ВЫСШАЯ МЕТРИКА ЦВЕТА.

Н. Т. Федоров, Москва.

§ 1. В нашей первой статье[1] были изложены основы низшей метрики цвета, имеющей дело с установками на равенство. В этой статье мы рассмотрим сначала экспериментальный материал, лежащий в основе высшей метрики цвета, имеющий дело в первую очередь с установками на наибольшее сходство (гетерохромная фотометрия) и на едва заметное различие (чувствительность глаза к изменению цветности и насыщенности), а затем сформулируем и самые основные положения высшей метрики цвета в том виде, как они были даны Э. Шрёдингером.[2] В последнем же параграфе мы укажем, каким путем следует подходить к построению рационального тела пигментных цветов.

Если мы имеем два не одинаково ярких пучка света одинакового спектрального состава, то мы всегда можем уравнять их по яркости, изменив в n раз интенсивность одного из них, причем тот, интенсивность которого придется для этого уменьшить в n раз, мы назовем в n раз более ярким. В этом определении мы полагаем, следовательно, что яркость светового пучка пропорциональна его объективной интенсивности и может поэтому выражаться в энергетических единицах. В том случае, однако, когда мы имеем два одинаково ярких пучка света различ-

[1] Успехи физ. наук, № 1, 92 — 118, 1929. К сожалению, в статье этой имеется ряд опечаток, нередко искажающих смысл. Их следует исправить по списку, приложенному к этому № журнала.

[2] E. Schrödinger. Ann. d. Physik, *63*, 427 и 481, 1920.

ного спектрального состава, но одинаковых по цвету — например, белый солнечный свет и смесь двух любых дополнительных спектральных лучей — энергии их в общем случае будут различны. Но и здесь, если два таких пучка кажутся нам неодинаково яркими, мы всегда можем, изменив в n раз объективную интенсивность одного из них, сделать их неразличимыми по яркости, причем отношение их яркостей, как и в первом случае, определяется из относительного изменения объективной интенсивности одного из них. Более сложно обстоит дело в случае, когда мы имеем пучки света неодинакового цвета, красный, например, и зеленый, и когда изменением интенсивности мы не будем, очевидно, в состоянии установить их на тождество. В этом случае мы можем, по Гельмгольцу,[1] производить установку лишь на наибольшее сходство. На самом деле, мы не в состоянии качественно оценить степень различия, существующего между некоторым определенным красным и некоторым определенным желтым, сказав, что они отличаются друг от друга больше или меньше, чем некоторый серый цвет от черного, но мы можем всегда судить о том, уменьшается или увеличивается это различие при некотором определенном, производимом с этой парой цветов изменении (повороте николя, перестановке сектора на вертушке и т. п.). Если же мы будем сравнивать некоторый данный нам цвет с некоторым непрерывно изменяющимся одномерным рядом цветов другого цветового тона — например, с рядом ступеней интенсивности некоторого другого цвета, то может случиться, что различие между сравниваемыми цветами будет уменьшаться до некоторого определенного члена ряда, а затем снова возрастать. Такой „наиболее сходный“ член мы можем найти всегда, причем особенно легко это сделать в том случае, когда взятые цветовые тона не очень различны между собой, подобно тому как опустить из некоторой точки перпендикуляр на данную прямую — найти ближайшую точку этой прямой — легче, когда перпендикуляр этот мал. Само собою очевидно, что

[1] H. v. Helmholtz. Zts. für Psych. und Phys. 2, 1, 1891.

в понятии „наиболее сходный цвет“ не заключается ничего абсолютного и что цвет этот определяется тем рядом, который задается для выбора. После сказанного для нас будет понятно определение Гельмгольца, по которому установка двух цветов *A* и *B* на одинаковую яркость сводится лишь к отысканию наиболее сходного с *A* цвета в ряду цветов, который можно получить из *B* изменением его интенсивности.

Общеизвестные практические трудности гетерохромной фотометрии породили огромное количество (одиннадцать!) различных методов, которые все можно разделить на две группы: прямые и непрямые методы. К первой группе принадлежат следующие три метода.

1. Непосредственное сравнение цветов по яркости, хотя бы они и сильно отличались по цвету. Сюда относится старый метод Фраунгофера,[1] затем метод Кенига,[2] который определял распределение относительной яркости (светлоты) в спектре, сравнивая яркость различных лучей спектра с яркостью некоторых определенных зеленых лучей ($\lambda = 535\ m\mu$), метод Эбнея,[3] который определял яркость спектральных лучей сравнением с яркостью белого света, а также определение светлоты цветов при помощи серой шкалы Оствальда или Менселла.

2. Метод малых промежуточных ступеней, который состоит в том, что между сравниваемыми цветами включаются промежуточные и таким образом одно резко гетерохромное фотометрирование разлагается на ряд менее гетерохромных операций. (Фр. Экснер,[4] Джибсон и Тиндаль,[5] Кольрауш,[6] Клеменс Шефер[7] и др.) и, наконец,

---

[1] Fraunhofer. Ges. Schriften. 1, 1888.

[2] A. König. Gesam. Abh. 144, 1903.

[3] W. Abney. Res. in Colour Vision, 86, 1913.

[4] F. Exner. Wiener. Ber., *129*, 1920.

[5] 5 K. S. Gibson and E. P. Tyndall. Sc. Pap. of the Bureau of Stand. № 475, 1923.

[6] K. W. F. Kohlrausch. Phys. Zts. *21*, 396, 1920.

[7] Cl. Schäfer. Phys. Zts. *26*, 58 u. 908. 1925.

3. Метод Ф. Экснера[1] определения светлоты пигментов, который по существу сводится к слабо гетерохромному фотометрированию. Сюда же относятся аналогичные методы Брюкке и Геринга.

Все эти методы по существу своему сводятся к установкам на наибольшее сходство. Непрямые методы более многочисленны, причем, как справедливо указывает Шрёдингер, каждый из них привносит с собой и новое определение гетерохромной „равной яркости".

Отсылая интересующихся к подробному обзору этих методов в статье недавно скончавшегося проф. Криса,[2] мы в дальнейшем рассмотрим более подробно лишь один наиболее совершенный из них — „метод мельканий".

§ 2. Переходя к более подробному анализу „прямых" методов, мы прежде всего установим одно необходимое, лежащее в основе их, условие, на которое указал Шрёдингер[3] и которое было проверено на опыте Кольраушем[4] и Кл. Шефером[5] для пигментных цветов, Рейхенберг[6] и нами[7] — для спектральных.

При фотометрическом сравнении двух пигментов, цвета которых лежат в спектре далеко друг от друга, мы всегда сталкиваемся с тем затруднением, что для наблюдателя, обладающего нормальным цветным зрением, впечатление качества цвета настолько перевешивает, что часто он вообще не в состоянии сказать, какой из пигментов кажется ему светлее, кроме, разумеется, крайних случаев. Но как раз на этих крайних случаях и базируется, очевидно, наше инстинктивное „чувство" того, что вообще о светлоте окрашенных пигментов говорить можно. Как уже указывалось выше, во втором из „прямых" методов для того, чтобы из-

[1] Fr. Exner. Wien. Ber., *127*. 1829, 1918.
[2] J. v. Kries. Zts. für techn. Phys. *6*, 327, 1924.
[3] F. Schrödinger, loc. cit.
[4] Kohlrausch, loc. cit.
[5] Cl. Schäfer, loc. cit.
[6] Reichenberg. Диссертация в рукописи (Вена, 1925).
[7] N. Fedorow und V. Fedorowa. Zts. f. Physik, *57*, 855, 1929.

