

О ПОНЯТИИ СЛУЧАЙНОСТИ И О ПРОИСХОЖДЕНИИ ЗАКОНОВ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ФИЗИКЕ ¹⁾.

М. Смолуховский.

I.

Теория вероятностей, которая в начале своего развития с большим успехом находила применение в биологии и социологии — областях, мало доступных для математической обработки, — в последнее время завоевала себе новую и чрезвычайно важную область применения — физику. Под областью физики мы сейчас понимаем не теорию ошибок физических измерений, которая со времен Гаусса развилась в целую вспомогательную дисциплину, но основные построения этой науки, — всю систему теоретической физики. В первый раз теория вероятностей была введена Клаузиусом и Максвеллом в 1857—1860 гг., как вспомогательное математическое средство для разработки кинетической теории газов. После краткого периода застоя, благодаря окончательной победе атомистического воззрения, теория вероятностей приобрела основное значение для физики и до сегодняшнего дня остается важнейшим инструментом исследования в области новых теорий материи, электронной теории, радиоактивности и теории излучения. Духу теории вероятностей вполне соответствует все более и более проявляющаяся в последнее время тенденция свести все законы физики ²⁾, по образцу кинетической теории газов, к статистике скрытых элементарных процессов. „Простота“ этих элементарных

¹⁾ Предлагаемая вниманию читателей статья опубликована уже после смерти Смолуховского, скончавшегося в 1917 г., в юбилейной тетради журнала „Naturwissenschaften“, посвященной 60-летию со дня рождения М. Планка (Naturwissensch. H. 17, 1918). Несмотря на то, что со времени написания этой статьи прошло 10 лет, мысли, изложенные в ней, не только не утратили своей свежести, но именно сейчас, в связи с постановкой проблемы причинности в новой квантовой механике, мысли Смолуховского приобретают особенный интерес. — Перевод статьи выполнен Б. М. Гессеном. *Ред.*

²⁾ Статистическое толкование до сих пор не распространяется только на уравнения электронной теории Лоренца, закон сохранения энергии и принцип относительности, но весьма возможно, что с течением времени и здесь точные законы можно будет заменить статистическими закономерностями.

процессов должна рассматриваться как „вторичное следствие“ закона „больших чисел“. Несмотря на гигантское расширение области применения теории вероятностей, точный анализ понятий, лежащих в ее основе, сделал лишь самые незначительные успехи. До сих пор остается вполне справедливым положение, что ни одна математическая дисциплина не покоится на столь неясном и шатком основании, как теория вероятностей. Так, например, основные вопросы о субъективности и объективности понятия вероятности, об определении понятия случайности различными авторами разрешаются в диаметрально противоположном смысле. Совершенно отсутствует общее и математически точное определение характерных условий для критерия возможности применения теории вероятностей. В этом отношении большею частью полагаются на интуицию.

Настоящий набросок представляет попытку исследования основных понятий и тех затруднений, которые в особенно резком виде встанут при применении теории вероятностей в физике. Должен признаться, что как раз неудовлетворительность подобных исследований в новых работах, в остальном заслуживающих полного внимания, и дала толчок настоящей статье. Само собою разумеется, что настоящая статья ни в коей мере не претендует на полное и окончательное разрешение всего комплекса философских вопросов, связанных с понятием вероятности; однако она, может быть, побудит к дальнейшим исследованиям в определенном направлении тем, что в ней на первый план выдвинута и правильно освещена основная руководящая мысль об объективной стороне понятия вероятности, на которую до сих пор почти не обращали внимания.

II.

На вопрос о том, какие события попадают в область исследования теории вероятностей, обыкновенно принято отвечать, что это суть те события, наступление которых зависит от случайности. Исследование этого последнего понятия является, следовательно, во всяком случае первичным и основным, и мы поэтому прежде всего постараемся выяснить, чем характеризуется сущность случайности.

С этим вопросом связаны две возбуждавшие много споров проблемы, трудность которых особенно чувствуется при точных математических построениях теоретической физики. Их можно формулировать так:

1. Каким образом результат случайности поддается подсчету, а следовательно, каким образом случайные причины имеют своим следствием закономерные действия?

2. Каким образом вообще может возникнуть случайность, если все происходящее должно быть сведено только к закономерно действующим

законам природы? Другими словами, каким образом закономерные причины могут вызывать случайные действия?

Если рассматривать, популярно выражаясь, случайность, как отрицание закономерности, то приведенное выше противоречие совершенно неразрешимо; однако такая концепция понятия случайности совершенно непримирима с господствующим в современной науке детерминизмом. Часто противоречие хотят объяснить тем, что между данными причиной и действием предполагают существующей закономерную причинную связь; но благодаря сложности явлений мы не можем определить характер этой связи, и поэтому возникает кажущееся отсутствие закономерности. В этом смысле случайность выступает как „неизвестная нам частичная причина“. К этому представлению приближается, повидимому, концепция Мейнонга¹⁾, согласно которой случайное есть осуществление чего-либо „не необходимого“. При этом отрицаемая необходимость должна быть либо внутренней, либо внешней (по отношению к определенному комплексу объективных явлений). Но если с точки зрения детерминизма рассматривать причину и действие как постоянно связанные внутренней необходимостью элементарных процессов, то о „не необходимом“ можно говорить только лишь в относительном смысле, а именно, поскольку еще не познана объективная необходимость, т. е. поскольку часть действующих причин остается неопределенной.

Эта обычная концепция, которая сводит случайность к нашему незнанию действующих законов или причин, могла бы в лучшем случае дать ответ на второй из поставленных выше вопросов. Но первый вопрос — почему возможен подсчет действия непознанных частичных причин — так и остается неразрешенным.

