ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЭЛЕКТРОН.

Я. И. Френкель, Ленинград.

§ 1. Введение.

Электроны обычно трактуются как шарики определенного радиуса с электрическим зарядом, равномерно распределенным по их поверхности или объему. Исходя из этого представления, Абрагам еще в 1903 г. ввел в рассмотрение на-ряду с поступательным движением электрона, вращательное движение его вокруг оси, проходящей через центр. Подобное вращательное движение рассматривалось впоследствии рядом других авторов; однако непосредственное физическое значение было придано ему впервые лишь в 1922 г. А. Комптоном. К идее вращающегося электрона Комптон пришел не на основании принципиальных соображений, но исходя из анализа туманных путей, описываемых электронами в камере Вильсона. В изгибах этих кривых он нашел характерные закономерности, которые, по его мнению, могли быть объяснены лишь в том случае, если электроны, подобно артиллерийским снарядам, обладают быстрым осевым вращением. Комптон высказал мысль, что подобное осевое вращение свойственно всем электронам, как вне, так и внутри атомов, и что скорость его во всех случаях одинакова, так что все электроны имеют один и тот же „собственный" момент вращения. Этот момент вращения Комптон отождествил с тем элементарным моментом $\frac{h}{2\pi}$, который, согласно теории Бора, соответствует обращению электронов вокруг положительных ядер атомов. С механическим моментом неизменно связан момент магнитный. Это одинаково относится как к обращению электронов вокруг ядер, так и к их собственному вращению. Таким образом, согласно Комптону, все электроны, как связанные, так и свободные, обладают вполне определенным магнитным моментом, который должен иметь существенное значение для магнитных свойств материальных тел.

Никаких дальнейших выводов из своей идеи Комптон не сделал и она скоро совершенно заглохла. Однако через несколько лет, а именно в конце 1925 г., она вновь возродилась по почину молодых

голландских физиков Уленбека (Uhlenbeck) и Гаудсмита (Goudsmit). Последние исходили при этом из ряда новых спектроскопических фактов, относящихся главным образом к аномальному эффекту Зеемана, а также к рентгеновским спектрам и их аналогии со спектрами оптическими. Все попытки интерпретировать эти факты с точки зрения классической модели атома Резерфорда-Бора наталкивались на неопреодолимые внутренние противоречия. Недаром с легкой руки Эйнштейна эта область физики, ограничившаяся, в сущности говоря, лишь систематикой эмпирических закономерностей, получила несколько презрительное название „зоологии". Идея вращающегося электрона тотчас же внесла ясность и стройность в эту спектроскопическую зоологию, устранив как бы по волшебству ряд противоречий, вытекавших, как теперь оказалось, из неполноты старой модели атома. Фундаментальное значение имело при этом выяснение тех добавочных сил, которые испытывает электрон в электрическом поле положительного ядра благодаря своему осевому вращению. Выяснение этого вопроса составляет заслугу Уленбека, а применение соответствующих общих принципов квантовой теории спектров — заслугу Гаудсмита. При этом остались некоторые невязки, которые, однако, удалось ликвидировать, с одной стороны, при помощи теории относительности, а с другой — при помощи новой квантовой механики.

§ 2. Дополнительная магнитная энергия электрона в атоме.

Представим себе электрон с зарядом $-e$ и массой m, обращающийся вокруг неподвижного положительного ядра с зарядом $+Ze$. Радиус-вектор электрона (относительно ядра) обозначим через $\vec{r}$, а скорость через $\vec{v}$. Механический момент (т. е. момент количества движения) электрона или, вернее, системы, образуемой им совместно с ядром, выражается при этом вектором

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}\ ^{1)}, \tag{1}$$

а магнитный момент вектором

$$\vec{M} = \frac{-e}{2c}\vec{v} \times \vec{r}. \tag{2}$$

Таким образом, оба момента — магнитный и механический — связаны друг с другом соотношением

$$\vec{M} = -\frac{e}{2cm}\vec{l}. \tag{3}$$

---

[1]) Здесь и дальше $\times$ — знак векторного умножения.

Предположим теперь, что электрон обладает благодаря своему осевому вращению механическим моментом $\vec{i}$ и магнитным моментом $\vec{\mu}$, и что эти моменты связаны друг с другом соотношением

$$\vec{\mu} = \varkappa \vec{i}, \tag{4}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности, численное значение которого мы пока не будем рассматривать.

При таких условиях электрон должен испытывать со стороны ядра, наряду с Кулоновской силой притяжения, дополнительную электромагнитную силу, происхождение и величина которой были определены Уленбеком следующим образом.

Вместо исходной координатной системы S, в которой ядро покоится, а электрон движется со скоростью $\vec{v}$, введем другую S', по отношению к которой электрон в рассматриваемый момент находится в покое, а ядро движется со скоростью $-\vec{v}$. В этой системе ядро должно создавать магнитное поле, определяемое по закону Био-Савара. Обозначая напряжение этого поля в той точке, где находится электрон, через $\vec{H}'$, имеем

$$\vec{H}' = -\frac{Ze\,\vec{v} \times \vec{r}}{cr^3} \tag{5}$$

или согласно формуле (2)

$$\vec{H}' = -\frac{2Z\vec{M}}{c^3}. \tag{6}$$

С помощью этой формулы нетрудно вычислить дополнительную силу, испытываемую электроном, благодаря наличию собственного магнитного момента ($\vec{\mu}$), а также пару сил, стремящуюся изменить направление последнего. Для дальнейшего, однако, достаточно знать лишь величину добавочной энергии электрона, которую мы можем определить по формуле

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}' \text{ [1]}. \tag{7}$$

Подставляя в эту формулу предыдущее выражение для $\vec{H}'$, получаем

$$U = +2Z\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{M}}{r^3}. \tag{8}$$

Если не принимать во внимание магнитный момент электрона, а также зависимость его массы от скорости (вытекающую из теории относительности), то движение его вокруг положительного ядра должно

[1]) Здесь и дальше точка обозначает знак скалярного умножения.

происходить по Кеплеровому эллипсу, полуоси которого мы обозначим a и b. При этом, согласно теории Бора, значения a и b для устойчивых (или „стационарных") движений определяются формулами

$$a = a_0 \frac{n^2}{Z}, \tag{9}$$

$$b = a \frac{k}{n}, \tag{10}$$

где

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2}, \tag{11}$$

есть нормальный радиус (одноквантной орбиты) водородного атома, а n и k — главное и угловое квантовые числа рассматриваемого движения. Числа эти имеют, как известно, следующий смысл: n определяет энергию электрона (или вернее системы электрон — ядро) по формуле

$$W = -\frac{Ze^2}{2a}, \tag{12}$$

а k — момент количества движения электрона, т. е. введенную выше величину I по формуле

$$I = \frac{h}{2\pi} k. \tag{13}$$

Для того чтобы учесть в первом приближении изменение энергии какого-либо станционарного движения, зависящее от магнитного момента электрона, необходимо взять среднее значение дополнительной энергии U для движения невозмущенного. Таким образом к энергии W мы должны прибавить величину

$$\overline{U} = 2Z \overline{\frac{\vec{M} \cdot \vec{\mu}}{r^3}},$$

где черта обозначает среднее (во времени), взятое для нормального Кеплерового движения. Так как в этом случае векторы $\vec{M}$ и $\vec{\mu}$ остаются постоянными как по величине, так и по направлению, то мы должны усреднить лишь величину $\frac{1}{r^3}$.