бежать трудностей гетерохромной фотометрии, можно включить между двумя сравниваемыми по их светлоте пигментами ряд промежуточных ступеней таких, чтобы разница в цвете двух соседних ступеней была незначительна. Тогда возможно, начав с первого пигмента через известное число промежуточных ступеней, т. е. почти изохромно, дойти до последнего пигмента, получив в результате некоторое определенное, характеризующее его светлоту по отношению к первому пигменту, число. При этом само собою подразумевается, что мы всегда приходим к одному и тому же результату, независимо от того, сколько и какие промежуточные ступени мы включаем: полученный нами результат не должен зависеть от „пути". В этом и состоит „условие Шрёдингера", полученное им теоретически. Как Кольрауш, так и Шефер пользова-

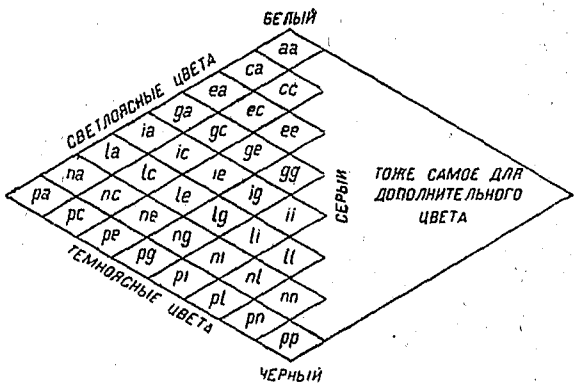

Рис. 1.

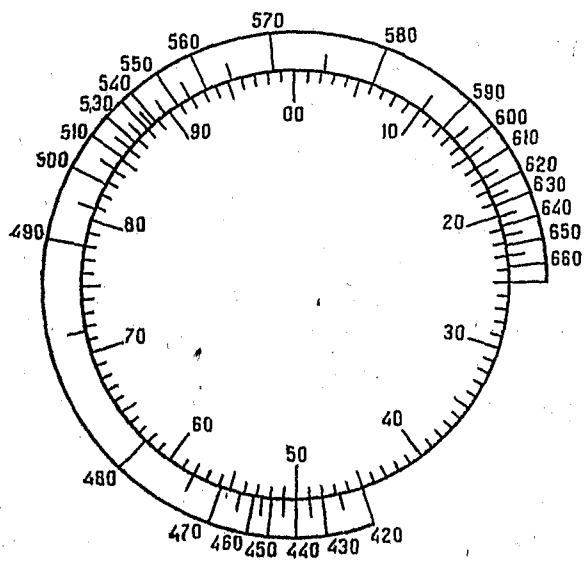

Рис. 2.

лись для проверки этого условия прекрасными атласами цветов В. Оствальда. Как известно, Оствальд располагает все цвета в виде двойного конуса (рис. 1), причем по окружности их сложенных оснований лежат наиболее насыщенные, „полные“ цвета, которые вверх переходят в белый, а вниз в черный цвет. Буквы обозначают содержание в цвете белого (первая) и черного (вторая). На рис. 2 дана нумерация цветных тонов, содержащихся в любом круге цветного тела, перпендикулярном к его бело-черной оси, с указанием соответствующих этим цветам длин волн спектральных лучей. Каждый цвет, следовательно, обозначается одной цифрой и двумя буквами. Светлоту самого светлого пигмента 00 обозначим через 100. Тогда, если условие Шрёдингера выполняется, мы, взяв этот пигмент за исходный и фотометрируя через равные ступени, рациональная величина которых должна быть установлена опытом, должны, дойдя до пигмента 00 с другой стороны, получить для его светлоты то же значение — 100. Кольрауш, промерив 24 цвета из круга *„ia“*, получил вместо 100 число 102,4, для круга же *„nc“*—92, что безусловно лежит в пределах возможной ошибки, которая суммируется из ошибок отдельных (24!) установок.

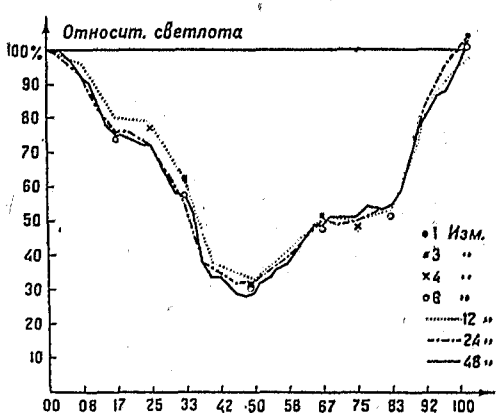

Рис. 3.

Результаты, полученные Шефером[1] для круга *„ia“*, изображены на рис. 3, где даны результаты измерений для различного числа промежуточных ступеней — одной (00 срав-

[1] Он пользовался обычным спектрофотометром Глана, призма которого была удалена, а на щелях получались действительные изображения ярко освещенных сравниваемых пигментов. Величина поля зрения исключала возможность явления Пуркинье.

нивается с 50), трех (00 — 25; 25 — 50; 50 — 75; 75 — 00), 4 6, 12, 24 и 48. Прежде всего мы видим здесь, как хорошо свет лота цвета № 50, полученная непосредственным сравнением его с желтым № 00, согласуется с тем, что получается при другом числе промежуточных ступеней. Далее мы видим, что с точностью до нескольких процентов условие Шрёдингера здесь выполняется; величина ступени сама по себе оказывается безразличной, но при слишком малом числе промежуточных ступеней увеличивается трудность отдельных установок, при чересчур же большом числе ступеней увеличивается общая ошибка вследствие накопления небольших ошибок отдельных промежуточных измерений. Шефер считает наиболее целесообразным брать 12 ступеней. Суммарная ошибка при 12 ступенях для кругов „*ba*", „*ea*", „*pa*" и „*pn*" у Шефера получилась равной соответственно 4,1%; 2%; 3,1% и 1,2%. О том, что получается у разных наблюдателей, дает представление рис. 4, где сплошная кривая получена для круга „*la*" наблюдателем Ф. И., а пунктирная — наблюдателем Г.

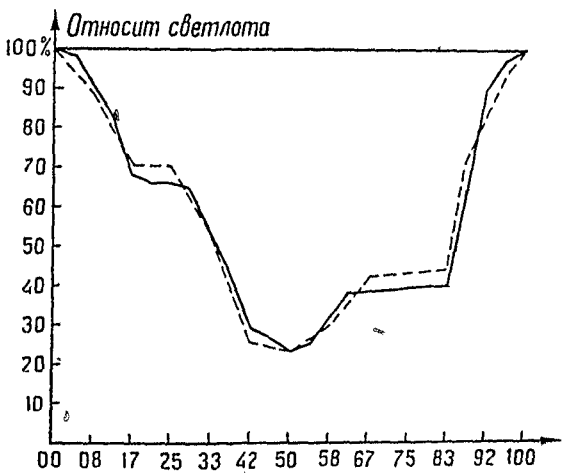

Рис. 4.