Многочисленные философские работы, занимающиеся анализом понятия вероятности, не дают на этот счет никакого объяснения. Вообще философа занимает другая сторона вопроса, чем физика. Философ обращает свое внимание прежде всего на субъективную, психологическую сторону понятия вероятности, анализирует теоретико-познавательное значение ее, исследует, каким образом вероятные высказывания вместе с достоверными и ложными высказываниями входят в систему формальной логики. Но он не касается вопроса о характере объективных явлений, лежащих в основе понятия вероятности.

В противоположность философу точное естествознание интересуется не высказываниями и не субъективными оправдывающимися или неоправдывающимися предположениями, но объективной или „математической“ вероятностью, т. е. относительной частотой наступления определенных случайных событий. Точное естествознание — как это метко заметил Мейнонг — употребляет неопределенное понятие

¹⁾ A. Meinong. Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit. Leipzig, 1915.

вероятности в очень узком смысле, которому этот автор и другие философы скорее бы дали обозначение как степени возможности. Но только в этом узком смысле понятие вероятности поддается точной математической разработке. С этим понятием происходит то же, что и с терминами: сила, работа, энергия, теплота, которые физик понимает в совершенно ином смысле, чем тот, в котором они употребляются в обыденной жизни.

Совершенно ясно, что, поскольку дело касается применения в теоретической физике, все теории вероятностей, которые рассматривают случайность как непознанную частичную причину, должны быть заранее признаны неудовлетворительными. Физическая вероятность события может зависеть только от условий, влияющих на его появление, но не от степени нашего знания.

Я вполне отдаю себе отчет в том, что сказанное мною выше находится в противоречии с обычным распространенным мнением, считающим частичное незнание причин наиболее существенным моментом, поэтому в подтверждение своей мысли замечу следующее: исчисление вероятностей в применении к кинетической теории газов было бы полностью оправдано даже и в том случае, если бы нам с абсолютной точностью были известны строение молекул, их начальные положения и т. д., и мы были бы в состоянии с математической точностью проследить их движение в каждый момент времени. Теория вероятностей осталась тогда бы по крайней мере настолько же рациональным математическим средством, как сокращенное умножение или пользование таблицами логарифмов (или логарифмической линейкой) наряду с обыкновенным точным умножением.

Как же, однако, защитники обычного взгляда на вероятность объясняют возможность подсчета действия неизвестных частичных причин? Они обыкновенно ссылаются на „закон больших чисел“ как на хотя и недоказуемый, но эмпирически вполне оправдывающийся принцип. Тимердинг ¹⁾ говорит, например, следующее:

„... непрерывная причинность всех явлений природы может быть сохранена, но она недостаточна для того, чтобы полностью объяснить закономерность всего происходящего в мире. Необходимо ввести еще одно положение, называемое законом больших чисел, который имеет своим следствием то, что отклонения от закономерности, которые вносятся случайными событиями исчезают в конечном результате. Наш рассудок противится принять этот принцип только потому, что большею частью он оказывается справедливым. Он стремится прежде всего найти основание для такого выравнивания случайных явлений. Однако такое основание невозможно найти“.

¹⁾ H. E. Tiemerding. Die Analyse des Zufalls. S. 162 (Vieweg, 1915).

Поистине это весьма мало утешительное решение вопроса, и мы должны стараться найти другой выход из дилеммы. Пуанкаре замечает, что и в чистой математике часто можно говорить о законах вероятностей; так, например, частота цифр 1, 2, 3 на последнем месте столбца чисел в таблице логарифмов следует обычному закону вероятности равновероятных случаев. Неужели математик удовлетворится тем, что признает здесь действие непонятного чисто эмпирического закона больших чисел?

III.

Указание на решение вопроса, как мне кажется, заключается в том, что приведенные выше определения случайности как неизвестной частичной причины¹⁾ и вообще все подобные определения, несомненно, слишком широки.

Когда Леверье заметил, что движение Урана не совсем согласуется со сделанными наперед вычислениями, он не сказал: „это случайность“. Мы совершенно не знаем, когда может наступить магнитное возмущение, но мы отнюдь не считаем его наступление делом случая.

Во всех этих примерах отсутствует существенный признак того, что в обыденной жизни и в науке мы обозначаем как случайность, а именно то, что кратко можно определить следующим образом: малые причины — большие следствия.

Самое небольшое различие в начальном толчке рулетки — и в результате выигрыш или проигрыш громадной суммы денег. Пуанкаре²⁾, который особенно подчеркивал это положение, в то же время указывает еще два признака случайности: сложность многих одновременно действующих причин или же взаимодействие двух явлений, обыкновенно принадлежащих к независимым областям. Но я думаю, что все случаи этого рода после тщательного анализа могут быть подведены под данное выше определение.

Особенно ярко выступает указанный выше признак во всех случаях, когда дело идет о состоянии неустойчивого равновесия. Представим себе игральную кость идеально-точной кубической формы, стоящую на одной из вершин; тогда малейшее отклонение центра тяжести от вертикали вполне определяет, на какую из трех соприкасающихся граней упадет куб. Мы говорим, что выпадающее число очков зависит от случайности. Выражаясь математически, действие y (число, которое окажется наверху) зависит от причины x (положение центра

¹⁾ Чубер (Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, S. 8) говорит: „известные и меняющиеся обстоятельства“. Но не совсем ясно, что надо понимать под словом „изменяющиеся“ и каким образом можно узнать перемену, если сами обстоятельства неизвестны.

²⁾ H. Poincaré. *Calcul de probabilité*. Paris, 1912, Introduction.

тяжести) таким образом, что функция $y=f(x)$ для значения x , соответствующего положению равновесия, имеет разрыв. Заметим попутно, что в этом случае причина складывается собственно из двух переменных: если мы спроектируем центр тяжести O и три взаимно пересекающиеся в нижнем углу E ребра на горизонтальную плоскость, то, очевидно, расстояние $r=OE$ в полученной таким образом проекции определяет скорость падения кости. Угол θ , определяющий направление вектора OE по отношению к трем ребрам, определяет число, которое окажется наверху.

