой энергии), а $\frac{dx_a}{ds}$ относятся не к действительным скоростям частиц, а к скорости центра тяжести очень малого объема вещества, который тем не менее содержит огромное количество молекул; следует заметить, впрочем, что по поводу некоторых подробностей формулы (15), относящейся к тому случаю, когда присутствует лучистая энергия, между физиками еще не достигнуто окончательного согласия.

и будем считать, что мир заполнен материей и излучением с равномерной плотностью, то наша задача будет заключаться в том, чтобы отыскать шестнадцать функций g_{ik} от четырех координат, удовлетворяющие условию $g_{ik} = g_{ki}$, условию неравенства нулю определителя $g = ||g_{ik}||$ и четвертому постулату, и являющиеся вместе с тем решениями уравнения (15) при некоторых постоянных ρ и p . В истории релятивистской космологии сыграли большую роль прежде всего три решения, которые де-Ситтер назвал решениями A , B и C и из которых последнее является до некоторой степени „тривиальным“. Рассмотрим эти три решения по порядку.

Решение A было дано Эйнштейном [1]. Положим, $x_1 = \chi$, $x_2 = \vartheta$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = t$ и рассмотрим четырехмерный континуум, в котором

$$g_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k, \quad g_{11} = -R^2, \quad g_{22} = -R^2 \sin^2 \chi, \\ g_{33} = -R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta, \quad g_{44} = c^2,$$

где c — скорость света (3×10^{10} см/сек), а R — некоторая постоянная величина с размерностью длины, и где χ и ϑ меняются от 0 до π , а φ от 0 до 2π . В таком четырехмерном мире ds^2 выражается формулой

$$ds^2 = -R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] + c^2 dt^2. \quad (17)$$

Тот, кто умеет, насиливая свое пространственное воображение, мыслить терминами многомерных пространств, получит „наглядное“ представление о геометрии этого четырехмерного мира, если рассмотрит пятимерное евклидово пространство с прямоугольными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и в нем четырехмерный прямой цилиндр радиуса R , ось которого совпадает с осью x_1 . Уравнения такого цилиндра выразятся по аналогии с двухмерной цилиндрической поверхностью, расположенной в трехмерном пространстве, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \\ x_2 &= R \cos \xi_2 \\ x_3 &= R \sin \xi_2 \cos \xi_3 \\ x_4 &= R \sin \xi_2 \sin \xi_3 \cos \xi_4 \\ x_5 &= R \sin \xi_2 \sin \xi_3 \sin \xi_4 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — четыре параметра или координаты, определяющие положение точки на цилиндре. Для того, чтобы получить всевозможные точки сечения цилиндра плоскостью $x_1 = \text{const}$, необходимо изменять ξ_2 и ξ_3 от 0 до π , а ξ_4 от 0 до 2π . Так как пятимерное пространство было предположено евклидовым, то

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2.$$

Подставляя сюда дифференциалы координат x_i , вычисленные из формулы (18), мы увидим, что ds^2 на поверхности цилиндра равен

$$ds^2 = d\xi_1^2 + R^2 [d\xi_2^2 + \sin^2 \xi_2 (d\xi_3^2 + \sin^2 \xi_3 d\xi_4^2)].$$

Если теперь заменить R на iR (где i мнимая единица) и положить $\xi_1 = ct$, $\xi_2 = \chi$, $\xi_3 = \vartheta$, $\xi_4 = \varphi$, то мы получим из этого выражения ds^2 формулу (17). Таким образом (если не обращать внимание на мнимость) четырехмерный мир с мероопределением (17) является цилиндрическим миром радиуса R . Здесь мы в первый раз встречаемся с радиусом мира.

Каким должен представляться цилиндрический мир Эйнштейна наблюдателю, вынужденному в этом мире жить? Прежде всего оказывается, что если радиус мира, т. е. R , очень велик, то цилиндрическая форма мира так же мало сказывается на явлениях, происходящих в сравнительно небольших участках этого мира, как шарообразная форма земли сказывается на явлениях, происходящих в пределах одной комнаты. В самом деле, введем вместо координаты χ другую координату r посредством соотношения

$$\chi = \frac{r}{R}. \quad (19)$$

Мы получим

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 \left(\frac{\sin \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + c^2 dt^2,$$

и если R очень велико по сравнению с r , то можно приближенно писать

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + c^2 dt^2.$$

Но это последнее выражение ds^2 может быть посредством введения новых координат $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $z = r \sin \vartheta \sin \varphi$ преобразовано к виду

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2 dt^2,$$

который, как мы видели, указывает, что в мире все обстоит очень просто: свет распространяется по прямым линиям со скоростью c , тела, не подверженные силам, движутся прямолинейно и равномерно и т. д. При этом x , y , z суть прямоугольные координаты пространства, а следовательно r , ϑ , φ — обыкновенные полярные координаты, всем известные из аналитической геометрии. Это объясняет физический смысл координат χ , ϑ , φ формулы (17): ϑ и φ имеют обычное значение, а χ является расстоянием до начала координат, измеренным в единицах длины R .

Однако дело не обстоит так просто, если наблюдатель не будет ограничиваться измерениями в ближайшем соседстве с началом координат, а рассмотрит более обширные части мира или даже мир в целом. Тогда ему придется считаться с тем, что его трехмерное пространство обладает не мероопределением

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (\sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2),$$

а более сложным

$$ds^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)].$$

Если провести из начала координат, как из центра, радиусом $r = R\chi$ сферу, то величина ее поверхности окажется не $4\pi r^2$, а

$$4\pi R^2 \sin^2 \chi = 4\pi r^2 \left(\frac{\sin \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right)^2.$$

Заклученный между сферами радиусов $R\chi$ и $R(\chi + d\chi)$ объем, будет равен

$$4\pi R^2 \sin^2 \chi \cdot R d\chi.$$

Так как, меняя χ от 0 до π , мы исчерпаем все точки пространства, то полный объем трехмерного пространства для наблюдателя, у которого геометрия четырехмерного про-

странственно-временного мира описывается формулой (17), будет равен

$$V = \int_0^\pi 4\pi R^3 \sin^4 \chi d\chi^2 = 2\pi^2 R^3 \quad (20)$$

Этот объем следовательно конечен. Неевклидова геометрия такого трехмерного пространства обладает весьма непривычными свойствами в глазах того, кто привык представлять себе трехмерное пространство обязательно евклидовским и бесконечным, но в том случае, когда радиус R очень велик, парадоксы будут возникать лишь при рассмотрении явлений очень большого масштаба: достаточно малые части пространства с мероопределением (17) практически ничем не отличаются от частей обыкновенного пространства Евклида. Важным свойством решения A (которым обладают, разумеется, и решения B и C) является то, что все точки четырехмерного мира с мероопределением (17) совершенно равноправны: этот мир из каждой своей точки представляется совершенно таким же, как из каждой другой точки.

Убедимся теперь в том, что мероопределение (17) действительно решает космологическую проблему: если мы, последовательно применяя формулы (10), (13) и (14), вычислим выражения

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} + \lambda g_{ik}$$

при различных комбинациях i и k , то окажется, что при $i \neq k$ они все обращаются в нуль, но при $i = k = 1$ получается $1 - \lambda R^2$, при $i = k = 2$ к этому прибавляется еще множитель $\sin^2 \chi$, при $i = k = 3$, кроме него еще множитель $\sin^2 \vartheta$, а при $i = k = 4$ мы получим $\lambda c^2 - \frac{3c^2}{R^2}$. Если мы введем обозначение

$$T_{ik} = -\frac{1}{x} G_{ik} + \frac{1}{2x} G g_{ik} - \frac{\lambda}{x} g_{ik}, \quad (21)$$

то получим следовательно в цилиндрическом мире Эйнштейна

$$T_{11} = \frac{\lambda R^2 - 1}{x}, \quad T_{22} = \frac{\lambda R^2 - 1}{x} \sin^2 \chi, \\ T_{33} = \frac{\lambda R^2 - 1}{x} \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta, \quad T_{44} = \frac{3c^2}{x R^2} - \frac{\lambda c^2}{x}, \quad T_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Сравнивая с законом тяготения (15), находим, что он действительно удовлетворяется при условии

$$p = \frac{c^2}{\kappa R^2} - \frac{\lambda c^2}{\kappa}, \quad \rho = \frac{3}{\kappa R^2} - \frac{\lambda}{\kappa}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \\ \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}, \quad (22)$$

откуда между прочим следует

$$\rho_0 = \frac{2\lambda}{\kappa}, \quad \rho - \rho_0 = \frac{3p}{c^2} = \frac{3}{\kappa} \left(\frac{1}{R^2} - \lambda \right). \quad (23)$$

Мы видим отсюда, что четырехмерный мир с мероопределением (17) действительно может существовать, при чем материя и лучистая энергия в нем распределяется с равномерной плотностью и материя находится в относительном покое. Помножая плотность ρ на объем мира V , вычисленный по формуле (20), мы находим, что масса мира равна

$$M = \frac{6\pi^2 R}{\kappa} - \frac{2\pi^2 \lambda}{\kappa} R^3, \quad (24)$$

причем из всей этой массы на долю материи приходится

$$M_0 = \frac{4\lambda}{\kappa} \pi^2 R^3,$$

а на долю лучистой энергии

$$M - M_0 = \frac{6\pi^2}{\kappa} (R - \lambda R^3).$$

Мы видим, что при заданных значениях универсальных постоянных λ и κ свойства мира определяются его радиусом R , и мы можем подобрать этот радиус так, чтобы масса мира была наибольшей.

