

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О связи дрейфа Стокса и волны Герстнера

А.А. Абрашкин, Е.Н. Пелиновский

Обсуждаются свойства двумерных нелинейных потенциальных и завихренных волн на поверхности идеальной жидкости бесконечной глубины. Показано, что завихренность волны Герстнера в квадратичном приближении по амплитуде волны равна по модулю и противоположна по знаку завихренности дрейфового течения Стокса в поверхностном слое. Это позволяет интерпретировать классическую волну Стокса, получаемую в рамках потенциальной теории, как суперпозицию вихревой волны Герстнера и дрейфа Стокса. Предложена физическая интерпретация коэффициента нелинейности в уравнении Шредингера как доплеровского сдвига частоты на усреднённом по вертикали дрейфовом течении Стокса.

Ключевые слова: волны на воде, завихренность, дрейф Стокса, волна Герстнера, нелинейное уравнение Шредингера

PACS number: 47.35.Bb

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2017.03.038089>

Содержание

1. Введение (329).
 2. Дрейф Стокса (330).
 3. Волна Герстнера (331).
 4. Волна Стокса в лагранжевом описании (332).
 5. Нелинейное уравнение Шредингера для волны Герстнера (332).
 6. О физическом смысле коэффициента нелинейности в уравнении Шредингера (333).
 7. Заключение (334).
- Список литературы (334).

1. Введение

Гравитационные волны на воде — обязательная составляющая любого курса по теории нелинейных волновых процессов, истоки которой неразрывно связаны с первыми примерами определения формы профиля стационарных волн конечной амплитуды, бегущих вдоль поверхности тяжёлой жидкости. Волны Стокса и Герстнера — два классических примера волн на воде, имеющих разную физическую природу. Хотя волны Стокса более известны в физической литературе, мы начнём с волны Герстнера, представляющих собой точное решение уравнений вихревой гидродинамики [1]. Профилем стационарной герстнеровской волны является трохоида; частицы жидкости в волне движутся по окружностям, радиус которых экспоненциально убывает с увеличением глубины (рис. 1). При максимальной амплитуде профиль описывается циклоидой с особенностью при вершине (угол заострения равен нулю). Удивительно, что, несмотря на нелинейность, дисперсионное соотношение для волн Герстнера не включает в себя амплитуду волны и совпадает с линейным дисперсионным соотношением (мы всюду будем говорить о глубокой воде). Поскольку жидкие частицы движутся по окружности, дрейф жидких частиц в волне Герстнера отсутствует [1–3].

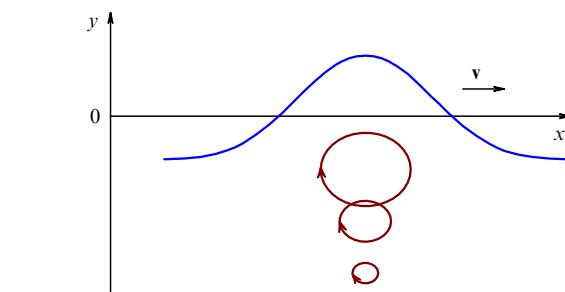


Рис. 1. Профиль волны Герстнера (верхняя кривая) и круговые траектории жидких частиц.

Волна Стокса является уже решением уравнений потенциального движения жидкости [4]. Такие волны существуют при амплитудах (точнее, крутизнах), меньших критического значения. Предельная волна Стокса имеет угол 120° при вершине. Нелинейность в волне Стокса проявляется в возникновении обертона и нелинейной поправке к дисперсионному соотношению. Стационарная волна Стокса неустойчива к плавным модуляциям её огибающей, и этот эффект хорошо объясняется в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), играющего фундаментальную роль в современной нелинейной физике [5–9]. Частицы жидкости в волне Стокса в линейном приближении также движутся по окружностям, радиусы которых экспоненциально убывают с возрастанием глубины, однако с увеличением амплитуды жидккая частица за один период смещается в направлении распространения волны (рис. 2). Усреднённое горизонтальное движение жидких частиц в потенциальной волне, получившее название дрейфа Стокса [2, 4], является сдвиговым по глубине и, следовательно, вихревым. Таким образом, хотя волна Стокса является потен-

А.А. Абрашкин. Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижегородский филиал, ул. Б. Печерская 25/12, 603155 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: aab rashkin@hse.ru

Е.Н. Пелиновский. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 20 февраля 2017 г.