Положим далее, что мы хотим сравнить красный оствальдовский эталон 25 *pa* с зеленым 75 *pa*. Тогда, если условие Шрёдингера выполняется, мы должны получить один и тот же результат, как в том случае, если мы от красного дойдем до зеленого через ряд промежуточных цветов того же круга, т. е. или через пурпуровый, фиолетовый, синий, голубой, аквамариновый, или через оранжевый, желтый, желто-зеленый (29,33.....67,71 или 21,17....83,79), так и в том,

когда, не меняя цветового тона (25), пройдем от него до белого (*aa*) через ряд все более бледных тонов того же цвета (25 *pa*, 25 *na*, 25 *la*.....25 *ca*), а затем от белого через ряд 75 *ca*..... 75 *la*, 75 *na* до 75 *pa*. Эта задача выполнена К. Шефером так. Промерив относительную светлоту 12 цветов круга *ia*, он промерил ряд цветов переходных от 00 *ia* к белому и получил таким образом для светлоты цвета 00 *ia* (которую он полагал раньше равною 100) число 73,2. Светлоты других цветов он получил, помножив их относительные светлоты на 0,732. После этого он определил светлоту каждого из этих цветов и иным путем — через ряд промежуточных от каждого из них к белому, т. е. так, как раньше он сделал для желтого 00 *ia*. Полученные им результаты изображены на рис. 5, где сплошная кривая получена по первому способу, а пунктирная по второму. Мы видим, что и в этом случае результат не зависит от вида „пути". Для спектральных цветов условие Шрёдингера проверено впервые Рейхенберг, которая в спектроскопической лаборатории проф. Хашека при 2-м Физическом институте Венского университета промерила по ступенчатому („каскадному") методу Ф. Экснера распределение относительной яркости в диффракционном спектре вольтовой

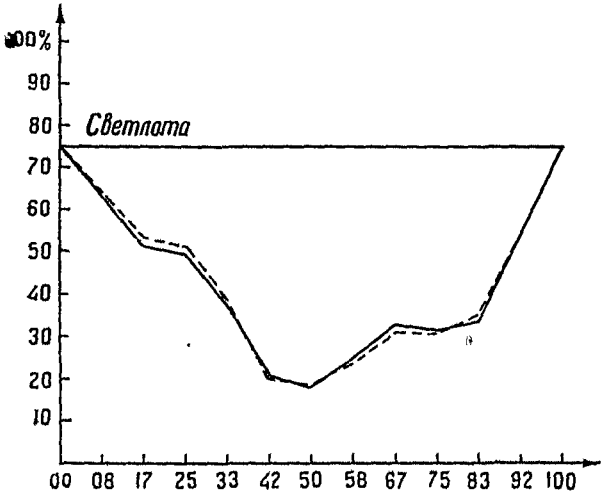

Рис. 5.

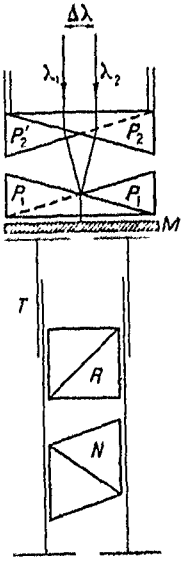

Рис. 6.

дуги, при чем величина ступеней была 8 $m\mu$, 4 $m\mu$ и 2 $m\mu$. Видимый спектр имел длину в 108 *см* (от 700 до 400 $m\mu$). Изменение же величины ступеней производилось при помощи особого приспособления проф. Хашека, выполненного для института фирмою Герца. Приспособление это состоит (рис. 6) из 4 призм, две из которых лежат снизу (P_1' и P_2'), а две другие находятся (P_1 и P_2) над ними, при-

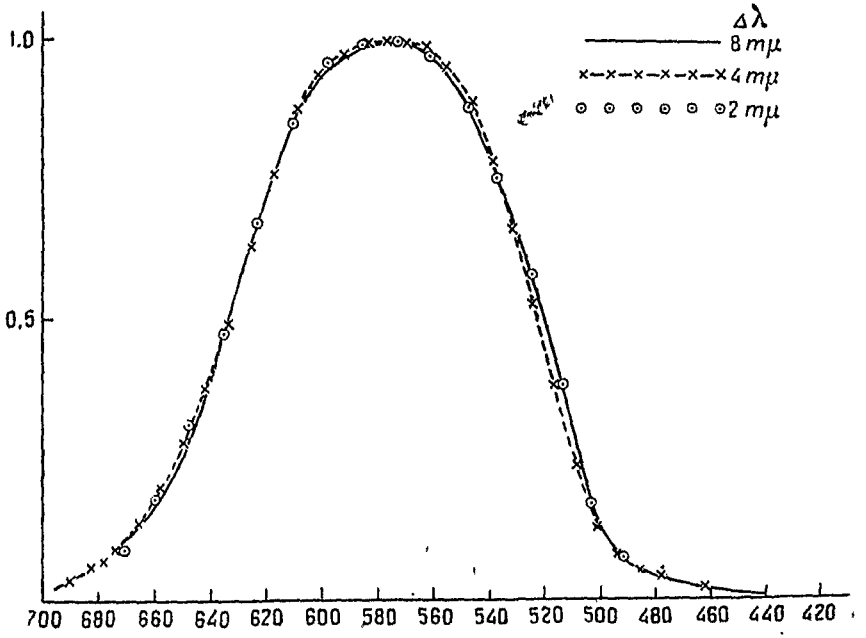

Рис. 7.

чем воздушный промежуток между парами P_1P_1' и P_2P_2' может изменяться при помощи микрометрического винта. Если мы поставим это приспособление в то или иное место спектра, при чем обе пары призм сблизим вплотную, мы увидим и верхнюю и нижнюю части поля зрения освещенными светом одной и той же длины волны λ. При раздвижении же призм, как легко видеть, длины волн будут уже неодинаковыми — между ними появится некоторая разница $\Delta\lambda$, величину которой для различных расстояний между призмами можно вычислить или найти экспериментально. M — матовая пластинка, а T — зрительная труба, содержащая призмы Рошона R и Николя N; поворачивая послед-

нюю, мы сможем установить обе половины поля зрения на „наибольшее сходство". Промерив отношение $K = \frac{H_{\lambda+\Delta\lambda}}{H_\lambda}$, где H_λ относительная яркость, для целого ряда длин волн, мы сможем построить кривую K (λ), которая будет лежать выше 1 по одну сторону от максимума яркости в спектре 1 и ниже по другую сторону от него.

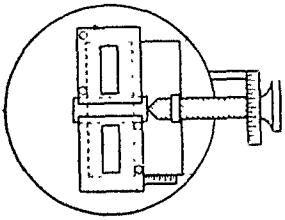

Рис. 8.

Из этой кривой последовательным делением или умножением [1] мы сможем получить и кривую распределения относительной яркости в спектре.

Результаты, полученные Рейхенбергом, изображены на рис. 7. [2] Автором этой статьи совместно с В. И. Федоровой при помощи сконструированного им простого приспособления к спектрофотометру Глана, [3] состоящего из двух щелей (рис. 8), одна из которых может смещаться относительно другой; по совершенно такому же методу показано, что и при увеличении $\Delta\lambda$ до 12 $m\mu$ кривая распределения яркости не изменяется, что видно из рис. 9, где пунктиром (*b*) дана кривая $K = \frac{H'_{\lambda+\Delta\lambda}}{H'_\lambda}$ для $\Delta\lambda = 12$ $m\mu$, построенная по кривой H', полученной при $\Delta\lambda = 8$ $m\mu$ для призматического спектра газом наполненной молочной лампы „Osram", а крестиками изображены точки, полученные для $\Delta\lambda = 12$ $m\mu$ на опыте. [4]

Мы видим, следовательно, что условие Шрёдингера выполняется совершенно точно при изменении $\Delta\lambda$ от 2 до

[1] Или из кривой log K (λ) последовательным графическим интегрированием.

[2] Независимость кривой H от $\Delta\lambda$ для 2 $m\mu$ и 4 $m\mu$ была подтверждена также и нами на той же спектральной установке Венского университета, но для несколько большего интервала (от 718 $m\mu$ до 426 $m\mu$). См. V Съезд русских физиков 1926 г. (стр. 65).

[3] N. Fedorow. Доклады Академии наук СССР, 413, 1928.

[4] N. Fedorow und W. Fedorowa. Die Naturwissenschaften. *16*, 757 — 758, 1928 und Zts. für. Physik, *57*, 855, 1929.

