

1926 г.

Т. VI. ВЫП. 2.

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК.

МАКС ПЛАНК И ТЕОРИЯ КВАНТОВ ¹⁾.

Г. А. Лоренц.

Редко случается, чтобы в промежуток времени, едва охватывающий одно десятилетие, в результате открытия новых явлений и расцвета новых теорий, наука испытала бы такое глубокое преобразование, какое произошло в физике 25 лет тому назад. Истекающее столетие принесло в быстрой последовательности открытие рентгеновских лучей, радиоактивности и эффекта Зеемана; были получены первые заключения о сущности электрона, а в 1905 году уже появилась первая работа Эйнштейна о теории относительности.

В середине этого замечательного периода возникла теория квантов, которая сыграла совершенно исключительную роль в преобразовании физики, так как она повела к атомистике энергии и углубила взгляды на значение прерывности в явлениях природы. Постепенно она завоевывала все более широкие области. Это именно она раскрыла тайну строения атома и дала ключ к пониманию языка спектров. Таким образом она сделалась для физиков наших дней самым необходимым и надежным путеводителем, указаниям которого они охотно следуют. И хотя ее положения иной раз напоминают неизвестные изречения оракула, — мы убеждены, что за ними всегда стоит истина.

Уместно будет сейчас с благодарностью и удивлением вспомнить о том, как Планк в заседании Немецкого Физического Общества **14 декабря 1900 года**, развивая свою гипотезу элементов энергии, **заложил** фундамент теории квантов, и еще раз пройти тот путь, который он указал тогда рукою мастера.

Задача состояла в том, чтобы выяснить теоретически характер зависимости интенсивности теплового излучения от температуры и длины волны; основанием, на котором строилась теория, служила, с одной стороны, термодинамика и статистическая механика, а с другой стороны, Максвеллова теория электромагнитного поля. Со времен

¹⁾ Naturwiss. 13, p. 1077, 1925.

Успехи физических наук. Т. VI. Вып. 2. 1926 г.



Кирхгофа было известно, что плотность энергии черного излучения есть функция температуры и длины волны, не зависящая от специальных свойств тела. Больцман своим теоретическим выводом закона Стефана и В. Вин своим выводом „закона смещения“ выяснили важные свойства этой универсальной функции. Оставалось еще, однако, полностью раскрыть ее вид.

Это и было задачей, которую Планк ставил себе в нескольких более ранних работах. Исследования о необратимых процессах излучения, опубликованные в *Sitzungsberichte der Berliner Akademie* в начале 1900 г. и объединенные в статье, напечатанной в *Annalen der Physik*, были посвящены как раз детальному изучению обмена энергии между материей и эфиром. Материя при этом была в высокой степени схематизирована; в качестве представителей ее фигурировали хорошо известные линейные колебатели или резонаторы Планка. Каждое из этих маленьких образований имело определенное число колебаний и несло известные электрические заряды, при посредстве которых и осуществлялось взаимодействие с полем лучистой энергии. Об их структуре не было надобности делать какие-либо определенные допущения; было принято лишь, что колебатель может терять свою энергию просто вследствие излучения, а не путем сопротивлений какого-нибудь другого происхождения. С другой стороны, уже существующие лучи могли приводить резонаторы в колебание или усиливать или ослаблять их движение, так что, вообще говоря, энергия U резонатора с течением времени могла увеличиваться или уменьшаться.

Впрочем, Планк неоднократно подчеркивал в качестве существенной особенности термодинамической трактовки следующее обстоятельство: изучению подлежат вовсе не все быстро и беспорядочно изменяющиеся детали процессов, но то, что можно обнаружить при „макроскопическом“ наблюдении. Следовательно, под U нужно разуметь среднее значение, вычисленное за промежуток времени, который охватывает многие периоды колебания, однако же, достаточно мал, так что изменениями, которые испытывают в течение этого промежутка наблюдаемые величины, можно пренебречь. Совершенно аналогичное справедливо и для поля излучения. Предметом исследования являются не отдельные колебания, но интенсивности лучей, перекрещивающихся в различных направлениях; при чем для каждого направления и для каждого интервала длин волн интенсивность измеряется количеством энергии, проходящим через элемент поверхности, поставленной перпендикулярно к направлению лучей, и рассматриваются лучи, направления которых лежат внутри небольшого телесного угла. С величинами, которые вводятся в выражение этих количеств энергии, простым образом связана плотность энергии.