Случайность, подобная этой, не поддается предварительному подсчету и не может поэтому стать основанием для применения теории вероятностей. В самом деле, пока определенные причины нам неизвестны с достаточной точностью (в данном случае положение центра тяжести), мы ничего не можем сказать наперед о их действии. Если же они известны, то мы с достоверностью можем предвидеть их действие, и тогда не остается места для вероятности.

Как пример случайности, не поддающейся вычислению, можно привести артиллериста, который имеет в своем распоряжении орудие, действующее с математической точностью, но должен стрелять по цели, расстояние до которой ему неизвестно. Ему недостает знания одной величины, от которой зависит правильный наклон орудия, и если он попадет в цель, то это будет делом слепой случайности. Ни о каком предварительном вычислении, ни о какой вероятности в нашем смысле не может быть и речи, пока нам неизвестна психология этого артиллериста.

Но как только нам становится известным, что этот артиллерист применяет определенные методы стрельбы или определенные механические вспомогательные средства, о которых мы скажем ниже (например, вращение тела орудия вокруг оси), — задача становится вполне определенной, и возможно указать определенную „вероятность попадания“ (сообразно с величиной цели, ее расстоянием от орудия и т. п.).

Таким образом случайность или, можно было бы сказать, „упорядоченная“ случайность, которая делает возможным применение теории вероятностей, отличается от случайности в широком смысле существенной особенностью, а именно, известной закономерностью действия при частом повторении явления, независимо от специального характера причины. Например, если в приведенном выше случае с игральной костью мы заставим ее падать с высоты одного метра на абсолютно ровную (не идеально-упругую) доску, то явление изменяется существенным образом. Игральная кость отскакивает, падает, снова поднимается вверх и несколько раз повторяет это движение, причем высота подъема все уменьшается, а кажущиеся совершенно произвольными вращательные движения все увеличиваются, пока, наконец, она не упадет на одну из своих шести граней. На ка-

кую грань в конце концов упадет кость — это зависит от ее начального положения. Но функция $y=f(r, \theta)$, выражающая эту зависимость, должна быть такова, что при непрерывном изменении независимых переменных r и θ , определяющих начальное положение куба, области, соответствующие всевозможным конечным положениям куба, проходятся чрезвычайно быстро. Это изменение конечных положений в зависимости от изменения условий, определяющих начальное положение, происходит таким образом, что уже внутри чрезвычайно малой области изменения V первоначальных расположений осей куба (по отношению к перпендикуляру к плоскости) область изменения чисел 1—6 оказывается плотно покрытой. Величину V можно было бы обозначить термином „область выравнивания“. Если бы мы попытались перед тем как подбросить игральную кость при помощи каких-либо вспомогательных средств, ориентировать ее определенным образом, то даже при самой большой тщательности неизбежны ошибки при установке. Область этих неизбежных ошибок мы обозначим как область отклонения Ω ; можно принять, что функция распределения $\varphi(r, \theta)$, которая представляет относительную частоту этих ошибок при бесчисленном количестве повторных бросаний кости, будет иметь закономерный „аналитический“ характер. Если поэтому область V , определенная видом функции $f(r, \theta)$, мала по сравнению с областью отклонений, то легко можно видеть, что в конце концов все цифры от 1—6 должны иметь одинаковую вероятность независимо от специального характера первоначальной установки игральной кости и от вида функции $\varphi(r, \theta)$. Каждое отдельное событие нельзя предусмотреть, но при все продолжающихся повторениях вполне можно предусмотреть общее распределение событий. В подобном случае случайность господствует закономерным образом. Более простым, чем случай с игральной костью, является пример рулетки, на котором Пуанкаре ¹⁾ развивает подобное рассуждение, или же пример вращающегося круга, разделенного на черный и белый секторы, служащего целью для стрелка. Попадет ли он в черный или белый секторы зависит от того, в какой момент произойдет выстрел из (неподвижного) орудия. Но всегда возможно сообщить кругу, служащему целью, настолько быстрое вращение, что фактор меткости стрелка будет исключен. В какой бы момент он ни решил произвести выстрел, с момента решения до момента выстрела всегда пройдет неопределенный, но изменяющийся в определенных пределах промежутки времени, так что вероятность того, что выстрел произойдет как раз в момент t , определяется некоторой функцией $\varphi(t)$, которая в пределах отклонения от t до $t \pm \tau$ отлична от нуля. Форма этой функции для нас безразлична, но мы принимаем, что она не имеет разрывов

¹⁾ Н. Poincaré. Loc. cit.

непрерывности и бесконечно большого количества максимумов и минимумов.

Если в область отклонений промежутков времени попадает достаточно много оборотов круга, то влияние вида функции распределения $\varphi(t)$ уничтожается; вероятность попасть в белый или черный сектор зависит тогда исключительно от относительной величины занимаемой ими площади. Обыкновенно принято говорить просто об этой вероятности, не обращая внимания на функцию $\varphi(t)$. Но молчаливо принимается относительно нее сделанное выше предположение. Это рассуждение, основывающееся на понятии вероятности, делается бессмысленным, если орудие будет соединено с вращающимся кругом электрическим контактом.

В конечном счете вся аргументация основывается на том факте, что всякая (дифференцируемая) функция в области достаточно малых изменений независимого переменного изменяется приблизительно пропорционально этим изменениям; это можно пояснить простой геометрической аналогией. Разграфим бумагу на узкие, одинаковой ширины, белые и черные полосы. Если затем провести от руки произвольную (но не слишком маленькую и не слишком неправильную) замкнутую кривую, то вырезанные ею „черная“ и „белая“ площади будут с довольно большой точностью приблизительно равны, независимо от формы кривой. Форма кривой соответствует тому, что мы называли индивидуальной областью отклонения, в то время как способ разделения бумаги на разноцветные полосы определен обязательным видом причинного отношения.