12 $m\mu$, при чем в первом случае разница в цветности сравниваемых полей на всем протяжении видимого спектра (около 300 $m\mu$) заметна лишь в общем на интервале в 22 $m\mu$, в последнем же случае разница в цветности заметна почти на всем протяжении спектра. По аналогичному каскадному методу в Бюро Стандартов в Америке в 1925 г. Джибсоном и Тиндалем[1] было произведено исследование распределения относительной яркости в спектре для 52 лиц, при чем полученные результаты были пересчитаны на спектр с равномерным распределением энергии. Распределение

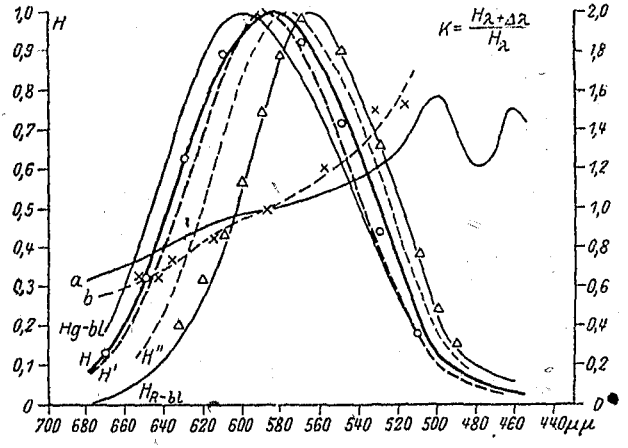

Рис. 9.

светлоты в спектре с равномерным распределением энергии характеризует собою, очевидно, чувствительность нашего глаза к лучистой энергии различных длин волн — то, что обычно называют „видимостью" (visibility) лучистой энергии. Имея эту кривую (рис. 10), мы можем находить светлоту окрашенных тел просто по их спектру отражения. На самом деле мы можем написать такое очевидное равенство, определяющее светлоту:

$$H = \frac{\int \rho(\lambda)\, V(\lambda)\, E(\lambda)\, d\lambda}{\int V(\lambda)\, E(\lambda)\, d\lambda}, \qquad (1)$$

где $\rho(\lambda)$ — отражательная способность тела, $V(\lambda)$ — видимость лучистой энергии с длиною волны λ, $E(\lambda)$ — орди-

[1] K. S. Gibson and E. P. Tyndall, loc. cit.

ната кривой распределения энергии в спектре источника света, освещающего взятое окрашенное тело.[1]

В той же, указанной выше, работе Кл. Шефер, воспользовавшись старыми данными Кенига для распределения относительной яркости в спектре белого солнечного света и кривыми $\rho(\lambda)$ для 12 оствальдовских цветов круга „*ia*", вычислил их светлоту. Результаты изображены на рис. 11 и совпадение вычисленных и наблюденных цифр следует признать очень хорошим, в особенности, если мы примем во внимание, что данные Кёнига не являются очень точными и заметно отличаются кое-где от соответствующих цифр, которые можно получить, например, из данных Тиндаля и Джибсона. Можно также измерить светлоту и термоэлементом, если поставить перед ним светофильтр, кривая которого соответствует кривой чувствительности нашего глаза. Наиболее точно удовлетворяет этому условию светофильтр Кобленца и Эмерсона,[2] представляющий собою видоизменение соответствующего светофильтра Айвса и имеющий следующий состав:

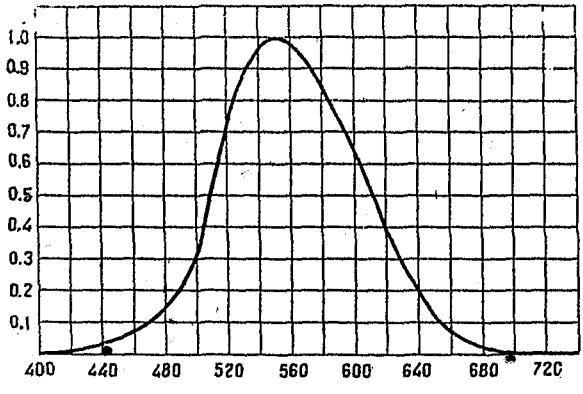

Рис. 10.

$CuCl_2 \cdot 2H_2O$	5,7 *г.*
$Co(NH_4)_2(SO_4)_2\ 6H_2O$	1,2 *г.*
K_2CrO_4	0,16 *г.*
HNO_3	0,123 *г.*
H_2O	100 *см*³.

[1] Вычисление и в этом случае облегчается, если воспользоваться указанным в первой моей статье (№ 1 „Усп. физ. наук" за 1929 г.) приемом Люгера. Необходимый числовой материал приведен в большой статье S. Rösch'a „Darstellung der Forbenlehre für die Zwecke des Mineralogen" в Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie. B. *13*. 1929.

[1] W. Coblentz and Emerson. Sc. Pap. B. of Stand. № 303, 1917.

(Толщина слоя 1 *см*, для поглощения инфракрасных лучей ставят добавочный сосуд с водою, толщиною от 3 до 4 *см*).

Следует указать далее на то, что данные, полученные Джибсоном и Тиндалем, близко подходят к тому, что раньше, в 1918 г., было получено для 125 наблюдателей совершенно иным, „непрямым" методом Кобленцом и Эмерсоном,[1] тоже в Бюро стандартов в Вашингтоне. Они пользовались так наз. „методом мельканий", который основан на том, впервые установленном Рудом (Rood) факте, что когда в глаз попадают поочередно световые пучки разного цвета, мы при малой скорости чередования их ясно видим смену одного цвета другим; при увеличении же скорости мелькания сначала исчезают мелькания по цвету, и мы видим один смешанный, средний цвет, при чем, если относительные яркости сравниваемых лучей неодинаковы, этот смешанный цвет кажется мелькающим. Мелькания этого рода исчезают при одинаковой относительной яркости сравниваемых лучей и исчезновение их может служить критерием достижения такого равенства. В опытах Кобленца и Эмерсона яркость спектральных лучей сравнивалась по этому методу с яркостью неразложенного в спектр белого света некоторой стандартной лампы и на рис. 12 изображены полученные им результаты: все 125 кривых

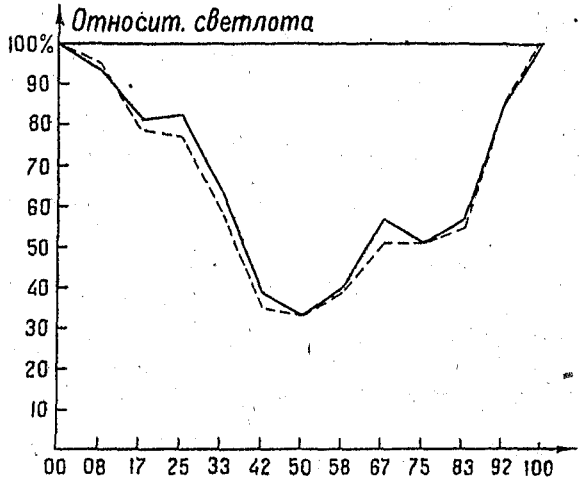

Рис. 11.

[1] Loc. cit.

нанесены на один чертеж, из которого видно, что, несмотря на наличие сильных индивидуальных отклонений, можно говорить о некоторой средней кривой „видимости“ лучистой энергии. На рис. 13 дано сравнение всех имеющихся в литературе данных, полученных, с одной стороны, по методу малых ступеней, а с другой — по методу мельканий.

