ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Б. М. Гессен, Москва.

§ 1. Постановка вопроса. Эргодическая гипотеза в статистической механике.

При изучении совокупности мы можем ставить два рода проблем: можно изучать структуру совокупности, распределение ее элементов в данный момент времени. Если дана не одна совокупность, а конечное или бесконечное число совокупностей, то можно задаться целью установить закономерности в совокупности данных совокупностей. Статистический характер подобного исследования будет состоять в том, что мы будем определять, как часто встречается данный элемент или данная совокупность элементов в пределах данной совокупности, либо мы будем определять, как часто встречается совокупность определенной структуры в пределах данного коллектива совокупностей.

Характерная особенность этого вида проблем состоит в том, что мы исследуем совокупность не во времени, а в пространстве.

Второй вид проблем состоит в том, что мы исследуем данную совокупность во времени и задаемся задачей установить, как распределяются состояния совокупности во времени.

Отражает ли структура совокупности (или совокупностей) в данный момент времени структуру временного ряда для данной совокупности? Какая связь и при каких условиях существует между пространственной и временной структурой совокупности?

Мы определяем, напр., частоту, с которой встречаются в поле зрения микроскопа 5 броуновских частиц в данный момент времени.

Но мы можем спросить, как часто будут появляться 5 частиц в данной точке, если совокупность броуновских частиц будет предоставлена самой себе в течение определенного промежутка времени.

Существенное отличие первой задачи от второй состоит в том, что для того, чтобы определить частоту пространственного распределения, достаточно наблюдать броуновские частицы один момент, каждый раз перемешивая эмульсию; для определения частоты распределения во времени, надо предоставить эмульсию самой себе в течение определенного промежутка времени и наблюдать, как изменится за этот промежуток времени начальная конфигурация частиц.

Один из основных приемов статистической механики состоит в том, что мы стремимся заменить изучение временного поведения совокупности изучением ее пространственной структуры. Для того чтобы подобный способ изучения имел место, нам нужно показать, что такая замена действительно возможна и законна. Если это доказано, то мы можем свести изучение закономерности поведения совокупности во времени к нахождению вероятности определенной структуры, т. е. к комбинаторной задаче.

В классической кинетической теории газов Больцмана-Максвелла, мы имели два рода гипотез: 1) гипотезу об атомистической структуре газа и 2) теоретико-вероятностную гипотезу, состоящую в том, что сложным движениям молекул приписывалась известная закономерность в форме утверждения об относительной частоте различных конфигураций и движения молекул.

Критика теоремы *H* направлялась в основном против того предположения теоретико-вероятностного характера, которое принято обозначать как предположение о числе соударений — „Stosszahlansatz“.

В основе его лежит следующее предположение о равной вероятности распределения: при рассмотрении соударений двух групп молекул принимается, что на любую единицу объема пространства, захватываемого при движении молекулами второй группы, приходится такое же число молекул как и для любой единицы объема остального пространства.

Таким образом посредством предположения о равновозможности элементарных процессов выводится утверждение относительно частоты неравновозможных состояний (событий). Стремление обойтись без этих основных предположений о вероятности элементарных событий, в частности построить кинетическую теорию без Stosszahlansatz привело Больцмана к созданию статистической механики. „Первые исследования в области статистической механики были посвящены несколько ограниченному полю исследования, поскольку они относились к частицам одной и той же системы. Позднее исследование было распространено на фазы (или состояния в отношении конфигурации и скоростей), которые проходит система с течением времени" (Гиббс).

Основной задачей в статистической механике является нахождение среднего по времени (Zeitmittel) некоторой фазовой функции. Для нахождения этого среднего вычисляется среднее пространственное (Scharmittel, Zahlmittel) и затем устанавливается равенство между этими двумя средними.

Вместо того чтобы рассматривать последовательный ряд состояний системы во времени, в котором каждое последующее состояние есть следствие предыдущего, мы рассматриваем совокупность систем, которая получается из данной системы, если рассматривать всевозможные значения параметров, как угодно мало отличающиеся друг от друга. Мы получаем таким образом совокупность систем уже не как временную последовательность состояний данной системы, а как некоторую совокупность систем в пространстве.

В отличие от совокупности состояний во времени, связанных между собой, мы получаем ряд систем независимых друг от друга. Предположим, что наша модель газа состоит из N одинаковых многоатомных молекул, каждая из которых имеет r степеней свободы. Тогда конфигурация системы — фаза по Гиббсу — в данный момент времени будет определяться заданием $2rN$ параметров — координат и импульсов. Предположим, что данная система обладает энергией E. Если мы представим себе ряд систем, обладающих одной и той же энергией, но независимых друг от друга и отличающихся в данный момент времени только значением параметров (p, q), то мы получим так называемую виртуальную совокупность. Физически задача обыкновенно поставлена так, что мы ищем не относительную частость в пределах виртуальной совокупности, а среднюю продолжительность пребывания системы в определенном состоянии.

Суть эргодической гипотезы в общем смысле состоит в том, что среднюю частоту в пределах виртуальной совокупности мы приравниваем средней продолжительности пребывания системы в данном состоянии (например, в состоянии стационарном).

Каким условиям должна удовлетворять система для того, чтобы можно было среднее числовое (пространственное среднее) приравнять среднему по времени?

Вскроем прежде всего, какие предположения надо сделать относительно системы для того, чтобы можно было утверждать равенство этих средних.

Обозначим среднее по времени от некоторой фазовой функции $u(p \cdot q)$ через $\overline{u(p \cdot q)}^{\,t}$, а числовое среднее $\overline{u(p \cdot q)}$.

Надо показать, при каких условиях

$$\overline{u(p \cdot q)}^{\,t} = \overline{u(p \cdot q)}. \tag{1}$$

Так как мы предполагаем, что совокупность систем стационарна, то фазовая плотность ρ не изменяется во времени, и, следовательно, среднее по времени от среднего числового равно среднему числовому

$$\overline{\overline{u(p \cdot q)}}^{\,t} = \overline{u(p \cdot q)}. \tag{2}$$

Далее, так как образование среднего по времени независимо от среднего численного, мы можем представить порядок образования среднего, т. е.

$$\overline{u(p\cdot q)}^{\,t} = \overline{\overline{u(p\cdot q)}}^{\,t}. \tag{3}$$

Соединяя это с предыдущим уравнением (2), имеем

$$\overline{u(p\cdot q)} = \overline{\overline{u(p\cdot q)}}^{\,t} = \overline{u(p\cdot q)}^{\,t}. \tag{4}$$

Следовательно, для **стационарной совокупности** числовое среднее равно среднему по времени от числового среднего и числовому среднему от среднего по времени.