Таким образом мы видим, как в результате действия случайности может получаться определенный закон независимо от специальной формы неизвестной функции распределения. Таким образом находит свое разъяснение первое из указанных во второй главе противоречий. Конечно, надо сознаться, что наше рассуждение представляет сущность случайности еще далеко не исчерпывающим образом, поскольку оно основывается на допущении некоторой функции распределения φ для случайных отклонений причины, и кроме того мы предполагаем, что эта функция обладает определенными свойствами (закономерные изменения). Это обстоятельство находит свое выражение в одном, в общем довольно метком, высказывании, которым математики¹⁾ отделяются от ответа на вопрос о сущности случайности: задача теории вероятностей заключается не в объяснении вероятности события, но в вычислении его вероятностей на основе других вероятностей, а именно, на основе известной вероятности более простого явления, которое является причиной более сложного.

¹⁾ См., например, E. Borel. Le hasard. Paris, Alcan, 1914, p. 15 (русск. пер. Борель. Случай. Современные проблемы естествознания, кн. 8. ГИЗ, 1923).

IV.

Подведем итог всему сказанному выше в более общей форме. Мы называем случайностью специальный вид причинной связи. Обыкновенно говорят, что событие y зависит от случая, если оно является функцией некоторой переменной причины (величина которой неизвестна или на которую умышленно не обращают внимания) или частичного условия x , причем эта зависимость такова, что наступление или ненаступление события зависит от очень малого изменения x („малого“ по отношению к области отклонения x).

Это обычная формулировка понятия случайности, однако, совершенно недостаточна для того, чтобы служить основой точного определения понятия вероятности. О форме математического закона вероятности $W(y)$, относящегося к величине y , можно говорить лишь тогда, когда причинная связь, выражающаяся отношением $y=f(x)$, кроме упомянутых выше свойств, обладает еще следующим особым свойством, которое состоит в том, что распределение y , по крайней мере внутри определенных границ, не зависит от характера функции распределения $\varphi(x)$, которая определяет относительную частоту x (согласно предположению $\varphi(x)$ должно изменяться „закономерно“).

Эти условия можно легко формулировать математически для случая одной переменной, если будем иметь ввиду приведенные выше примеры.

Достаточно, чтобы функция $y=f(x)$ имела „колебательный“ характер такого рода, что:

1. Для каждого значения x_0 в области отклонений Ω можно было бы указать Δx , настолько малое по сравнению с Ω , что функция $y=f(x)=f(x_0+\varepsilon\Delta x)$ принимает все значения, в то время как ε принимает все значения от 0 до 1.

2. Все части области ε , соответствующие определенной области значений y для всех точек x_0 , лежащих внутри Ω , (приблизительно) равновелики.

Каждому x соответствует некоторая наименьшая область Δx , которой соответствует вся совокупность изменений y , и величина области Δx известным образом определяет строение причинного отношения $f(x)$. Чем более „мелкозернисто“ строение причинной связи, т. е. чем меньше Δx , тем более незначительны те требования, которые мы должны предъявлять к „правильности изменения“ первичной функции распределения $\varphi(x)$ для того, чтобы получить для распределения $W(y)$ результат, независимый от характера $\varphi(x)$.

Само собой разумеется, что при этом, обратно, каждое значение y может явиться как следствие целой совокупности различных значений x , т. е. обратная функция в высокой степени многозначна: одинаковое действие может быть вызвано самыми различными сочета-

ниями причин — это так же весьма характерная черта тех причинных отношений, которые дают повод к возникновению законов вероятностей. Специальные случаи подобной функциональной зависимости легко указать: например, $y = \sin\left(\frac{x}{a}\right)$. Предположим, что a чрезвычайно мало

по сравнению с областью изменения „причины“ x , тогда $\Delta x = \frac{2\pi}{a}$ будет также очень мало и в результате для „действия“ y мы получаем независимую от вероятности x частоту распределения:

$$W(y) dy = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

Еще более прост рассмотренный нами выше случай с вращающейся целью. Здесь мы за x примем время t , в которое происходит выстрел, y здесь будет угловое расстояние θ точки на круге, в которую попадает снаряд. Таким образом $\theta = ct - 2n\pi$, причем угловая скорость C должна быть весьма велика и n выбрано так, что θ лежит между 0 и 2π . Область Δx и в этом случае, очевидно, равна $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$, и все углы θ будут одинаковы вероятны, если эта величина будет мала по сравнению с областью изменений причины.

Существует, кроме того, целый ряд случаев, не так легко доступных математическому анализу, в которых чисто физическим устройством можно достигнуть с любым приближением независимость результирующего закона вероятности от характера и причин первичных отклонений. Мы рассмотрим более подробно следующие примеры, как наиболее характерные.

1. Доска Гальтона. Этот прибор состоит из наклонной доски с большим количеством штифтов, которые расположены правильными горизонтальными рядами, причем расположение их таково, что штифты каждого ряда расположены против промежутков, образованных двумя соседними рядами штифтов. Если с определенного места доски заставить катиться шарики соответствующей величины (их диаметр должен быть немного меньше, чем расстояние между двумя соседними штифтами), то они благодаря столкновениям с каждым штифтом будут отклоняться от пути беспорядочным образом и в конце концов, после того как они пройдут все ряды штифтов, собираются в особый устроенный на нижнем краю доски приемник. Положение, которое они занимают в этом приемнике, может непосредственно служить мерой вероятности соответствующего положения шариков.