Нетрудно показать[1]), что

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{1}{b^3} \tag{14}$$

[1]) Кеплерово движение характеризуется, во-первых, уравнением орбиты: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$, где φ — угол радиуса-вектора с направлением к перигелию, ε — эксцентрицитет, p — полупараметр $= a(1-\varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}$, и во-вторых, уравнением $I = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} =$

откуда следует

$$\overline{U} = \frac{2Z\vec{M}\cdot\vec{\mu}}{b^3}. \tag{15}$$

Обозначим угол между векторами $\vec{M}$ и $\vec{\mu}$ через θ; положим далее согласно формулам (3) и (13):

$$M = \frac{-e}{2cm}\cdot\frac{hk}{2\pi} \tag{16}$$

и аналогично

$$\mu = \frac{-e}{2cm}\cdot\frac{hs}{2\pi}, \tag{17}$$

где s — численный коэффициент, значение которого мы покамест оставим неопределенным. Если бы мы предположили, что собственный механический момент электрона совпадает с моментом одноквантной орбиты, т. е. равен $\frac{h}{2\pi}$ (гипотеза Комптона), а отношение $i:\mu$ равно отношению $I:M$, то нужно было бы положить $s=1$.

Пользуясь формулами (16) и (17), а также (9) и (10), мы можем представить энергию $\overline{U}$ в следующем виде

$$\overline{U} = \frac{AZ^4}{n^3k^2}\, s\cos\theta, \tag{18}$$

где A есть универсальная постоянная, определяемая формулой

$$A = \frac{8\pi^4 me^8}{h^4 c^2}. \tag{19}$$

§ 3. Сравнение магнитной энергии электрона с релятивистской поправкой.

Значение этого результата станет нам ясным, если мы сопоставим его с величиной дополнительной энергии, проистекающей от изменения массы электрона в зависимости от его скорости. А именно,

---

$=$ const., выражающим закон сохранения момента количества движения. Для среднего (во времени) значения какой-либо функции $f(\varphi)$ мы имеем: $\overline{f(\varphi)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(\varphi)\,dt$, где τ — период обращения, или, так как $dt = \frac{mr^2}{I}\,d\varphi$ и $\tau = \frac{m\,2\pi ab}{I}$ ($\pi\,ab$ — площадь эллипса),

$$\overline{f(\varphi)} = \frac{1}{2\pi ab}\int_0^{2\pi} r^2 f(\varphi)\,d\varphi.$$

В частности получаем

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{2\pi ab}\int_0^{2\pi}\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}\,d\varphi = \frac{1}{abp} = \frac{1}{b^3}.$$

как показал впервые Зоммерфельд, эта „релятивистская“ поправка энергии движения, определяемого квантовыми числами n и k; равна

$$-\frac{RhZ^4\alpha^2}{n^4}\left(\frac{n}{k}-\frac{3}{4}\right),$$

где

$$R=\frac{2\pi^2 me^4}{h^3}$$

есть Ридберговская постоянная, а

$$\alpha=\frac{2\pi e^2}{hc}$$

постоянная тонкой структуры водородного спектра.

Подставляя эти значения R и α в предыдущее выражение, мы можем представить ту часть релятивистской поправки, которая зависит от обоих квантовых чисел n и k в следующем виде

$$V=-\frac{AZ^4}{n^3k}, \tag{20}$$

причем A обозначает ту же самую постоянную, что и в формуле (18). Таким образом, несмотря на различие причин, обусловливающих релятивистскую и магнитную поправки энергии невозмущенного Кеплерова движения, величина этих поправок оказывается, если и не абсолютно одинаковой, то во всяком случае чрезвычайно сходной как по численному значению, так и в смысле своей зависимости от ядерного заряда Z и главного квантового числа n.

Прежде чем применять формулы (18) и (20) к объяснению остававшихся доселе непонятными свойств спектров, мы считаем нелишним дать краткий вывод формулы (20).

Зависимость массы электрона от его скорости выражается формулой

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta=\frac{v}{c}$. При этом, кинетическая энергия T электрона равна

$$T=c^2(m-m_0)=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right).$$

Определяя количество движения электрона $\vec{p}$, как производную от кинетической энергии по скорости (в соответствии с определением обобщенных моментов и координат аналитической механики), имеем:

$$p=\frac{dT}{dv}=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}=mv,$$

что совпадает с обычным определением количества движения, как произведения массы на скорость. Отсюда получаем

$$p^2 = \frac{m_0^2 c^2 \beta^2}{1-\beta^2} = m^2_0 c^2 \left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right)$$

и далее

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}.$$

Таким образом, кинетическая энергия электрона, как функция не скорости его, а количества движения, выражается формулой

$$T = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - 1\right).$$

Если развернуть предыдущий радикал в ряд по степеням отношения $\frac{p^2}{m_0^2 c^2}$, то, сохраняя лишь первые три члена этого ряда, мы получаем следующее приближенное выражение для T:

$$T = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{p^4}{8m_0^3 c^2}.$$

Первое слагаемое правой части представляет собой обычное выражение для кинетической энергии (при $m = m_0$), а второе — релятивистскую поправку в приближенной форме. Среднее значение этого выражения для невозмущенного Кеплерова движения представляет собой не что иное, как релятивистскую поправку Зоммерфельда. Для вычисления ее заметим, что потенциальная энергия электрона по отношению к ядру равна $-\frac{Ze^2}{r}$. Таким образом, если не принимать во внимание зависимости массы от скорости, то полная энергия электрона (или вернее системы электрон — ядро) выразится формулой

$$W = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Отсюда следует, что в „невозмущенном“ движении

$$p^2 = 2m_0 \left(W + \frac{Ze^2}{r}\right).$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение для дополнительной кинетической энергии имеем

$$-\frac{p^4}{8m_0^3 c^2} = \frac{1}{2m_0 c^2}\left(W + \frac{Ze^2}{r}\right)^2.$$

Переходя к средним значениям и пользуясь формулами

$$\overline{\frac{1}{r}}=\frac{1}{a}, \quad \overline{\frac{1}{r^2}}=\frac{1}{ab},$$

а также формулами (10) и (12), получаем для искомой релятивистской поправки, т. е. дополнительной энергии, обусловленной зависимостью массы от скорости, формулу

$$V=-\frac{W^2}{2m_0c^2}\left(4\frac{n}{k}-3\right).$$

Первое слагаемое правой части совпадает, как нетрудно убедиться, с выражением (20). Что касается второго слагаемого, не зависящего от k, то оно для дальнейшего не имеет существенного значения и потому мы не будем его принимать во внимание.

§ 4. Рентгеновские спектры; „релятивистские дублеты".