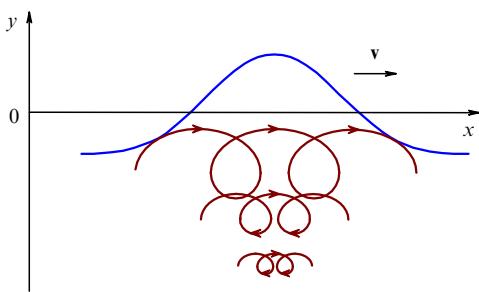


Рис. 2. Профиль волны Стокса (верхняя кривая) и незамкнутые траектории жидких частиц.

циальной, она вызывает в среднем вихревое сдвиговое течение. В то же время вихревая волна Герстнера в среднем такого течения не вызывает.

Связь этих трёх явлений обсуждается в настоящих методических заметках.

2. Дрейф Стокса

Напомним кратко, как находится дрейф Стокса в квадратичном приближении по крутизне волны. Выберем систему координат так, чтобы ось \$y\$ была направлена вертикально вверх, а горизонтальная ось \$x\$ лежала в плоскости невозмущённой поверхности жидкости, как показано на рис. 2. Уравнения двумерной гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, имеют вид

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \mathbf{g}, \quad (2)$$

где \$\mathbf{v}(x, y, t)\$ — вектор скорости, \$\nabla\$ — двумерный оператор градиента по декартовым координатам \$x, y\$, \$t\$ — время, \$p\$ — давление, \$\rho\$ — плотность, \$\mathbf{g}\$ — ускорение свободного падения. Уравнение (1) называются уравнением непрерывности, а (2) — уравнением движения или уравнением Эйлера [10]. Считая движение потенциальным, можно ввести потенциал течения \$\varphi(x, y, t)\$, так что \$\mathbf{v} = \nabla \varphi\$. Тогда уравнения (1), (2) преобразуются в следующие [2, 9, 11]:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + gy = 0. \quad (4)$$

Здесь \$p_0\$ — постоянное давление на свободной поверхности жидкости. Выражение (4) называется интегралом Коши–Лагранжа. Задача определения волн на поверхности жидкости, таким образом, сводится к решению уравнения Лапласа (3), удовлетворяющего условию постоянства давления на свободной, заранее неизвестной поверхности \$y = \eta(x, t)\$, которое следует из выражения (4). К нему следует добавить кинематическое граничное условие:

$$\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (5)$$

а также условие затухания возмущений с увеличением глубины:

$$\varphi \Big|_{y=-\infty} = 0. \quad (6)$$

Граничное условие для давления и кинематическое условие являются нелинейными и составляют основную трудность при аналитическом изучении волн на воде. Точ-

ных аналитических решений задачи (3)–(6) до сих пор не получено. Для решения этой задачи Стокс воспользовался методом последовательных приближений по малому параметру крутизны волны \$\varepsilon = kA\$, где \$k\$ — волновое число, \$A\$ — амплитуда волны. Решения, получаемые в рамках этого метода, получили название "стоксовы разложения".

С точностью включительно до квадрата малого параметра (крутизны волны) потенциал волнового движения \$\varphi(x, y, t)\$ и вертикальное смещение свободной поверхности \$y = \eta(x, t)\$ установившегося волнового движения выражаются следующим образом [2, 4]:

$$\varphi(x, y, t) = Ac \exp(ky) \sin[k(x - ct)], \quad (7)$$

$$\eta(x, t) - \frac{1}{2} kA^2 = A \cos[k(x - ct)] + \frac{1}{2} kA^2 \cos[2k(x - ct)]. \quad (8)$$

Это решение записано в лабораторной системе отсчёта, волна бежит вправо с линейной фазовой скоростью \$c = \sqrt{g/k}\$. Нелинейность приводит как к появлению второй гармоники (обертона), так и к смещению среднего уровня воды вверх от нулевой отметки (\$y = 0\$). Следуя [2], мы записываем это слагаемое в левой части.