Кл. Шефер произвел точно также определение отно-

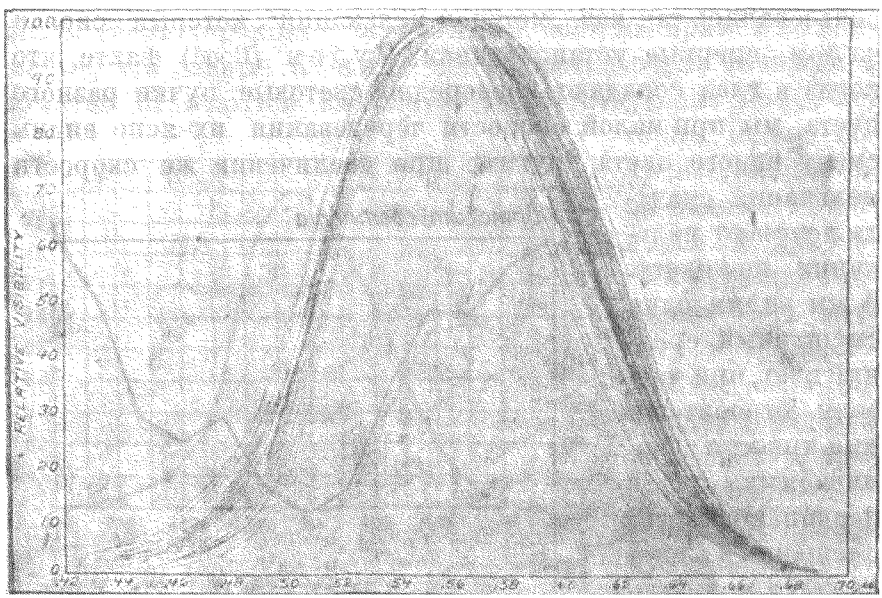

Рис. 12.

сительной яркости целого ряда оствальдовских эталонов при помощи известного мелькающего фотометра Бехштейна, описание которого можно найти в любом учебнике фотометрии. Для определения этим фотометром относительной светлоты оствальдовских цветов Кл. Шефер насаживал их попарно на грани гипсовой призмы фотометра. На рис. 14, где сплошная кривая изображает полученные им данные для относительной светлоты цветов круга „*nc*“ методом мельканий, а пунктирная — методом установки на наибольшее сходство, видно, что оба эти метода приводят практически к одному и тому же результату.

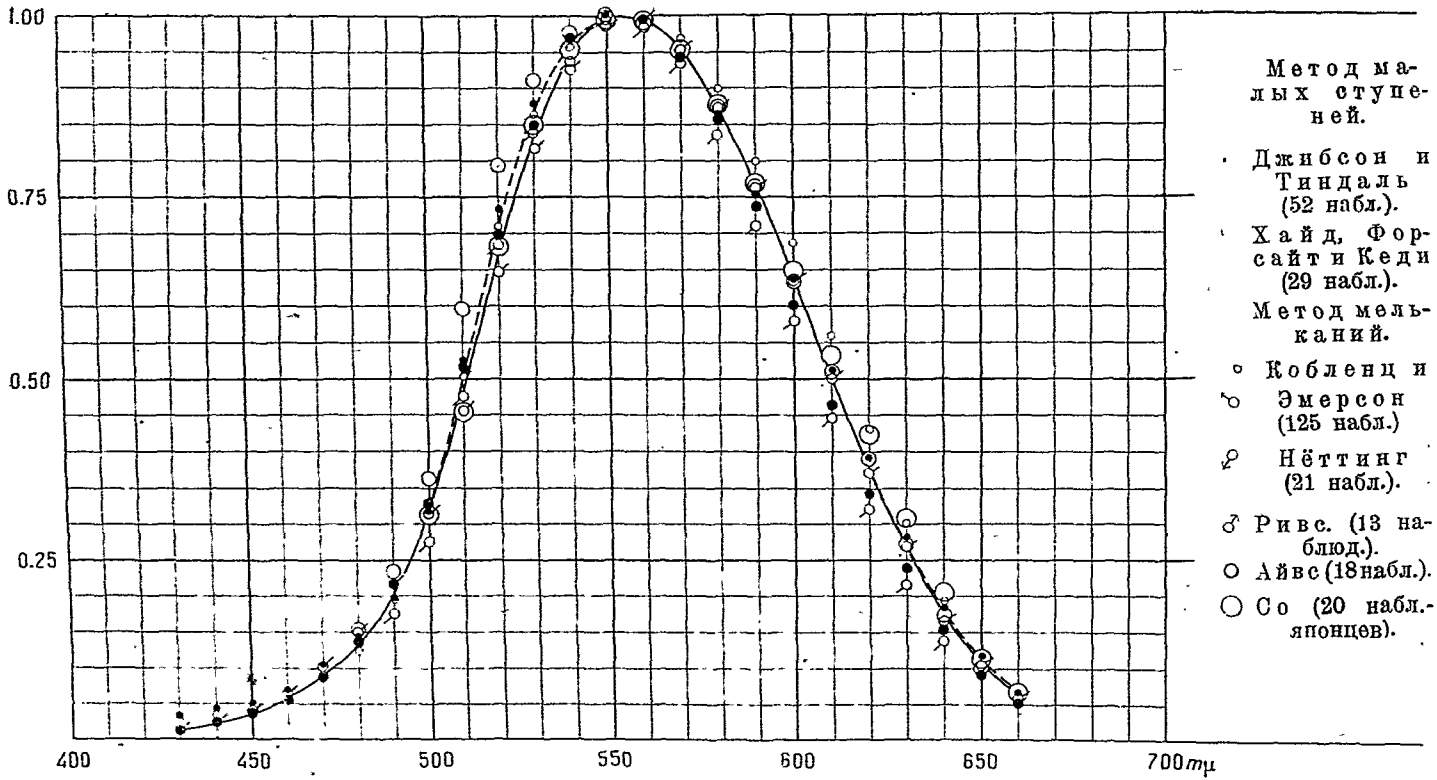
1.00
0.75
0.50
0.25
400
450
500
550
600
650
700 mμ
Метод малых ступеней.
Джибсон и Тиндаль (52 набл.).
Хайд, Форсайт и Кеди (29 набл.).
Метод мельканий.
Кобленц и Эмерсон (125 набл.)
Нёттинг (21 набл.).
Ривс. (13 наблюд.).
Айвс (18 набл.).
Со (20 набл. японцев).

Рис. 13.

§ 3. Следующим вопросом, который нужно было разрешить для построения высшей метрики цвета — является вопрос о том, обладает ли яркость свойством аддитивности; иными словами, можем ли мы, обозначив яркость через H, написать такое равенство:

$$H(x_1,\ x_2,\ x_3,) + H(x_1^1,\ x_2^1,\ x_3^1) = H(x_1 + x_1^1,\ x_2 + x_2^1,\ x_3 + x_3^1) \qquad (2)$$

где x_1, x_2, x_3, x_1^1, x_3^1, x_3^1 — трилинейные координаты наших цветов?

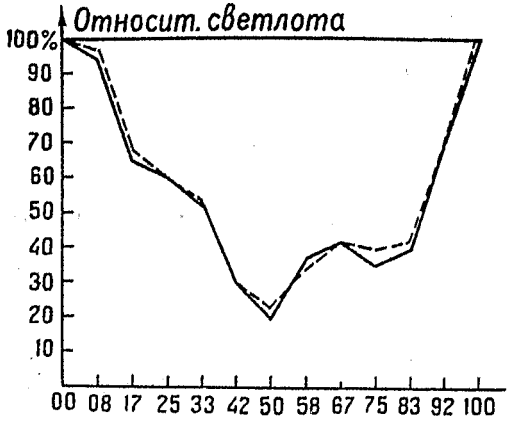

Рис. 14.