Что означает $u(p\cdot q)^{t}$? Мы берем сначала среднее по времени одной системы вдоль фазовой траектории, затем среднее по времени другой системы вдоль ее траектории, и т. д. Затем образуем числовое среднее всех этих средних. В общем случае $\overline{u(p\cdot q)}^{\,t}$ будет меняться от траектории к траектории, так как каждая траектория определяется своими константами свободных от времени интегралов системы уравнений **Гамильтона**.

Если все траектории определяются **одними и теми же константами**, то среднее по времени будет одно и то же для всех систем и равно числовому среднему от среднего по времени

$$\overline{u(p\cdot q)}^{\,t} = \overline{u(p\cdot q)}^{\,t}. \tag{5}$$

Сопоставляя (5) с (2), получаем

$$\overline{u(p\cdot q)} = \overline{\overline{u(p\cdot q)}}^{\,t} = \overline{\overline{u(p\cdot q)}}^{\,t} = \overline{u(p\cdot q)}^{\,t}; \tag{6}$$

таким образом получаем:

$$\boxed{\overline{u(p\cdot q)} = \overline{u(p\cdot q)}^{\,t}} \tag{7}$$

Мы пришли, следовательно, к выводу о равенстве среднего числового и среднего по времени благодаря предположению, что $\overline{u(p\cdot q)}^{t}$ не меняется от траектории к траектории или, другими словами, все траектории определяются одними и теми же значениями констант ($\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{2rN}$), свободных от времени уравнений Гамильтона. Так как уравнения Гамильтона для каждой точки пространства дают однозначное решение, то через каждую точки проходит только одна траектория, и равенство констант для всех фазовых траекторий может быть лишь в том случае, если траектории всех систем образуют одну траекторию.

Таким образом через каждую точку поверхности энергии должна проходить только одна траектория; с другой стороны, все траектории представляют одну единую траекторию. Это эквивалентно утверждению, что фазовая траектория проходит через все точки поверхности энергии, — другими словами, система проходит через все состояния, совместимые с данной энергией.

Это свойство системы Больцман назвал эргодическим.[1] Только благодаря предположению, что все траектории представляют одну траекторию, нам удалось доказать, что

$$\overline{u(p\cdot q)} = \overline{u(p\cdot q)}^{t} .$$

Мы принимаем, что наша система состоит из достаточно большого числа материальных частиц, движения которых подчиняются уравнениям Гамильтона. Таким образом если предположить, что каждая частица обладает r степенями свободы, а данная система состоит из N частиц, то для полного описания движения системы мы будем иметь $2rN$ уравнений вида:[2]

$$\frac{dq_s^k}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_s^k}, \qquad \frac{dp_s^k}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_s^k} \tag{8}$$

[1] Максвелл называет это предположение „assumption of the continuity of path" („допущение о непрерывности траектории").

[2] Во всех дальнейших рассуждениях предполагается, что поле внешних сил не меняется во времени. В этом случае E зависит явно только от p и q.

Основною особенностью подобным образом характеризованных систем является теорема Лиувилля о сохранении фазовых объемов.

Теорема Лиувилля является следствием особого вида фазового пространства (Γ) и вида гамильтоновых уравнений. Таким образом в основе ее лежит только предположение о том, что материальные частицы, составляющие систему, движутся по законам механики.

Особенно важно для изучения стационарное распределение систем в пространстве фаз, которому соответствует стационарное состояние системы во времени.

Необходимым и достаточным условием для стационарности будет

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{9}$$

где ρ будет функцией от p, q и t. Так как на основании вида гамильтоновых уравнений

$$\sum\left(\frac{\partial \dot{q}_s^k}{\partial q_s^k}+\frac{\partial \dot{p}_s^k}{\partial p_s^k}\right)=0,$$

а

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{s,k}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_s^k}\dot{q}_s^k+\frac{\partial\rho}{\partial p_s^k}\dot{p}_s^k\right), \tag{10}$$

то отсюда следует, что необходимое и достаточное условие для стационарности

$$\sum_{s,k}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_s^k}\dot{q}_s^k+\frac{\partial\rho}{\partial p_s^k}\dot{p}_s^k\right)=0. \tag{11}$$

Плотность ρ должна быть такой функцией от p и q, которая бы не менялась со временем. Гамильтоновы уравнения допускают только $2rN-1$, свободных от времени интегралов. Таким образом необходимое и достаточное условие для стационарности должно иметь вид

$$\rho(p\cdot q)=F(E,\ \varphi_2\ \ldots\ \varphi_{2rN-1}) \tag{12}$$

для пространственного распределения или

$$\sigma(p\cdot q)=\frac{1}{\operatorname{grad}E}F(E,\ \varphi_2\ \ldots\ \varphi_{2rN-1}) \tag{13}$$

для поверхностного распределения.

Условие стационарности будет удовлетворено и в том случае, если мы положим

$$\rho(p \cdot q) = F(E) \tag{14}$$

или

$$\sigma(p \cdot q) = \frac{\text{Const}}{\text{grad} E}. \tag{15}$$

Это условие будет в общем случае достаточным, но не необходимым. Покажем, что для эргодических систем, т. е. для таких систем, в которых численное среднее (пространственное) равно среднему по времени, это условие будет не только достаточным, но и необходимым.

На основании эргодической гипотезы все точки поверхности лежат на одной и той же траектории. С другой стороны, так как совокупность стационарна, то плотность вдоль любой траектории должна быть постоянной. В общем случае стационарности плотность определяется как (12) или (13).

Но так как $\sigma \, \text{grad}\, E$ должно быть постоянно вдоль фазовой траектории, то единственным видом стационарной плотности для эргодических систем будет (14) для пространственной плотности, (15) для поверхностной плотности.

Эти специальные виды плотности носят название эргодических распределений плотности.

В статистической механике мы оперируем почти исключительно эргодическими плотностями. Это объясняется тем, что только этот специальный вид плотностей совместим с эргодической гипотезой.

Итак, в основе всех выводов статистической механики лежит эргодическая гипотеза. Это фундаментальное предположение об особом характере систем эквивалентно предположению о числе соударений (Stosszahlansatz) в классической кинетической теории.

Как и классическая кинетическая теория, статистическая механика не может быть построена на основании только предположения о том, что материальные частицы, из которых состоит система, подчиняются законам механики.

Эргодическая гипотеза позволяет дать выражение для времени, в продолжение которого фазовая точка, изображающая систему, находится в различных областях поверхности энергии за неограниченный промежуток времени, в который система предоставлена самой себе:

$$\lim \frac{dt}{T} = \frac{\sigma dS}{\int \sigma dS} \tag{16}$$

[dS элемент поверхности энергии, и σ определена (15)].