Релятивистская поправка была впервые применена Зоммерфельдом к объяснению „тонкой структуры" линий водородного спектра. В первоначальной теории Бора, не учитывавшей зависимости массы от скорости, энергии различных стационарных состояний атома зависели лишь от главного квантового числа, согласно формуле

$$W_n=-\frac{Rh}{n^2}.$$

Последняя получается из (12) с помощью формул (8) и (10), при $Z=1$, если ввести в них постоянную Ридберга (вместо выражения $\frac{2\pi^2me^4}{h^3}$). Таким образом, частоты различных линий водородного спектра определялись формулой

$$\nu=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right), \tag{21}$$

где n и n' целые числа. При учете релятивистской поправки, энергия различных эллиптических орбит с одной и той же большой полуосью $a_n=a_0n^2$ оказывается различной в зависимости от их сжатия, т. е. отношения $\frac{b}{a}=\frac{k}{n}$, согласно формуле (20). Ввиду этого вместо одной линии, соответствующей изменению главного квантового числа $n'\to n$, должна получаться группа линий „сателлитов" с интервалами

$$\Delta\nu=\frac{A}{h}\left(\frac{1}{n^3k}-\frac{1}{n'^3k'}\right). \tag{22}$$

Эта формула в связи с Зоммерфельдовским „правилом отбора“

$$k - k' = \pm 1 \tag{23}$$

в точности передавала тонкую структуру водородного спектра, если при этом угловое квантовое число принимало целые значения, меньшие или равные главному. Эти результаты были тотчас же распространены на спектр ионизованного гелия ($Z = 2$), а затем и на рентгеновские спектры. В последнем случае необходимо было лишь уменьшить число Z (заряд ядра) на некоторое число S, характеризующее „экранирующее“ действие на рассматриваемый электрон других электронов, находящихся во внутренних группах или в той же электронной группе атома. Подразделение электронов в сложных атомах на группы соответствует, как известно, последовательным значениям главного квантового числа для их орбит. К первой группе или группе K принадлежат 2 электрона, обращающиеся по одноквантовым орбитам. Для них

$$W = -Rh\,(Z-1)^2. \tag{24}$$

Вторую группу или группу L образуют 8 электронов, обращающихся по двуквантовым орбитам. Энергия их, если не учитывать релятивистской поправки, равняется

$$W = \frac{Rh\,(Z-S)^2}{2^2}, \tag{25}$$

где экранирующая постоянная S близка к 3. Принимая во внимание, что часть этих электронов может двигаться по эллиптическим орбитам, соответствующим $k = 1\left(\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\right)$, а другая по круговым орбитам $k = n = 2$, и учитывая соответствующие релятивистские поправки, мы приходим к выводу, что вторая группа может подразделяться на две подгруппы, энергии которых отличаются друг от друга на величину:

$$\Delta W = \frac{A(Z-S)^4}{2^3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}A(Z-S)^4 \tag{26}$$

Эта разность обнаруживается в спектральном интервале $\Delta\nu = \frac{\Delta W}{h}$ между теми двумя линиями, которые испускаются атомом при перескоке электрона из L-группы на вакантное место K-группы, в виде так называемого дублета K_α. И действительно, ширина этого дублета для всех атомов от самых легких до урана ($Z = 92$) в точности выражается формулой Зоммерфельда. В виду этого обстоятельства упомянутый дублет называется „релятивистским“.

Казалось бы в этом обстоятельстве можно видеть блестящее подтверждение теории Зоммерфельда. Но в нем кроется вместе с тем чрезвычайно большое затруднение для нее. А именно, согласно Зом-

мерфельдовскому „принципу отбора“, выражаемому формулой (23) представляется возможным перескок электрона на одноквантовую орбиту группы K лишь с круговых орбит группы L. При этом угловое квантовое число уменьшается на единицу, между тем как при переходе с эллиптических орбит группы K ($n=2$, $k=1$) оно должно было бы оставаться неизменным. Невозможность подобных переходов, соответствующих неизменности k, была доказана не только в применении к тонкой структуре водородного спектра, но также еще более отчетливо в применении к оптическим спектрам щелочных металлов, где различным значениям углового квантового числа для конечной орбиты валентного электрона соответствуют различные серии линий или, что то же самое, различные, т. е. достаточно удаленные друг от друга ряды уровней энергии или „термов“ [1]). А именно, термы ns, np, nd и т. д. соответствуют значениям $k=1$, $k=2$, $k=3$. При этом, в полном согласии с правилом Зоммерфельда, комбинируются друг с другом лишь термы соседних рядов.

§ 5. Сравнение рентгеновых спектров с оптическими; „экранные дублеты“.

В случае рентгеновых спектров, так же как и в случае оптических, основное значение имеют не линии, но термы, соответствующие различным энергетическим уровням атомов. Рентгеновские термы легко обнаруживаются непосредствено в спектрах поглощения. Таким образом удалось установить, что группа L состоит не из двух подгрупп, как мы это предполагали выше, но из трех; далее группа M ($n=3$) не из трех (соответственно трем возможным значениям углового квантового числа $k=1$, 2, 3), но из пяти и т. д.

Это обстоятельство представляется на первый взгляд крайне загадочным и ни с чем не сообразным. В действительности, однако, то же самое мы имеем и в простейших оптических спектрах, т. е. в спектрах атомов или ионов с одним внешним (валентным) электроном. А именно, все спектральные термы щелочных металлов, кроме термов ряда s, оказываются двойными. Таким образом, главному квантовому числу $n=1$, соответствует всего лишь один терм $1s$; при $n=2$ мы имеем три терма, один с числом $k=1$ ($2s$) и два весьма близких терма с $k=2$ ($2p_1$ и $2p_2$). Точно также при $n=3$ мы имеем один терм s, 2 терма p и 2 терма d — итого пять термов, так же, как в рентгеновской группе M.

Путем анализа тонкой структуры спектров щелочных металлов Зоммерфельд установил, что при комбинации различных термов должно быть выполнено, помимо условия $k-k'=\pm 1$, еще одно усло-

[1]) Напомним, что под спектральным „термом“ подразумевается абсолютная величина уровня энергии, деленная на h.

вие, которое может быть формулировано математически путем присвоения различным термам, на-ряду с квантовыми числами n и k, третьего квантового числа j, названного им внутренним. Это внутреннее квантовое число служит, прежде всего, для отличия обоих компонентов каждого дублета (n, k) друг от друга. Если при этом для компонента с меньшей энергией (т. е. большим численным значением терма [1]) положить $j=k-1$, а для другого компонента $j=k$ (при $k=1$ этот компонент является единственным), то вышеупомянутое дополнительное условие выражается следующим образом

$$j-j'=\pm 1 \text{ или } 0. \tag{27}$$

Это второе правило отбора Зоммерфельда, так же как и первое, оказывается вполне применимым и к рентгеновским спектрам. Тем двум термам группы L, которые комбинируются с термом K, образуя дублет K_α в спектре испускания характеристических рентгеновых лучей, приходится, однако, приписать при этом одно и то же значение углового квантового числа, а именно $k=2$; что же касается числа j, то для одного из них оно равно 2, а для другого 1. Третий терм группы L характеризуется числами $k=1$, $j=1$ и комбинироваться с K не может.