Если бы это равенство было справедливым, то, как простое математическое следствие, из него вытекало бы такое равенство:

$$H = ax_1 + bx_2 + cx_3, \qquad (3)$$

где a, b и c — некоторые константы. [1]

Исследования Эбнея,[2] Кольрауша,[3] Ф. Экснера[4] позволяют ответить на этот вопрос утвердительно. Экснер, например, определял светлоты большого числа различных цветовых кружков, затем составлял на вертушках всевозможные смеси их между собою и находил светлоту таких смесей двумя путями — непосредственным измерением и вычислением по ранее найденным светлотам отдельных кружков, при чем аддитивность во всех случаях подтвердилась. Коэффициенты a, b и c формулы (3) проще всего определить из кривой распределения яркости в спектре белого света, которую можно получить из кривой „видимости", помножив ее ординаты на ординаты кривой распределения

[1] E. Schrödinger, loc. cit.
[2] Loc. cit.
[3] Loc. cit.
[4] Loc. cit

энергии в спектре белого солнечного света, близко совпадающей с соответствующей кривой для абсолютно-черного тела, имеющего температуру около 5000° abs. (5200° abs. по Присту). Составив для большого числа длин волн (через 10 $m\mu$ например) уравнения типа (3), можно определить отсюда способом наименьших квадратов коэффициенты „a“, „b“ и „c“.

Взяв значения x_1, x_2 и x_3 из кривых Кенига-Айвса, приведенных нами в первой статье, мы получим для этих коэффициентов такие числа: $a = 0{,}568$; $b = 0{,}426$; $c = 0{,}006$.

Ф. Экснер для своих, несколько отличных от айвсовских кривых и совершенно иным способом получил очень близкие к этим коэффициенты: $a = 0{,}562$; $b = 0{,}425$ и $c = 0{,}013$. Нам с В. И. Федоровой удалось подойти к определению относительной величины коэффициентов „a“ и „b“ еще третьим способом. [1] Получив временную цветную слепоту на красный, а затем на зеленый цвет действием на глаз чрезвычайно ярких красных и особым образом выбранных зеленых спектральных лучей, мы измерили кривые распределения относительной яркости в спектре как для первого, так и для второго случая (см. рис. 9). Затем из этих кривых H_{R-bl} и H_{g-bl} и ранее измеренной кривой H для неутомленного глаза можно было способом наименьших квадратов найти коэффициенты „a“ и „b“. (Брались значения H, H_{R-bl} и H_{g-bl} в пределах от 670 $m\mu$ до 510 $m\mu$, в которых мы с большим приближением можем вычислять H по формуле $H = ax_1 + bx_2$; влияние третьего, очень малого, члена cx_3 сказывается лишь для более коротких длин волн). Коэффициенты эти оказались равными $a = 0{,}82$ и $b' = 0{,}24$. Когда же мы взяли отношение максимальных ординат наших кривых H_{R-bl} и H_{g-bl} равным не единице, что, разумеется, произвольно, но отношению максимальных ординат кривых x_1 и x_2, перечисленных на распределение энергии в призматическом спектре нашего источника света, мы получили для „a“ и „b“ числа 0,82 и 0,62, откуда отношение $b:a$ оказалось равным 0,76 вместо 0,75 у Айвса.

[1] Loc. cit.

Можно, разумеется, определить „a“, „b“ и „c“ по способу наименьших квадратов из ранее определенных светлот пигментных цветов, например, оствальдовских, как это сделал Кольрауш, при чем в этом случае необходимо x_F', x_F'' и x_F''' (см. мою первую статью!) выражать в относительных единицах, приняв величину интегралов $\int x_1(\lambda)d\lambda = \int x_2(\lambda)\,d\lambda = \int x_3(\lambda)\,d\lambda$, взятых по всему видимому спектру за единицу. Определив же „a“, „b“ и „c“ раз навсегда, мы без всякого гетерохромного фотометрирования сможем определять и относительные яркости любой окрашенной поверхности по ее спектру. В тех случаях, когда нами уже определены для нее значения x_F', x_F'' и x_F''', этот способ приводит к цели быстрее всякого другого. Кольрауш же показал, что вычисленные таким путем цифры для светлоты хорошо согласуются с найденными экспериментально по методу малых ступеней.

§ 4. До сих пор мы имели дело с установками на наибольшее сходство и теперь нам нужно еще познакомиться с тем экспериментальным материалом, который имеется в области установок на едва заметное различие, с которыми мы имеем дело при изучении чувствительности глаза к изменению цветности и насыщенности.

Не останавливаясь совершенно на истории этого вопроса мы укажем лишь, что чувствительность глаза к изменению цветности тщательно изучена в ряде экспериментальных исследований Ольги Штейндлер (Вена), [1] Джонса (Америка), [2] Гамильтона и Лауренса (Америка), [3] Э. Кюнерта (Вена) [4] и др., и что, откладывая по оси ординат то изменение длины волны $\Delta\lambda$, которое необходимо для получения едва заметного изменения в цветности сравниваемых полей, мы получаем кривую, имеющую такой вид (рис. 15 по Штейндлер). Кривая эта имеет 4 минимума

[1] O. Steindler. Wiener Ber. *115*, 11a, 115, 1906.
[2] L. A. Jones. J. Opt. Soc. of Amer *63*, 1917.
[3] Laurens and Hamilton. Amer. Journ. of Physiol. *115*, 3, 1923.
[4] Ed. Kühnert. Диссертация в рукописи (Вена, 1924).

(соответствующих максимумам чувствительности глаза к изменению цветности) при $\lambda = 435\ m\mu$, $497\ m\mu$, $585\ m\mu$ и $636\ m\mu$. Между ними лежат 3 максимума (минимумы чувствительности глаза!) при $\lambda = -454\ m\mu$, $535\ m\mu$ и $624\ m\mu$. Положение и величины этих минимумов и максимумов несколько изменяются от наблюдателя к наблюдателю, но число их всегда остается неизменным и одинаковым. Существует целый ряд специальных установок, предназначенных для изучения чувствительности глаза к изменению цветности, но можно, разумеется, пользоваться и описанным выше приспособлением к спектрофотометру Глана. Наши измерения показали, что число максимумов и минимумов получается при этом правильным, положение же их в границах индивидуальных вариаций. Несомненно далее, что чувствительность глаза к изменению цветности должна быть каким-то образом тесно связана с тремя основными кривыми R, G и B, и, действительно, В. И. Федоровой[1] удалось недавно показать, что как число, так и положение максимумов и минимумов можно получить, приняв, что чувствительность глаза определяется такой функцией

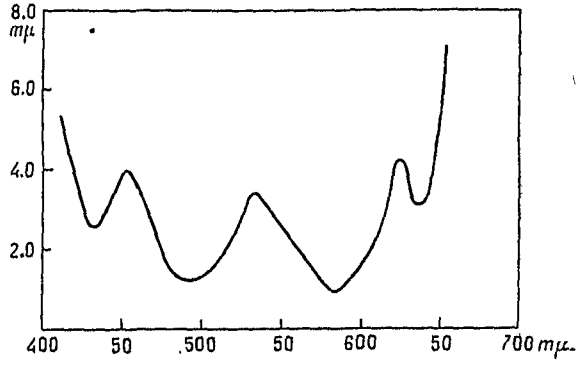

Рис. 15.

$$F = \frac{1}{f(\lambda)} \cdot \frac{d\,f(\lambda)}{d\,\lambda}, \tag{4}$$

где $f(\lambda) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$ в случае, когда $x_1 > x_3$ и $x_2 > x_3$ и аналогичному выражению для других возможных случаев.

[1] В. И. Федорова. Журн. прикл. физики. Том. 5, стр. 201—207, 1928, и Journal für Psychologie und Neurologie, B. *40*, H. 3—4, 65, 1929.