Если принимать эргодическую гипотезу, то это выражение для соотношения временнόго поведения газа с его пространственным распределением есть чисто механическая теорема, совершенно независимая от всяких теоретико-вероятностных соображений.

Приведенное соотношение определяет (в случае если эргодическая гипотеза верна) не только высказывания о среднем поведении, но определяет также относительный промежуток времени пребывания газа в различных состояниях.

Если же не принимать эргодической гипотезы, то нет никакого основания утверждать, что равенство (16) справедливо. Тем самым ставится под сомнение вся статистическая механика.

До настоящего времени не только не удалось привести ни одного примера эргодической системы, но в 1913 г. Розенталь и Планшерелль показали, что эргодическая гипотеза заключает в себе противоречие. Поэтому возможность приравнивания среднего по времени пространственному среднему должна быть доказана из иных соображений.

Если эргодических систем не существует, то равенство средних не может быть доказано как общая теорема для всех систем и не является простым следствием механической структуры системы.

Это однако не значит, что равенство средних по времени и пространственного среднего вообще не может иметь места.

Это равенство должно быть обосновано в каждом случае, причем обоснование этого равенства будет теоретико-вероятностного характера.

§ 2. Новое обоснование теории вероятностей Р. Мизеса.

Затруднения физической статистики в основном связаны с тою неопределенностью, которая заключается в классическом понятии вероятности. Большая литература посвящена анализу и критике основ классической теории вероятности, но очень мало было сделано для удовлетворительного обоснования теории вероятностей. В самое последнее время Р. Мизес (R. v. Mises) предложил новое обоснование теории вероятностей, построенное на совершенно иной концепции вероятности, чем классические теории.

Новая концепция вероятностей приводит Мизеса и к новой концепции физической статистики.

Мы не можем здесь останавливаться на изложении основных положений теории Мизеса, так как наша задача — показать конкретное применение нового обоснования физической статистики к проблеме эргодической гипотезы. Отсылая поэтому читателя к оригинальным работам Мизеса и к изложениям его идей, [1] мы кратко сформулируем те основные положения, которые являются руководящими для всей теории.

Классическое понятие вероятности основано на понятии равновозможных случаев. Это понятие равновозможных случаев является наиболее слабым местом классической теории вероятностей, придающим понятию вероятности субъективный характер.

В теории Мизеса понятие вероятности связано не с неопределенным понятием равновозможности, а со строго определенным понятием коллектива, имеющим объективное значение.

Коллективом Мизес называет бесконечную совокупность объектов, подчиняющуюся следующим двум требованиям: 1. Внутри данной совокупности существуют пределы для частот элементов с определенными признаками. 2. Если мы из данной совокупности составим новую совокупность, посредством выбора элементов любым способом,

[1] См. литература №№ 7 — 10.

не связанным с признаком выбираемого элемента, то внутри новой совокупности, полученной посредством этого выбора, сохраняются те же пределы для частот, как и в исходной совокупности.

Предел частоты появления данного признака внутри совокупности, удовлетворяющей этим двум требованиям, и будет вероятностью появления данного признака внутри совокупности.

Таким образом понятие вероятности неразрывно связано с понятием коллектива и приобретает определенность только тогда, когда мы можем указать тот коллектив, к которому относится данное понятие вероятности.

Совокупность вероятностей, т. е. пределов частот внутри данного коллектива, называется распределением. Коллектив задается и характеризуется посредством задания распределения. Напр., совокупность бросаний правильной кости дает коллектив с шестью признаками. Этот коллектив, полученный путем бросания правильной кости, характеризуется тем, что его распределение, состоящее из шести вероятностей выпадения того или иного числа очков, равномерно, т. е. все вероятности равны между собой. Если бы кость была неправильна, то мы бы не имели уже равномерного распределения, а некоторое другое, характеризующее коллектив, полученный путем бросания неправильной кости.

Из данного коллектива посредством четырех основных операций могут быть получены новые коллективы. Задача теории вероятностей состоит в том, чтобы определить распределение в новом коллективе, полученном посредством различных операций из данного коллектива, в том случае, если известно распределение в исходном коллективе.

Что касается значений вероятностей (распределения) в исходном коллективе, то они должны быть заданы. Определение распределения исходного коллектива не входит и не может входить в круг задач теории вероятностей, подобно тому как определение начальных скоростей и положений тел не входит в задачу механики.

Таким образом основные предположения об исходных вероятностях должны быть сделаны прежде чем мы приступим к решению теоретико-вероятностной проблемы. Поэтому и в статистической механике невозможно обойтись без известных предположений о начальных вероятностях. Правильность сделанных нами предположений о начальных вероятностях в исходном коллективе подтверждается согласием с опытом следствий, полученных при этих предположениях.

Суть классической эргодической гипотезы состояла в том, что, делая известное предположение механического характера относительно газовой модели, мы тем самым получали возможность отожествить пространственную и временную совокупность состояний.

Суть теоретико-вероятностного обоснования состоит в том, что мы рассматриваем совокупность пространственных и временных состояний как два различных коллектива.

Затем показываем, что при определенных предположениях относительно распределений в исходных временном и пространственном коллективе вероятности появления определенного признака внутри новых пространственных и временных коллективов, полученных посредством простых операций из исходного пространственного и временного коллектива, будут равны друг другу.

Место предположения об особом характере механической системы занимает таким образом определенное предположение относительно распределений внутри двух исходных коллективов — пространственного и временного.

Выше уже было отмечено, что, принимая эргодическую гипотезу, мы сообщаем нашим выводам характер динамической закономерности, независимый ни от каких теоретико-вероятностных соображений.

При теоретико-вероятностном обосновании эргодической гипотезы наше высказывание о равенстве вероятностей внутри пространственного и временного коллектива имеет также теоретико-вероятностный характер, т. е. дано в форме статистической закономерности и действительно не для всех случаев без исключения, а лишь для подавляющего числа случаев.

Это необходимо иметь в виду, так как часто теоретико-вероятностные предпосылки вводятся неявным образом при выводе. Результат же выражается в форме динамической закономерности, что, конечно, приводит к противоречиям. Примером подобных мнимых противоречий может служить вся история критики теоремы H.

Итак, равенство числового (пространственного) среднего и среднего по времени для определенных газовых моделей имеет статистический характер и может быть строго доказано, если мы сделаем определенные предположения относительно распределений в двух исходных коллективах — пространственном и временном.

В этом и состоит теоретико-вероятностное обоснование эргодической гипотезы.

§ 3. Эргодическая гипотеза в броуновском движении.

Эргодическая гипотеза была впервые формулирована Больцманом и Максвеллом.