Так как

$$\frac{dM}{dR} = \frac{6\pi^2}{\kappa} (1 - \lambda R^2), \quad \frac{d^2 M}{dR^2} = -\frac{12\pi^2 \lambda}{\kappa} R,$$

то при положительных λ и κ эту задачу решает радиус

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (25)$$

что дает

$$p = 0, \quad \rho = \rho_0 = \frac{2}{\kappa R^2}, \quad M = M_0 = \frac{4\pi^2}{\kappa} R, \quad (26)$$

иными словами, в этом случае мы имеем мир, наполненный

материей с плотностью $\frac{2}{\kappa R^2}$ и совершенно свободный от излучения. Этот частный случай и был рассмотрен Эйнштейном в его работе 1917 г.; но мы видим, что на ряду с этим частным случаем требования космологической проблемы удовлетворяются, если положим $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (если положить $R > \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, то давление и плотность лучистой энергии станут отрицательными, что, насколько мы можем судить, невозможно). Мир будет тогда содержать кроме материи и лучистую энергию, и общая масса его будет определяться формулой (24).

Предположим на мгновение, что мир, рассмотренный с неоднократно упоминавшейся „высокой“ точки зрения, действительно таков, каким его рисует решение А. Принимая, что

$$\rho_0 = \rho = 2 \times 10^{-28} \text{ г/см}^3,$$

(см. § 1), мы найдем, что

$$R = 2,3 \times 10^{27} \text{ см} = 2300 \text{ А},$$

$$\lambda = 1,9 \times 10^{-55} \text{ см}^{-2},$$

$$M = 4,88 \times 10^{55} \text{ г}.$$

Вот, следовательно, наибольшая масса, которой может обладать вселенная, если она устроена по типу решения А. Эта масса в $2,46 \times 10^{22}$ раз превышает массу Солнца; при допущении, что каждая галактика в среднем содержит 10^{11} ☉, это дает $2,5 \times 10^{11}$ галактик во вселенной, из которых только 0,003% лежат в пределах видимости наших самых мощных телескопов. Заметим также, что если вселенная устроена по типу А и при этом $\rho = \rho_0 = 2 \times 10^{-28} \text{ г/см}^3$, то в ней не может быть больше, чем 3×10^{79} протонов.

Таково¹ было первое решение космологической пробле-

¹ Цифры, приведенные у нас в тексте, заимствованы из современных представлений о вселенной как о системе галактических систем (§ 1). В работе Эйнштейна [1] не было никаких числовых данных; основатель теории относительности избегал их, то ли считая все возможные оценки размеров мира слишком шаткими спекуляциями, то ли предоставляя эту часть задачи специалистам-астрономам. Но в работе де-Сит-

мы, которое дала теория относительности; независимо от вопроса о том, можно ли считать это решение приемлемым с астрономической точки зрения или нет, оно навсегда останется непревзойденным памятником безграничной смелости человеческого ума.

В том же 1917 г., в котором Эйнштейн дал только-что описанное решение *A* космологической проблемы, голландский астроном де-Ситтер показал [2], что существует и другое решение, названное им решением *B*, которое также удовлетворяет основным уравнениям (15) при условии постоянных в пространстве ρ и p .

Решение де-Ситтера представляет собою мир с мероопределением

$$ds^2 = c^2 \cos^2 \chi dt^2 - R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] \quad (27)$$

Для того, чтобы увидеть „наглядный“ геометрический смысл этого мероопределения, рассмотрим в пятимерном евклидовом пространстве с прямоугольными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 четырехмерную шаровую поверхность радиуса R . Ее уравнения в параметрической форме будут

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \xi_1 \\ x_2 &= R \sin \xi_1 \cos \xi_2 \\ x_3 &= R \sin \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3 \\ x_4 &= R \sin \xi_1 \sin \xi_2 \sin \xi_3 \cos \xi_4 \\ x_5 &= R \sin \xi_1 \sin \xi_2 \sin \xi_3 \sin \xi_4. \end{aligned}$$

т е р а, написанной в том же 1917 г. [2], можно найти оценки радиуса мира которые соответствуют решению *A*: так, например, положив $\rho = \rho_0 = 6 \times 10^{-24}$ г/см³, что отвечает найденной Каптейном плотности звезд в центре галактической системы (80 звезд на 1000 куб. парсеков), он получает $R = 1,35 \times 10^{25}$ см. Делая гипотезу, которая представлялась ему только „весьма вероятной“, о том, что за пределами нашей галактики имеется большое количество других галактик, и допуская, что масса каждой из них равна $\frac{1}{3} \times 10^{10} \odot$, а среднее расстояние между двумя соседними галактиками равно $1,5 \times 10^{23}$ см, де-Ситтер получает среднюю плотность вещества во вселенной 2×10^{-27} г/см³ и соответствующий радиус $7,5 \times 10^{23}$ см. При этом он делает оговорку, что этот радиус следует считать верхним пределом возможного радиуса мира, так как вполне возможно, что кроме масс, сосредоточенных в галактиках, во вселенной имеются и другие массы, учет которых должен дать большую среднюю плотность, а значит меньший радиус мира,

Из них вытекает

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 = \\ = R^2 \{ d\xi_1^2 + \sin^2 \xi_1 [d\xi_2^2 + \sin^2 \xi_2 (d\xi_3^2 + \sin^2 \xi_3 d\xi_4^2)] \}.$$

Введем

$$\sin \chi = \sin \xi_1 \sin \xi_2, \\ \operatorname{tgh} \frac{ct}{R} = i \operatorname{tg} \xi_1 \cos \xi_2, \quad \vartheta = \xi_3, \quad \varphi = \xi_4,$$

тогда

$$d\chi = \frac{\cos \xi_1 \sin \xi_2 d\xi_1 + \sin \xi_1 \cos \xi_2 d\xi_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi_1 \sin^2 \xi_2}}, \\ \frac{c}{R} dt = i \frac{\cos \xi_2 d\xi_1 - \sin \xi_1 \cos \xi_1 \sin \xi_2 d\xi_2}{\cos^2 \xi_1 + \sin^2 \xi_1 \cos^2 \xi_2}.$$

Элементарные выкладки, которые может проделать каждый наш читатель, дают

$$R^2 d\chi^2 - c^2 \cos^2 \chi dt^2 = R^2 (d\xi_1^2 + \sin^2 \xi_1 d\xi_2^2).$$

Заменяя R на iR и c на ic , мы получим как раз мероопределение (27). Итак четырехмерный мир с мероопределением (27) является сферическим миром.

Так как на поверхности шара ξ_1, ξ_2, ξ_3 менялись от 0 до π , а ξ_4 от 0 до 2π , то χ и ϑ должны меняться от 0 до π , φ от 0 до 2π , t от $-\infty$ до $+\infty$.

Если ввести $r = \chi R$, то мероопределение (27) принимает вид

$$ds^2 = c^2 \cos^2 \frac{r}{R} dt^2 - dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

откуда видно, что и мир де-Ситтера, как мир Эйнштейна, на расстояниях от начала координат очень малых по сравнению с радиусом R практически неотличим от мира с мероопределением $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Координаты $\chi, \vartheta, \varphi, t$ имеют такой же физический смысл как и в мире Эйнштейна (χ — расстояние до начала, измеренное в единицах R ; ϑ и φ — полярные углы, t — время).

На расстоянии $r = \frac{\pi}{2} R$ от начала координат ds^2 принимает вид

$$ds^2 = 0 \cdot dt^2 - R^2 [d\chi^2 + d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2],$$

т. е. определитель $g = ||g_{ik}||$ принимает значение нуль и в выражении ds^2 не исчезают только коэффициенты при $d\chi^2$,

$d\vartheta^2$ и $d\varphi^2$ (как если бы четырехмерный мир превратился в трехмерный). С этим связаны и другие парадоксы: если на расстоянии $R\chi$ от наблюдателя, расположенного в начале координат ($\chi=0$), находятся неподвижные ($d\chi=d\vartheta=d\varphi=0$) часы, то для этих часов имеем

$$ds = c \cdot \cos \chi \cdot dt,$$

а так как, с точки зрения теории относительности, часы есть прибор для измерения интервала ds и их показание равно интервалу, деленному на постоянный фактор c , то следовательно промежуток времени $d\tau$, отсчитанный по этим часам, равен

$$d\tau = \cos \chi \cdot dt,$$

где t — время, измеренное по часам наблюдателя (т. е. по часам, расположенным в начале координат). Чем дальше от наблюдателя часы, тем медленнее они с его точки зрения идут! Наконец при $\chi = \frac{\pi}{2}$, т. е. на расстоянии $\frac{\pi}{2} R$ от наблюдателя, должно быть $d\tau = 0$, т. е. часы, расположенные на таком расстоянии от него, представляются ему стоящими, а значит и все физические процессы, разыгрывающиеся во времени, представляются с этого расстояния приостановившимися. Фактически впрочем наблюдатель не сумеет ничего увидеть с такого расстояния, какими бы могущественными оптическими средствами он ни обладал: если мы вспомним, что для луча света, направленного к наблюдателю ($d\varphi = d\vartheta = 0$), скорость света определяется условием $ds^2 \equiv c^2 \cos^2 \chi dt^2 - R d^2 \chi^2 = 0$, то окажется, что промежуток времени, который необходим для того, чтобы световой сигнал пришел к наблюдателю с расстояния r , равен

$$\int_0^{\frac{r}{R}} \frac{R}{c} \frac{d\chi}{\cos \chi} = \frac{R}{c} \log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{r}{2R}}{1 - \operatorname{tg} \frac{r}{2R}}}.$$

При $r = \frac{\pi}{2} R$ этот промежуток времени оказывается бесконечным: письма, адресованные в пункт, отстоящий на расстоянии $\frac{\pi}{2} R$ от ближайшей почтовой конторы, в мире де-

Ситтера никогда не доходят до назначения, даже если почта передает их со скоростью света (т. е. передает их по радио). Наблюдателю, расположенному в начале координат, вселенная представляется ограниченной со всех сторон „горизонтом“ (как назвал его Вейль), находящимся на расстоянии $\frac{\pi}{2} R$. На этом „горизонте“ время перестало течь, древний Хронос, остановившись, удержал свою косу, природа замерла в вечном покое. Световые лучи, самые быстрые вестники в мире, никогда не успевают дойти к нам с горизонта; тем менее имеем мы возможность когда-либо узнать о том, что происходит за ним: вторая половина де-ситтеровского мира скрыта от наблюдателя еще секретней, чем скрыт от любопытного взгляда астронома загадочный второй лик Луны. Наш физический мир ограничен со всех сторон горизонтом $\chi = \frac{\pi}{2}$, как мир героев Гомера уходящим в бесконечность океаном. Но в отличие от океана Гомера, горизонт де-ситтеровского мира оказывается не только принципиально недостижимым, но даже вообще является иллюзией каждого отдельного наблюдателя: все точки сферического мира равноправны между собой, пространство каждого наблюдателя окружено таким же горизонтом, и если мы переместимся, желая стать к горизонту поближе, он будет удаляться от нас точно так же, как радуга удаляется от ребенка, пытающегося к ней подойти. Пространство-время де-Ситтера совершенно однородно, как и евклидово пространство, как и цилиндрическое пространство-время Эйнштейна.