Значительно меньшее число исследований мы имеем в области изучения чувствительности нашего глаза к изменению цвета по насыщенности. Наиболее обстоятельно и чисто выполнено такое исследование Джонсом и Лоуреем,[1] которые экспериментально установили связь между насыщенностью цвета, определяемой числом едва заметных переходов его в белый, одинаковый с ним по светлоте, и его чистотой, которую они изменяли, прибавляя к насыщенному спектральному цвету то или иное количество белого, и определяли формулой

$$P = \frac{H_s}{H_s + H_w}, \quad (5)$$

где H_s — яркость спектрального компонента, а H_w — яркость примешанного белого. На рис. 16, где по оси абсцисс отложена чистота, а по оси ординат число ступеней насыщенности от цвета данной чистоты до спектрального, кривая S изображает полученную таким образом связь между насыщенностью и чистотой для $\lambda = 540$ $\mu\mu$, при чем мы видим, что для не очень малой и не очень большой чистоты связь эта является прямолинейной, т. е. в этом среднем интервале насыщенность пропорциональна чистоте, что является очень важным для практики, где измеряется обычно не насыщенность, а чистота. На этом же рисунке нанесен ряд других кривых, полученных дифференцированием кривых первого рода и изображающих чувствительность глаза к изменению насыщенности.

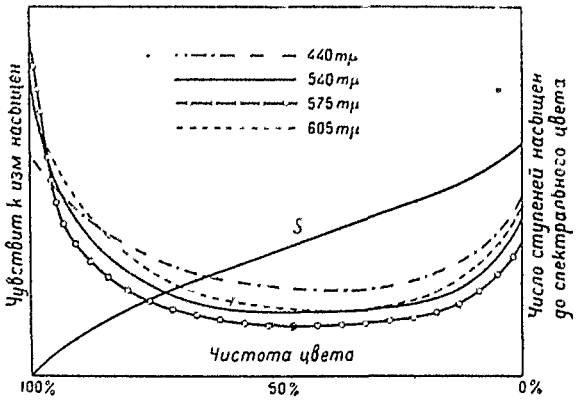

Рис. 16.

[1] L. Jones and Lowry. Journ. Opt. Soc. Amer., *13*, 25, 1926 г.

§ 5. Тот экспериментальный материал, с которым мы познакомились в предыдущих §§, позволил Шрёдингеру подойти к построению высшей метрики цвета, которая, однако, как неоднократно указывает он сам, является гораздо менее разработанной по сравнению с низшею метрикой. Первой задачей, возникающей здесь, является нахождение количественной меры сходства или различия каких-либо двух цветов, меры их расстояния в цветовом пространстве, которое должно проходить через минимум при одинаковой яркости обоих цветов. Если мы на некоторой поверхности одинаковой яркости $ax_1 + bx_2 + cx_3 = \text{const.}$, фиксируем две точки: A и B, то согласно сказанному выше точка B должна лежать к A ближе всякой другой точки полулуча OB, и обратно, точка A ближе к B, чем любая другая точка полулуча OA. Легко видеть, что обычная евклидова геометрия этому условию не удовлетворяет. На самом деле возьмем два полулуча OA и OB (рис. 17), представляющие собой всевозможные ступени интенсивности каких-либо двух цветов, два вектора из цветового тела, изображенного на рис. 6 первой нашей статьи, и выберем на одном из них какой-нибудь цвет A'. Тогда „наиболее сходным" с A' (лежащим к нему наиболее близко) будет, очевидно, цвет B', а наиболее сходным с B' не A', но A''! Шрёдингер поэтому для линейного элемента цветового пространства, измеряющего степень различия двух цветов, берет, как и Гельмгольц, такое неевклидово выражение:

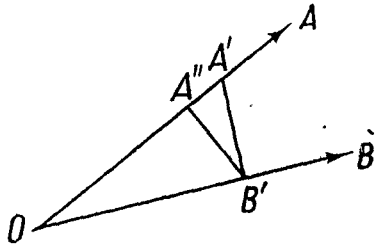

Рис. 17.

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i \cdot dx_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{6}$$

(1-е положение Шрёдингера).

Он принимает далее, что для любых двух едва различимых цветов dx_i (а следовательно и ds) должны рассматри-

ваться как дифференциалы и что ds для каждой такой пары цветов имеет одну и ту же величину (2-е положение Шрёдингера). Третье положение его сводится к тому, что расстояние более удаленных друг от друга цветов определяется длиною ($\int ds$) кратчайшей соединяющей их (геодезической) линии. Покажем более наглядно, что заключают в себе эти три положения, при чем понятия „равнодалекий“ и „в одинаковой степени различный“ мы будем считать синонимами.

Одинаково удаленными от какой-либо точки цветового пространства F мы считаем все едва различные от нее „цветовые точки“ (положение 2-е). Все они лежат на некотором малом эллипсоиде с центром в F (положение 1-е). Все оси таких малых эллипсоидов мы считаем „одинаковой длины“ (положение 2-е). Равноотстоящие поверхности вокруг F мы получим для малых расстояний, увеличивая в одном и том же отношении все оси первого эллипсоида; все эти поверхности являются, следовательно, подобными ему и также расположенными эллипсоидами (положение 1-е). Это евклидово построение действительно лишь до тех пор, пока мы имеем дело с бесконечно-малыми величинами. Для того, чтобы построить поверхность вокруг F, удаленную от F на конечное расстояние, мы не можем увеличивать оси нашего малого эллипсоида в соответствующее число раз в их направлении, но должны итти по кратчайшему пути в риманновском смысле, т. е. по геодезическим линиям на равные „отрезки“ интеграла $\int ds$, который и измеряет в этом случае расстояние (положение 3-е).

Для того чтобы удовлетворить соотношению Ф. Экснера-Эбнея ($H = ax_1 + bx_2 + cx_3$) и закону Вебер-Фехнера который требует, чтобы ds не изменялось при пропорциональном изменении всех x_i и dx_i, Шрёдингер выбирает функцию a_{ik} так, что выражение для ds^2 принимает такой вид:

$$ds^2 = \frac{1}{ax_1 + bx_2 + cx_3} \cdot \left(\frac{adx_1^2}{x_1} + \frac{bdx_2^2}{x_2} + \frac{cdx_3^2}{x_3} \right) \qquad (7)$$

Установив далее достаточное и необходимое условие для интегрируемости, а тем самым и возможность определения

равенства по яркости гетерохромных цветов (параграф 2 этой статьи), он дает такое выражение для $\int ds$:

$$\int ds = \sqrt{(\log \frac{H}{H_1})^2 + 4\left(\arccos \frac{a\sqrt{x_1 x_1^1} + b\sqrt{x_2 x_2^1} + c\sqrt{x_3 x_3^1}}{\sqrt{HH^1}}\right)^2}, \quad (8)$$

где $H = ax_1 + bx_2 + cx_3$, а $H^1 = ax_1^1 + bx^1_2 + cx^1_3$.

При одинаковом цветовом тоне и одинаковой насыщенности мы имеем отсюда, что $s = \log \frac{H}{H_1}$ соответственно закону Вебер-Фехнера. Второй член под корнем формулы (8) дает нам меру различия цветов по тону и насыщенности при одинаковом H, так как $\int ds$ в этом случае будет равен

$$2 \arccos \frac{a\sqrt{x_1 x_1^1} + b\sqrt{x_2 x_2^1} + c\sqrt{x_3 x_3^1}}{H}.$$

Как естественную меру для насыщенности Шрёдингер предлагает взять геодезическое расстояние цвета от равнояркого белого, для которого $x_1^1 = x_2^1 = x_3^1 = H^1$. Мы можем поэтому, обозначив насыщенность через S, написать, что:

$$S = 2 \arccos \frac{a\sqrt{x_1} + b\sqrt{x_2} + c\sqrt{x_3}}{\sqrt{H}} \quad (9)$$

Кривые равной насыщенности будут тогда так называемые „геодезические круги“ вокруг белой точки цветового треугольника равносветлых тонов, т. е. кривые, точки которых лежат на некотором постоянном геодезическом расстоянии от белой точки. Этими сведениями из высшей метрики мы здесь и ограничимся, подчеркнув еще раз, что сам автор не считает еще своих результатов окончательными. Они представляют, однако, большой интерес, как первая (после Гельмгольца, допустившего в своих построениях одну уничтожающую их ошибку)[1] попытка создать своеобразную метрическую геометрию цвета.