В качестве первого результата из чисто электромагнитных соображений была выведена формула, которая позволяет вычислить

изменение энергии вибратора во времени, т.-е. величину $\frac{dU}{dt}$, если известны для выбранного момента времени величина U и интенсивности излучения. Отсюда получается и условие равновесия, если положить $\frac{dU}{dt}$ равным нулю.

Если обозначить плотность энергии, соответствующую интервалу длин волн $d\lambda$ через $u d\lambda$, то результат — предполагая изотропию поля лучей — будет иметь вид:

$$u = \frac{8\pi}{\lambda^4} U. \quad (1)$$

Таким образом задача была бы решена, как только для каждого резонатора, т.-е. для каждого числа колебаний, была бы известна энергия U в функции температуры. Тогда была бы известна и функция лучистой энергии u в зависимости от λ и T . При этом следует еще заметить, что u определяет не только плотность энергии излучения, но и лучеиспускательную способность абсолютно черного тела. Зная последнюю, можно далее на основании закона Кирхгофа получить излучение любого другого тела, поглощательная способность которого известна.

Здесь как раз был тот пункт, откуда стало ясно, что, пользуясь законами, которые считались раньше справедливыми в термодинамике и кинетической теории, невозможно достигнуть цели, что, следовательно, должен быть проложен новый путь. В самом деле, согласно известному закону „равномерного распределения энергии“ при термическом равновесии для частицы на каждую ее степень свободы должна приходиться одна и та же кинетическая энергия $\frac{1}{2} kT$. Линейный вибратор Планка, у которого средние значения потенциальной и кинетической энергии равны между собой, должен бы иметь таким образом в целом энергию

$$U = kT,$$

и формула для функции излучения была бы

$$u = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \quad (2)$$

Не нужно никаких тонких наблюдений для того, чтобы убедиться, что опыт противоречит этому результату, ибо формула не обнаруживает никаких признаков максимума, который в действительности имеет функция излучения при постоянной температуре для некоторой определенной длины волны. Легко убедиться также в том, что во многих случаях, в особенности тогда, когда дело идет о малых длинах волн,

формула ведет к слишком большим плотностям энергии и к слишком сильным излучениям. Рассмотрим, например, полированную серебряную пластинку при температуре 15° С, и для желтого света. Так как при перпендикулярном падении пластинка отражает примерно 90% падающей энергии, то ее поглощательная способность равна 0,1. Следовательно, ее излучательная способность в направлении нормали должна составлять 0,1 излучательной способности абсолютно черного тела. Для последнего же, если бы уравнение (2) было справедливо, излучение было бы пропорционально абсолютной температуре; оно было бы вместе с тем при температуре в 15° приблизительно в 50 раз меньше, нежели при температуре в 1200°. Лучеиспускательная способность холодной серебряной пластинки составляла бы таким образом $1/_{50}$ лучеиспускания черного тела, нагреветого до 1200°. Излучение последнего, однако, настолько интенсивно, что $1/_{50}$ часть его не могла бы ускользнуть от наблюдения. Серебряная пластинка должна бы быть видима в темноте. То обстоятельство, что этого не наблюдается, свидетельствует, что вибраторы, заключающиеся в пластинке и соответствующие желтому свету, далеко не обладают тем тепловым движением, которое им было приписано при выводе формулы (2).

Подобные рассуждения показывают, что закон равномерного распределения энергии в применении к явлениям излучения должен быть необходимо оставлен. Это заключение было получено различными путями, и Рэлей, например, в статье, опубликованной летом 1900 года, в которой он выводил формулу, соответствующую уравнению (2), заметил, что эта формула при постоянном λ справедлива для предельного случая высоких температур. Он пытался так же, как это уже с успехом делал раньше (1896) В. Вин, заменить эту формулу лучшей.

Планку, однако, оставалось теоретически обосновать неприменимость принципа равномерного распределения энергии. В работе, о которой до сих пор шла речь, он ограничивался попытками, аналогичными попыткам Вина и Рэлея. Однако ему пришла счастливая мысль, которая впоследствии привела его к окончательному решению,— рассматривать энтропию вибраторов и излучения. Он пришел к заключению, что для решения проблемы достаточно было бы знать энтропию как функцию энергии.