Убедимся теперь в том, что сферический мир де-Ситтера действительно является одним из решений космологической проблемы. Для этого, как и прежде, вычислим выражения T_{ik} по формуле (21). Вычисление дает (при нумерации $x_1 = \chi$, $x_2 = \vartheta$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = t$)

$$T_{11} = \frac{\lambda R^2 - 3}{\kappa}, \quad T_{22} = \sin^2 \chi \frac{\lambda R^2 - 3}{\kappa}, \quad T_{33} = \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta \frac{\lambda R^2 - 3}{\kappa},$$

$$T_{44} = \frac{c^2 \cos^2 \chi}{\kappa} \left(\frac{3}{R^2} - \lambda \right), \quad T_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Сравнивая с формулой (15), находим

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad p = \frac{c^2}{\lambda} \left(\lambda - \frac{3}{R^2} \right),$$

$$\rho = \frac{p}{c^2} (\operatorname{tg}^2 \chi - 1), \quad c \cos \chi \frac{dt}{ds} = 1,$$

следовательно мир с мероопределением (27) будет решать космологическую проблему, т. е. давать равномерную плотность и давление, только при условии

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}. \quad (28)$$

Тогда получается

$$p = \rho = 0,$$

т. е. мир де-Ситтера свободен от материи и от лучистой энергии. Отсюда видно, что решение де-Ситтера только в том случае может претендовать на применимость к реальному астрономическому миру, если средняя плотность материи во вселенной не равна 2×10^{-28} г/см³, как представляется наблюдателю, вооруженному стодюймовым телескопом, а равна практически нулю (это будет справедливым, если количество материи во вселенной конечно, например, если за пределами части мира, доступной современным наблюдениям, скопление галактик скоро кончается и радиус мира R вместе с тем настолько велик, что частное от деления массы мира на его объем представляет исчезающе малую величину). Таким образом мир де-Ситтера представляет идеальный предельный случай; речь может идти только о том, можно ли пользоваться свойствами мира де-Ситтера в качестве первого приближения к свойствам действительного мира. В какой степени это делать можно, читатель узнает из следующего параграфа.

Сопоставим некоторые свойства мира Эйнштейна и мира де-Ситтера: 1. Мир Эйнштейна допускает бесчисленное множество вариаций; при тех же самых значениях постоянных κ и λ он может обладать различными радиусами, а в связи с этим также и различной массой и различным отношением материальной части вселенной к ее лучистой части.

2. Мир де-Ситтера при данных κ и λ может быть только один; его радиус определяется формулой (28); его масса равна нулю; ни материи ни лучистой энергии в нем нет.

3. Мир Эйнштейна в противоположность миру де-Ситтера не может существовать, будучи пустым: если (см. формулу 24) его масса M равна нулю, то радиус R удовлетворяет кубическому уравнению с корнями $0, \sqrt[3]{\frac{3}{\lambda}}$ и $-\sqrt[3]{\frac{3}{\lambda}}$. Но так как радиус мира Эйнштейна должен обязательно лежать в промежутке от 0 до $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (включительно), то остается только корень $R=0$, что соответствует несуществованию пространства. В этом, по словам Лауэ, содержится „наиболее резкая формулировка той мысли, что все пространственно-временные отношения, а значит и все физические явления вообще, обусловлены бытием материальных тел“. В мире же де-Ситтера отличный от нуля ds^2 , а следовательно и поле инерции, существует без присутствия материальных тел. Вот почему де-Ситтер указывал на то, что в основу решения Эйнштейна (решения *A*) положен „материальный постулат инерции“ Маха, в силу которого само существование инерции обусловлено наличием материальных тел, между тем как в решении де-Ситтера (решении *B*) этот постулат Маха заменен „математическим постулатом инерции“.

Выше мы упомянули о существовании, на ряду с гипотезами *A* и *B*, еще и третьей космологической гипотезы *C*, которую мы называли „тривиальной“. Это тот предельный случай, который получится и из решения Эйнштейна

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \left(\frac{\sin \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

и из решения де-Ситтера

$$ds^2 = c^2 \cos^2 \frac{r}{R} dt^2 - r^2 \left(\frac{\sin \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

если мы положим $R = \infty$. Геометрия, соответствующая решению C , определяется квадратом элемента длины

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Это обычное пространство-время специальной теории относительности, четырехмерный мир Минковского. Некоторые свойства его были формулированы уже выше. Если в формулах (22) мы положим $R = \infty$, то окажется, что

$$p = -\frac{\lambda c^2}{\kappa}, \quad \rho = -\frac{\lambda}{\kappa},$$

а так как p не может быть отрицательным, то приходится допустить, что

$$\lambda = 0, \quad p = 0, \quad \rho = 0;$$

то же самое вытекает и из решения де-Ситтера, если сделать R бесконечным (см. формулу 28). Мы увидим в дальнейшем, что решение C , не обладая ни одним из достоинств решений A и B , обладает всеми их недостатками.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ АСТРОНОМИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ РЕШЕНИЙ ДЕ-СИТТЕРА И ЭЙНШТЕЙНА.

Поместим в мир Эйнштейна и в мир де-Ситтера „пробное тело“, т. е. тело настолько малой массы, что его перемещение из одного места в другое не вызовет и не нарушит однородности мира. Мы будем для краткости называть такое пробное тело кометой. Уравнения движения кометы в том случае, когда на нее не действуют силы, определяются формулой (11). В случае мира Эйнштейна это будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \chi}{ds^2} - \sin \chi \cos \chi \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] &= 0 \\ \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + 2 \cotg \chi \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\chi}{ds} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \cotg \chi \frac{d\chi}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cotg \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 t}{ds^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

¹ Может возникнуть вопрос, почему λ не может быть отрицательным числом. Вопрос совершенно законный. Однако, если $\lambda < 0$ при $R = \infty$, то $\rho - 3 \frac{p}{c^2} = \frac{2\lambda}{\kappa} < 0$ (плотность обыкновенной материи отрицательна), почему это решение и приходится отбросить.

в случае же мира де-Ситтера

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\chi}{ds^2} - \sin\chi \cos\chi \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] - \\ - \frac{c^2}{R^2} \cos\chi \sin\chi \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\vartheta}{ds^2} + 2 \cotg\chi \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\chi}{ds} - \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2 \cotg\chi \frac{d\chi}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cotg\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0 \\ \frac{d^2t}{ds^2} - \tg\chi \frac{dt}{ds} \frac{d\chi}{ds} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Разберем оба случая по порядку.

Решение А. Из формулы (29) вытекает, что время t есть линейная функция s . С точки зрения наблюдателя, пользующегося для описания мира координатами χ , ϑ , φ , и t уравнение движения тела малой массы получается, если в первых трех формулах (29) заменить букву s буквой t . Легко видеть, что тело малой массы, на которое не действуют силы, движется по кратчайшей линии трехмерного пространства. Уравнения удовлетворяются и в том случае, если положить $\chi = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Иными словами, если на любом расстоянии от наблюдателя поместить тело малой массы и не сообщить ему начальной скорости, то оно останется в покое по отношению к наблюдателю.

Решение В. Если мы попробуем положить $\chi = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, то уравнения (30) не удовлетворятся (не следует забывать, что должно быть $c^2 \cos^2\chi \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - R^2 \left\{ \left(\frac{d\chi}{ds} \right)^2 + \sin^2\chi \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] \right\} = 1$). Тело малой массы, на которое не действуют силы, не может оставаться в покое по отношению к наблюдателю, а должно обязательно двигаться. Изучим это движение.

Последнее уравнение (30) имеет вид

$$\frac{d}{ds} \left(\cos^2\chi \frac{dt}{ds} \right) = 0.$$

Мы заключаем отсюда, что

$$\frac{d}{ds} = \frac{\text{const.}}{\cos^2\chi} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{ds^2} = \left(\frac{\text{const.}}{\cos^2\chi} \right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2 \tg\chi \frac{d\chi}{dt} \frac{d}{dt} \right).$$

Проведем плоскость $\varphi = \text{const}$, таким образом, чтобы в начальный момент было $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ (мы не предполагаем, что в начальный момент комета была обязательно в покое по отношению к наблюдателю). Тогда будет вообще $\varphi = \text{const}$, т. е. траектория тела, движущегося по инерции, будет вся расположена в одной плоскости. Далее мы получаем

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + 2\text{tg}^2\chi \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - \sin\chi \cos\chi \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{R^2}\right] = 0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\left(\text{tg}\chi + \text{cotg}\chi\right) \frac{d\chi}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

По примеру де-Ситтера введем вместо χ переменную

$$P = R \text{tg}\chi,$$

которая, заметим вскользь, на малых расстояниях от наблюдателя практически не отличается от $r = R\chi$, но на горизонте принимает значение ∞ , а не $\frac{\pi}{2} R$. Уравнения движения кометы тогда замечательным образом упрощаются, и мы находим

$$\frac{d^2P}{dt^2} - P \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{R^2} P,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{2}{P} \frac{dP}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

откуда сразу получается „интеграл площадей“

$$P^2 \frac{d\vartheta}{dt} = h \quad (h \text{ — постоянная интегриции})$$

и „интеграл живых сил“

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + P^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{R^2} P^2 + k \quad (k \text{ — другая постоянная}).$$