Несмотря на то, что только посредством эргодической гипотезы возможны выводы основных теорем, напр., теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы, она часто вводилась скрыто, и даже сам Больцман не упоминает о ней в своей работе, хотя и приводит распределение плотности (14), которое он называет эргодическим. Эргодическое распределение он просто приводит как „наиболее простой случай“, не ссылаясь на эргодическую гипотезу, при которой, как было показано выше, это распределение является единственным.

Несмотря на все значение, которое имеет теория броуновского движения, до самого последнего времени не было указано на то, что и в броуновском движении мы применяем эргодическую гипотезу. Р. Мизес впервые указал, что в основе теории броуновского движения лежит эргодическая гипотеза, и дал ее теоретико-вероятностное обоснование.

Смолуховский и Сведберг показали, что вероятность того, что в данной части объема в данный момент времени будет находиться как раз x частиц, имеет следующий вид:

$$W(x) = \frac{e^{-\nu} \nu^{x}}{x!}; \tag{17}$$

где ν обозначает число частиц, приходящееся на данную часть объема в том случае, если частицы распределены равномерно по всему объему.

Выражение (17) для вероятности $W(x)$ получено на основании комбинаторных соображений, т. е. мы оперируем только с пространственной совокупностью, а не с поведением ее во времени.

Прямое экспериментальное подтверждение этой формулы Смолуховский[1] видит в работах Сведберга над коллоидальными растворами и эмульсиями. Как известно, проверка формулы (17) сводилась к тому, что Сведберг наблюдал слой эмульсии в микроскоп через равные промежутки времени (39 раз в минуту, Перрен каждые 30 сек.) Во все время опыта эмульсия не перемешивалась. Посредством диафрагмы из поля зрения выделялся маленький участок, в котором и производился подсчет числа частиц.

Частоты, вычисленные Сведбергом на основании 518 наблюдений, весьма хорошо согласовались с вероятностями, даваемыми формулой (17).

Ясно, что подтверждение формулы (17) при помощи подобного эксперимента можно видеть только в том случае, если мы принимаем эргодическую гипотезу для движения броуновских частиц.

В самом деле, вероятность, полученную из комбинаторных соображений в применении к пространственной совокупности частиц, мы проверяем, наблюдая эту совокупность во времени. Мы предполагаем, что среднее по времени равно пространственному среднему, что имеет место только для эргодических систем.

Если мы отказываемся от эргодической гипотезы, то проверку формулы (17) в опытах Сведберга можно

[1] M. v. Smoluchowski. Abhandlungen über die Brownsche Bewegung etc. Ostwald's Klassiker. № 207, S. 42.

признать только тогда, если предварительно будет доказано равенство вероятностей в пространственном и временном коллективе наблюдений.

К этому доказательству мы и приступим.

Мы исходим из следующей модели броуновского движения: в ограниченной части пространства находится n брауновских частиц. Мы наблюдаем расположения этих частиц в плоской решетке, состоящей из N клеточек, через некоторые равные промежутки времени, представляющие кратное некоторой единицы времени τ. Координаты точек решетки представляют кратное некоторой единицы α.

Нам надо установить, в каком соотношении находятся вероятность того, что при однократном наблюдении из всех n частиц в z точках решетки находится по x частиц, и вероятность того, что при наблюдении в продолжение некоторого промежутка времени $m\tau$ (m достаточно велико) любое расположение частиц z раз перейдет в такое расположение, при котором в определенной клеточке решетки будет находиться по x частиц.

В первом случае мы ищем комбинаторную вероятность, соответствующую пространственному среднему. Для получения ее мы наблюдаем частицы в один момент времени, определяем, в скольких местах сосредоточено x частиц, затем перемешиваем частицы, наблюдаем снова и т. д. Из полученного ряда наблюдений и составится наш пространственный коллектив. Ясно, что перемешивание частиц мы производим для того, чтобы получить именно пространственный коллектив, так как перемешивание дает нам ряд независимых во времени состояний.

Во втором случае мы наблюдаем переход одного расположения частиц в другое во времени, т. е., исходя из некоторого расположения частиц, предоставляем их самим себе в течение промежутка времени $m\tau$, замечаем расположения, которые они приняли через промежуток времени $m\tau$ (всего, следовательно, будет m расположений), перемешиваем их и снова наблюдаем в течение промежутка времени $m\tau$, замечаем новые расположения, снова перемешиваем и наблюдаем в течение времени $m\tau$, и т. д.

Совокупность этих наблюдений образует коллектив во времени, в котором мы устанавливаем вероятность искомой констелляции частиц. Элементом этого коллектива будет m последовательных наблюдений через равные промежутки времени.

I. Пространственный коллектив.

1. Исходный коллектив. Исходя из указанной модели броуновского движения, составляем исходный коллектив, элементом которого будет наблюдение одной броуновской частицы в определенный момент времени. Признаком элемента в данном коллективе будет номер клеточки, в которой находится наша частица.

Относительно распределения этого коллектива мы делаем следующее основное предположение:

Распределение мы принимаем за равномерное, иными словами: вероятность для любой частицы, находящейся в данный момент времени в любой клеточке решетки, равна $\frac{1}{N}$ (N—число клеточек).

Так как мы имеем дело с пространственным коллективом, то каждому наблюдению, длящемуся один момент времени, предшествует основательное перемешивание частиц.

Этот основной пространственный коллектив служит нам исходным пунктом для образования новых коллективов необходимых для решения поставленной выше задачи. Сделанное нами предположение о вероятности (распределении) в исходном коллективе делает возможным вычисление вероятностей в производных коллективах.

2. Первый производный коллектив. Беря n коллективов тождественных исходному, образуем производный коллектив, в котором элементом будет наблюдение группы n броуновских частиц. В этом коллективе мы производим операцию смешения, соединяя вместе те группы элементов, в которых в какой-нибудь клеточке решетки будет находиться x частиц. Таким образом признаком нового коллектива, составленного соединением n основных

коллективов, будет группа x частиц, имеющих один и тот же номер клеточки.

Какова будет вероятность $w_n(x)$, что в данной клеточке, напр., в начале координат в данный момент времени мы найдем x частиц?

Так как нам известно распределение исходного коллектива, то легко найти значение $w_n(x)$: [1]

$$w_n(x) = \binom{n}{x} (N-1)^{n-x} N^{-n} = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{N}\right) \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-x}$$

Если n и N достаточно большие числа, но $\frac{n}{N} = \nu$ конечно, то формулу (17) можно упростить

$$w_n(x) = \frac{1}{x!}\binom{n}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N\nu}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\cdots\frac{1-\frac{x-1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\right] \cong \frac{\nu^x e^\nu}{x!} \qquad (18)$$

3. **Второй производный коллектив.** Наша задача состоит в определении вероятности нахождения x частиц в z точках решетки. Обозначая через y относительное число точек, в которых находится по x частиц,, имеем $z = Ny$. Искомая вероятность $f_n(x, y)$ будет некоторой функцией x и y. Для определения ее подвергаем коллектив, в котором элемент состоит из однократного наблюдения n частиц новому смешению, которое состоит в том, что мы соединяем вместе элементы, в которых x частиц, находящихся в одной и той же клеточке решетки (имеющих один и тот же номер), встречаются z раз.

