Принцип аналогии Бора в теории квантов.

Ю. А. Крутков.

1. Когда *Планк* почти 21 год тому назад для получения формулы распределения энергии в спектре черного тела высказал свою *гипотезу квантов*, то ему не надо было нового предположения о частоте света, испускаемого его моделью материи. Эта модель была линейным вибратором; очевидно, что испускаемый ею свет имеет частоту, равную частоте собственных колебаний вибратора.

Свойства *Планкова* вибратора противоречили классической электродинамике, но все-же связь его с излучением мыслилась такой, как в старой „квазиупругой" оптике. Так, напр., поляризация испускаемого вибратором света, очевидно, должна была определяться направлением (и характером) его колебаний.

Бор принял за модель испускающей материи модель атома *Рёзерфорда*, снабдив ее квантовыми свойствами. *Планкова* гипотеза квантов приобрела у него такой вид: *атомная система принимает только определенный ряд состояний, коим соответствует разрывный ряд значений энергии; при всяком изменении энергии системы, включая сюда испускание и поглощение энергии, система переходит из одного из этих состояний в другое* [1]). Так как рассматриваемые системы отнюдь не совершают гармонического колебательного движения, то требуется еще одна гипотеза, а именно о частоте испускаемого моделью света. У *Бора*—это его *второе* правило: *излучение, испускаемое (или поглощаемое) при переходе из одного состояния в другое, монохроматично с частотой v, даваемой уравнением:*

$$E' - E'' = hv, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

где h — постоянная *Планка*, а E', E'' — энергии двух состояний.

Сперва казалось, что это второе правило, быть может, должно быть заменено другим, но вывод спектральной формулы *Планка*, данный *Эйнштейном* [2]), показывает с большой убедительностью, что оно должно быть сохранено.

Очевидно, что из правила, определяющего частоту из баланса энергии, нельзя извлечь ничего относительно поляризации и интенсивности испускаемого света. Интенсивность должна зависеть от числа атомов, находящихся в данном состоянии, и от вероятности

---

[1]) *N. Bohr.* On the Quantum-Theory of Line-Spectra I. Acad. Copenhague 8 série, t. IV, n° 1, fasc. 1 (1918).

[2]) *A. Einstein.* Verh. d. D. phys. Ges. 18, p. 318, (1916).

перехода из этого состояния в данное другое. О поляризации нельзя сказать ничего.

В 1918 году *Бор* дал *правило*, которое до некоторой степени устраняет этот пробел [1]).

2. Рассмотрим для простоты *систему с одной степенью свободы*. Если через q обозначить ее обобщенную координату, через p—соответствующий ей момент, то при некоторых общих предположениях о характере движения можем высказать гипотезу квантов для нашей системы так: система принимает ряд состояний, даваемых уравнением:

$$J = 2\int p\,dq = nh, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

где интеграл распространен на всю область изменения q, а n — целое число: *0, 1, 2, 3,* . . . . . ; J функция от энергии E рассматриваемого состояния; от E зависят пределы интеграла, а под интегралом — p; на пределах подинтегральная функция исчезает, поэтому

$$\frac{\partial J}{\partial E} = 2\int \frac{\partial p}{\partial E}\,dq;$$

но $\partial p/\partial E = 1/\dot{q}$; следовательно,

$$\frac{\partial J}{\partial E} = 2\int \frac{1}{\dot{q}}\,dq = 2\int dt = T,$$

где T—период движения. Обозначая через $\omega = \frac{1}{T}$ частоту движения, имеем

$$\frac{\partial E}{\partial J} = \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Рассматриваем переход между состояниями, даваемыми квантовыми числами n' и n''. По второму правилу *Бора* имеем:

$$\nu = \frac{1}{h}(E' - E'').$$

Пусть теперь n' n'' велики, а их разность $n' - n''$ мала по сравнению с n' и n''.

Тогда, пользуясь (3), можем вместо $E' - E''$ (приближенно) написать $\omega\ (J' - J'')$.

$$\nu = \frac{\omega}{h}(J' - J'').$$

Но $J = n'h$ и $J'' = n''h$, следовательно

$$\nu = \omega\ (n' - n'') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Итак, при больших n', n'' и малой разности $n' - n''$ система испускает согласно теории квантов частоту ω и ее обертоны.

Какие частоты испускает наша система по классической электродинамике?