Исключая время t , получим дифференциальное уравнение траектории

$$\left(\frac{dP}{d\vartheta}\right)^2 \frac{h^2}{P^4} + \frac{h^2}{P^2} = \frac{c^2}{R^2} P^2 + k.$$

Проинтегрировать это уравнение легко, стоит только ввести новую переменную

$$y = \frac{1}{2P^2}.$$

Тогда элементарные выкладки дают

$$\left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 + 4y^2 = \frac{c^2}{h^2 R^2} + \frac{2ky}{h^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \vartheta &= \pm \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{c}{2hR}\right)^2 + \frac{k}{2h^2}y - y^2}} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2y - \frac{k}{2h^2}}{\sqrt{\frac{c^2}{h^2 R^2} + \frac{k^2}{4h^4}}} + \vartheta_0, \end{aligned}$$

где ϑ_0 — постоянная интегриации. Окончательное уравнение орбиты

$$R^2 \left[1 + \varepsilon \cos 2(\vartheta - \vartheta_0) \right] = \frac{2h^2}{k}, \quad (31)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4c^2 h^2}{R^2 k^2}}.$$

Траектория кометы, как видно из уравнения (31), является гиперболой (в полярных координатах R и ϑ , полюс которых совпадает с центром гиперболы). В самом деле, если мы введем

$$x = R \cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

$$y = R \sin(\vartheta - \vartheta_0)$$

и кроме того

$$a = h \sqrt{\frac{2}{k(\varepsilon + 1)}}, \quad b = h \sqrt{\frac{2}{k(\varepsilon - 1)}},$$

то получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Физический смысл полуосей a и b гиперболы весьма прост: заметим, что когда рассматриваемая комета движется по этой гиперболе, то „скорость“ ее v , как видно из интеграла живых сил, возрастает с „расстоянием“ R по закону

$$v^2 = \frac{c^2}{R^2} R^2 + k.$$

Когда комета ближе всего к наблюдателю ($\vartheta = \vartheta_0$), то расстояние и скорость соответственно равны

$$P_0 = h \sqrt{\frac{2}{k(\epsilon + 1)}}, v_0 = \sqrt{\frac{2c^2 h^2}{(\epsilon + 1)kR^2}} = k \frac{ch}{R} \sqrt{\frac{2}{k(\epsilon - 1)}},$$

откуда

$$a = P_0, b = \frac{R}{c} v_0.$$

Если $v_0 = 0$, то $b = 0$, и гипербола вырождается в прямую. Постоянными P_0 и v_0 можно заменить k и h . Мы имеем $h = P_0 v_0$ (ведь на расстоянии P_0 скорость должна быть перпендикулярна к радиусу-вектору; поэтому постоянная площадей равна произведению P_0 и v_0); приведенные выражения для P_0 и v_0 дают

$$k \frac{(\epsilon + 1)}{2} = \frac{h^2}{P_0^2} = v_0^2, \quad k \frac{(\epsilon - 1)}{2} = \frac{c^2 h^2}{R^2 v_0^2} = \frac{c^2}{R^2} P_0^2.$$

Исключая ϵ , получаем

$$k = v_0^2 - \frac{c^2}{R^2} P_0^2,$$

откуда помощью интеграла живых сил находим

$$v^2 = \frac{c^2}{R^2} P^2 + v_0^2 - \frac{c^2}{R^2} P_0^2.$$

Если мы вспомним, что $v^2 = \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + P^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$, где $\frac{dP}{dt} = v_p$ есть составляющая скорости по лучу зрения, а $P \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h}{P}$ поперечная составляющая, то, вычитая $\frac{h^2}{P^2} = \frac{P_0^2 v_0^2}{P^2}$ из v^2 , получим для лучевой составляющей следующую формулу де-Ситтера¹

$$\frac{v_p}{c} = \pm \frac{P}{R} \sqrt{\left(1 - \frac{P_0^2}{P^2}\right) \left(1 + \frac{v_0^2 R^2}{c^2 P^2}\right)}. \quad (32)$$

¹ Впрочем у де-Ситтера в его американской работе 1930 г. [5] эта формула, благодаря опiske, дана в неверном виде (именно в последней скобке написано $1 + \frac{v_0^2}{c^2 P^2}$ вместо $1 + \frac{v_0^2 R^2}{c^2 P^2}$), вследствие чего

он ошибочно заключает, что если $P \gg P_0$, то $\frac{v_p}{c}$ совпадает с $\pm \frac{P}{R}$ независимо от величины v_0 . В голландской же статье [5] формула написана правильно.

Если в теле, обладающем малой массой и движущемся по инерции по гиперболе (31), имеются атомы, испускающие определенный линейный спектр, то наблюдатель, находящийся в начале координат, быть может захочет измерить лучевую скорость движущегося тела по эффекту Доплера. Вычислить этот эффект весьма легко. Если (с точки зрения наблюдателя, расположенного в начале координат) световой сигнал с движущейся кометы был послан в момент времени t , то наблюдатель его получит в момент времени

$$t + \frac{R}{c} \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\cos \chi}.$$

Следующий световой сигнал был послан в момент времени $t + dt$, когда координаты движущегося тела были уже не χ и ϑ , а $\chi + d\chi$ и $\vartheta + d\vartheta$. Наш наблюдатель получит его в момент времени

$$t + dt + \frac{R}{c} \int_0^{\chi + d\chi} \frac{d\chi}{\cos \chi}.$$

Промежуток времени между приемом обоих сигналов будет

$$dt + \frac{R}{c} \frac{d\chi}{\cos \chi}.$$

Так как $P = R \operatorname{tg} \chi$, то из формулы (32), дающей $\frac{1}{c} \frac{dP}{dt}$, вытекает

$$\frac{R}{c} d\chi = \pm \sin \chi \cos \chi \sqrt{\left(1 - \frac{P_0^2}{R^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right) \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right)} dt.$$

Для того чтобы сравнить промежуток времени между приемом сигналов, измеренный по часам наблюдателя, с промежутком времени между отправкой сигналов, измеренным по часам на комете (в этом и состоит эффект Доплера), заметим, что должно быть

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} ds &= \sqrt{\cos^2 \chi - \frac{R^2}{c^2} \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - \frac{R^2}{c^2} \sin^2 \chi \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \sqrt{\cos^2 \chi - \sin^2 \chi \cos^2 \chi \left(1 - \frac{P_0^2}{R^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right) \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right) - \frac{R^2}{c^2} \sin^2 \chi \left(\frac{P_0 v_0}{R^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что если длина волны спектральной линии, посланной с кометы, была λ , то наблюдатель в начале координат получит излучение с длиной волны $\lambda + d\lambda$, где

$$\frac{\lambda + d\lambda}{\lambda} = \frac{dt + \frac{R}{c} \cos \chi}{\frac{1}{c} ds} =$$

$$= \frac{1 \pm \sin \chi \sqrt{\left(1 - \frac{P_0^2}{R^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right) \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right)}}{\sqrt{\cos^2 \chi - \sin^2 \chi \cos^2 \chi \left(1 - \frac{P_0^2}{R^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right) \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2 \operatorname{tg}^2 \chi}\right) - \frac{P_0^2 v_0^2 \cos^2 \chi}{R^2 c^2 \operatorname{tg}^2 \chi}}} \quad (33)$$

Такова точная формула¹ для эффекта Допплера. Если наблюдатель знает расстояние до кометы (т. е. ее координату P), и если он может считать, что $R \operatorname{tg} \chi \gg P_0$ и $v_0 \ll c$, то помощью формулы

$$\frac{\lambda + d\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 \pm \sin \chi}{\cos^2 \chi - \sin^2 \chi \cos^2 \chi}} = \frac{1 \pm \sin \chi}{\cos^2 \chi}$$

или

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \operatorname{tg}^2 \chi \pm \frac{\operatorname{tg}^2 \chi}{\cos^2 \chi} = \frac{\sin^2 \chi \pm \sin \chi}{1 - \sin^2 \chi} = \pm \frac{P}{R} \sqrt{1 + \frac{P^2}{R^2} + \frac{P^2}{R^2}}$$

он сможет определить радиус мира. Если $\sin \chi$ малая величина и можно пренебречь ее кубом и четвертой степенью, то получается приближенная формула

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \pm \sin \chi + \sin^2 \chi. \quad (34)$$

Мы видим, что эффект Допплера, который может быть измерен наблюдателем, происходит от двух причин: первая часть эффекта, которая может иметь и знак $+$ и знак $-$,

¹ Вейль [3] вывел формулу $\frac{d\lambda}{\lambda} = \operatorname{tg} \chi$ (без знака $\pm$). Зильберштейн [4] противопоставляет этой формуле свою, а именно $\frac{d\lambda}{\lambda} = \pm \sin \chi$ и видит ошибку Вейля не только в том, что вместо $\pm$ поставлен один только знак $+$, но и в том, что вместо $\sin \chi$ у Вейля стоит $\operatorname{tg} \chi$ (в действительности при этой степени приближения все равно, что $\sin \chi$, что $\operatorname{tg} \chi$).

происходит вследствие вызванного силами инерции движения кометы по ее гиперболической орбите (это движение может происходить как по тому, так и по другому направлению); вторая часть эффекта, квадратичная, а не линейная относительно $\sin \chi$, вызвана наличием множителя $\cos \chi$ при cdt , т. е. „замедлением времени“ на больших расстояниях от наблюдателя. Первая часть эффекта может быть названа действительным эффектом Допплера, вторая же, как не имеющая ничего общего с движением источника света, кажущимся эффектом Допплера. Оба эффекта возрастают по мере удалении источника света от наблюдателя.

В мире Эйнштейна, определяемом решением *A*, ничего подобного происходить не может. Скорость, с которой движется тело малой массы, в этом мире никаким образом не связана с ее расстоянием от наблюдателя; вторая же (кажущаяся) часть эффекта Допплера в мире Эйнштейна также не имеет места. То же относится и к решению *C*.