Аналогичные соотношения имеют место и для термов группы M; при перескоке электрона из группы M на вакантное место группы L или K, атомом испускаются лишь те линии, для которых выполняются условия (24) и (27). Соответствие между оптическими и рентгеновскими термами явствует из следующей таблицы, где они расположены в порядке возрастания энергии (уменьшения терма).

Таблица 1.

Рентген. терм	$K_{1,1}$	$L_{1,1}$	$L_{2,1}$	$L_{2,2}$	$M_{1,1}$	$M_{2,1}$	$M_{2,2}$	$M_{3,2}$	$M_{3,3}$
Оптическ. терм	$1s_1$	$2s_1$	$2p_1$	$2p_2$	$3s_1$	$3p_1$	$3p_2$	$3d_1$	$3d_2$
n	1	2	2	2	3	3	3	3	3
k	1	1	2	2	1	2	2	3	3
j	1	1	1	2	1	1	2	2	3

С точки зрения систематики спектральных термов (т. е. с чисто „зоологической“ точки зрения) этот результат не оставляет желать ничего лучшего. Однако, с точки зрения физической, он представляет собой нечто в высшей степени неудовлетворительное и парадоксальное. Во-первых, остается неясным физическое значение внутреннего квантового числа. Во-вторых, „релятивистская поправка“, вычисленная

[1]) Энергии различных стационарных состояний атома выражаются отрицательными числами.

для двух соседних значений числа k, соответствует на самом деле двум соседним значениям числа j, при одном и том же k. Наконец, в третьих, оказывается, что интервал между двумя термами, соответствующими соседним значениям числа k, при одном и том же j, напр., L_{11}, $L_{2,1}$, совершенно не зависит от атомного номера — так, как если бы при одних и тех же значениях Z, n и k эти термы отличались друг от друга лишь значениями экранирующей постоянной S в формуле (25) и ей подобных. Не будь релятивистской поправки, происхождение этих „экранных дублетов" непосредственно объяснялось бы различием эксцентрицитета электронных орбит рассматриваемой группы. Так, например, в случае группы L мы имеем круговые орбиты с $k=2$ и эллиптические с $k=1$. Так как последние проходят гораздо ближе к ядру (расположенному в их фокусе) нежели первые, то для них экранирующее действие остальных электронов должно быть меньше, нежели для первых. Другими словами величина $Z-S$ для $L_{1,1}$ ($k=1$) должна быть больше нежели для терма $L_{2,1}$ ($k=2$) — что и имеет место в действительности.

Совершенно аналогичные соотношения были обнаружены Милликэном (Millikan) и Боуэном (Bowen) в случае оптических термов. При этом они сравнивали спектры атомов или ионов, имеющих один внешний электрон (например, спектр лития, спектр ионизованного бериллия, дважды ионизованного бора и т. д.). Во всех случаях ими были обнаружены те же два типа „дублетов", которые наблюдаются в рентгеновских спектрах, а именно „релятивистские" дублеты, расстояние между которыми выражается формулами вида (26), но которые соответствуют одному и тому же значению числа k (т. е. p_1-p_2, d_1-d_2 и т. д.), и „экранные" дублеты, которые соответствуют соседним значениям числа k, но расстояние между которыми не зависит от степени ионизации (т. е. эффективного заряда ядра).

§ 6. Объяснение дублетов в рентгеновых и оптических спектрах.

Все попытки объяснить эти вопиющие противоречия оставались до последнего времени совершенно бесплодными. Они, однако, мгновенно исчезают в свете новой идеи — вращающегося электрона. В самом деле, мы видели выше, что дополнительная энергия $\overline{U}$, обусловленная собственным вращением электрона, т. е. его магнитным моментом, выражается почти таким же образом, как и релятивистская поправка V, т. е. дополнительная энергия, обусловленная зависимостью массы от скорости [ср. формулы (18) и (20)].

Вследствие этого обстоятельства релятивистская поправка может по крайней мере отчасти маскироваться (т. е. уменьшаться) поправкой магнитной или же, наоборот, симулироваться (т. е. увеличи-

ваться) ею. Первое имеет место в случае „экранных", а второе — в случае „релятивистских" дублетов.

Такова сущность объяснения, предложенного Уленбеком и Гаудсмитом. Для того, чтобы уточнить это объяснение, оказывается, однако, необходимым сделать следующие допущения:

a. Ось вращения, т. е. механический или магнитный момент электрона, может принимать при $k>1$ лишь два противоположных направления, перпендикулярных к плоскости орбиты. Это соответствует расщеплению термов, характеризуемых одним и тем же значением числа k, на пары или дублеты. Исключение составляют лишь термы s ($k=1$), для которых возможно лишь одно из указанных направлений, а именно то, для которого собственный магнитный момент электрона $\vec{\mu}$ направлен в одну и ту же сторону с магнитным моментом его орбиты $\vec{M}$ ($\cos\theta=+1$ в формуле (18); при $k>1$ $\cos\theta=\pm 1$).

b. Коэффициент s в формуле (17) равен $\frac{1}{2}$. Это значит, что собственный магнитный момент электрона (μ) равен половине Боровского магнетона.

c. Угловое квантовое число принимает не целые, но дробные значения

$$k'=k-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\cdots,$$

так что

$$I=\frac{hk'}{2\pi}$$

и

$$M=\frac{e}{2cm_0}\,\frac{hk'}{2\pi}.$$

Обозначим величину релятивистской и магнитной поправки при вышеприведенных дробных значениях углового квантового числа через V' и U'. В случае ядра с эффективным зарядом $(Z-S)e$, сумма их выражается формулой

$$V'+U'=-\frac{A(Z-S)^4}{n^3}\left(\frac{1}{k'}\mp\frac{s}{k'^2}\right), \tag{29}$$

где верхний знак соответствует одинаковому, а нижний — противоположному направлению векторов $\vec{\mu}$ и $\vec{M}$.

Если число k весьма велико по сравнению с 1, то можно положить с точностью до величин второго порядка малости относительно $\frac{1}{k}$

$$\frac{1}{k'}=\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\backsim\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}$$

и

$$\frac{1}{k'^2} \cong \frac{1}{k^2}.$$

Мы имеем, следовательно,

$$\frac{1}{k'} \mp \frac{s}{k'^2} \cong \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2} \mp s\right). \tag{29'}$$

Таким образом при $s = \frac{1}{2}$ сумма $V' + U'$ приблизительно совпадает с величиной релятивистской поправки $V = -\frac{A(Z-S)^4}{n^3 k}$, соответствующей целому угловому квантовому числу $k = k' + \frac{1}{2}$ (верхний знак в формуме 29') или $k - 1 = k' - \frac{1}{2}$ (нижний знак) [1]).

С количественной точки зрения этот результат является, конечно, не вполне удовлетворительным, так как равенство $V' + U' = V$ имеет место лишь при больших значениях k'. Здесь, однако, неуспех объясняется не неполнотой механической модели атома, но неправильностью тех механических принципов, которые применялись нами к этой модели. Если произвести расчет дополнительной релятивистстко-магнитной энергии электрона при помощи новой квантовой механики, то, как показали Гейзенберг (Heisenberg) и Иордан (Jordan), получается полное согласие теории с опытом. При этом требование (*c*) замены целых значений углового квантового числа половинными также непосредственно вытекает из новой механической теории. Мы приводим здесь лишь результат ее, который сводится к следующему.