Система (7), (8) описывает волну Стокса в эйлеровых переменных \$x, y\$. Из уравнения (7) следует, что эйлерово поле скорости \$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi\$, \$\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}\$, \$\mathbf{r} = \{x, y\}\$ имеет следующий вид:

$$v_x = kcA \exp(ky) \cos[k(x - ct)], \quad (9)$$

$$v_y = kcA \exp(ky) \sin[k(x - ct)].$$

Поле (9) является периодическим по времени, поэтому среднее за период значение компонент скорости будет равно нулю. При этом, однако, как установил ещё Стокс, сами жидкие частицы в среднем не остаются на месте, а смещаются в направлении распространения волны (дрейф Стокса). Рассмотрим это подробнее.

Обозначим через \$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t)\$ скорость элемента жидкости, имевшего в момент \$t = 0\$ координату \$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \{a, b\}\$, компоненты вектора \$\mathbf{r}_0\$ называются лагранжевыми координатами, а вектор \$\mathbf{v}_L\$ — лагранжевой скоростью. Положение элемента жидкости в последующие моменты времени определяется как

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t') dt'. \quad (10)$$

Эйлерова скорость \$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\$ в точке \$\mathbf{r}\$, задаваемой соотношением (10), равна лагранжевой скорости \$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t)\$, т.е. скорости частицы, пришедшей в точку \$\mathbf{r}\$ в момент \$t\$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t) &= \mathbf{v}\left(\mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t') dt', t\right) = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) + \left(\int_0^t \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t') dt'\right) \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь использовано разложение в ряд Тейлора, \$\nabla_{\mathbf{r}_0}\$ обозначает оператор градиента по компонентам вектора \$\mathbf{r}_0\$. Поскольку рассматриваются малые (порядка \$\varepsilon\$) скорости, второе слагаемое в правой части (10) будет порядка \$\varepsilon^2\$. Это означает, что лагранжевые и эйлеровы скорости с точностью до членов первого порядка малости совпадают:

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon), \quad (12)$$

так же как и эйлеровы и лагранжевы переменные: \$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + O(\varepsilon)\$. Заменяя в выражениях (9) эйлеровы коорди-

ната лагранжевыми и интегрируя (9) по времени, получим представление траекторий жидких частиц в линейном приближении [10]:

$$\begin{aligned} x &= a - A \exp(kb) \sin[k(a - ct)], \\ y &= b + A \exp(kb) \cos[k(a - ct)], \end{aligned} \quad (13)$$

т.е. частицы жидкости описывают в линейных гравитационных волнах окружности вокруг точек $x_0 = a$, $y_0 = b$ с радиусом, экспоненциально убывающим в глубь жидкости.

А что будет в квадратичном приближении? Подставляя выражение (12) в интеграл правой части (11), получим, что с точностью до второго порядка (в смысле разложения Стокса) лагранжева скорость определяется соотношением (см. также [12])

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) + \left(\int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t') dt' \right) \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t). \quad (14)$$

Для её вычисления надо опять заменить в представлении поля скорости (9) эйлеровы координаты лагранжевыми и подставить в равенство (14). Нас, однако, интересует не общее выражение для скорости, а лишь её усреднённое за период значение. Проводя необходимые вычисления и усредняя полученное выражение, получим

$$\langle \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t) \rangle = c(kA)^2 \exp(2kb) \mathbf{i} = U_S(b) \mathbf{i}, \quad (15)$$

здесь угловые скобки означают усреднение по периоду волны, \mathbf{i} — единичный вектор в положительном горизонтальном направлении. Жидкие частицы, помимо того что они участвуют в колебательном движении, дрейфуют в направлении распространения волны со скоростью $U_S(b) = c(kA)^2 \exp(2kb)$. Такое плоскопараллельное течение получило название дрейфа Стокса. В эйлеровых переменных с учётом соотношения (10) оно записывается так:

$$U_S(y) = c(kA)^2 \exp(2ky). \quad (16)$$

Течения (15), (16) являются сдвиговыми и, следовательно, обладают завихренностью. Но как тогда объяснить, что составной частью потенциальной волны Стокса является вихревой поток? Удивительно, но ни один из авторов, затрагивавших тему дрейфа Стокса, не комментировал этот факт. Обошёл его и сам Дж.Г. Стокс. Нам, однако, представляется, что данный методический вопрос нуждается в подробном анализе. Чтобы ответить на него, обратимся к другому волновому движению жидкости, фигурирующему в названии статьи.