Уже де-Ситтер видел в наличии указанного доплеровского эффекта возможность эмпирической проверки решения *B* и сравнения этого решения с решением *A*. В своей основной работе [2] в *Monthly Notices* он указывает на то, что измеренные спектроскопическим путем скорости отдаленных от нас объектов, к которым принадлежат прежде всего спиральные туманности, необычно велики по сравнению со скоростями близких к нам звезд. В 1917 г. имевшийся эмпирический материал был весьма мал; де-Ситтер мог указать только на три туманности, скорости которых были достаточно хорошо измерены; это были

N. G. C. 224	с лучевой скоростью	—	311 км/сек
N. G. C. 1068	„	+	925 „
N. G. C. 4594	„	+	1185 „

[лучевые скорости измеряются по смещению спектральных линий по формуле $\frac{v}{c} = \frac{\delta \lambda}{\lambda}$; скорости, направленные от наблюдателя (смещение к красному концу) считаются положительными, а скорости, направленные к нему (смещение

в фиолетовую сторону), — отрицательными]. Расстояния до спиральных туманностей измерены тогда еще не были, и де-Ситтер совершенно наугад взял в качестве вероятного расстояния до этих объектов число 10^5 парсеков $\equiv 3 \times 10^{23}$ см (мы видели в § 1, что расстояние до N. G. C. 224 в действительности равно $2,8 \times 10^5$ парсеков, так что порядок величины был угадан де-Ситтером правильно).

При этом де-Ситтер произвел следующее рассуждение: смещение к красному концу, обусловленное квадратичным эффектом, имеет постоянный знак, смещения же, вызванные линейным эффектом, имеют разные знаки, и потому если оперировать средними величинами, то останется только смещение, обусловленное квадратичным эффектом. В самом деле для упомянутых трех туманностей среднее составляет $+600$ км/сек (смещение к красному концу). Для этого смещения де-Ситтер применяет формулу

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \sin^2\chi$$

(множитель $\frac{1}{2}$ был поставлен де-Ситтером очевидно по ошибке: он исходил из того, что в случае покоящейся по отношению к наблюдателю туманности должно быть $\frac{1}{c} ds = \cos\chi dt$ и весь эффект Допплера обусловлен разницей между временем наблюдателя dt и „собственным временем“ туманности $\frac{1}{c} ds$; отсюда $\frac{\lambda + d\lambda}{\lambda} = \frac{dt}{\frac{1}{c} ds} = \frac{1}{\cos\chi}$ и $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1 - \cos\chi}{\cos\chi} \sim \frac{1}{2} \sin^2\chi$). Если считать, что „расстояние“, играющее роль в астрономии при оценке яркости объектов, есть именно $R \sin\chi$, а не $R\chi$ или $R \operatorname{tg}\chi$ (ведь поверхность сферы, описанной вокруг начала координат, пропорциональна $R^2 \sin^2\chi$, поэтому сила света должна убывать обратно пропорционально $R^2 \sin^2\chi$), то из принятых де-Ситтером чисел вытекало

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{600}{300\,000} = \frac{1}{2} \sin^2\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{3 \times 10^{23}}{R} \right)^2,$$

откуда

$$R = 3 \times 10^{23} \sqrt{250} = 4,8 \times 10^{24} \text{ см} = 4,8A,$$

цифра довольно абсурдная с сегодняшней точки зрения (де-Ситтер снабдил ее замечанием: „конечно этот результат, выведенный всего лишь из трех туманностей, не имеет практической цены“).

По мере накопления эмпирического материала взгляды астрономов на значение больших скоростей отдаленных от нас объектов постепенно изменялись. В своей книге *The Mathematical Theory of Relativity* (Кембридж, 1923) Эддингтон опубликовал составленную Слайфером (обсерватория Лоуэлла в Аризоне) таблицу, представляющую сводку того, что было известно в феврале 1922 г. о лучевых скоростях спиральных туманностей. Таблица содержит данные о 41 туманности; из них 36 обладают положительной лучевой скоростью (движутся от нас), а остальные 5 — отрицательной (в том числе N. G. C. 221 и туманность Андромеды N. G. C. 224 движутся к нам со скоростью 300 км/сек.). Самая большая лучевая скорость из приведенных в таблице Слайфера принадлежит туманности N. G. C. 584 и составляет +1800 км/сек.¹ Из таблицы было очевидно, что среди отдаленных от нас объектов подавляющее большинство обладает положительными лучевыми скоростями. В настоящее время (1930) это следует считать совершенно установленными эмпирическим фактом: де-Ситтер [5] обработал весьма обширный материал наблюдений Маунт-Вильсоновской обсерватории, причем он задался целью установить корреляцию между лучевой скоростью туманности и ее расстоянием; надежными способами измерены расстояния лишь до немногих туманностей, но де-Ситтер расширил этот материал, оценив расстояния до многих других туманностей по их яркости и видимому диаметру. Оказалось, что между расстоянием и лучевой

¹ В настоящее время, как утверждает де-Ситтер, ссылаясь на неопубликованные материалы Маунт-Вильсоновской обсерватории, наибольшая измеренная лучевая скорость равна +12 000 км/сек.

скоростью, измеренной по смещению спектральных линий, существует коррелятивная связь

$$\frac{v}{c} = \frac{r}{2000},$$

где v — лучевая скорость, c — скорость света, r — расстояние (т. е. очевидно $R \sin \chi$), измеренное в единицах A . Но даже и в 1923 г., когда был известен только материал Слайфера, опубликованный впервые Эддингтоном, было ясно, что предложенное де-Ситтером объяснение, основанное на квадратичном, т. е. на кажущемся эффекте Доплера, не может быть верным. Если бы оно было действительно верным, то на квадратичный эффект постоянного знака накладывался бы линейный эффект переменного знака и только средние величины показывали бы красное смещение.

Из решения де-Ситтера никак не вытекает необходимость подавляющего преобладания положительных лучевых скоростей над отрицательными; правда, такое преобладание решению де-Ситтера не противоречит, но утешения от этого очень мало. Эддингтон и Вейль пытались различными правдами и неправдами объяснить это преобладание якобы присущим материи в де-ситтеровском мире стремлением к рассеянию; если бы материя действительно таковым обладала, то оставив из обоих знаков $+$ и $-$ только первый, мы получили бы для не слишком больших расстояний формулу

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \sin \chi$$

[так как в формуле (34) можно было бы пренебречь квадратичным эффектом по сравнению с линейным]. Сравнивая с эмпирической формулой де-Ситтера, мы получаем для радиуса де-ситтеровской вселенной значение

$$R = 2000 \ A = 2 \times 10^{27} \text{ см},$$

т. е. число приблизительно того же порядка величины, как и полученный в § 3 радиус эйнштейновской вселенной.

Людвиг Зильберштейн [4] энергично протестовал против открытой Вейлем и Эддингтоном „тенденции к рассеянию“, считая, что таковая совсем не вытекает из де-ситтеровской космологии, в чем он был совершенно прав, так как де-ситтеровский мир пустой; никакие всеобщие свойства материи не могут вытекать из де-ситтеровской космологии, куда материю вообще можно ввозить лишь контрабандой, в виде „комет“, т. е. „des riens visibles“ (тела, не обладающие массой). Отсутствие тенденции к рассеянию разумеется также не вытекает из решения де-Ситтера. Таким образом спор, загоревшийся из-за „тенденции к рассеянию“, несмотря на обильное применение находчивости и иронии со стороны спорящих сторон, был совершенно бесплодным спором. Не желая согласиться с неубедительными доводами Вейля и Эддингтона относительно необходимости сохранить в формуле эффекта Доплера только знак $+$, Зильберштейн впал в совершенно другую крайность: он закрыл глаза на спиральные туманности и занялся распределением скоростей между более близкими объектами, такими как шаровые звездные кучи и даже звезды нашего Млечного пути. По мнению Зильберштейна, существует коррелятивная связь между расстоянием этих объектов и измеренной их лучевой скоростью, причем в последней интересна только абсолютная величина, но не знак. В этом мнении Зильберштейн, насколько нам известно, был совершенно одинок; но мы не должны относиться к его взглядам с иронией, как хочет нас заставить Эддингтон, так как в них заключается во всяком случае не больше, а меньше путаницы, чем во взглядах Эддингтона и Вейля на пресловутую „тенденцию к рассеянию“. Выводы Зильберштейна следует отвергнуть не с точки зрения теории относительности, а с астрономической точки зрения. Изучение распределения скоростей среди звезд привело Зильберштейна к необходимости отстаивать гораздо меньшие значения радиуса де-ситтеровского мира, чем это делали все другие авторы. Так напр. в одной из своих последних публикаций [6] он утверждает, что радиус мира равен $1,55 \times 10^6$ парсеков,

т. е. около 5×10^{24} см или 5 А. Хотя он и говорит, что в такой вселенной может свободно поместиться несколько миллионов звездных систем подобных нашему Млечному пути, но читатель, просмотревший наш § 1, согласится с тем, что цифра 5×10^{24} см для астронома абсурдно мала.¹ По мнению Эддингтона (который в этом вопросе повидимому совершенно прав), корреляция между скоростями звезд и их расстояниями, открытая Зильберштейном, сводится по существу дела к вращению Млечного пути вокруг оси: если от скоростей, положенных Зильберштейном в основу вычислений, вычесть поправку, обусловленную этим вращением, изученным в работах Оорта, то от корреляции почти ничего не остается.