Оказывается, что положения шариков в приемнике располагаются согласно закону распределения ошибок Гаусса $y = Ae^{-ax^2}$ таким образом, что наибольшее количество собирается в месте, соответ-

ствующем точке, из которой шарики вышли; количество их по обе стороны от этого положения уменьшается в соответствии с кривой Гаусса. Математически этот результат легко объясняется, если мы примем, что каждый шарик, после выхода из отверстия между двумя штифтами, с одинаковой вероятностью может пройти вправо или влево от находящегося под ним штифта. Если это явление происходит совершенно случайно с одинаковой вероятностью для отклонения вправо или влево, то вероятность того, что шарик при проходе через m -й ряд штифтов будет иметь отклонение от средней линии, равное расстоянию между штифтами, увеличенному в n раз, выражается известной формулой Бернулли:

$$W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{m!}{\left(\frac{m}{2} - n\right)! \left(\frac{m}{2} + n\right)!}.$$

Для больших значений числа m эта формула приближенно равна приведенному выше выражению. Таким образом сложная совокупность явлений сведена к простым элементарным явлениям, но остается еще объяснить, почему эти последние мы можем рассматривать как совершенно случайные, хотя в сущности начальное положение и начальная скорость шарика однозначно определяют все его дальнейшие движения.

Для того, чтобы исключить действие не поддающихся контролю побочных обстоятельств, мы идеализируем наш случай, сделав следующие предположения: примем, что доска абсолютно гладка, расположение штифтов совершенно правильное, шарики имеют геометрически правильную форму; предположим далее, что их диаметр почти в точности равен расстоянию между штифтами и удар шарика о штифт будет неупругим. Тогда совершенно ясно, что, после выхода шарика между двумя штифтами, остающаяся горизонтальная слагающая скорости, всецело определяет, ударится ли он о следующий штифт с правой или левой стороны, т. е. пройдет ли по одну или по другую сторону от него. В свою очередь горизонтальная компонента скорости является результатом многочисленных отражений шарика от пары штифтов и определяется однозначно положением линии центров по отношению к соответствующему ряду штифтов при первом ударе. Достаточно минимального отклонения линий центров для того, чтобы изменить значение горизонтальной компоненты скорости на обратное. При дальнейшем чрезвычайно малом изменении положения эта компонента может снова принять противоположное значение и т. д.

В описанном опыте мы узнаем характерные черты „упорядоченной“ случайности:

I. Малые причины — большие действия.

II. Колеблющийся характер причинной связи, которую не совсем точно можно выразить словами: „различные причины — одинаковые действия“.

III. Приблизительно равномерное распределение шансов в элементарных событиях. В пределе, когда диаметр шарика в точности равен свободному расстоянию между штифтами, функция, выражающая связь между совокупностью начальных условий и конечным положением шарика, теряет свой аналитический характер. Шансы для положительного и отрицательного отклонения при каждом ударе делаются равными, и мы получаем кривую распределения Гаусса, совершенно независимо от того, как малы будут колебания в совокупности начальных условий для шариков (в предположении, что они не будут в точности равными нулю). Мы получаем таким образом модель, так сказать, идеально случайного явления. Описанное явление, заметим кстати, представляет прекрасную иллюстрацию целого класса физических явлений, которые мы обыкновенно обозначаем как диффузию и теплопроводность. Не вдаваясь в подробности, заметим, что отклонения в сторону, которые шарик получает при прохождении через последовательные ряды штифтов, в точности соответствуют отклонениям при так называемом броуновском молекулярном движении. Если бы мы в нашем опыте ограничили ширину гальтоновской доски двумя перегородками и если бы мы с правой половины верхнего ряда бросали белые шарики и с левой половины — черные, то после прохождения через все ряды штифтов шарики постепенно перемешивались бы совершенно так же, как два газа при диффузии в известном опыте Лошмита. Если бы „ограниченная“ гальтоновская доска обладала достаточной длиной, то в результате должно было бы получиться равномерное распределение.

2. Математически более сложным, но зато более простым в физическом отношении, будет следующий пример: представим себе сосуд любой неправильной формы с абсолютно отражающими стенками, в который мы через очень маленькое отверстие в стенке бросаем упругий шарик (лучше всего молекулу газа). Попробуем подсчитать когда шарик снова должен выйти через это отверстие. Поскольку отверстие по отношению к поверхности стенок сосуда достаточно мало, шарик в общем, благодаря многочисленным отражениям от стенок, должен описать чрезвычайно сложный зигзагообразный путь, прежде чем он снова достигнет отверстия. Совершенно ясно, что самое незначительное изменение направления при входе в отверстие вызовет очень сильные изменения в форме пути, на прохождение которого шарiku придется затратить больше времени, и это вызовет значительные изменения в промежутке времени, необходимом для выхода его из отверстия. Так же легко видеть, что посредством самых

различных сочетаний начальных условий можно достигнуть одинаковых промежутков времени для выхода шарика. Для этого нужно только в обратном порядке проследить отрезки пути при выходе.

Таким образом является как будто возможность применения теории вероятности. Правда, в этом случае еще не было произведено точного математического анализа, но физические соображения из области кинетической теории газов, а также из теории излучения, в которой эта же проблема выступает в несколько ином виде, делают весьма возможным предположение, что при любом распределении начальных направлений со временем происходит выравнивание вероятностей. Это выравнивание происходит таким образом, что каждый элемент объема внутри сосуда представляет одинаковую вероятность для местопребывания шарика, далее он с одинаковой вероятностью может двигаться в любом направлении, и в среднем он одинаково часто сталкивается с любым элементом поверхности сосуда.

Если обозначить скорость шарика через c , объем сосуда через V , сечение отверстия через ω , то по аналогии с вычислениями кинетической теории газов легко показать, что вероятность выхода шарика из сосуда через промежуток времени τ выражается

$$W = \frac{\omega c \tau}{4V}.$$

Таким образом средний промежуток времени пребывания шарика в сосуде равен

$$T = \frac{4V}{\omega c}.$$

Еще в большей степени обнаруживаются характерные черты (упорядоченной) случайности, если дело идет о движении совокупности шаров, заключенных в закрытом сосуде. В этом случае взаимные столкновения их имеют своим следствием беспорядочное нарушение имевшегося первоначально состояния движения.