Планк ввел прежде всего гипотезу, согласно которой энтропия резонатора с энергией U имеет величину

$$S = - \frac{U}{a\gamma} \log \frac{U}{eb\gamma}, \quad (3)$$

где a и b —две постоянные, которые еще нужно определить¹⁾. На ряду с этим выражением была дана аналогичная формула для энтропии

¹⁾ e — основание натуральных логарифмов.

излучения, в которую входили те же постоянные; для оправдания же этих допущений было вычислено изменение полной энтропии при обмене энергии, к которому относилось ранее найденное уравнение для $\frac{dU}{dt}$. Рассуждение, аналогичное тому, которым пользовался Болльцман при выводе своей Н-теоремы, показывало, что как для того случая, когда $\frac{dU}{dt}$ положительно, так и когда оно отрицательно, т.е. для переходов энергии любого направления полная энтропия системы **увеличивается**. Она достигает максимума, когда устанавливается равновесное состояние, определяемое обращением в нуль $\frac{dU}{dt}$.

После этого оправдания выражений, принятых для энтропии, можно было сделать дальнейший шаг, который состоял в том, что принцип энтропии был применен к обмену энергии между двумя резонаторами различного числа колебаний. В противоположность ранее рассмотренному взаимодействию между резонатором и излучением, при котором всякий раз приходилось иметь дело лишь с одной частотой, последний обмен, который нужно себе представить для того, чтобы получить соотношение между энергиями, соответствующими различным частотам, — следует рассматривать как виртуальное изменение системы. Можно себе представить, впрочем, что этот обмен совершается при посредстве какой-либо материи. Всем известны „угольные пылинки“ Планка, которыми он часто пользовался при рассмотрении аналогичных вопросов.

Результат новых соображений состоял в том, что для двух вибраторов с произвольными числами колебаний при равновесии выражение

$$\frac{dS}{dU}$$

должно иметь одинаковую величину. Естественно отожествить его с обратной величиной абсолютной температуры, и дальнейший метод **состоит** в том, что к резонаторам применяется известное термодинамическое соотношение

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}. \quad (4)$$

Если подставить для S значение (3), то получится значение энергии резонатора в зависимости от T и λ , и далее, из (1) — функция излучения:

$$u = \frac{8\pi b c}{\lambda^5} e^{-\frac{ac}{T}}. \quad (4)$$

Наконец, сравнение с наблюдениями дает величины постоянных a и b . Результат в точности соответствует вышенназванному закону

излучения Вина, приблизительная справедливость которого как раз в то время была показана дальнейшими работами Пашена, а также Луммера и Прингсгейма.

Однако Планк остался недоволен своим выводом. Потребность освободиться от произвола в формулах для энтропии не давала ему покоя, и в статье, опубликованной в апреле 1900 года в *Annalen der Physik*: „*Entropie und Temperatur strahlender Wärme*“ он снова возвращается к этой проблеме. При этом он опять - таки начинает с вычисления изменения энтропии, которое сопровождает обмен энергии между колебателем и полем излучения, и пользуется при этом своей прежней формулой. На этот раз, однако, не было сделано никакого определенного допущения относительно соотношения между U и S . Результат получился следующий: если энергия резонатора отличается на величину ΔU от того значения U , которое она должна иметь при равновесии, и если его энергия при взаимодействии изменяется на dU , то изменение полной энтропии системы, которое должно быть положительным, будет:

$$dU \cdot \Delta U \cdot \frac{3}{5} \frac{d^2S}{dU^2}.$$

Очевидно, устойчивость равновесия требует того, чтобы dU и ΔU имели противоположные знаки; энергия резонатора должна вследствие взаимодействия уменьшаться, если первоначально она была больше, нежели это соответствует равновесному состоянию. Таким образом Планк полагает:

$$\frac{3}{5} \frac{d^2S}{dU^2} = -f(U), \quad (5)$$

где f есть положительная функция U , и в соответствии с этим пишет для увеличения энтропии

$$-dU \cdot \Delta U f(U). \quad (6)$$

Результат показывает, что если опираться только на закон увеличения энтропии, то для S можно принять весьма различные функции U . Чтобы получить определенную формулу излучения, необходимо поэтому ввести дальнейшее ограничивающее условие, которое Планк полагал получить следующим образом.