Релятивистская поправка при $k = \frac{1}{2}$ частично компенсируется магнитной поправкой, так что сумма их совпадает с значением V для $k = 1$.

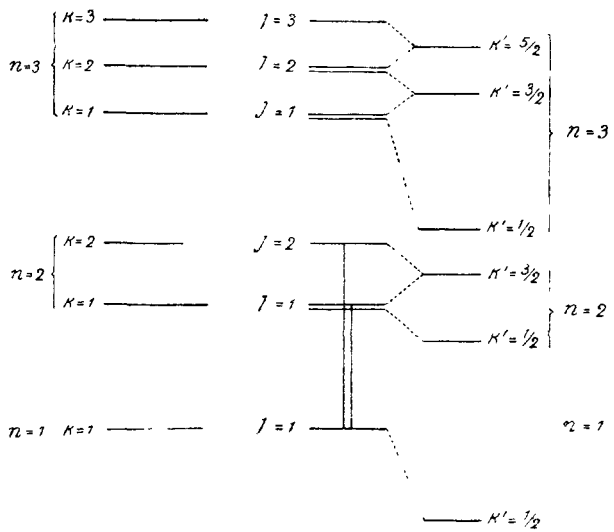
При $k = \frac{3}{2}$ мы имеем два противоположных направления магнитного момента электрона. Одно из них — противоположное магнитному моменту орбиты — дает для суммы $V + U$ значение, равное значению V при $k = 1$; другое соответствует релятивистской поправке при $k = 2$. Аналогичные соотношения получаются при $k = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ и т. д. Они представлены графически на следующей схеме (заимствуемой мной из статьи Уленбека и Гаудсмита [2]):

---

[1]) Ибо $\frac{1}{k-1} \cong \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$.

[2]) Nature, от 20 февраля 1926 г.

После всего сказанного эта схема не нуждается в пояснениях. Она дает исчерпывающее количественное объяснение структуры оптических и рентгеновских спектров (если принимать во внимание различие экранирующих постоянных для орбит, соответствующих различным значениям (k'). Вместе с тем она определяет физический смысл Зоммерфельдовского „внутреннего“ квантового числа j. А, именно, последнее характеризует полный магнитный момент атома, поскольку этот момент зависит от рассматриваемого электрона, т. е. геометрическую или, если угодно, алгебраическую сумму обоих моментов электрона $\vec{\mu}$ и $\vec{M}$.



Полагая

$$M = \frac{e}{2cm}\frac{h}{2\pi}k'$$

и

$$\mu = \pm\frac{e}{2cm}\frac{h}{4\pi},$$

получаем

$$M + \mu = \frac{e}{2cm}\frac{h}{2\pi}j, \qquad (30)$$

где

$$j = k' \pm \frac{1}{2} \qquad (31)$$

(ср. таблицу 1; $k' = k - 1$).

Заметим, что предыдущие результаты не дают еще никаких оснований для суждения о величине механического момента электрона i. Если мы предположим, что отношение $\frac{\mu}{i}$, совпадает с отношением $\frac{M}{I}$, т. е. что $i = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, то для полного механического момента атома мы получим формулу

$$I + i = \frac{h}{2\pi}j, \qquad (32)$$

совершенно аналогичную (30). Изучение магнитных свойств атомов показывает однако, что в действительности отношение $\frac{\mu}{i}$ вдвое больше чем $\frac{M}{I}$.

§ 7. Явление Зеемана.

Собственный магнитный момент электрона, так же как и магнитный момент его орбиты, проявляющийся косвенно в отсутствии внешнего магнитного поля, в присутствии подобного поля должен, очевидно, проявляться непосредственно. И, действительно, он обнаруживается весьма отчетливо в аномальном явлении Зеемана Однако до последнего времени он оставался так сказать неопознанным. А именно, дополнительный магнитный момент атома, наличие которого было выведено Паули (Pauli) и Ландé (Landé) из анализа магнитного расщепления спектральных термов, было приписано ими не самому „лучеиспускающему электрону", но тому „атомному остову" (Atomrumpf), вокруг которого этот электрон обращается и который по отношению к нему играет роль положительного ядра. При этом оказалось необходимым предположить, что, вопреки основным требованиям электродинамики, отношение магнитного момента атомного остова к его механическому моменту вдвое больше нежели для валентного электрона (вернее, орбиты, последнего). Это обстоятельство вытекало из следующих соображений.

Согласно теореме Лармора, система электронов, обращающихся совершенно произвольным образом вокруг некоторого неподвижного центра (ядра), приобретает в однородном магнитном поле с неслишком большим напряжением $\vec{H}$ дополнительное прецессионное движение, которое заключается в равномерном вращении всей системы как целого, вокруг оси, параллельной $\vec{H}$, с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2cm}\vec{H}. \tag{33}$$

Величина $-\frac{e}{2cm}$ есть не что иное, как отношение магнитного момента каждого электрона (вернее, электронной орбиты) $\vec{M}$ к механическому моменту $\vec{I}$. Таким образом формула (33) эквивалентна следующей:

$$\vec{I}\cdot\vec{\Omega} = -\vec{M}\cdot\vec{H}. \tag{34}$$

Правая часть этого равенства представляет собой не что иное, как магнитную энергию рассматриваемого электрона. Что касается левой части, то она, как легко убедиться, равна дополнительной кинетической энергии электрона, обусловленной прецессионным вращением его орбиты. Действительно, обозначая линейную ско-

рость электрона в его нормальном движении через $\vec{v}$, а в возмущенном— через $\vec{v}'$ имеем

$$\Delta \frac{1}{2} m\vec{v}^2 = \frac{1}{2} m\vec{v}'^2 - \frac{1}{2} m\vec{v}^2 = \frac{1}{2} m\left(\vec{v} + \vec{v}'\right) \cdot \left(\vec{v}' - \vec{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\vec{v} + \vec{v}'\right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right).$$

Если $\vec{H}$ не слишком велико [а это предположение лежит в основе формулы (33), которая перестает быть верной для чрезвычайно сильных полей], то можно в этой формуле заменить $\frac{\vec{v} + \vec{v}'}{2}$ через $\vec{v}$, что дает

$$\Delta \frac{1}{2} mv^2 = m\vec{v} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) = \vec{\Omega} \cdot \left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{\Omega} \cdot \vec{I},$$

по определению $\vec{I}$.

Таким образом, формула (34) выражает тот в сущности самоочевидный факт, что магнитная энергия электрона есть не что иное, как дополнительная энергия его возмущенного движения (потенциальная энергия при прецессии не меняется).

Обозначая магнитный момент „атомного остова“ через $\vec{\mu}$, а механический через $\vec{i}$, мы можем очевидно положить

$$\vec{i} \cdot \vec{\omega} = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}, \tag{35}$$

где

$$\vec{\omega} = -\frac{\mu}{i} \vec{H} \tag{36}$$

есть угловая скорость прецессии этого остова. Поскольку последний состоит из электронов совершенно подобных валентному „лучеиспускающему“ электрону, мы должны были бы ожидать, что $\frac{\mu}{i} = \frac{M}{I}$, т. е. $\omega = \Omega$.