Это будет специальным случаем указанной Больцманом тенденции к молекулярному беспорядку, представляющему общее свойство молекулярных систем. На этой тенденции основывается кинетическое толкование закона энтропии.

V.

Соображения, которыми мы в главе III и IV пытались характеризовать сущность случайности и закономерность ее действия, кажутся мне не совсем удовлетворительными в двойном отношении:

1. Мы принимали, что причина x следует определенному закону вероятности $\varphi(x)$; таким образом это понятие предполагалось как

нечто первичное. Надо было объяснить лишь неизменность закона вероятности для результирующего действия.

2. Мы предполагали известные свойства функции $\varphi(x)$, которые мы обозначили как „закономерность“.

Эти два замечания заставляют нас обратить внимание еще на один недостаток нашего рассуждения. Действительно, что значит, когда мы говорим, что вероятность наступления x (движение руки при пуске рулетки, положение игральной кости при начале падения, положение шарика на доске Гальтона) определяется закономерной функцией распределения $\varphi(x)$?

Если дело идет об x , который мы не могли бы свести к первичным причинам, то закон $\varphi(x)$ был известен лишь эмпирически. Непосредственно нам дана дискретная совокупность отдельных случаев и только посредством абстракции на основе бесчисленного количества отдельных случаев становится возможным определить функцию $\varphi(x)$, относительно которой мы предполагаем, что она обладает свойством (2).

Было бы поэтому более рациональным совершенно оставить в стороне промежуточное абстрактное понятие функции распределения $\varphi(x)$ и ввести в рассмотрение прямо определенное количество единичных случаев. Попытаемся поэтому на место формулировок главы IV поставить следующее положение: можно говорить о математической вероятности в том случае, если функция $y=f(x)$, представляющая причинную связь между случайной¹⁾ причиной и действием y , такова, что любому распределению совокупности значений x всегда соответствует приблизительно одно и то же распределение соответствующих значений y . Слово „приблизительно“ означает, что неизменность распределения y можно ожидать лишь при бесчисленно большом количестве единичных случаев.

Яснее всего эти отношения выступают на примере вращающейся цели. В общем цель оказывается приблизительно равномерно покрытой следами попадающих пуль, если было произведено достаточно большое количество выстрелов в любые промежутки времени, и распределение густоты следов попадания на цели будет тем равномернее, чем больше количество выстрелов. Очевидно, что возможны и совершенно исключительные отклонения. Если бы, например, все промежутки времени были бы соизмеримы с временем обращения цели, то все следы попадания сконцентрировались бы в определенных местах и остальные места цели остались бы пустыми. Это было бы решающим возражением против возможности применения нашего положения в данной выше формулировке. Но здесь нам приходит на помощь соображение, что подобное распределение промежутков времени пред-

¹⁾ Слово „случайный“ мы употребляем в определенном выше смысле.

ставляет лишь особые исключительные случаи, частота которых по отношению ко всем возможным случаям распределения промежутков времени лишь исчезающе мала. В теории множеств доказывается, как известно, что — популярно выражаясь — существует в бесконечно большое число раз большее количество иррациональных чисел, чем целых чисел и, следовательно, те промежутки времени, которые соизмеримы со временем обращения, составляют бесконечно малую часть всех возможных промежутков времени. Поэтому, если наудачу выбрать различные промежутки времени, то бесконечно мало вероятно, что мы попадем как раз на такие промежутки времени, которые соизмеримы с периодом обращения, вследствие этого в общем мы получим равномерное покрытие цели.

Аналогичные рассуждения применимы и в других случаях. Если бы, например, упомянутый в главе IV сосуд имел бы форму математически точного куба, то легко видеть, что шарик, брошенный внутрь его, как бы многочисленны ни были его отражения от стенок, мог двигаться лишь в восьми определенных направлениях. Достаточно, однако, как угодно малого отклонения угла наклона стен от точного положения для того, чтобы уничтожить после достаточно долгого промежутка времени эту определенность в направлении и сделать одинаково вероятными для движения шарика всевозможные направления в пространстве. Следовательно, если мы не подберем особый математически точно построенный сосуд, то для совокупности шаров отражение их от стенок сосуда (а также и взаимные столкновения) вызовут равномерное распределение направлений движений в пространстве.

В мельчайших подробностях подобные отношения можно проследить на примере двух измерений, в котором можно избежать прерывности, связанной с отражением от стенок сосуда. Представим себе точку, которая под воздействием произвольно выбранных, но независимых друг от друга упругих сил x и y , производит сложное колебательное движение: $x = a \sin \alpha t$ $y = b \sin \beta t$, как это происходит в акустике при представлении фигур Лиссажу. Если бы нам удалось соответствующие упругие системы (камертоны) настроить так, что частоты их были бы соизмеримы, то точка периодически описывала бы замкнутую кривую, не проходя через другие части прямоугольника ab . Если мы потребуем, чтобы соизмеримость отношений была математически точной, то такое соотношение представляло бы совершенно исключительный случай, который нельзя было бы надеяться осуществить находящимися в нашем распоряжении средствами, так как бесконечно более вероятно, что у нас получится иррациональное отношение частот. Вообще у нас получится, следовательно, незамкнутая кривая, которая бесконечно близко подходит к любой из точек, расположенных внутри прямоугольника ab . Легко найти, что относительная частота (равная отношению промежутку времени) прохождения

точки через некоторое место x, y элемента поверхности выражается

$$W(x \cdot y) dx dy = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{b^2 - y^2}} dx dy.$$

Причем этот закон для вероятностей, как мы видим, совершенно не зависит от предположений относительно частот колебаний (или сил x и y).