Так как нам известно распределение исходного коллектива, то мы могли бы непосредственно вычислить вероятность $f_n(x, y)$. Но вычисление это очень сложно, в то время как для нашей цели достаточно найти среднее значение a и дисперсию S^2 от $f_n(x, y)$. Как известно из элементов теории вероятностей, будут иметь место следующие соотношения:

---

[1] Вывод этой формулы см., напр., Бернштейн. Теория вероятностей. Стр. 60—61; Fürth. Schwankugserscheinung in der Physik. S. 17.

$$\sum_{(y)} f_n(x, y) = 1 \qquad \sum_{(y)} y f_n(x, y) = a \tag{19}$$

$$\sum_y (y-a)^2 f_n(x, y) = \sum_y y^2 f_n(x \cdot y) - a^2 = S^2 . \tag{20}$$

Для нахождения среднего значения a поступаем следующим образом. Из всех n частиц выберем x частиц. Это можно сделать $\binom{n}{x}$ способами. Эти выбранные частицы поставим в одну какую-нибудь клеточку решетки — это можно сделать N способами. Остающиеся $(n-x)$ частиц разместим на остальных $N-1$ клеточках, что можно сделать $(N-1)^{n-x}$ способами.

Среди всевозможных расположений n частиц, полученных этим способом, будут и такие, при которых x частиц будет находиться в z клеточках. Но все такие расположения будут, очевидно, при нашем способе размещения сосчитаны z раз. Мы можем таким образом написать

$$\sum_y z f^n (x \cdot y) = \binom{n}{x} N (N-1)^{n-x} N^{-n} \tag{21}$$

N^{-n} есть вероятность любого расположения из n частиц. Так как $z = Ny$, то, подставляя, это значение в (21) и сокращая на N, получаем:

$$a = \Sigma y f_n (x \cdot y) = \binom{n}{x} (N-1)^{n-x} N^{-n} \tag{22}$$

Но полученное нами выражение для среднего значения как раз равно найденной нами выше вероятности $w_n(x)$ нахождения x частиц в данной клеточке, следовательно

$$\boxed{a = w_n(x)} \tag{23}$$

Для того, чтобы найти дисперсию S^2, поступаем подобным же образом. Выбираем из n частиц $2x$ $\binom{n}{2x}$ способами. Разлагаем $2x$ частиц на группы в каждой по x частиц, что можно сделать $\binom{2x}{x}$ способами. Располагаем полученные две группы в двух каких-либо клеточках из N, что можно сделать $\frac{1}{2} N(N-1)$ способами и, наконец, остальные $n-2x$ частиц располагаем в остальных $N-2$ клеточках, что можно сделать $(N-2)^{n-2x}$ способами. Произведение

$$\binom{n}{2x} \binom{2x}{x} \frac{1}{2} N (N-1) (N-2)^{n-2x}$$

даст все возможные расположения частиц, в которых x частиц встречаются по крайней мере в двух местах решетки, причем каждое расположение, в котором x частиц встречается в двух точках, будет сосчитано $\frac{1}{2}z(z-1)$ раз.

Таким образом получаем:

$$\frac{1}{2}\Sigma z(z-1)\, f_n(x,y) = \binom{n}{2x}\binom{2x}{x}\frac{1}{2}N(N-1)(N-2)^{n-2x}N^{-n} \quad (24)$$

Подставляя $z = Ny$ и преобразуя, получаем:

$$S^2 = \frac{1}{N^2}\left[\sum_y 2 f_n(x,y) + \sum_y 2(2-1) f_n(x,y)\right] - a^2$$

$$S^2 = \frac{a}{N} + \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n \frac{(N-2)^{-2x}\, n!}{(n-2x)!\,x!\,x!}$$

$$\left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n-2x-1}}{\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-2x}}\;\frac{n!\,(n-2x)!}{(n-x)!\,(n-x)!}\right];$$

так как выражение в квадратных скобках отрицательно при достаточно большом N, а S^2 всегда положительно, то, следовательно,

$$S^2 < \frac{a}{N} = \frac{w_n(x)}{N} \quad (25)$$

значит, дисперсия при возрастающем N неограниченно приближается к O и, следовательно, значения $f_n(x,y)$ уплотняются возле среднего значения a.

В результате мы приходим к следующему положению. При достаточно большом N (число клеточек решетки) с достаточно большой вероятностью можно ожидать, что относительное число клеточек (y), в которых находится как раз x частиц, по своему значению близко к вероятности $w_n(x)$ найти x частиц в определенной клеточке решетки.

II. Временной коллектив.

1. Исходный коллектив. Элементом исходного временного коллектива будет наблюдение одной броуновской частицы в начале и в конце промежутка времени τ. Признаком каждого элемента будет величина смещения, выражающаяся тремя числами, дающими ко-

ординаты нового положения в конце промежутка времени τ по отношению к координатам в начале промежутка времени τ.

Таким образом элемент нашего исходного коллектива характеризуется совокупностью чисел ($\varkappa$ λ μ.)

Относительно **распределения** в нашем исходном коллективе мы делаем следующие основные предположения:

1. Вероятность смещения частицы на $\varkappa$ λ μ по осям координат, которую мы будем обозначать $p_{\varkappa\lambda\mu}$ симметрична по отношению к знаку $\varkappa\lambda\mu$, т. е.

$$\sum_{\varkappa} \varkappa p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\lambda} \lambda p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum \mu p_{\varkappa\lambda\mu} = 0 \qquad (1)$$

2. Все три слагающих дисперсии равны и отличны от нуля:

$$\sum \varkappa^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum \lambda^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum \mu^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = r^2 \neq 0 \qquad (2)$$

3. Из всех возможных перемещений по трем координатным направлениям всегда возможны по крайней мере два смещения, отличающихся только на одну единицу.

Кроме этого, имеем, очевидно, $\sum_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu} = 1$ (3)

Условия (1) и (2) показывают, что все три координатные направления равноправны, т. е. мы рассматриваем движение частиц в отсутствии внешнего поля сил.

Что касается до условий на границах, то мы либо предполагаем, что границы настолько удалены, что не оказывают влияния на движение, либо можем предположить, что частица, достигая границы, отражается от нее и таким образом устанавливаем определенное соответствие между точками, лежащими вне нашей области и внутри нее.