3. Волна Герстнера

Решение для этой волны было получено чешским учёным Францем Иозефом фон Герстнером в 1804 г. В отличие от волны Стокса, волна Герстнера представляет собой точное решение уравнений гидродинамики (мы приведём его ниже). Оно уникально, поскольку является единственным найденным точным решением полной системы уравнений гидродинамики для стационарных гравитационных волн на глубокой воде. Это решение менее известно, поскольку записывается в лагранжевых координатах, которые используются в гидродинамических задачах крайне редко, так как содержат более сложный вид нелинейности по сравнению с уравнениями в эйлеровой форме. Например, в фундаментальном курсе *Гидродинамики* Ландау и Либница [10] уравнения гидродинамики в форме Лагранжа вообще не приводятся. Соответственно, нет там упоминаний про волну Герстнера и дрейф Стокса.

Уравнения двумерной гидродинамики в лагранжевых переменных имеют следующий вид [2, 3, 13, 14]:

$$\frac{D(X, Y)}{D(a, b)} = [X, Y] = 1, \quad (17)$$

$$X_{tt} X_a + (Y_{tt} + g) Y_a = -\frac{1}{\rho} p_a, \quad (18)$$

$$X_{tt} X_b + (Y_{tt} + g) Y_b = -\frac{1}{\rho} p_b, \quad (19)$$

здесь $X(a, b, t)$, $Y(a, b, t)$ — координаты траектории жидкой частицы с лагранжевыми координатами a , b , нижние индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной. Ось b направлена вверх, и $b = 0$ соответствует свободной поверхности. Квадратные скобки обозначают якобиан. В системе уравнений (17)–(19) первое является уравнением непрерывности, а два других представляют собой уравнения движения.

Используя перекрёстное дифференцирование, исключим давление из уравнений (18), (19) [2, 14]:

$$X_{ta} X_b - X_{tb} X_a + Y_{ta} Y_b - Y_{tb} Y_a = \Omega(a, b). \quad (20)$$

Уравнение (20) эквивалентно уравнениям движения жидкости (18), (19), но оно включает в себя в явном виде завихренность жидких частиц Ω , которая в случае двумерных течений является функцией только лагранжевых координат.

Герстнеру удалось указать точное решение уравнений (17), (20). Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что им удовлетворяет следующая пара соотношений:

$$\begin{aligned} X &= a - A \exp(kb) \sin[k(a - ct)], \\ Y &= b + A \exp(kb) \cos[k(a - ct)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Герстнеровское решение имеет в точности такой же вид, как и решение для линейной потенциальной волны (13). Дисперсионное уравнение для волны Герстнера $\omega = \sqrt{gk}$ совпадает с дисперсионным уравнением для линейных волн. Подчеркнём, что оно не зависит от амплитуды волны. Жидкие частицы в волне Герстнера тоже движутся по окружности. Но только значение амплитуды для волны Герстнера представляет собой уже не малую, а конечную величину. Профилем герстнеровской волны является трохоида. При значении $A = k^{-1}$ (пределная величина амплитуды) волна имеет заострение в вершине, а её форма описывается циклоидой. Угол при вершине предельной волны Герстнера равен нулю [2, 3].

У волны Герстнера есть ещё одно важное отличительное свойство: она обладает завихренностью, которая определяется равенством

$$\Omega_G = \frac{2k^3 A^2 c \exp(2kb)}{1 - k^2 A^2 \exp(2kb)}. \quad (22)$$

Разложим завихренность (22) в ряд по малому параметру kA :

$$\begin{aligned} \Omega_G &= 2k^3 A^2 c \exp(2kb) [1 + k^2 A^2 \exp(2kb) + \dots] = \\ &= \Omega_{G2} + O((kA)^4). \end{aligned} \quad (23)$$

Из выражения (23) видно, что в линейном приближении волна Герстнера не обладает завихренностью и, следовательно, она полностью эквивалентна линейной потенциальной волне. Завихренность у волны Герстнера появляется только в квадратичном приближении. Или сформулируем

это по-другому: слабое круговое движение жидких частиц порождает завихренность только во втором порядке по малому параметру крутизны волны.

4. Волна Стокса в лагранжевом описании

Вернёмся теперь к вопросу, поставленному в конце раздела 2. Каким образом внутри потенциальной волны Стокса может существовать сдвиговое вихревое течение? Согласно теореме Лагранжа завихренность в идеальной однородной несжимаемой жидкости, находящейся под действием потенциальных сил, возникнуть не может. В рассматриваемой задаче о волнах на воде все условия этой теоремы выполнены. Значит, и в каждом из приближений суммарная завихренность течения должна обращаться в нуль. Эйлерова запись (7), (8) волны Стокса в квадратичном приближении не позволяет ясно продемонстрировать это. Но совсем другое дело, если использовать лагранжеву форму записи.