[1] См. об этом у E. Schrödinger, loc. cit.

§ 6. Рассмотрим в заключение вопрос о построении рационального тела пигментных цветов, которое целиком должно заключаться внутри конуса спектральных цветов $OR'G'V'$ (рис. 6 первой статьи). Мы не будем здесь останавливаться на системе цветов Оствальда, так как в этом журнале ей уже была посвящена статья Кл. Шефера,[1] и рассмотрим вкратце лишь одну из схем построения цветового тела по Р. Лютеру.[2] На рис. 18 дана фотография модели такого цветового тела, а на рис. 19 одно из сечений его, проходящее через зеленый цвет (500 $m\mu$) и дополнительный ему пурпуровый. Поверхность этого тела образуют оптимальные шрёдингеровские цвета; внизу лежит черный, вверху — белый цвет. По вертикальному направлению изменяется светлота, по горизонтальному насыщенность. Пунктиром намечены векторы тела $OR'G'V'$. Точка „X" показывает положение в этом теле цвета изумруда, спектр которого приведен в первой статье (стр. 109). Насыщенность (правильнее чистота) этого цвета определяется отношением $\frac{UX}{US}$, что,

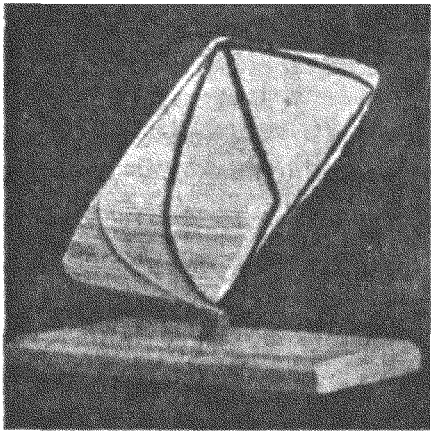

Рис. 18.

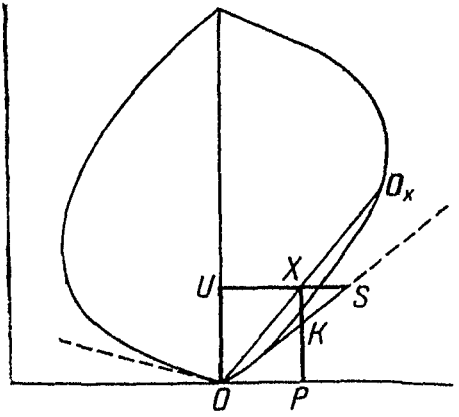

Рис. 19.

[1] „Усп. физ. наук". Том VII, вып. 5, 375, 1927.

[2] R. Luther. Zts. f. techn. Phys. № 12, 540, 1927.

как легко видеть из подобия треугольников OUS и OKP, равно $\frac{PK}{PX}$, т. е. равно отношению светлоты чистой спектральной компоненты к общей светлоте цвета. Оптимальный цвет,

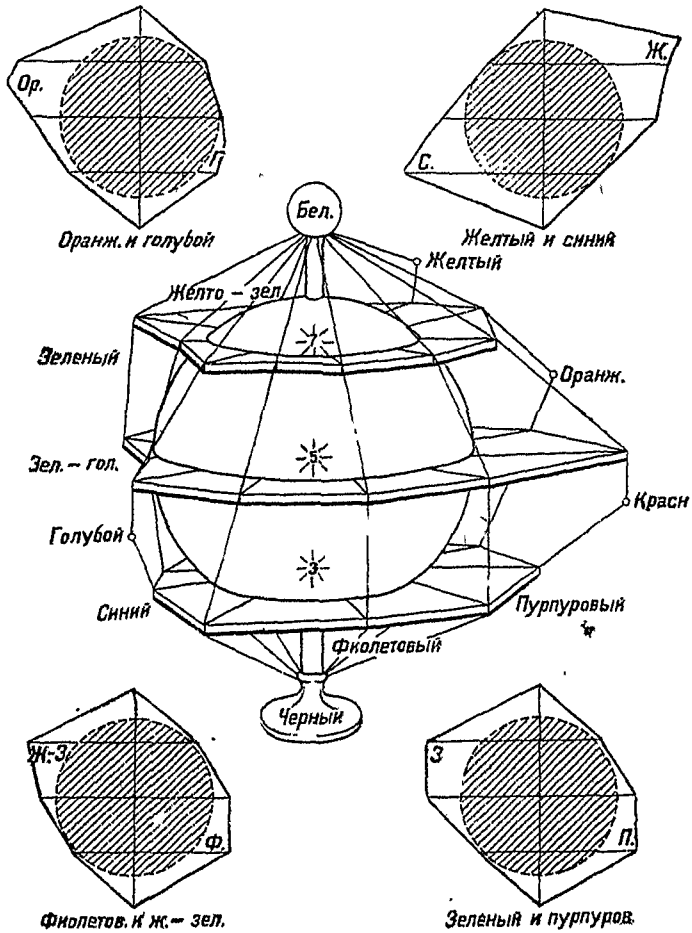

Рис. 20.

соответствующий по цвету и насыщенности цвету изумруда но имеющий бо́льшую светлоту, лежит на поверхности тела, в точке O_x, и мы можем, очевидно, получить наш цвет, затемняя соответствующий ему оптимальный. Построение подобного цветового тела для практики, например, текстильной промышленности является в настоящее время, когда

мы можем пользоваться для этой цели прибором Реша, [1] например, вполне реальной и осуществимой задачей при условии совместной работы и физиков и практиков-колористов.

В Америке уже в 1915 г. Менселлом [2] была разработана практически система цветов, расположенных по их цветовому тону, светлоте и насыщенности (чистоте). Им был выпущен и атлас цветов, содержащий, к сожалению, лишь 10 основных цветов. В 1929 г. „Менселловской цветовой компанией" выпущено новое издание этого атласа, содержащее уже 20 основных цветов.

Представление об этой системе можно получить из рис. 20, где в центре изображена модель Менселловского цветового тела, а в углах 4 сечения этого тела плоскостями, проходящими через ось. Высота цвета определяет здесь его светлоту, а расстояние от ахроматической оси — насыщенность (чистоту).

Следует указать, что для некоторых из его цветов в Бюро стандартов в Вашингтоне были промерены спектры и вычислены по формуле (3) их светлоты, причем оказалось, что, действительно, на одном горизонтальном уровне лежат цвета, имеющие практически одинаковую светлоту. [3] Отсюда следует также, что по радиусу от периферии к центру мы имеем дело с изменением цвета лишь по насыщенности.

К сожалению, в этой системе не могло быть использовано понятие об оптимальных пигментных цветах, без которого построение рационального цветового тела невозможно.

---

[1] См. нашу первую статью.

[2] Munsell. A Color Notation. 7-е изд. 1926. Atlas of the Munsell Color System, 1915. Новое издание атласа: „Book of Color", 1929 г. („Munsell Color Company").

[3] I. Priest, K. Gibson and H. Nicolas. Techn. Pap. B. of Stand. № 167, 1920.