В действительности, однако, из анализа сложного или „аномального“ явления Зеемана вытекает, что

$$\omega = 2\Omega, \tag{37}$$

откуда мы должны заключить, что

$$\frac{\mu}{i} = 2\frac{M}{I}. \tag{38}$$

Не входя в подробности этого анализа, которым мы обязаны, главным образом, Ланде, напомним вкратце лишь главнейшие его результаты.

В случае простого или „нормального" эффекта Зеемана каждый энергетический уровень расщепляется на несколько магнитных уровней, согласно формуле

$$\Delta W = \frac{h}{2\pi} \Omega \cdot m, \tag{39}$$

где m — так называемое магнитное квантовое число, определяющее угол θ, образуемый моментом атома (или электрона) с направлением $\vec{H}$, по формуле

$$\cos\theta = \frac{m}{k}; \tag{40}$$

число m принимает все целые значения в пределах от $-k$ до $+k$, если под k подразумевать обычное „угловое" квантовое число ($k = 1, 2, 3 \ldots$), которое соответствует предполагаемому отсутствию собственного магнитного момента у электрона. При этом комбинируются друг с другом лишь такие уровни, для которых

$$m - m' = \pm 1 \quad \text{или} \quad 0. \tag{41}$$

В результате подобных комбинаций получаются нормальные „Зеемановские триплеты", состоящие из несмещенной спектральной линии частоты ν и двух ее компонент частоты

$$\nu + \frac{\Omega}{2\pi} \quad \text{и} \quad \nu - \frac{\Omega}{2\pi}$$

($\frac{\Omega}{2\pi}$ есть частота Ларморовской прецессии).

Подобный „нормальный эффект Зеемана" наблюдается лишь у так называемых синглетных термов, не имеющих тонкой структуры, а также у водорода, если не принимать во внимание тонкую структуру его спектральных линий.

В случае щелочных металлов и вообще более сложных систем с одним внешним электроном, обладающих при отсутствии магнитного поля дублетными термами (т. е. двойными уровнями энергии), магнитное разложение этих термов определяется при сравнительно слабых полях следующей формулой

$$\Delta W = \frac{h}{2\pi} g \Omega m'. \tag{42}$$

При этом магнитное квантовое число m' принимает не целые, но полуцелые (или полуторные) значения $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ в пределах ме-

жду $=\left(j-\frac{1}{2}\right)$ и $+\left(j-\frac{1}{2}\right)$. Что же касается множителя g, то его значения лежат между 1 и 2, определяясь в зависимости от j и $k'\left(=k-\frac{1}{2}\right)$ следующей формулой

$$g=1+\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)+1-k'^2}{2\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)},$$

которая была впервые установлена чисто эмпирически Ландé.

Последний предложил рассматривать произведение $g\Omega$ как „аномальную" скорость прецессии валентного электрона совместно с атомным остовом. Происхождение подобной прецессии было объяснено Паули, как результат своего рода компромисса между электроном, вернее электронной орбитой, которая стремится прецессировать со скоростью Ω и „остовом", который — по неизвестной причине—стремится прецессировать со скоростью 2Ω. Это компромиссное решение осуществляется, однако, лишь до тех пор, пока связь между электроном и остовом атома, определяемая их взаимной магнитной энергией U_i, остается достаточно прочной по сравнению с действием, которое они испытывают со стороны внешнего поля и которое определяется соответствующими „внешними" энергиями $-\vec{\mu}\cdot\vec{H}$ и $-\vec{M}\cdot\vec{H}$. Что касается величины энергии U_i, то Ландé и Паули показали, что ее можно считать пропорциональной косинусу угла между векторами $\vec{\mu}$ и $\vec{M}$ и обратнопропорциональной кубу радиуса электронной орбиты.

При постепенном усилении внешнего поля происходит своеобразное изменение в типе явления Зеемана, которое заканчивается превращением его в простейший „нормальный" тип, определяемый формулой (39). Этот эффект, открытый Пашеном и Баком, объясняется с точки зрения Ландé и Паули очень просто, а именно, разрывом связи между валентным электроном и атомным остовом, которые в очень сильном внешнем поле прецессируют независимо друг от друга со свойственными каждому из них скоростями

$$\Omega=\frac{e}{2cm}H$$

и

$$2\Omega=\frac{e}{cm}H.$$

Магнитная энергия атома сводится в этом случае к сумме соответствующих „внешних" энергий $-\vec{\mu}\cdot\vec{H}$ и $-\vec{M}\cdot\vec{H}$, т. е.

$$\Delta W=-(\vec{\mu}+\vec{M})\cdot\vec{H}=+(\vec{J}+2\vec{j})\cdot\vec{\Omega}.$$

§ 8. Объяснение сложного явления Зеемана; свойства вращающегося электрона.

Результаты, изложенные в предыдущем параграфе, приобретают новый и притом гораздо более простой и ясный смысл с точки зрения теории вращающегося электрона.

Добавочный магнитный момент атома, обнаруживающийся в сложном эффекте Зеемана должен лишь быть приписан не остову атома, но самому валентному электрону.

При этом сразу отпадает вопиющее противоречие с основными законами электродинамики, получающееся в том случае, если „аномальная“ скорость прецессии $\omega = 2\Omega$ приписывается „остову“ атома, т. е. системе электронов, каждый из которых имеет „нормальную“ прецессионную скорость Ω. С новой точки зрения остов атома, т. е. электронная оболочка одновалентного иона щелочного металла, не имеет ни механического ни магнитного момента, что вполне соответствует сходству ее с электронной оболочкой соседнего „благородного“ элемента, т. е. инертного газа: последние, как известно, диамагниты. Роль остова сводится лишь к экранированию ядра, т. е. уменьшению его эффективного заряда.

Справедливость этой интерпретации сложного эффекта Зеемана явствует с наибольшей очевидностью из того замечательного факта, что и в случае атомов водорода, „остов“ которых состоит из одного „голого“ ядра (протона), наблюдается явление, аналогичное или, вернее, идентичное эффекту Пашена и Бака. В сильных магнитных полях „тонкая структура“ водородных линий расплывается и совершенно исчезает, уступая место нормальным зеемановским триплетам. Это явление, открытое Ерохиным, до последнего времени подвергалось сильному, хотя и совершенно неосновательному сомнению. С точки зрения прежней теории (Зоммерфельда), объяснявшей „тонкую структуру“ водородных термов одной лишь релятивистской поправкой, оно, разумеется, представлялось совершенно непостижимым. С новой точки зрения — Уленбека и Гаудсмита — оно является само собой понятным. Более того, его следует, мне кажется, рассматривать, как простейшее и основное экспериментальное обоснование теории вращающегося электрона.

Тот факт, что отношение $\frac{\mu}{i}$ вдвое больше, чем соответствующее отношение для электронных орбит, не представляет собой для этой теории никаких принципиальных затруднений. Более того, он непосредственно следует из общих законов электродинамики, если трактовать электрон, как шарик с равномерно распределенным поверхностным зарядом.