Пусть система содержит большое число N резонаторов, которые все обладают одинаковыми свойствами и все постоянно находятся в одном и том же состоянии движения. Если для каждого отдельного резонатора значение энергии при равновесии будет U , отклонение от этой величины ΔU и изменение, происходящее в короткий промежуток времени dU , то соответствующие величины для всей группы будут:

$$U_N = NU, \quad \Delta U_N = N\Delta U, \quad dU_N = NdU.$$

Так как процессы, которые разыгрываются в различных вибраторах, можно рассматривать как независимые друг от друга, то изменение энтропии системы будет в N раз больше, нежели для отдельного вибратора. С другой стороны, рассуждения, которые привели к выражению (6), могут быть применены к N резонаторам. Поэтому должно быть справедливо уравнение

$$dU_N \Delta U_N f(U_N) = N dU \Delta U f(U), \quad (7)$$

т.е.

$$N f(U_N) = f(U)$$

или

$$NU f(UN) = U f(U).$$

Это показывает, что функция $U f(U)$ при изменении аргумента остается постоянной, а потому

$$f(U) = Const$$

или согласно уравнению (5)

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{\alpha}{U},$$

где положительная постоянная α может зависеть еще только от числа колебаний.

Отсюда следует:

$$S = -\alpha U \log(\beta U),$$

где вторая постоянная β также зависит от ν . Так как из закона смещения Вина следует, что S может зависеть только от $\frac{U}{\nu}$, то с необходимостью получается формула (3), а вместе с тем закон излучения Вина.

Таким образом получалось впечатление, что теоретическим путем можно притти только к этому последнему. Однако, когда в ближайшие месяцы измерения Рубенса и Курльбаума вне всякого сомнения показали неприменимость формулы Вина, и различными исследователями были предложены водоизменения ее, Планк также взял под сомнение свое доказательство. Поэтому и он сделал попытку усовершенствовать формулу и, как оказалось впоследствии, попытку весьма удачную. В сообщении, доложенном 19 октября 1900 г. в Физическом Обществе „Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung“, где Планк исходит из соотношения, обозначенного выше (7), мы читаем:

„В функциональном уравнении выражение в правой части, вне всякого сомнения, представляет собою названное изменение энтропии, так как происходит совершенно независимо друг от друга N в точности одинаковых процессов, изменение энтропии в которых просто

складываются. Однакоже я пришел к выводу, хотя и не легко воспринимаемому и во всяком случае трудно доказуемому, что выражение слева, вообще говоря, не имеет значения, которое я ему приписывал раньше. Другими словами, что значения U_N , dU и ΔN_N совершенно недостаточны для того, чтобы определить искомое изменение энтропии, но что для этого нужно знать также и самое U . Следуя этой мысли, я пришел в конце концов к построению совершенно произвольных выражений для энтропии, которые, хотя и сложнее выражения Вина, однако, в той же степени отвечают всем требованиям термодинамической и электромагнитной теории, как и последнее.

Среди построенных таким образом выражений меня особенно удивило одно, которое по простоте является следующим за выражением Вина, и так как последнее недостаточно для того, чтобы представлять все наблюдения, то упомянутое выражение заслуживало быть проверенным детально. Из этого выражения получается

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta+U)}.$$

Это выражение является самым простым среди всех выражений, дающих S как логарифмическую функцию U (к чему приводит теория вероятностей); для малых значений U оно переходит в выражение Вина“.

Так как по закону смещения S есть функция $\frac{U}{\gamma}$ и, следовательно, ее вторая производная имеет форму $\frac{1}{\gamma^2} F\left(\frac{U}{\gamma}\right)$, то β необходимо должно быть пропорционально числу колебаний ν , а постоянная α [которая согласно (5) отрицательна] — пропорциональна квадрату ν . Принимая это во внимание, Планк приходит к формуле с двумя постоянными

$$u = \frac{\varepsilon \lambda^{-5}}{e^{\frac{\lambda T}{k}} - 1}.$$

Вместе с тем он и получил свою знаменитую формулу лучистой энергии. Правда, полный вывод ее из общих принципов еще не был дан, но прошло всего несколько недель и Планк уже мог сообщить этот вывод. В изложении, которое Планк дал своей теории, он прежде всего формулирует вновь, но теперь уже с большей решительностью, возражение против вывода закона Вина. „Необходимо прежде всего в ряду заключений, которые ведут к закону распределения энергии Вина, найти звено, которое допускает изменения; далее, нужно это звено удалить из цепи и найти другое взамен него“.