В лагранжевых переменных решение, полученное Стоксом для поверхностной гравитационной волны на глубокой воде, можно выразить так [2, 15]:

$$\begin{aligned} X &= a - \varepsilon k^{-1} \exp(kb) \sin[k(a - ct)] + \varepsilon^2 ct \exp(2kb), \\ Y &= b + \varepsilon k^{-1} \exp(kb) \cos[k(a - ct)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Движение жидких частиц, описываемое системой (24), представляет собой сумму колебательной и дрейфовой составляющих. Если выбрать достаточно малое значение амплитуды волны Герстнера, то колебательные движения жидких частиц в выражениях (21) и (24) будут совпадать. Различие между волной Стокса и волной Герстнера в квадратичном приближении, таким образом, связано с наличием дрейфового слагаемого в потенциальной волне (дрейфа Стокса). Завихренность волны Герстнера в этом приближении равна величине Ω_{G2} (см. формулу (23)), а завихренность дрейфа Стокса определяется как

$$\Omega_S = -\frac{dU_S}{db} = -2k\varepsilon^2 \exp(2kb) = -\Omega_{G2},$$

т.е. общая завихренность волны Стокса, как и положено, равна нулю.

Это можно интерпретировать следующим образом. Движение жидких частиц в волне Стокса состоит изложения двух потоков: вращательного по окружности ("герстнеровского") и сдвигового (дрейфа Стокса). Каждый из этих потоков обладает завихренностью, но их суммарная завихренность равна нулю.

Решение (24) было получено Стоксом [4], однако ни сам Стокс, ни другие исследователи, воспроизведившие его результат, не соотносили колебательную часть решения с волной Герстнера. В символическом виде результат Стокса можно записать так:

$$\text{Волна Стокса} = \text{волна Герстнера} + \text{дрейф Стокса}. \quad (25)$$

Данный результат, несмотря на всю его очевидность, в явном виде не формулировался в литературе. По всей видимости, это связано с тем, что решение для потенциала волны Стокса, как правило, записывается в эйлеровых переменных. Представление решения Стокса в лагранжевых координатах (24), напротив, выясняет нашу символическую формулу (25). Подчеркнём, во-первых, её неочевидность, а во-вторых, нетривиальность: в нелинейном приближении работает принцип суперпозиции течений.

Итак, между волнами Стокса, Герстнера и дрейфом Стокса имеется тесная связь. Но, как оказывается, одним этим примером она не исчерпывается. Неожиданно для авторов она нашла проявление также в задаче о модуляционной неустойчивости волны Герстнера.

5. Нелинейное уравнение Шрёдингера для волны Герстнера

Рассмотрим распространение пакета гравитационных поверхностных волн в жидкости неограниченной глубины. Поскольку нам интересен случай волны Герстнера, будем считать, что распространяющаяся волна обладает слабой (порядка квадрата крутизны) завихренностью.

Воспользуемся переменными Лагранжа. Введём комплексную координату траектории жидкой частицы $W = X + iY$ ($\bar{W} = X - iY$), черта — знак комплексного сопряжения. В новых переменных уравнения (17) и (20) примут следующий вид [14, 16, 17]:

$$[W, \bar{W}] = -2i, \quad (26)$$

$$\operatorname{Re}[W_t, \bar{W}] = \Omega(a, b), \quad (27)$$

а система уравнений (18), (19) после несложных алгебраических преобразований сведётся к одному уравнению:

$$W_{tt} = -ig + ip^{-1}[p, W]. \quad (28)$$

В дальнейшем уравнения (26), (27) будут использоваться для нахождения комплексной координаты траекторий жидких частиц, а уравнение (28) — для определения давления в жидкости. Граничными условиями выступают условия непротекания на дне ($Y_1 \rightarrow 0$ при $b \rightarrow -\infty$) и постоянства давления на свободной поверхности (при $b = 0$).