Из этого обзора видно, что до последнего времени положение релятивистской космологии было крайне неблагоприятно. Решение А, т. е. эйнштейновское пространство-время, должно было быть отброшено как несколько не объясняющее той закономерности, которая безусловно имеет место в распределении скоростей отдаленных объектов; вместе с ним должно было скромно удалиться и решение С, его частный случай. Оставалось только решение В, о котором его ревностные сторонники упорно утверждали, что именно оно согласуется с астрономическими фактами. Но мы только-что видели, что подобный „здоровый оптимизм“ был в данном случае едва ли уместен. Решение В объясняло только возрастание абсолютных величин скоростей с удалением от наблюдателя, но не могло объяснить постоянного знака этих скоростей. Да и как вообще могло быть что-нибудь благополучным в такой космологии, которая объявляла мир совершенно пустым и разрешала вво-

¹ С точки зрения Зильберштейна, расстояния до спиральных туманностей должны быть во много раз меньше, чем измеренные Хабблем. Так как видимая яркость туманности должна быть обратно пропорциональна $R^2 \sin^2 \chi$ (а не напр. $R^2 \operatorname{tg} \chi$), то измеренное по методу цефеид расстояние должно быть $R \sin \chi$, т. е. должно быть меньше радиуса мира, если только применявшаяся Хабблем связь между периодом цефеид и их абсолютной яркостью действительно справедлива. Современному астроному трудно считать это „если“ невыполненным.

дить лишь исчезающе малое пробное тело, как орудие для измерения поля инерции! В качестве такого „пробного тела“, такой „кометы“ сторонники решения де-Ситтера предлагали рассматривать спиральную туманность, галактическую систему, состоящую из десятков миллиардов солнц, да к тому же еще окруженную со всех сторон такими же галактическими системами на средних расстояниях 10^{24} см друг от друга. Не говоря уже о том, что средняя плотность материи во вселенной равная нулю чрезвычайно мало вероятна (так утверждает основатель теории относительности в своих принстонских лекциях, и следует, кажется, в этом с ним согласиться), сама величина радиуса мира, которая получается из сравнения формулы $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \sin \chi$ с фактами, является сильным аргументом против возможности де-ситтеровской космологии. По крайней мере для самого де-Ситтера в той работе [5], в которой он отрекся от своей космологии и сжег то, чему поклонялся, это было самым решающим аргументом. Радиус в 2000 A , который приблизительно совпадает с радиусом в 2300 A , вычисленным из плотности $\rho = 2 \times 10^{-28}$ г/см³ по формулам эйнштейновской космологии, сам по себе необычайно подозрителен. Наши телескопы проникают в глубины пространства на 150 A ; если радиус вселенной равен 2000 A , то масса вселенной (которая, все-таки, вероятно еще больше, нежели ее часть, заключенная внутри сферы с радиусом 150 A), слишком велика, для того чтобы окончательная средняя плотность могла считаться равной нулю и чтобы вселенная при этом только немного отступала от налагаемого космологическими теориями условия однородности. Все это приводит к тому, что и решение B , столь прославленное во всех курсах теории относительности, должно быть отброшено. В 1930 г. это довольно неожиданно признали самые рьяные паладины решения B —де-Ситтер и Эддингтон.

В следующем параграфе будут изложены те взгляды, которые пропагандируются ими теперь.

§ 5. НЕСТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ.

Решение Эйнштейна и решение де-Ситтера являются статическими решениями уравнений (15). Это значит, что и в эйнштейновском и в де-ситтеровском мире можно выбрать такую координатную систему, чтобы коэффициенты g_{ik} в выражении $ds^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k$ не были функциями времени, а зависели только от остальных координат, пространственных в тесном смысле этого слова. В самом деле оба мероопределения (13) и (27) уже удовлетворяют этим условиям. Однако нет необходимости ограничиваться подобными статическими решениями. Уже в 1922 г. покойный русский математик А. А. Фридман [7] рассмотрел четырехмерный мир с мероопределением

$$ds^2 = -R^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] + c^2 dt^2,$$

в котором, в отличие от мира Эйнштейна, R считается не постоянной величиной, а функцией времени. Однако Фридман ограничил свое решение условием $p=0$, т. е. потребовал, чтобы мир с таким мероопределением не содержал лучистой энергии; это ограничение не является физически необходимым. Работа Фридмана была наполовину забыта,¹ и только в 1927 г. Лемэтр [8] вновь рассмотрел то же мероопределение, применив его к миру, наполненному кроме материи также и лучистой энергией. Если мы ве-

¹ Возможно, что этому способствовало возражение, сделанное Фриману Эйнштейном [7]. Это возражение однако само основано на грубой ошибке; неправильно применяя формулу ковариантного дифференцирования, Эйнштейн утверждает, что четвертое из уравнений которыми выражается известная теорема о равенстве нулю расхождению тензора T_{ik} (уравнение сохранения энергии), гласит $\frac{dp}{dt}=0$. В действительности же при условии $p=0$ оно гласит $\frac{1}{R^3} \frac{d}{dt} (R^3 p) = 0$, являясь частным случаем уравнения (37), выведенного в тексте.

числим величины T_{ik} , определенные формулой (21), то окажется

$$T_{11} = \frac{\lambda R^2 - 1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa c^2} \left[\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 2R \frac{d^2 R}{dt^2} \right]$$

$$T_{22} = \sin^2 \chi T_{11}, \quad T_{33} = \sin^2 \vartheta T_{22},$$

$$T_{44} = \frac{c^2}{\kappa} \left(\frac{3}{R^2} - \lambda \right) + \frac{3}{\kappa R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2, \quad T_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Сравнивая это с уравнениями (15), мы получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 &= \frac{1}{c^2}, \\ p &= \frac{c^2}{\kappa} \left(\lambda - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{2}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} \right], \\ \rho &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{3}{R^2} - \lambda + \frac{3}{c^2 \kappa R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

откуда

$$\rho_0 = \rho - \frac{3p}{c^2} = \frac{6}{\kappa R^2} \left[\frac{1}{c^2} R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{c^2} R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 1 \right] - \frac{\lambda}{\kappa}. \quad (36)$$

Нетрудно проверить справедливость уравнения

$$\frac{1}{R^3} \frac{d}{dt} (R^3 \rho) + \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} \frac{p}{c^2} = 0, \quad (37)$$

которому можно сейчас же дать любопытное физическое толкование. Для этого введем объем мира V . Так как в каждый данный момент времени t геометрия трехмерного пространства такова же в случае решения Эйнштейна, то мы можем воспользоваться формулой (20) и писать $V = 2\pi^2 R^3$. Существует впрочем мнение (особенно привлекательное в случае решения де-Ситтера с его „горизонтом“), что каждой точке в нашем физическом пространстве соответствует не одна, а сразу две диаметрально противоположные точки сферического пространства с элементом длины $R \sqrt{d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}$; в этом случае нужно воспользоваться формулой $V = \pi^2 R^3$. Как бы то ни было, V совпадает с R^3 с точностью до постоянного множителя. Поэтому из уравнения (37) вытекает

$$d(V\rho c^2) + p dV = 0.$$

Так как массе мира, равной $V\rho$, соответствует, согласно известному принципу эквивалентности энергии и массы,

энергия $E = V\rho c^2$, то энергия мира $E = V\rho c^2$ и его объем V связаны уравнением

$$dE + p dV = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} dE = -p dV \\ dV = -\frac{dE}{p} \end{array} \right. \quad (33)$$

совершенно аналогичным уравнению адиабатического расширения или сжатия газа. Массы мира (материальная и лучистая) меняются со временем, с ними меняются и размеры мира. При расширении мира (а мы увидим, что именно оно должно происходить для того, чтобы можно было объяснить наблюдаемые скорости спиральных туманностей) его масса и его энергия (если только $\rho \neq 0$) уменьшаются. Так через 200 лет после смерти Ньютона неожиданно воскресло его старое предположение о том, что энергия мира непрерывно уменьшается. Противоречия закону сохранения энергии в уравнении (38) нет; напротив того, оно является следствием дифференциальной формы закона сохранения энергии [читатели, знакомые с общей теорией относительности, легко убедятся в том, что уравнение (37) есть одно из четырех уравнений, совокупность которых представляет релятивистский закон сохранения энергии и импульса: „расходимость тензора материи и энергии T_{ik} равна нулю“]. Если энергия мира уменьшается, то это потому, что она (непривычная фраза для слуха физика!) тратится на работу адиабатического расширения мира.

Для того чтобы рассмотреть вопрос ближе, необходимо найти зависимость радиуса мира R от времени. Строго говоря, одни только уравнения (36) не позволяют ответить на этот важный вопрос. Любая зависимость R от времени даст при подстановке в эти уравнения соответствующие зависимости для p и для ρ . Поэтому необходима какая-то новая физическая гипотеза. Если мы вспомним, что $\rho = \rho_0 + \frac{3p}{c^2}$ и подставим в (38) $E = V\rho c^2 = V\rho_0 c^2 + 3pV = M_0 c^2 + 3pV$, где M_0 — материальная масса мира, то мы получим вместо (38)

$$c^2 dM_0 + 4p dV + 3V dp = 0. \quad (39)$$

Лемэтр делает гипотезу, что материальная масса мира

постоянна ($M_0 = \text{const}$), откуда $4p dV + 3V dp = 0$ и наконец

$$p V^{\frac{4}{3}} = \text{const.}$$

Мир расширяется как адиабатически расширяющийся газ с отношением удельных теплоемкостей 1,33. К тому же заключению $M_0 = \text{const}$ мы придем, если сделаем, как Фридман, гипотезу $p = 0$. Эту гипотезу делает также и Эддингтон [9], оправдывая ее упрощением вычислений. Однако подобного рода допущение не может быть физически оправдано, так как по астрофизическим данным материальная масса мира непрерывно тает, превращаясь в излучение. Это должно быть принято во внимание при обсуждении уравнения (38). На этом настаивал Тольман [10], который повидимому стал разрабатывать этот круг идей совершенно независимо от работ Фридмана и Лемэтра. Тот же вопрос исследует и де-Ситтер [5], который однако приходит к тому заключению, что влияние аннигиляции материи *** должно быть весьма невелико.¹

¹ Следует заметить, что де-Ситтер [5], Эддингтон [9] и другие дают уравнениям (15) не то толкование, какое дано у нас в тексте,