Этот слабый пункт, при новом испытании, он находит в положении, лежащем в основе уравнения (7): „При бесконечно малом

необратимом изменении, находящейся почти в термическом равновесии системы N одинаковых резонаторов, помещенных в одно и то же стационарное поле излучения, увеличение их полной энтропии $S_N = NS$ зависит лишь от их полной энергии $U_N = NU$ и ее изменений, а не от энергии U отдельных резонаторов“.

В самом деле, как говорит Планк, энтропия предполагает „беспорядок“, а потому именно, неодинаковость отдельных значений энергии должна играть существенную роль. Следуя, далее, этим путем, он переходит к вычислению энтропии резонаторов и при этом пользуется принципом Болльца на, согласно которому энтропия системы в определенном состоянии обусловлена „вероятностью“ W этого состояния, с которой она связана формулой

$$S = k \log W.$$

Таким образом необходимо найти вероятность того, что N резонаторов вместе обладают энергией колебания U_N . „Для этого необходимо (в этом положении и заключается ядро теории квантов) представлять себе U_N не как непрерывную, неограниченно делимую величину, но как величину дискретную, состоящую из целого числа конечных, равных между собою частей. Если мы назовем одну такую часть, элемент энергии через ϵ , то вместе с тем получим

$$U_N = P\epsilon,$$

где P есть целое, вообще говоря, большое число, между тем как вопрос о величине ϵ мы пока оставляем открытым“.

Планк вычисляет далее число способов, какими можно осуществить распределение P элементов энергии на N резонаторов, число „комплексионов“, как он их назвал, пользуясь термином Болльца на. Из теории сочетаний для этого числа получается

$$\mathfrak{N} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)! P!}$$

или с приближением, достаточным для нашей цели

$$\mathfrak{N} = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P},$$

В основание дальнейшего вычисления кладется следующая гипотеза: „Вероятность W того, что N резонаторов в совокупности обладают энергией колебания U_N , пропорциональна числу \mathfrak{N} всех комплексионов, возможных при распределении энергии U_N на N резонаторов“. Следовательно:

$$\begin{aligned} S_N &= k \log \mathfrak{N} = \\ &= k \{ (N+P) \log (N+P) - N \log N - P \log P \} \end{aligned}$$

или, принимая во внимание формулу (8) и обозначая среднюю энергию резонатора $\frac{U_N}{N}$ через U и его энтропию $\frac{S_N}{N}$ через S получим:

$$S = k \left\{ \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \frac{U}{\varepsilon} \right\}. \quad (9)$$

Отсюда следует согласно (4) и (1)

$$U = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \quad (10)$$

и

$$U = \frac{8\pi\varepsilon}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \quad (11)$$

Наконец, снова используется закон распределения энергии. Из (9) видно непосредственно, что элемент энергии ε должен быть пропорционален числу колебаний u резонатора, следовательно,

$$\varepsilon = h\nu,$$

где h — вторая универсальная постоянная (наряду с k). Тогда формула для U преобразуется следующим образом:

$$\frac{8\pi h e}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{kT}} - 1}.$$

Это и есть окончательная форма закона Планка, о котором можно сказать, что его вывод навсегда останется одним из превосходнейших деяний в теоретической физике. Для того, чтобы правильно его оценить, мы не должны упускать из виду, что Планк легко мог сказать: так как само собою разумеется резонаторы могут отдавать или принимать энергию — сколь угодно малыми количествами, то действительности соответствует предельный случай, к которому мы приближаемся, глядя на элемент энергии непрерывно уменьшаться; при этом он вернулся бы к равномерному распределению энергии. Вместо этого ему пришла счастливая догадка рассматривать величину ε как конечную не только для цели вычисления, но и оставлять ее конечной. Не следует при этом забывать, что подобные счастливые догадки есть удел тех, которые заслужили его тяжелой работой и глубокими размышлениями.