Заметим еще, что, согласно приведенным выше уравнениям колебания, каждой точке плоскости соответствует определенное направление движения и определенная скорость. Если вместо только одной точки, выходящей из нулевого положения, у нас будет целая совокупность точек первоначально произвольно распределенных на плоскости и движущихся, согласно указанным формулам, то, повторяя вышеприведенное рассуждение, мы приходим к заключению, что после достаточно продолжительного промежутка времени следы первоначальных положений точек исчезают, а в результате получается распределение точек в соответствии с приведенным выше законом вероятности и совершенно не зависящим от способа первоначального расположения точек.

Подобным образом легко видеть, что продолжительное перемешивание в сосуде двух первоначально разделенных растворов красящих веществ имеет своим результатом получение однородной смеси; далее также ясно, что совокупность газовых молекул, которые были любым способом распределены в замкнутом пространстве, в общем с течением времени распределяется в нем так, как будто их положения были совершенно случайны (с одинаковой вероятностью для всех элементов объема) и совершенно независимы от первоначальных положений. Это оправдывает применение обычных методов кинетической теории газов к вычислению таких величин, в которых выступает среднее действие большого числа молекул.

Во всех подобных явлениях теоретически возможны особые исключительные случаи, но вследствие их исчезающе малой вероятности их практически можно не принимать во внимание.

Если мы для того, чтобы предупредить упреки в неточности, захотим уточнить формулировку приведенного нами выше определения вероятности, то мы должны в нем заменить слово „всегда“ выражением „в общем“, — т. е. за исключением в процентном отношении исчезающе малого количества исключительных случаев.

Возможно, что следует предпочесть следующую более уточненную форму: закон вероятности возможен для действия y зависящего от не вполне определенной причины x в том случае, если представляющая соответствующую причинную связь функция $y = f(x)$ обладает следующими особенностями: 1) небольшие изменения x в общем

вызывают большие изменения y ; 2) совокупности таких группировок значений x , которым, приблизительно, соответствует одна и та же группировка значений y . неизмеримо более многочисленны, чем совокупность группировок x , которым соответствует заметно отклоняющееся распределение значений y .

С математической точки зрения это положение следовало бы формулировать более строго, но данная нами формулировка имеет своей целью в простом и понятном виде подчеркнуть основную мысль, интересующую нас в настоящем изложении. Мы еще раз обращаем внимание на одно обстоятельство, которое достаточно ясно выступает как во всем изложении, так и почти во всех приведенных нами примерах: совершенная случайность и соответственно этому частота отношения вероятности образует, очевидно, идеальный случай, к которому в действительности мы имеем большее или меньшее приближение.

В практическом применении теории вероятности чаще всего удовлетворяются весьма грубым приближением.

VI.

Еще более важным, чем вопрос, которым мы, главным образом, занимались в предыдущих главах и который имеет скорее формальный характер, кажется мне вопрос о происхождении случайности. К этому вопросу мы подошли в главе V, когда говорили о недостатках нашего определения сущности случайности. Ответ на этот вопрос отчасти можно найти в приведенных примерах и данных к ним разъяснениях. Случайная изменчивость причин, на которой основывалось наше первоначальное объяснение закона больших чисел, становится сама собою понятной, если дело идет об опытах, производимых человеческими руками. В этом случае, в конечном счете, случайность сводится к психофизиологическим первичным причинам. Но исключено ли применение понятия вероятности, если предположить, что действия человека с его капризной психологией и физиологией исключены, что обстоятельства, определяющие физическое явление, вполне точно установлены? Большей частью на этот вопрос дается утвердительный ответ, в то время как приведенные выше примеры показывают совсем иное. Если один единственный шарик совершенно определенным образом пускается по „ограниченной“ гальтоновской доске, с весьма большим количеством рядов штифтов, и затем мы установим статистику мест, в которых шарик проходит каждый из рядов, то мы найдем, что все значения абсцисс, приблизительно, встречаются одинаково часто. Они одинаково вероятны, и это утверждение представляет объективный, независимый от человека

факт. В примере втором теоретически можно наперед вычислить, в каком месте сосуда будет находиться шарик, брошенный в сосуд в определенном направлении, но без дальнейших разъяснений понятно, что с течением времени все возможные направления встречаются одинаково часто, и таким образом шарик одинаково часто будет проходить через все части сосуда.

Подобным образом в примере сложного колебательного движения (глава V) мы совершенно ясно определили вероятность как относительную частоту пребывания подвижной точки (для достаточно долгого промежутка времени) в определенном месте плоскости, хотя во всех наших рассуждениях начальные условия движения не играли никакой роли.

Аналогичным образом можно понятие объективной вероятности распространить на все подобные не совершенно определенные („случайные“ в приведенном выше смысле) явления, которые характеризуются тем, что один и тот же характер элементарных явлений с течением времени все снова повторяется.

Как известно, статистическая механика показывает, что подобные случаи движения встречаются далеко не редко; наоборот, согласно теореме Пуанкаре, сюда принадлежат движения всех „конечных“ механических систем консервативного характера. Все они „квазипериодичны“ (в специальных случаях в точности периодичны), т. е. любое начальное положение с течением времени повторяется с любым приближением.

Если дело идет о движении молекулярных систем, то частота повторения одинаковых случаев чрезвычайно возрастает вследствие того обстоятельства, что химическая природа одинаковых молекул совершенно безразлична для физических явлений. Для того, чтобы сделать еще более ясными законы физической случайности и понятие объективной совершенно независимой от человеческого познания вероятности, рассмотрим в заключение еще одно явление, которое может считаться наиболее совершенным типом того, что мы называли „случайным“, а именно, радиоактивный распад атома. Как известно, с течением времени атомы радия претерпевают превращение, выбрасывая каждый α -частицу и превращаясь в атомы эманации; при этом в атомах радия не наблюдается ни малейшей прогрессивной эволюции по образцу старения организма). Когда произвольный атом, за которым мы наблюдаем, испытает превращение, — дело абсолютной случайности.