Воспользуемся методом многих масштабов. Функцию W представим так:

$$W = a_0 + ib + w(a_l, b, t_l), \quad a_l = \varepsilon^l a, \quad t_l = \varepsilon^l t, \quad l = 0, 1, 2, \quad (29)$$

где ε — малый параметр крутизны волны. Представим неизвестные функции p и w в виде ряда по этому параметру:

$$w = \sum_{n=1} \varepsilon^n w_n, \quad p = p_0 - \rho g b + \sum_{n=1} \varepsilon^n p_n. \quad (30)$$

В выражении для давления выделен отдельно член с гидростатическим давлением, p_0 — постоянное атмосферное давление на поверхности жидкости, которое сразу можно положить равным нулю. Завихренность Ω будем полагать квадратичной по параметру крутизны, как в волне Герстнера:

$$\Omega = \varepsilon^2 \Omega_2(a, b). \quad (31)$$

Конкретный вид функции Ω_2 , соответствующий волне Герстнера, имеет смысл указать позднее, когда уже будет получено эволюционное уравнение третьего порядка.

Подставим представления (29)–(31) в уравнения (26)–(28). В первом приближении решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w_1 &= A(a_1, a_2, t_1, t_2) \exp[i(ka_0 - \omega t_0) + kb] + \\ &+ \psi_1(a_1, a_2, b, t_1, t_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь и далее A — комплексная амплитуда волны, бегущей вправо. Функция ψ_1 — действительная, и её вид определяется при рассмотрении следующего приближения. Выражение (32) описывает волновое движение в лабораторной

системе отсчёта. Как и для стационарной потенциальной волны (24), оно состоит из колебательного движения жидких частиц по окружности и среднего течения.

Мы не будем приводить подробного хода выкладок, а ограничимся указанием основных результатов в высших приближениях. Из решений второго приближения следуют два уравнения:

$$A_{t_1} + c_g A_{a_1} = 0, \quad (33)$$

$$\psi_{1t_1} = k\omega|A|^2 \exp(2kb) - \int_{-\infty}^b \Omega_2(a_1, b') db', \quad (34)$$

здесь $c_g = g/(2\omega)$ — групповая скорость линейных гравитационных волн. Заметим, что первое слагаемое в уравнении (34) совпадает с выражением для дрейфа Стокса. Используя уравнения (33), (34), в третьем приближении приходим к следующему эволюционному уравнению:

$$i \frac{\partial A}{\partial t_2} - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial a_1^2} - 2k^2 A \int_{-\infty}^0 \psi_{1t_1} \exp(2kb) db = 0, \quad (35)$$

записанному в системе отсчёта, движущейся с групповой скоростью c_g .

Система (34), (35) представляет модифицированное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для слабозавихренных волн, которое в общем случае требует специального исследования. Мы ограничимся его анализом применительно к волне Герстнера.

В представлении (29), (30) функция w_1 для волны Герстнера описывается выражениями, аналогичными соотношениям (21), только амплитуду A необходимо домножить на параметр ε . Используя формулу для завихренности (27), найдём, что для волны Герстнера

$$\Omega_2 = 2k^2\omega|A|^2 \exp(2kb) = \Omega_{G2}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (34), получим, что $\psi_{1t_1} = 0$. Эффективное сдвиговое течение, связанное с завихренностью герстнеровской волны (второе слагаемое в правой части уравнения (34)), в точности компенсирует стоксов дрейф. Пакет слабонелинейных волн Герстнера, таким образом, в этом приближении не испытывает действия нелинейности, и эффект модуляционной неустойчивости для неё отсутствует.

Это второй аспект связи волны Герстнера с дрейфом Стокса, касающийся уже НУШ.

6. О физическом смысле коэффициента нелинейности в уравнении Шредингера

В случае $\Omega_2 = 0$ уравнение (35) переходит в классическое НУШ для потенциальных волн:

$$i \frac{\partial A}{\partial t_2} - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial a_1^2} - \frac{1}{2} \omega k^2 |A|^2 A = 0. \quad (36)$$

Для потенциальных волн на глубокой воде это уравнение впервые вывел Захаров, используя гамильтоновский формализм [5] (см. также [16]). Тот же результат независимо получили Хасимото и Оно [17] и Дэви [18] с помощью метода многомасштабных разложений, а Юэн и Лэйк — на основе метода усреднённого лагранжиана [19]. Здесь мы указали путь вывода НУШ в лагранжевых координатах.