Таким образом наше основное предположение об исходном коллективе можно резюмировать так: смещение частицы за промежуток времени τ на $\varkappa$, λ, μ по трем осям координат имеет вероятность $p_{\varkappa\lambda\mu}$, удовлетворяющую условиям 1—3.

2. **Первый производный коллектив.** Соединяем m исходных коллективов в новый коллектив. **Элементом** этого коллектива будет наблюдение **одной частицы** в течение m последовательных промежутков времени.

Признаком будет совокупность m смещений, характеризуемых $3\,m$ числами

$$(\varkappa_1\lambda_1\mu_1),\ (\varkappa_2\lambda_2\mu_2),\ (\varkappa_3\lambda_3\mu_3)\ldots.(k_m\lambda_m\mu_m).$$

В этом коллективе мы производим смешение, соединяя в одну группу все те элементы в которых суммы смещений по осям

$$\varkappa_1+\varkappa_1+\ldots.\varkappa_m=k \qquad \lambda_1+\lambda_2+\ldots.+\lambda_m=l$$
$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m=q$$

равны одним и тем же величинам k, l, q.

Обозначим вероятность смещения частицы на $k\alpha$, $l\alpha$, $q\alpha$, $V_m(k,\ l,\ q)$.

Можно доказать,[1] что при сделанных предположениях о распределении $p_{k\lambda\mu}$ в исходном коллективе вероятность $V_m(k,\ l,\ q)$ в первом производном коллективе будет иметь вид:

$$V_m(k,\ l,\ q)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi r^2m)^3}}\,e^{-\frac{k^2+l^2+q^2}{2r^2m}} \tag{26}$$

Проверка этой формулы должна происходить следующим образом. Перемешиваем частицы. Наблюдаем частицу в начале и в конце промежутка времени $m\tau$, снова перемешиваем и наблюдаем в продолжение времени $m\tau$, перемешиваем и т. д. Разница в наблюдении по сравнению с пространственным коллективом состоит в том, что в нем мы наблюдаем данную клеточку **в один момент** и устанавливаем число частиц в ней. В случае же временного коллектива мы наблюдаем промежуток времени $m\tau$, за который частица, предоставленная сама себе, последовательно переходит из одного положения в другое.

3. **Второй производный коллектив.** Перенумеруем все клеточки нашей решетки от 1 до N. Тогда каждое расположение n частиц может быть выражено совокуп-

[1] Для случая одной координаты вид вероятности хорошо известен и вывод можно найти в любом курсе теории вероятностей и, напр., у De Haas-Lorentz. Die Brownsche Bewegung etc. Kap. 2. Для случая трех координат не независимых доказательство дал Mises. Fundamentalsätze d. Wahrscheinlicheitsrechung, Mathemat. Zeitschr. 4. 24, 68 1919.

ностью N чисел n_1, $n_2 \ldots . n_N$, где n_i выражает число частиц и i-той клеточке. Для сокращения будем обозначать совокупность N чисел $n_1 \ldots . n_N$ через $\bar{n}$.

Элементом производного коллектива будет наблюдение n частиц в начале и в конце промежутка времени τ.

Каждой возможной системе изменений положений частиц за промежуток времени τ будет соответствовать известная вероятность, выражаемая произведением $p_{\varkappa\lambda\mu}$ вероятностей.

Признаком будет новое расположение $\bar{n}^{(i)}$, по сравнению с предшествующим расположением $\bar{n}^{(i-1)}$, бывшим в начале промежутка наблюдения τ. Вероятность того, что данное начальное расположение $\bar{n}^0$ в конце промежутка времени τ перейдет в $\bar{n}^{(1)}$ зависит, очевидно, не только от $\bar{n}^{(1)}$, но и от $\bar{n}^0$. Поэтому эту вероятность мы обозначим через $V(\bar{n}^{(1)}\bar{n}^0)$.

4. Третий производный коллектив. Соединим m подобных коллективов. Элементом нового коллектива будет наблюдение n частиц в продолжение промежутка времени $m\tau$.

Вероятность того, что в течение наблюдения, длящегося $m\tau$ времени, мы будем иметь переход определенных расположений $\bar{n}^{(0)}$, $\bar{n}^{(1)}$, $\bar{n}^{(i)} \ldots . \bar{n}^{(m)}$, последовательно одно в другое, будет выражаться произведением вероятностей

$$V(\bar{n}^{(1)},\ n^{(0)}),\ V(\bar{n}^{(2)},\ \bar{n}^{(1)}) \ldots . V(\bar{n}^{(m)},\ \bar{n}^{(m-1)}).$$

В этом коллективе, элемент которого состоит из наблюдения n частиц в продолжение промежутка времени $m\tau$ посредством операции смешения образуем новый коллектив, соединяя в одну группу все те элементы, в которых оказывается x частиц в одной клеточке (к концу промежутка наблюдения $m\tau$). Для того, чтобы вычислить вероятность $fmn^{(x)}$ того, что к концу промежутка времени $m\tau$ в определенной клеточке будет как раз x частиц, мы должны образовать сумму произведений

$$V(\bar{n}^{(0)},\ \bar{n}^{(1)})\ V(\bar{n}^{(2)},\ \bar{n}^{(1)}) \ldots . V(n^{(m)},\ \bar{n}^{(m-1)})$$

при условии, что в определенной клеточке, напр., в первой к концу наблюдения, т. е. в расположении $n^{(m)}$ будет как раз x частиц.[1]

К тому же результату мы может притти и иным путем. Искомое конечное расположение может получиться только в том случае, если из n_i частиц, имевших в начале координаты $\varkappa_i\alpha$ $\lambda_i\alpha$ $\mu_i\alpha$, как раз z_i получат смешение $(\varkappa_1 - \lambda_i)\alpha$, $(\lambda_1 - \lambda_i)\alpha$, $(\mu_1 - \mu_i)\alpha$, причем $z_1 + z_2 + \ldots . z_N = x$.

Пусть та клеточка, в которой должно оказаться x частиц, находится в начале координат, т. е. $\varkappa_1 = \lambda_1 = \mu = 0$. Обозначим для краткости вероятность искомого смещения $v_m(\varkappa_i \lambda_i \mu_i)$ в конце промежутка времени $m\tau$ через v_i. В таком случае искомая вероятность $f_{mn}(x)$ будет равна коэфициенту при t^x в разложении

$$\prod_{i=1}^{N} (1 - v_i + tv_i)\ n_i \tag{27}$$

Действительно, этот коэфициент содержит все произведения вида $v_i^{z_i}(1 - v_i)(n_i - z_i)$ при условии $z_1 + z_2 + \ldots . z_N = x$. Числовой множитель при этом произведении соответствует числу способов, которыми можно из n_i частиц выбрать z частиц.