---

[1]) N. Bohr l. c.

Проекцию ξ смещения системы на любое направление при тех предположениях о характере движения, о коих уже упоминалось, можно представить таким рядом *Фурье* [1]:

$$\xi = \Sigma\ C_\tau \cos 2\pi\ (\tau\omega t + c_\tau). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Таким образом система испускает по классической электродинамике частоту ω и ее обертоны $\tau\omega$.

Сравнение этого результата и формулы (4), в которой мы разности $n' - n''$ даем разнообразные значения, показывает, что для больших квантовых чисел и малой их разности квантовая теория и классическая электродинамика дают для испускаемой частоты ν совпадающие результаты. Но следует помнить, что процессы, при коих происходит испускание, по двум теориям различны: согласно электродинамике, все $\tau\omega$ испускаются одновременно, по теории квантов каждому $(n' - n'')\omega$ соответствует свой переход из состояния n' в состояние n''.

Согласно электродинамике коэфициенты („амплитуды") C_τ в разложении (5) определяют интенсивность различных линий испускаемого спектра. *Бор* предполагает, что для *больших n* эти коэфициенты измеряют вероятность для перехода из состояния $n = n'$ в соседнее состояние $n = n'' = n' - \tau$ $(n' - n'' = \tau)$; зная C_τ, можем заключать об интенсивности испускаемых линий.

Такое утверждение — можем называть его *принципом совпадения* — весьма естественно: для больших квантовых чисел все формулы теории квантов переходят в классические формулы.

Далее *Бор* предполагает, что и для *небольших* квантовых чисел знание „амплитуды" C_τ в разложении (5), соответствующей частоте $\tau\omega$, позволяет оценить вероятность перехода, для коего $n' - n'' = \tau$. Так, например, если для всех движений некоторое C_τ равно нулю, то следует утверждать, что нет перехода $n' - n'' = \tau$. Это *принцип аналогии* Бора.

Для *Планкова* линейного вибратора разложение (5) сводится к одному члену $\tau = 1$. Отсюда заключаем, что для него $n' - n''$ всегда равно единице: испускаемая частота равна его частоте ω.

3. Переходим к системе с s степенями свободы. Если система принадлежит к так называемым „условно-периодическим" [2], то (при отсутствии так называемых „соизмеримостей" между движениями) гипотеза квантов гласит:

$$J_k = 2 \int p_k\ dq_k = n_k h \quad (k = 1, 2, \ldots, s) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Энергия E система функция всех J_k. Нетрудно показать, что вместо (3) будем теперь иметь формулы

$$\frac{\partial E}{\partial J''_k} = \omega_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

---

[1] См. *Charlier*. Mechanik d. Himmels, I.

[2] l. c.

где ω_k „средние частоты“ колебаний отдельных степеней свободы.

Для ν имеем формулу (1). Положим снова, что все n'_k, n''_k велики и что разности $n'_k - n''_k$ малы по сравнению с этими числами. Тогда получаем, пользуясь (7):

$$\nu = \frac{1}{h}(E' - E'') = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{s} \omega_k (J'_k - J''_k) = \sum_{1}^{s} \omega_k (n'_k - n''_k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Система испускает частоты ω_k, обертоны $(n'_k - n''_k)\,\omega_k$ и комбинационные тоны $(n'_1 - n''_1)\,\omega_1 + (n'_2 - n''_2)\,\omega_2 + \ldots..$

Какие частоты система испускает по электродинамике? Можно показать, что „координаты“ q_k, а, следовательно, и смещение ξ в любом направлении, представляются s — кратным рядом *Фурье* [3]):

$$\xi = \Sigma .. \Sigma\, C_{\tau_1 \,.\,.\,.\, \tau_s} \cos 2\pi\, [(\tau_1\omega_1 + \;.\;.\;.\; + \tau_s\omega_s)\, t + c_{\tau_1 \,.\,.\,.\, \tau_s}]\,; \quad . \; (9)$$

испускаемый спектр имеет частоты $\tau_1\omega_1 + \;.\;.\;.\; + \tau_s\omega_s$.