а несколько другое; под $\frac{dx_i}{ds}$ они понимают не скорость отдельных частей материи (напр. галактик), а какую-то среднюю скорость (напр. скорость потоков галактик): соответственно этому под p подразумевается давление не одной только лучистой энергии, но также и давление потоков галактик, рассчитываемое так, как если бы на месте галактик были отдельные молекулы (по формулам кинетической теории такое давление равно двум третям кинетической энергии в единице объема). Такое толкование, так же как и наше, согласно с принципом относительности; можно строго показать, что оба толкования эквивалентны друг другу; однако существует разница между требованием, чтобы отдельные галактики покоились друг относительно друга, какое делается у нас, и требованием Эддингтона и де-Ситтера об отсутствии результирующих скоростей в беспорядочном „тепловом“ движении галактик. При строгом рассмотрении толкование де-Ситтера и Эддингтона приводит к более сложным формулам, так как газовое давление фигурирует в выражении плотности энергии с коэффициентом $\frac{3}{2}$, а не с коэффициентом 3, как давление лучистой энергии. Поэтому, если ρ — полная плотность массы (материальной и лучистой), а p — полное давление, то вели-

Введем, следуя де-Ситтеру, вместо ρ и p переменные

$$\alpha = \kappa \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) R^3 = \kappa \rho_0 R^3, \quad \beta = \frac{\kappa}{c^2} p R^4.$$

Тогда вместо уравнения (39) получится

$$R \frac{d\alpha}{dt} + 3 \frac{d\beta}{dt} = 0. \quad (40)$$

Так как материальная масса мира уменьшается, то $\frac{d\alpha}{dt}$ отрицательно, и де-Ситтер делает гипотезу

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = - \frac{\gamma}{R} \frac{dR}{dt},$$

где γ — постоянная положительная величина. Если эту гипотезу сделать, то окажется

$$\alpha = \alpha_0 R^{-\gamma},$$

где α_0 постоянная интегриации. Уравнение (40) тогда дает

$$\beta = \beta_0 + \frac{\gamma \alpha_0}{3(1-\gamma)} R^{1-\gamma},$$

откуда

$$p = \frac{c^2}{\kappa} \frac{\beta_0}{R^4} + \frac{\gamma c^2 \alpha_0}{3(1-\gamma)\kappa} \frac{1}{R^{3+\gamma}}.$$

Если ввести объем мира $V = 2\pi^2 R^3$, то количество лучистой энергии во вселенной окажется равным

$$2\pi^3 R^3 \cdot 3p = \frac{6\pi^2 c^2}{\kappa} \left(\frac{\beta_0}{R} + \frac{\gamma \alpha_0}{3(1-\gamma)} \frac{1}{R^\gamma} \right).$$

Это количество, как мы видим, при расширении мира уменьшается. Таким образом, как говорит де-Ситтер,

чина $\rho_0 = \rho - 3 \frac{p}{c^2}$ не есть „покоящаяся масса“ материи, как утверждают кажется де-Ситтер и Эддингтон. Практически, впрочем, „давление“ потоков галактик совершенно ничтожно и при расширении мира уменьшается скорее, чем давление наполняющей пространство лучистой энергии. Поэтому и Эддингтон и де-Ситтер в конце концов приходят к необходимости пренебречь кинематическим давлением (угасание индивидуальных движений по Эддингтону), и различие между обоими толкованиями исчезает. Давление лучистой энергии впрочем тоже ничтожно и становится все меньше, так как несмотря на непрерывное „таяние“ материи, вселенная расширяется настолько быстро, что плотность снующей в пространстве лучистой энергии должна все время уменьшаться (см. также примечание 2 к стр. 136).

„теория дает ответ на старый вопрос о том, что происходит с энергией, непрерывно излучаемой звездами в пространство. Эта энергия вся расходуется на адиабатическое расширение мира и даже ее оказывается для этого недостаточно“.

Замечательное свойство космологии Фридмана-Лемэтра заключается в том, что она дает совершенно ясное и простое объяснение того до сих пор бывшего загадочным факта, что все спиральные туманности имеют один и тот же знак лучевой скорости. Если мы напишем уравнения движения тела, движущегося по инерции в мире Фридмана-Лемэтра, то окажется

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{d\chi}{ds} - \sin \chi \cos \chi \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 - \\ - \sin \chi \cos \chi \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} + 2 \cotg \chi \frac{d\chi}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cotg \chi \frac{d\chi}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cotg \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{R}{c^2} \frac{dR}{dt} \left(\frac{d\chi}{ds} \right)^2 + \frac{R}{c^2} \frac{dR}{dt} \sin^2 \chi \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \\ + \frac{R}{c^2} \frac{dR}{dt} \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются, если мы положим $\chi = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, t есть линейная функция s . Это значит, что тело, бывшее в состоянии покоя по отношению к наблюдателю, останется в этом состоянии, т. е. не изменит своих координат χ , ϑ и φ . В таком покое по отношению к наблюдателю находится подавляющая масса окружающей его материальной вселенной. Но расстояния до неподвижных объектов этой вселенной, измеренные не в долях радиуса мира, а в сантиметрах, все время меняются, так как масштаб, в котором расстояния оказываются постоянными, есть меняющийся во времени масштаб. Легко вычислить происходящий вследствие этого эффект Доплера. Если световой сигнал высылается в момент времени t из точки с координатами χ , ϑ , φ , то время $t + \tau$ при-

ема этого сигнала наблюдателем, расположенным в начал координат, будет определяться равенством

$$\chi = \int_t^{t+\tau} \frac{c}{R} dt,$$

и так как путь световых волн есть прямая $\varphi = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$ и время их распространения определяется тем, что $ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 d\chi^2 = 0$. Следующий сигнал высылается из точки с теми же координатами χ , ϑ и φ в момент времени $t + dt$; момент приема сигнала будет уже не $t + \tau$, а $t + \tau + d\tau$, где

$$\chi = \int_{t+dt}^{t+\tau+d\tau} \frac{c}{R} dt = \int_t^{t+\tau} \frac{c}{R} dt + \left(\frac{c}{R}\right)_{t+\tau} d\tau - \left(\frac{c}{R}\right)_t dt,$$

откуда

$$d\tau : dt = \left(\frac{c}{R}\right)_t : \left(\frac{c}{R}\right)_{t+\tau} = (R)_{t+\tau} : (R)_t.$$

Продолжительность промежутка между отправлением обоих сигналов, измеренная по часам, находящимся на спиральной туманности, будет равна попрежнему dt , так как $d\chi = d\varphi = d\vartheta = 0$ и следовательно $\frac{1}{c} ds = dt$. Поэтому для эффекта Доплера будем иметь

$$\frac{\lambda + d\lambda}{\lambda} = \frac{d\tau}{dt}, \text{ откуда } \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{(R)_{t+\tau} - (R)_t}{(R)_t}$$

или

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\tau}{(R)_t} \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t+\tau}$$

где $0 \leq \eta \leq 1$. Если промежуток времени τ , в течение которого луч света доходит к нам из туманности, не настолько велик, чтобы радиус мира успел заметно измениться в течение этого промежутка, то можно приближенно положить

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\tau}{R} \frac{dR}{dt},$$

а так как при том же порядке приближения $\tau = \frac{r}{c}$, где r — расстояние до туманности, измеренное по формуле $r = R\chi$ (а не $r = \sin \chi$, как строго говоря нужно положить, чтобы

остаться в согласии с астрономическим определением расстояния), то

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{r}{R} \frac{dR}{cdt}. \quad (41)$$

Из этой формулы видно, что эффект Доплера должен иметь один и тот же знак для всех отдаленных объектов и быть пропорциональным расстоянию. Если только допустить, что $\frac{dR}{dt} > 0$, т. е. что радиус вселенной не уменьшается, а растет, то формула (41) окажется в полном согласии со всеми наблюдениями (более согласной с астрономическим определением расстояния была бы формула $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \sin\left(\frac{r}{R}\right) \cdot \frac{dR}{cdt}$ но различие между обеими формулами в настоящее время повидимому выходит за пределы достоверности имеющегося эмпирического материала). Если мы сравним формулу (41) с эмпирической формулой де-Ситтера, то окажется

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{3}{2} \times 10^{-17} \text{ сек}^{-1},$$

откуда следует поразительный результат, что при теперешней быстрой расширении вселенной ее радиус должен удвоиться в $\log 2 \cdot \frac{2}{3} 10^{17} \text{ сек} = 4,62 \times 10^{16} \text{ сек} = 1,5 \times 10^9$ лет, что представляет, как указывает Эддингтон, промежуток времени всего лишь „геологического“ порядка.

Найденное значение $\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$ позволяет оценить величину γ (гипотетическую постоянную де-Ситтера). Сравнивая абсолютные яркости спиральных туманностей с их предполагаемыми массами, де-Ситтер находит, что в среднем каждая галактика теряет в секунду 3×10^{-24} своей массы на излучение. Распространяя этот результат на всю вселенную, можно положить приблизительно $\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -3 \times 10^{-24}$ откуда вытекает $\gamma = 2 \times 10^{-7}$.

Поэтому, как заключает де-Ситтер, в первом приближении можно совершенно свободно положить $\gamma = 0$, т. е. считать материальную массу мира постоянной величиной.