Вычислим этот коэффициент при предположении, что n достаточно велико, а

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} n_i v_i\,, \tag{28}$$

конечно, так что v_i можно считать дробями достаточно малой величины.

Имеем [2]

$$f_{mn}(0) = \Pi(1 - v_i)\, n_i$$

[1] Так как мы каждое i-тое расположение характеризуем совокупностью чисел $(n_1^{(i)}, n_2^{(i)} \ldots . n_N^{(i)})$ (i номер расположения), то это условие можно выразить так: $n_1^{(m)} = x$.

[2] $f_{mn}(0)$ обозначает вероятность того, что через промежуток времени $m\tau$ в начале коорд. не будет ни одной частицы, т. е. все смещения будут таковы, что бывшие там частицы уйдут из начала координат, и ни одна не придет. Вероятность смещения уводящего частицу из начала координат будет, очевидно, $1 - v_i$; отсюда и получаем написанное выражение.

Отсюда

$$\Pi\,(1-v_i)\,n_i = e^{-\Sigma n_i\, ln\,(1-v_i)} \backsim e^{-\Sigma n_i v_i} \backsim e^{-\nu}, \tag{29}$$

если пренебрежем высшими степенями v_i.

Далее имеем для конечного x

$$f_{mn}(x) = f_{mn}(0) \sum_{\alpha_1=1}^{n} \dots \sum_{\alpha x=1}^{N} \frac{v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} \dots v_{\alpha x}}{(1-v_{\alpha_1})(1-v_{\alpha_2})\dots(1-v_{\alpha_x})} \backsim$$

$$\backsim \frac{1}{x!} e^{-\nu} \left[\Sigma \frac{v_i}{1-v_i}\right]^x \tag{30}$$

$$\frac{1}{x!}\, e^{-\nu} \left[\Sigma \frac{v_i}{1-v_i}\right]^x \backsim \frac{e^{-\nu}}{x!} \nu^x. \tag{31}$$

Для того, чтобы установить равенство $f_{mn}(x)$ и $w_n(x)$ нам остается показать, что при достаточно большом m выражение для ν, определенное (28) как $\Sigma n_i v_i$, переходит в выражение

$$\nu = \frac{n}{N}$$

Мы обозначили через v_i вероятность смещения на $(\varkappa_i\, \lambda_i\, \mu_i)$ через $m\tau$ промежутков времени.

Отношение вероятностей двух смещений $(\varkappa, \lambda, \mu)$ и $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ согласно выражению (26) для вероятности v_i равно

$$e^{-\frac{(k-k_1)^2+(\lambda-\lambda_1)^2+(\mu-\mu_1)^2}{2mr^2}}$$

При достаточно большом m величина этого отношения близка к 1. Другими словами, для достаточно больших промежутков наблюдения вероятности v_i становятся все больше равными друг другу и, следовательно, каждая порознь равной $\frac{1}{N}$. Поэтому (28) можно переписать так:

$$\nu = \frac{1}{N}(n_1 + n_2 \dots n_N) = \frac{n}{N}$$

И следовательно,

$$\boxed{w_n(x) = f_{mn}(x)} \tag{32}$$

Необходимо отметить, что, как мы показали, значение $f_{mn}(x)$ не зависит от начального расположения.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Вероятность того, что при достаточно больших n и m расположение частиц через промежуток времени $m\tau$ перейдет в такое расположение, при котором в определенном месте решетки будет находиться как раз x частиц, равна вероятности того, что, наблюдая расположение частиц в один момент времени, мы в данной клеточке найдем x частиц.

Основное различие между $f_{mn}(x)$ и $W_n(x)$ состоит в том, что $f_{mn}(x)$ представляет вероятность при длительном наблюдении, т. е. дает представление о поведении системы во времени, тогда как $W_n(x)$ представляет результат однократных наблюдений и дает представление о пространственном характере системы.

Нам остается показать, что вероятность среди m исследовательных наблюдений встретить my расположений n частиц, в которых в определенной клеточке будет x частиц, равна вероятности найти в определенной клеточке x частиц при однократном наблюдении.

Мы показали, что для достаточно большого промежутка времени (m достаточно велико) вероятность данного расположения не зависит от начального расположения. Поэтому для вычисления искомой вероятности вместо единицы времени τ возьмем некоторую другую единицу времени такой величины, чтобы можно было с достаточным приближением вместо $f_{mn}(x)$ взять $w_n(x)$.

В опытах Сведберга наблюдения производились в начале и в конце приблизительно 2 секунды.

Тогда вероятность того, что любое расположение частиц перейдет в такое, при котором в данной клеточке будет x частиц, можно принять равным $w_n(x)$.

Вероятность того, что при m последовательных наблюдениях x частиц в данной клеточке встретится my раз, будет равна коэффициенту при t^{my} в разложении:

$$[1 - w_n(x) + tw_n(x)]^n$$

Таким образом, искомая вероятность $f_{mn}(y,x)$ равна

$$f_{mn}(y, x) = \binom{m}{my} w_n^{my}(x) \ [1 - w_n \ (x)]^{m-my}$$

Это есть не что иное как распределение известной задачи Бернули, и имеет, как известно, из теории вероятностей следующее среднее значение a и дисперсию $= s^2$:

$$a = w_n(x)$$
$$s^2 = \frac{2w_n(x) [1 - w_n \ (x)]}{m} \tag{33}$$

При достаточно большом m дисперсия приближается к 0 и, следовательно, мы приходим к следующему результату:

При достаточно больших m и n с вероятностью близкой к достоверности можно считать, что среди m последовательных (следующих друг за другом в достаточно большие промежутки времени) наблюдений расположений n частиц, расположения, в которых в определенной клеточке будет находиться x частиц, встречаются с относительной частостью равной $w_n(x)$.

Тем самым доказано, что относительная частота в пределах временого коллектива с вероятностью близкой к достоверности равна относительной частоте в пространственном коллективе и эргодическая гипотеза в брауновском движении обоснована. Следует подчеркнуть, что доказанное равенство имеет характер не динамической, а статистической закономерности и, следовательно, действительно не без изъятия, а в подавляющем большинстве случаев.

§ 4. Теоретико-вероятностное исследование броуновского движения и исследование посредством дифференциальных уравнений.

Данная выше трактовка броуновского движения отличается от обычной тем, что наши результаты имеют вероятностный характер, в то время как обычная трактовка броуновского движения исходит из дифференциального уравнения движения частицы и, следовательно, ее результаты имеют характер динамической закономерности, независимый от каких-либо вероятностных соображений. Необходимо показать, что наши выводы не находятся в противоречии с обычной теорией броуновского движения. Это нетрудно сделать, если мы примем во внимание, что, как уже было упомянуто выше, обычно в теории броуновского движения скрыто пользуются эргодической гипотезой.