Для больших квантовых чисел два спектра совпадают, для небольших *они совершенно различны.*

Коэффициенты $C_{\tau_1 \,.\,.\,.\, \tau_s}$ в разложении (9) определяют интенсивность и поляризацию света частоты $\tau_1\omega_1 + \cdots + \tau_s\omega_s$. *Бор* заключает, что в предельном случае больших n_k эти коэффициенты измеряют вероятности самопроизвольных переходов, для коих $n'_k - n''_k = \tau_k$, и далее переносит это правило и на случай конечных n_k.

На основании правила возможны разнообразные заключения. Напр., так как в разложении (9) τ принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$, то нужно допустить и такие переходы, при коих не все n_k убывают (в противность предположению *Зоммерфельда*), что подтверждается наблюдениями над явлением *Штарка* и над тонкой структурой водородных линий. Далее: если какой-либо коэффициент $C\tau_1 \;.\;.\;.\; \tau_s$ равен нулю для всех движений системы и любого направления, то переход $n'_k - n''_k = \tau_k$ $(k = 1,2, \;.\;.\;.\;, s)$ нужно считать невозможным. Если $C\tau_1 \;.\;.\;.\; \tau_s$ равно нулю только для смещения в определенном направлении, то переход $n'_k - n''_k = \tau_k$ $k = 1,2, \;.\;.\;.\;, s$ дает излучение, поляризованнное в плоскости, перпендикулярной к этому направлению.

4. Рассмотрим систему с *тремя степенями свободы*, для которой одна из „координат“ *циклична*. Пусть это, напр., угол. Тогда соответствующий момент количества движения — величина постоянная.

Берем за координаты этот угол ϑ, расстояние частицы от оси вращения ρ и z, отсчитываемое по оси вращения, т.-е. цилиндрические координаты.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} z &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum C_{\tau_1\tau_2} \cos 2\pi \left[(\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2)\, t + c_{\tau_1\tau_2}\right] \\ \rho &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum C'_{\tau_1\tau_2} \cos 2\pi \left[(\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2)\, t + c'_{\tau_1\tau_2}\right]; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

далее для ϑ легко получить

$$\pm\vartheta = 2\pi\omega_3 t + \Sigma\Sigma\, C'''_{\tau_1\tau_2} \cos 2\pi \left[(\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2)\, t + c''_{\tau_1\tau_2}\right], \quad \ldots \quad (10')$$

где ω_3—средняя частота вращения вокруг оси. Вводя вместо ρ,ϑ прямоугольные координаты x,y, легко получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum D_{\tau_1\tau_2} \cos 2\pi \left[(\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2 + \omega_3)\, t + \partial_{\tau_1\tau_2}\right] \\ y &= \rho\sin\vartheta = \pm\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum D_{\tau_1\tau_2} \sin 2\pi \left[(\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2 + \omega_3)\, t + \partial_{\tau_1\tau_2}\right] \end{aligned}\right\} . \quad (10'')$$

Мы видим, что согласно (10) и (10''), движение составлено из гармонических колебаний по оси z с частотами $|\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2|$ и из круговых движений перпендикулярно оси с частотами $|\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2 + \omega_3|$: излучение будет иметь составляющие поляризованные линейно и циркулярно.

По принципу аналогии нужно заключить, что n_3 может или оставаться постоянным; тогда при изменении n_1, n_2, на которое ограничений не налагается, излучение поляризовано линейно по оси z; или n_3 изменяется на ± 1, излучение поляризовано по кругу. Наблюдения над действием электрического и магнитного поля над атомом водорода эти заключения подтверждают. Заключение, что n_3 изменяется только на ± 1, получает еще подтверждение из закона сохранения суммы механического и электромагнитного количеств движения [1]).

Число примеров, выясняющих значение нового правила *Бора*, можно было бы и увеличить. Весьма замечательное применение к вопросу об интенсивностях спектральных линий водорода содержит мемуар *Крамерса* [2]); интенсивности линий ионизованного гелия (серия *Фоулера*) при явлении *Штарка* рассмотрел *Эпштейн* [3]). Правило *Бора*, оставаясь теоретически непонятным, дает превосходные совпадения с данными опыта.

---

[1]) См. N. Bohr l. c. и Rubinowicz. Phys. Zschr. 19, pp. 441, 465 (1918).

[2]) H. A. Kramers. Intensities of Spectral Lines. Acad. Copenhague. 8 série, t. III, nº 3 (1919).

[3]) P. Epstein. Ann. d. Phys. (IV), Bd. 58 (1919), p. 553.