В самом деле, магнитный момент подобного шарика выражается формулой

$$\vec{\mu} = -\frac{ea^2}{3c}\vec{o}, \tag{45}$$

где $-e$ — его заряд, a — радиус и $\vec{o}$ — угловая скорость.

Эта формула получается из определения $\vec{\mu}$, как геометрической суммы моментов различных элементов электрона — $de = -\eta ds$ ($-\eta = -\frac{e}{4\pi a^2}$ — поверхностная плотность заряда, ds — элемент поверхности) по отношению к его центру. Обозначая радиус-вектор рассматриваемого элемента через r, имеем:

$$d\vec{\mu} = -\frac{de}{2c}\vec{r}\times(\vec{o}\times\vec{r}) = \frac{de}{2c}\left\{\vec{o}r^2 - \vec{r}(\vec{o}\cdot\vec{r})\right\}$$

и, следовательно,

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2c}\left[\vec{o}a^2 - \overline{\vec{a}(\vec{o}\cdot\vec{a})}\right],$$

где черта обозначает среднее для всевозможных направлений радиуса-вектора $\vec{a}$. Из соображений симметрии явствует, что это среднее представляет собой вектор параллельный $\vec{o}$ и, следовательно, совпадает со средним значением его проекции на направление $\vec{o}$, т. е. с $oa^2\,\overline{\cos^2\theta}$, где θ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{o}$. Замечая, что $\overline{\cos^2\theta} = {}^1/_3$, мы приходим к формуле (45).

Что касается механического момента, т. е. момента количества движения вращающегося электрона, то он определяется с помощью понятия электромагнитного количества движения, как величины разлитой в пространстве с объемной плотностью $\vec{G} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{H}$, где $\vec{E}$ — электрическое, а $\vec{H}$ — магнитное напряжение. Внутри сферического электрона E, а следовательно, и G исчезают. Снаружи $\vec{E}$ совпадает с полем точечного заряда e, сосредоточенного в его центре, а магнитное поле — с полем элементарного магнитика с моментом μ, также сосредоточенного в центре электрона. Мы имеем, следовательно,

$$\vec{E} = \frac{e\vec{r}_o}{r^2} \text{ и } \vec{H} = \frac{3\vec{r}_o(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_o) - \vec{\mu}}{r^3},$$

где $\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}$ — единичный вектор, характеризующий направление $\vec{r}$. Таким образом

$$\vec{G} = \frac{-e}{4\pi c r^5}\vec{\mu}\times\vec{r}_o.$$

Момент количества движения получается отсюда по формуле

$$\vec{i} = \int\limits_{r>a} \vec{r} \times \vec{G} dV,$$

где dV — элемент объема внешнего пространства. Принимая во внимание, что среднее значение вектора $\vec{r}_0 \times (\vec{\mu} \times \vec{r}_0)$ для всевозможных направлений $\vec{r}_0$ равно, согласно предыдущему $^2/_3 \vec{\mu}$, получаем

$$\vec{i} = -\frac{2}{3} \frac{e\vec{\mu}}{4\pi c} \int\limits_a^\infty \frac{4\pi r^2}{r^4} dr = -\frac{2}{3} \frac{e\vec{\mu}}{ca}.$$

Так как электромагнитная масса сферического электрона связана с его радиусом формулой

$$m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2 a}, \tag{46}$$

то мы приходим окончательно к формуле

$$\mu = -\frac{e}{cm} \vec{i}, \tag{47}$$

т. е. отношение $\frac{\mu}{i}$ оказывается вдвое большим нежели отношение $\frac{M}{I}$, в полном согласии с опытными фактами.

Не следует, однако, придавать слишком большое значение этому совпадению. Прежде всего, оно имеет место лишь в случае сферического электрона и исчезает, если мы предложим, что заряд электрона равномерно распределен по его объему. Далее, полагая $m \backsim 9 \cdot 10^{-28}$, $e \backsim 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ и $\mu \backsim 10^{-20}$ (Боровский магнетон), мы получаем для радиуса электрона известное значение $a \backsim 2 \cdot 10^{-13}$ *см*, а для его угловой скорости [из (45)] $o \backsim 10^{25}$. Таким образом, линейная скорость элементов электрона на его экваторе $a \cdot o$ оказывается равной, примерно, 10^{12} *см сек*, т. е. почти в сто раз большей скорости света c. Эти затруднения не являются, конечно, серьезными. Мы приходим, однако, к серьезному затруднению — вернее противоречию, если учтем ту добавочную массу электрона, которую он должен иметь благодаря своему вращению. Не пускаясь в точные вычисления, заметим, что эта масса равна (по крайней мере приблизительно) энергии создаваемого им магнитного поля $\frac{1}{8\pi} \int H^2 dV$, деленной на c^2. По порядку величины она определяется, следовательно, выражением $\frac{\mu^2}{a^3 c^2}$. Подставляя сюда предыдущие значе-

ния для μ и a, получаем величину $m' \backsimeq 10^{-21}$, которая в миллион раз больше основной электромагнитной массы электрона, определяемой формулой (46). Впрочем, эта формула служит не для определения массы электрона (которая известна из опыта), а для вычисления его радиуса. Можно было бы себе представить, что масса электрона зависит в действительности не от его электрического, а от магнитного поля. В таком случае для определения его радиуса мы имели бы формулу

$$m \backsimeq \frac{\mu^2}{a^3 c^2}, \tag{48}$$

из которой получается $a \backsimeq 10^{-11}$ *см* — цифра явно несообразная.

§ 9. Электрический момент магнитного электрона и релятивистская теория его движения.

Не вдаваясь в гипотезы о строении электрона, мы будем рассматривать соотношение (47) как экспериментальный факт, вытекающий из анализа сложного эффекта Зеемана. С другой стороны, анализ спектров в отсутствии магнитного поля привел нас к выводу, что собственный магнитный момент электрона равен половине Боровского магнетона. Отсюда, казалось бы, с необходимостью следует, что механический момент электрона i составляет не половину элементарной величины $\frac{h}{2\pi}$, как это было предположено в конце § 6, но лишь одну четверть ее.

Этот результат не представляет собой сам по себе ничего необыкновенного. Однако ряд соображений указывает на то, что в действительности $i = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ и, следовательно, μ равно целому Боровскому магнетону.

Эти соображения основываются на исследовании того изменения, которое механические моменты электрона $\vec{i}$ и $\vec{J}$ испытывают в отсутствии внешнего магнитного поля. В этом случае их геометрическая сумма $\vec{i} + \vec{J}$ должна оставаться постоянной, т. е. мы должны иметь равенство

$$\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\vec{J}}{dt} = 0. \tag{49}$$

Производные $\frac{d\vec{i}}{dt}$ и $\frac{d\vec{J}}{dt}$ равны, очевидно, моментам пар $\vec{q}$ и $\vec{Q}$, стремящихся повернуть ось электрона и ось орбиты и заставляющих их прецессировать с одной и той же скоростью вокруг неизменного направления $\vec{i} + \vec{J}$.