Проследим основные этапы вывода известной формулы для броуновского движения.

Мы пишем уравнение движения частицы массы m под влиянием силы S и силы трения f, пропорциональной скорости частицы:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{dx}{dt} + S. \tag{34}$$

Умножая обе части уравнения (34) на x, образуем среднее для всех частиц. После простых преобразований уравнение (34) перепишется так:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\overline{\frac{d}{dt}(x^2)}\right] - m\overline{\dot{x}^2} = -\frac{f}{2}\frac{d}{dt}\overline{(x^2)} + \overline{Xx} \tag{35}$$

Дальше обыкновенно полагают, что согласно закону о равномерном распределении энергии $m\overline{\dot{x}^2} = kT$, а $\overline{Xx}$ равно 0. Тогда (35) переписывается

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overline{(x^2)}}{dt}\right) + \frac{1}{2}\frac{f}{2}\frac{d}{dt}\overline{(x^2)} = kT \tag{36}$$

Интегрируя и полагая, что $Ce^{-\frac{ft}{m}}$ вследствие малости m через достаточный промежуток времени можно пренебречь, получаем после вторичного интегрирования в пределах от 0 до τ

$$\overline{\Delta x^2} = kT\frac{2}{f}t$$

или

$$\frac{\overline{\Delta x^2}}{t} = \frac{2kT}{f} \tag{37}$$

$\overline{\Delta x^2}$ обозначает, конечно, не действительный путь частицы, а среднее квадратичное ее смещения.

Этот результат содержит определенное высказывание о движении броуновской частицы и не допускает ни отклонений на возможности любого смещения частицы. Согласно этому результату, например, невозможно, чтобы частица через достаточно долгий промежуток времени вернулась в свое начальное положение. Такое утверждение находится в противоречии с выражением для вероятности смещения частицы приведенным выше (26), согласно которому любое смещение обладает определенной вероятностью.

Это противоречие является результатом скрытого применения эргодической гипотезы при переходе от (35) к (36).

В самом деле, заменяя среднее кинетической энергии выражением kT, мы опираемся на закон равномерного распределения, который может быть выведен только при условии эргодической гипотезы. Если же отказаться от эргодической гипотезы и от опирающегося на нее толкования закона равномерного распределения, и вместо абсолютного характера придать нашим высказываниям теоретико-вероятностный характер, то результат (37) должен быть истолкован так: если достаточно часто наблюдать частицу в продолжение промежутка времени t, перемешивая эмульсию перед каждым наблюдением, т о в с р е д н е м мы получим то среднее смещение, которое дано в (37).

Таким образом из (34) в самом деле следует не (37), а следующее выражение:

$$\lim_{t=\infty} \frac{\Delta x^2 v(x)}{t} = \frac{2kT}{f}, \tag{38}$$

в котором $v(x)$ обозначает вероятность смещения на величину Δx, а суммирование распространяется на все возможные значения величины Δx. Это уравнение находится в полном соответствии с нашим уравнением (26).

В самом деле в рассматриваемом случае движения в одном измерении, надо положить $x = k\alpha$, $t = m\tau$ и для $v(x)$ получаем

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2 m}} e^{-\frac{x^2}{2r^2\alpha^2 m}};$$

отсюда при достаточно большом m

$$\Sigma x^2 v(x) = r^2\alpha^2 m = \frac{r^2\alpha^2}{\tau} t.$$

Таким образом (38) будет удовлетворено, если мы положим

$$\frac{r^2\alpha^2}{\tau}=\frac{2kT}{f}.$$

Правильно истолкованный результат механической интерпретации брауновского движения не только не находится в противоречии с результатом, полученным из теоретико-вероятностных соображений, но позволяет установить связь между физическими величинами T и f, и введенными нами величинами r^2 α, τ.

Заключение.

Эренфест заканчивает свой известный реферат[1] об основах статистической механики указанием на то, что „в настоящее время всякое исследование о структуре физической теории ведет неизбежно к вопросу о природе теоретико-вероятностных гипотез".

Статистическая механика в противоположность кинетической теории опирается не на предложения теоретико-вероятностного характера подобно Stosszahlansatz, а на эргодическую гипотезу, не являющуюся теоретико-вероятностным предложением.

Эргодическая гипотеза не только содержит внутреннее противоречие, но и приводит к расхождению с опытом, например, в вопросе о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

Ясно, что выход приходится искать в замене эргодической гипотезы теоретико-вероятностным предположением. Мы возвращаемся таким образом к тому положению, что построить статистическую механику, исходя только из предположений о механическом характере системы без всяких предположений теоретико-вероятностного характера нельзя.

Суть Stosszahlansatz состояла в том, что, исходя из предположений о равновероятности некоторых состояний, мы

[1] См. литературу, № 1.

приходили к закону распределения относительных частостей не равновозможных явлений (распределение Максвелла-Больцманна).

Именно статистический характер Stosszahlansatz позволял дать интерпретацию необратимых явлений посредством механической модели.

Отбрасывая эргодическую гипотезу, мы должны на место нее снова поставить некоторые предположения о начальных вероятностях внутри исходных коллективов.

Эти предложения не следуют из механического характера системы и не могут быть получены из теоретико-вероятностных соображений. Они должны быть заданы из соображений, не выводимых ни из механических уравнений ни из теоретико-вероятностных операций. Поэтому статистическая механика не может быть сведена ни к чистой механике ни к чистой статистике.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ehrenfest, P. и T. Begriffliche Grundlagen der Statistischen Mechanik. Enzykl. d. Math. Wiss. *IV*.

2. Lorentz, H. Theories Statistiques en Thermodynamic.

3. Wassmuth. Grundlagen d. Statistischen Mechanik.

4. Gibbs. Grundlagen d. Statistischen Mechanik.

5. Rayleigh. The Law of Partition of kinetic energy. Scientific papers. Vol. *4*.

6. De Haas-Lorentz. Die Brownsche Bewegung etc.

7. Mises, R. Grundlagen der Wahrscheinlichkeifsrechnung, Mathematische Zeitschr. *5*. S. 52—99, 1919.

8. Mises, R. Ausschaltung d. Ergoden Hypothese in der physikalischen Statistik. Phys. ZS 225, 256, 1920.

9. Mises, R. Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. (Печатается русский перевод: „Вероятность. Статистика. Истина".)

10. Гессен, Б. Статистический метод в физике и новое обоснование теории вероятностей Р. Мизеса. „Естествознание и Марксизм" № 1, 1929 г.

11. Хинчин, А. Учение Р. Мизеса. о вероятностях и проблемы физической статистики. „Усп. физ. наук" № 2, 1929 г.