Если это предположение сделать, то окажется, что $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, и второе из уравнений (35) дает

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{3}{R^2} - \lambda \right) + \frac{3}{c^2 \kappa R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{\alpha}{\kappa R^3} + \frac{3\beta}{\kappa R^4}.$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется с помощью эллиптических функций. Относящиеся к этому пункту выкладки де-Ситтера [5], представляющие обобщения решения Фридмана (у которого было $\beta = 0$), не имеют однако большого физического интереса, так как числовые величины из этих выкладок возможно получить только с помощью специальных гипотез. Одна из них (которую Эддингтон и де-Ситтер считают наиболее правдоподобной) заключается в следующем: до того, как вселенная стала расширяться, ее радиус был в течение бесконечного (или во всяком случае весьма большого) времени постоянен. Если обозначить этот радиус через R_0 , то должно быть

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{3}{R_0^2} - \lambda \right) = \frac{\alpha}{\kappa R_0^3} + \frac{3\beta}{\kappa R_0^4}.$$

Постоянство радиуса R обозначает, что мероопределение ds^2 не отличалось от того, которое имеет место в решении Эйнштейна. Если допустить, что пространство вмещало наибольшую массу, какую оно вообще в состоянии вместить, то окажется (см. 26) $\alpha = 2R_0$, $\beta = 0$, $R_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Поэтому дифференциальное уравнение, которым определяется R , принимает вид

$$\frac{3}{R^2} - \lambda + \frac{3}{c^2 R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\sqrt{\lambda} R^3}. \quad (42)$$

Так как наблюдения показывают, что в настоящее время $\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{3}{2} \times 10^{-17}$, то теперешний радиус вселенной удовлетворяет уравнению

$$\frac{3}{R^2} - \lambda + \frac{3}{4} \times 10^{-54} = \frac{2}{R^3 \sqrt{\lambda}}. \quad (43)$$

С другой стороны, если допустить, что теперешняя плотность вещества во вселенной равна 2×10^{-28} г/см³, то этот же самый радиус удовлетворяет также и уравнению

$$2 \times 10^{-28} R^3 = \frac{2\lambda}{\kappa} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^3,$$

так как $\frac{2\lambda}{\kappa}$ была плотность вещества во вселенной, пока она не стала расширяться, а $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ — ее радиус. Так как $\kappa = 1,87 \times 10^{-27}$, то мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,87 \times 10^{-55} R^3.$$

Комбинируя это уравнение с (43), мы находим

$$3 - \lambda R^2 + \frac{0,75 \times 10^{-54}}{1,87 \times 10^{-55} R \sqrt{\lambda}} = \frac{2}{R \sqrt{\lambda}},$$

откуда приближенно

$$R \sqrt{\lambda} = \frac{R}{R_0} = 2.$$

Теперешний радиус вселенной в два раза больше ее первоначального радиуса. Кроме того

$$\lambda = 1,5 \times 10^{-54} \text{ см}^{-2},$$

$$R = 1,6 \times 10^{27} \text{ см} = 1600 A.$$

Эти цифры, как говорит и сам де-Ситтер, не могут иметь больших претензий на достоверность. Тем не менее добавим к ним и некоторые другие числовые данные, вытекающие из них. Масса вселенной, которая согласно (26) должна быть равна $\frac{4\pi^2}{\kappa} R_0$, оказывается $1,7 \times 10^{55} g$ или $0,8 \times 10^{22} \odot$. Число протонов во вселенной равно 10^{79} .

Дифференциальное уравнение (42), которому удовлетворяет радиус, может быть проинтегрировано в конечном виде и без эллиптических функций. Если ввести для удобства письма переменную $z = R \sqrt{\lambda}$, то с помощью элементарных выкладок можно получить соотношение

$$\begin{aligned} 2 \log (\sqrt{z+2} + \sqrt{z}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3}z - \sqrt{z+2}}{\sqrt{3}z + \sqrt{z+2}} = \\ = c \sqrt{\frac{\lambda}{3}} t + \text{const.} \end{aligned}$$

Из этого соотношения легко видеть, что при очень больших отрицательных t переменная z должна быть близка к 1

(вселенная Эйнштейна с радиусом $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$), а при очень больших положительных t переменная z пропорциональна $\cosh (c \sqrt{\frac{\lambda}{3}} t)$. Если мы подставим $R = R_0 \cosh (c \sqrt{\frac{\lambda}{3}} t)$ в уравнение (42), то правую часть при больших t можно будет свободно положить равной нулю, и окажется что уравнение удовлетворяется в том случае, если $R_0 = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}$. Поэтому при очень больших положительных t ds^2 выражается формулой

$$ds^2 = -\frac{3}{\lambda} \cosh^2 (c \sqrt{\frac{\lambda}{3}} t) \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] + c^2 dt^2.$$

Нетрудно проверить по формулам (35), что такое мероопределение соответствует миру, в котором плотность материи и лучистой энергии непрерывно уменьшается, стремясь к нулю. Полное рассеяние материи, по крайней мере полное рассеяние галактик — вот судьба, к которой стремится наш мир. Исходным же пунктом его развития была вселенная Эйнштейна с радиусом $0,8 \times 10^{27}$ см. Такая вселенная, согласно Эддингтону, неустойчива: в самом деле, если мы в уравнениях (35) положим $p = 0$, то получим $-\frac{6}{\kappa} \frac{d^2 R}{dt^2} = Rc^2 \left(\rho - \frac{2\lambda}{\kappa} \right)$, откуда вытекает, что для равновесия необходимо равенство $\rho = \frac{2\lambda}{\kappa}$. Если по какой-либо случайной причине средняя плотность увеличивается ($\rho > \frac{2\lambda}{\kappa}$), то радиус мира уменьшается, а это приводит к дальнейшему увеличению плотности. Если же плотность стала меньше своего равновесного значения, то радиус мира растет и плотность уменьшается еще сильнее. Таким образом вселенная с постоянным радиусом неустойчива; равновесие должно когда-нибудь нарушиться и статическое решение замениться динамическим.

Не следует думать впрочем, что новая космологическая теория, которая нашла в Эддингтоне и в де-Сит

тере столь горячих сторонников, не вызывает никаких возражений и не возбуждает основательных сомнений. Наиболее странным пунктом этой теории является необычайная быстрота, с которой растет радиус вселенной. Трудно согласовать эти новые представления с теми большими сроками, которые, по мнению космогонистов, прошли с момента рождения звезд нашей галактической системы (так, например, по мнению Джинса, возраст нашей галактики приблизительно равен 10^{13} лет). „Быстрое расширение вселенной, происходящее теперь, — говорит Эддингтон, — решительно не согласуется с представлениями о биллионах лет. Вряд ли теперь прошло больше 10^{10} лет с того момента, когда радиус вселенной был в полтора раза больше своей первоначальной величины. Если бы солнце действительно существовало 5×10^{12} лет, то странно, что оно так долго не решилось окружить себя системой планет и сделало это лишь тогда, когда вселенная стала приходить в состояние рассеяния. В настоящее время радиус вселенной удваивается каждые полтора миллиарда лет. Через 10^{10} лет спиральные туманности будут на 10 звездных величин слабее, чем сейчас. Если бы были верны предположения о биллионах лет, астрономы должны были бы почитать за особое счастье тот факт, что они явились как раз в-д-время, чтобы наблюдать спиральные туманности — эти интересные, но быстро исчезающие небесные объекты“.

Космологическая теория безусловно подвергнется еще многим изменениям. Прежде всего ей придется расширить свои сроки, которые все же чрезвычайно стеснительны для космогонистов. ****

Примечания редакции.

* Необходимо подчеркнуть, что знание четырех координат определяет только пространственно-временной ф-он явления, но не его качественное содержание, не исчерпываемое, разумеется, численными значениями координат.

** Слово „материя“ здесь, как и в дальнейшем, употребляется в согласии с современной укоренившейся в физике терминологией, а не в

общефилософском смысле. С точки зрения диалектического материализма, лучистая энергия тоже, конечно, является материей.

*** Под „аннигиляцией материи“ современная физика понимает превращение электрона и протона при столкновении в лучистую энергию. С точки зрения диалектического материализма никакой „аннигиляции материи“ при этом, конечно, не происходит, так как лучистая энергия тоже есть материя.

**** Гораздо более слабым пунктом теории является сама трактовка проблемы необратимости, нуждающаяся в коренной переработке с методологической точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА.

1. A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Sitzungsber. 142. 1917.
2. W. de Sitter. On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. Third Paper. Mont. Not. Roy. Astr. Soc. 78, 3 (1917). См. также Proc. Akad. Amsterdam. 19, 1217 (1917) и 20, 229 (1917). См. также A. Einstein, Berl. Sitzungsber. 270 (1918). и W. de Sitter. Proc. Akad. Amsterdam. 20, 1309 (1918).
3. H. Weyl. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Phys. ZS. 24, 230 (1923). см. также Raum — Zeit — Materie. 5. Aufl. 322 — 323 (1923).
4. L. Silberstein. The Theory of Relativity. 2-nd edition, p. 519. (1924).
5. W. de Sitter. On the distances and radial velocities of extragalactic nebulae etc. Proc. Nat. Acad. U. S. A. 16, 474 (1930); см. также De snelheden der extragalactische nevels en hunne verklaring door de relativiteitstheorie. Proc. Akad. Amsterdam, 39, 82 (1930). Астрономический материал дан у де-Ситтера особенно в Bulletin Astr. Inst., Netherlands 185. (1930).
6. L. Silberstein. The Radius of Space. Nature. 123, 618 (1929) (каблограмма из Нью-Йорка); New Determination of the Curvature Radius of Space-time. Ibid. 124, 179 (1929). См. также его книгу The Size of the Universe (1930) (о ней A. S. Eddington. Space and its Properties. Nature. 125, 849 (1930).
7. A. Friedman. Über die Krümmung des Raumes, ZS. f. Phys. 10, 377 (1922); О кривизне пространства. Ж. Р. Ф. X. О., ч. физ. 56, 59 (1924); A. Einstein. Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman. ZS. f. Phys. 11, 326 (1922); см. также A. Friedman, Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. ZS. f. Phys. 21, 326 (1924).
8. G. Lemaitre. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques. Ann. de la Soc. Scientif. de Bruxelles, 47, 49 (1927).
9. A. S. Eddington. On the Instability of Einstein's Spherical World. Mont. Not. Roy. Astr. Soc. 90, 668 (1930).
10. R. C. Tolman. The Effect of the Annihilation of Matter on the Wave-Length of Light from the Nebulae, Proc. Nat. Acad. U. S. A. 16, 320 (1930); More complete Discussion of the Time-Dependence of the Nonstatic Line Element for the Universe. Ibid. 16, 409 (1930). On the Estimation of Distances in a Curved Universe with a Non-Static Line Element. Ibid. 16, 511 (1930).

Ответственный редактор Э. В. Шпольский

Ленинградский Областит № 18542.

62 × 88 — 11½ л. НТ-6.

Тираж 4300.

Зак. № 1289, 7-я Типография Огиза им. Бухарина, Ленинград, ул. Моисеевко, 10.