Рассматривая электрон в той координатной системе S, где он мгновенно покоится, мы получили бы для момента действующей на него пары формулу

$$\vec{q} = \vec{\mu} \times \vec{H}',$$

а для соответствующей добавочной силы

$$\vec{f} = (\vec{\mu} \nabla) \vec{H}',$$

где $\vec{H}'$ определяется формулой (5). Нетрудно видеть, что момент этой силы

$$\vec{r} \times \vec{f} = \vec{Q}$$

имеет мало общего с $\vec{q}$ и что сумма $\vec{q} + \vec{Q}$ отнюдь не равна нулю, как это следовало бы из (49).

Разрешение этого противоречия оказывается возможным лишь с точки зрения теории относительности. Последняя позволяет рассматривать движение электрона по отношению к координатной сисмеме S, связанной с покоющимся ядром. В этой системе последнее, очевидно, не создает никакого магнитного поля. Добавочное действие, которое оно оказывает на электрон, должно, следовательно, определяться каким-то добавочным электрическим свойством электрона, отличным от его электрического заряда и связанным с его магнитным моментом примерно таким же образом, каким магнитное поле $\vec{H}'$ в системе S' связано с электрическим полем ядра $\vec{E}$ в системе S.

Легко убедиться, что этим свойством является электрический или дипольный момент $\vec{p}$, который должен обнаруживаться у электрона с точки зрения всякой системы, по отношеиию к которой он движется.

Мы привыкли думать, что магнитный или электрический момент представляют собой инвариантные свойства материальных частиц, т. е. что величина этих моментов не зависит от выбора координатной системы, к которой относится движение этих частиц. Это представление в корне ошибочно. Электрический и магнитный момент суть два свойства, связанные друг с другом и могущие, так сказать, переходить друг в друга, совершенно так же, как это имеет место в случае электрического и магнитного поля.

Согласно теории относительности трехмерные векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ образуют четырехмерный тензор электромагнитного поля с 16 компо-

нентами $H_{\alpha\beta} = -H_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$), определяемыми через компоненты векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ по формулам

$$H_{23} = H_1,\ H_{31} = H_2,\ H_{12} = H_3;\ H_{14} = -iE_1,\ H_{24} = -iE_2,$$
$$H_{34} = -iE_3, \tag{50}$$

где $i = \sqrt{-1}$ ($H_{\alpha\alpha} = 0$).

Аналогичным образом, векторы μ и p определяют совместно антисимметричный тензор электромагнитного момента $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$, где

$$\mu_{23} = \mu_1,\ \mu_{31} = \mu_2,\ \mu_{12} = \mu_3;\ \mu_{14} = +ip_1,\ \mu_{24} = +ip_2,\ \mu_{34} = +ip_3 \tag{50'}$$

Для дальнейшего нам нет надобности углубляться в исследование этого вопроса. Нам необходимо лишь установить те формулы, по которым преобразуются векторы $\vec{\mu}$ и $\vec{p}$ при переходе от одной координатной системы (S') к другой (S). Эти формулы тождественны с соответствующими формулами для $\vec{H}$ и $-\vec{E}$. Если в S $H = 0$, то в первом приближении, при малости скорости v в сравнении со скоростью c, мы должны иметь для системы S', которая движется по отношению к S со скоростью $\vec{v}$,

$$\vec{H}' = -\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \tag{51}$$

и $\vec{E}' \simeq \vec{E}$. Предыдущая формула тождественна с формулой (5), если принять во внимание, что в рассматриваемом случае $\vec{E} = Ze\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Представим себе теперь, что в системе S электрическое поле E равно нулю. Тогда в системе S' мы имели бы

$$E' = +\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \text{ и } \vec{H}' \simeq \vec{H}.$$

С точки зрения системы S', где электрон покоится, он имеет определенный магнитный момент $\vec{\mu}'$. Мы предположим, что в этой системе он электрического момента не имеет, т. е. что $p' = 0$. Переходя к системе S, мы получаем при этом $\mu \simeq \mu'$ и

$$\vec{p} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{\mu}. \tag{52}$$

Таким образом по отношению к координатной системе, где положительное ядро покоится, электрон ведет себя, как электрический диполь

с моментом (52). Заметим, что последний перпендикулярен к скорости электрона. Если вектор $\vec{\mu}$ параллелен оси орбиты, т. е. ее магнитному моменту $\vec{M}$, то вектор $\vec{p}$ параллелен радиусу-вектору $\vec{r}$. Вопрос о происхождении вектора $\vec{p}$ не имеет для нас существенного значения. Считая, что магнитный момент электрона обусловлен его вращением, можно свести электрический момент $\vec{p}$ к определенному перераспределению заряда электрона, получающемуся при переходе от системы S', где это распределение обладает радиальной симметрией, к системе S [1]).

Электрический диполь с моментом $\vec{p}$ обладает во внешнем электрическом поле $\vec{E}$ потенциальной энергией

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}. \tag{53}$$

Подставляя сюда предыдущее значение $\vec{p}$ и $\vec{E} = Ze\frac{\vec{r}}{r^3}$, получаем

$$U = -\frac{Ze}{r^3}\left(\frac{\vec{c}}{c}\times\vec{\mu}\right)\cdot\vec{r},$$

или, в виду тождества $\vec{r}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{\mu}\right) = \vec{\mu}\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)$,

$$U = -\frac{Ze}{cr^3}\left(\vec{r}\times\vec{c}\right)\mu = 2Z\frac{\vec{M}\cdot\vec{\mu}}{r^3},$$

т. е. установленную выше формулу (8).

Различие между прежним и новым методом трактовки движения электрона получается при вычислении действующей на него пары и силы. Момент первой с новой точки зрения равен

$$\vec{q} = \vec{p}\times\vec{E}, \tag{54}$$

т. е., следовательно, отличен от прежнего выражения $\vec{\mu}\times\vec{H}'$. В самом деле с помощью формулы (51) последнее приводится к виду

$\vec{q} = \vec{\mu}\times\left(\vec{E}\times\frac{\vec{v}}{c}\right)$, тогда как согласно (52) и (54) $\vec{q} = \left(\frac{\vec{c}}{c}\times\vec{\mu}\right)\times\vec{E}$.

Для силы $\vec{f}$ мы имеем далее

$$f = (\vec{p}\nabla)\vec{E} = \frac{Ze}{r^3}\left(\vec{p}\nabla\right)\vec{r} + Ze\vec{r}\left(\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right),$$

---

[1]) См. мою „Lehrbuch der Elektrodynamik“ 1, S. 294—296 (Springer, 1926).

ными относительно магнитного момента атомов. Так, например, магнитный момент атома водорода (а также других более сложных атомов с одним внешним электроном), измеренный по методу Штерна и Герлаха, равен одному Боровскому магнетону, тогда как согласно предыдущему он должен был бы равняться $^3/_2$ этой единицы. Аналогичные затруднения получаются при истолковании явления Зеемана в сильных полях, т. е. при приведении формулы (44) к виду (39) с целым m.

Эти затруднения исчезают, если от классической механики перейти к квантовой.

Мы не имеем, однако, возможности вдаваться здесь в рассмотрение этого вопроса.