Впрочем, теперь, когда мы уже имеем теорию, легко видеть, что гипотеза Планка как раз соответствовала той цели, которой она должна была служить. Простое рассуждение показывает, что конечная величина элемента энергии действительно вести к отклонению

от равномерного распределения, а именно, если ϵ возрастает вместе с ν , то эти отступления будут в том смысле, что большие частоты получат относительно меньшую энергию, нежели меньшие частоты. Можно, например, для получения формулы излучения поступать таким же образом, как Больцман при своем выводе Максвеллова распределения скоростей газовых молекул. Лотерея, в которой принимают участие как молекулы тела, так и заключающиеся в нем резонаторы различной частоты, должна решить вопрос о распределении данного количества энергии; при этом молекулы готовы принять сколь угодно малое количество энергии, резонаторы же, напротив, требуют конечных порций и при этом тем больших, чем больше их число колебаний. Легко понять, что при ограниченном запасе энергии те частицы, которые являются наиболее оживленными, в конце концов получат меньше всего. Таким образом, конечная величина элемента энергии, растущая с числом колебаний, делает менее действительными степени свободы с более высокими частотами. Если допустить, что интенсивность приходящихся на одну степень свободы упругих или квази-упругих сил все возрастает, то энергия, которую система получает в этих степенях свободы, становится все меньше. Таким образом, в конце концов мы приближаемся к предельному случаю неизменяемого, исключающего всякое движение, соединения.

К этим воспоминаниям о происхождении теории Планка да будет позволено присоединить беглый взгляд на ее плоды. Многочисленные старые и молодые физики во всех странах заняты ее развитием, и сам Планк непрерывно из года в год, даже при обстоятельствах, когда работа была для него тяжела, продолжает свои исследования. Его прежде всего интересует глубокое обоснование теории и отчетливое выяснение ее смысла. То обстоятельство, что учение об элементах энергии смогло преобразоваться в общую теорию квантов, надо приписать изумительной способности приспособления, которой обладает это учение. Пока приходилось иметь дело с простыми гармоническими колебаниями, первоначальное понятие об элементе энергии оказалось вполне достаточным. Впоследствии, когда научились „квантовать“ другие, полностью или условно-периодические, а иногда даже непериодические процессы, приходилось иметь дело со значениями „фазового интеграла“ или с величиною ограниченной области „фазового пространства“. Квантовые условия, написанные для таких случаев, состоят всегда в том, что соответствующая величина может иметь лишь значения, являющиеся целыми кратными некоторого единичного значения, и в это единичное значение всегда входит постоянная \hbar . Теперь мы пришли уже к тому, что эта постоянная должна определять не только интенсивность излучения и длину волны, при которой оно имеет максимум, но что она играет роль

во множестве других количественных соотношений. В сочетании с другими физическими величинами она определяет — чтобы назвать несколько примеров — удельную теплоту твердого тела, фотохимическое действие света, пути электронов в атоме, длину волны спектральных линий, частоту рентгеновых лучей, скорость, с которой могут вращаться газовые молекулы, и даже расстояния частиц, из которых слагается кристалл. Не будет преувеличением сказать, что в нашей картине мира квантовые условия есть то, что сдерживает материю и предохраняет ее от потери всей своей энергии путем излучения. А что во всех случаях дело идет о реальных соотношениях, — это убедительно следует из поразительного совпадения величин \hbar , вычисленных из различных явлений, — величин, которые, впрочем, мало отличаются от числа, полученного 25 лет назад Планком из опытных данных, бывших в то время в его распоряжении.

Что же касается связи со старой механикой, то особенно отрадно то обстоятельство, что — как показывает теория адиабатических инвариантов — именно те величины, которые определяются квантовыми условиями, сохраняют неизменными свои значения, при медленном изменении условий движения системы. Не случайно также, что связанный с этой теорией закон смещения можно привлечь для ближайшего определения элемента энергии.

Конечно, слияние новых идей с классической механикой и электродинамикой есть лишь мечта будущего, и мы еще далеки от такой квантовой механики, в основу которой была бы положена прерывность. Однако и в этом направлении сделаны уже многообещающие попытки.

Планк имел счастье, к радости всех, кто ценит и почитает его как ученого и человека, сохранивши полную творческую силу, быть свидетелем влияния своих идей. Да будет его уделом еще долгие годы радоваться успехам теории квантов.