На превращение мы не можем повлиять никакими средствами и не можем его заранее предсказать. Вероятность того, что процесс распада совершится как раз в промежуток времени dt одинаково велика, как для молодых, так и для старых атомов и, следовательно, математически выражается простым отношением: $Wdt = \lambda dt$, где λ

обозначает константу, величину которой мы не можем изменить никакими доступными нам средствами.

На основе сказанного выше можно дать сразу модель случайности, выступающей в этом случае. Это будет часто нами упоминавшийся сосуд и бросаемый в него шарик. Мы уже раньше заметили, что для шарика мы будем иметь всегда неизменную величину вероятности его выхода через отверстие в сосуде и нужно только величину этой вероятности приравнять к постоянной радиоактивного распада

$\lambda = \frac{\omega C}{4V}$. Если бы у нас было большое количество подобных сосудов равных объемов и если бы в каждый бросался шарик в различном направлении, то оба явления — выход шарика из одного из сосудов и выбрасывание α -частицы одним из атомов радия ¹⁾ — протекали бы совершенно одинаковым образом.

Само собою разумеется, что я отнюдь не предполагаю, что атомы радия в действительности устроены наподобие упомянутого сосуда. Для нас важна только принципиальная возможность построения физической модели упорядоченной случайности. Возможность такого построения во всяком случае доказывает, что кажущееся противоречие, которое мы подчеркивали во втором из поставленных в главе II вопросов, в действительности не существует и что случайность в том смысле, в каком это слово употребляется в физике, всегда может быть вызвана совершенно точно определенными закономерными причинами.

Сообразно этому подобный вид случайности играет решающую роль в мире молекул, и есть много относящихся сюда явлений, как, например, броуновское движение молекул, на котором это можно проследить чрезвычайно наглядно.

Если противопоставить подобные случаи явлениям, вызываемым произвольным вмешательством организма, то можно было бы говорить о „молекулярной“ и „физиологической“ случайности. И оба эти вида часто сплетаются в более сложные случайные явления.

Если, например, мы растягиваем все сильнее и сильнее проволоку или же все больше и больше увеличиваем давление внутри полого шара, то принято говорить, что место, где произойдет разлом, и форма излома зависят от случайности. Истинной причиной могут быть небольшие неравномерности толщины и тому подобное, которые косвенно можно свести к физиологической случайности, которая имела место при выделке соответствующих вещей. Но если даже, благодаря машинным приспособлениям и чрезвычайно большой точности, эти неравномерности были бы сделаны как угодно малыми, то все же останутся случайные неравномерности в строении материала, завися-

¹⁾ Число атомов принимается равным числу сосудов.

щие от молекулярной случайности. Как бы осторожно ни производилась отливка полого шара, неизбежно должны произойти подобные неравномерности. Застывание основано на образовании центров кристаллизации в переохлажденном литье. Число и расположение этих центров, кроме закономерных влияний (быстрота охлаждения и т. п.), в основном определяются молекулярной случайностью.

Именно она, следовательно, ответственна за фактически происшедшую микрокристаллическую структуру отливки, от которой зависят свойства прочности. То, что здесь совокупности расположений молекул ведут за собой столь заметные последствия, основано, в свою очередь, на том, что в конечном счете дело идет о нарушении положений неустойчивого равновесия.

Мы не будем более подробно исследовать вопросы о том, все ли случайные явления сводятся к приведенным выше двум типам и насколько, в конце концов, также и физиологические случайности имеют свои корни в случайностях молекулярных. Вообще надо еще раз повторить, что наше исследование отнюдь не претендует на исчерпывающий анализ всех проблем, связанных с понятием вероятности. Нам кажется, что это будет весьма важным результатом также и для философа, если—пусть лишь в очень ограниченной области математической физики—можно показать, что понятие вероятности, в обычном смысле закономерного значения частоты случайных явлений, имеет строго объективное значение. Кроме того, должно иметь большое значение и то, что можно точно установить понятие и происхождение случайности, оставаясь все время строго на точке зрения детерминизма. При этом закон больших чисел выступает не как некий мистический принцип и не как чисто эмпирическое положение, но как простое математическое следствие той специальной формы, в которой в подобных случаях представляется причинная зависимость.

Пожалуй, нелишне заметить в заключение, что исчисление вероятностей, в смысле изложенной здесь концепции, не является новым принципом исследования, независимым от прочих методов познания природы. Исчисление вероятностей является упрощенным статистическим схематизированием некоторых, весьма часто встречающихся в природе функциональных связей, точное исследование которых, вследствие их чрезвычайной сложности, весьма затруднительно. В развитии современной физики, характерной чертой которого является разложение физических явлений на „скрытые“ частичные явления случайность и вероятность играют важную роль, как наглядное и уясняющее вспомогательное средство. Но в случае нужды можно совершенно обойтись без них, если эти схематизи-

рующие методы были бы заменены точными статистическими подсчетами ¹⁾.

Наброшенная нами теория дает ключ к пониманию того, почему применение понятий случайности и вероятности, даже при неизвестности всех деталей функциональной зависимости, обычно дает достаточно точные результаты. Совершенно ясно, что эти методы дают неоценимое вспомогательное средство исследования в области тех эмпирических наук, где точное математическое исследование элементарных явлений исключено.

¹⁾ Существенная разница между кинетической теорией газов (Максвелл, Больцман и др.) и статистической механикой (Гиббс) состоит в том, что первая основывается на определенных, правда, весьма правдоподобных, но точно не доказанных концепциях случайностей и вероятностей, в то время как последняя (по крайней мере в программе, если не совсем в выполнении) избегает всех подобных понятий и строится на точных статистических методах.