Для того чтобы записать уравнение (36) в эйлеровых координатах, необходимо выразить горизонтальную лагранжеву координату a через горизонтальную эйлерову координату X . Поскольку из соотношений (29), (30) сле-

дует, что

$$X = a + \varepsilon \operatorname{Re} \left(w_1 + \sum_{n=2} \varepsilon^{n-1} w_n \right) = a + O(\varepsilon),$$

для перехода к эйлеровой форме записи следует просто заменить лагранжеву координату соответствующей эйлеровой переменной ($a \rightarrow X$). Очевидно, что справедлива и обратная замена координат, поэтому все известные решения НУШ в эйлеровых переменных аналогично записываются и в лагранжевых.

При выводе НУШ в разделе 5 отмечалось, что первое слагаемое в уравнении (34) совпадает с выражением для дрейфа Стокса, только амплитуда A в нём уже является переменной величиной. В случае нулевой завихренности волн ($\Omega_2 = 0$) только оно определяет вид функции ψ_{1t_1} , а значит, и коэффициент нелинейности в НУШ (см. уравнение (35)). Вывод НУШ, как правило, даётся формально, и представляется важным указать на связь одного из его членов с дрейфом Стокса. В литературе, посвящённой волнам на воде, этот момент, насколько нам известно, до сих пор не отмечался.

Очень популярным в физике является эвристический вывод НУШ на основе нелинейного дисперсионного уравнения для волны Стокса. Напомним его. Нелинейное дисперсионное соотношение для волны Стокса получается в стоксовом разложении третьего порядка и имеет следующий вид [2, 4, 9]:

$$\omega = \sqrt{gk} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 A^2 \right). \quad (37)$$

Для узкого волнового пакета можно также разложить (37) в окрестности постоянного значения k_0 , сохраняя члены второго порядка по возмущениям волнового числа и нелинейности. Тогда возмущения волнового числа k' и частоты ω' удовлетворяют уравнению

$$\omega' - \frac{\omega_0}{2k_0} k' + \frac{\omega_0}{8k_0^2} k'^2 - \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 A^2 = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{gk}. \quad (38)$$

Рассматривая частоту и волновое число в (38) как операторы в соответствии с

$$-i\omega' \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad ik' \rightarrow \frac{\partial}{\partial x},$$

получаем нелинейное уравнение Шредингера [20–23]

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + c_g \frac{\partial A}{\partial X} \right) - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \omega k^2 |A|^2 A = 0.$$

Последнее уравнение аналогично уравнению (36), если записать его в системе отсчёта, движущейся с групповой скоростью вправо, и сделать замену

$$A \rightarrow \frac{A}{\varepsilon}, \quad t_2 \rightarrow \varepsilon^2 t, \quad a_1 \rightarrow \varepsilon X.$$

Данный эвристический вывод явно указывает, что коэффициент нелинейности в НУШ совпадает с нелинейной поправкой к дисперсионному уравнению для линейных волн. Этот вывод хорошо известен, но воспроизводится здесь для полноты изложения.

Представим дисперсионное уравнение (37) в несколько другом виде:

$$\omega - ku = \omega_0, \quad (39)$$

здесь введена величина $u = \omega_0 k A^2 / 2$, соответствующая нелинейной поправке к фазовой скорости. Из формулы (39) следует, что её можно интерпретировать как поверхностное

течение, обеспечивающее доплеровский сдвиг частоты. Эта скорость удовлетворяет соотношениям

$$u = k \int_{-\infty}^0 U_S(y) dy = k \int_{-\infty}^0 U_S(b) db,$$

и имеет смысл объёмного горизонтального расхода через поперечную площадку единичной длины, умноженного на k . Учитывая, что величина дрейфовой скорости убывает экспоненциально с возрастанием глубины и является существенной лишь в приповерхностном слое толщиной порядка длины волны, можно говорить, что она приближённо равна усреднённой по вертикали скорости дрейфа Стокса.

Напомним в связи с этим, что в волне Герстнера отсутствует дрейфовое движение жидких частиц ($u = 0$), и её дисперсионное уравнение совпадает с дисперсионным уравнением линейных потенциальных волн. Поэтому, следуя эвристическому приёму записи НУШ на основании только дисперсионного уравнения, можно было бы сразу же сказать, что нелинейности в нём не будет. Однако причина этого оставалась бы неясной. Более того, указать её, не записывая НУШ для слабозавихренных волн в лагранжевых переменных, как нам представляется, было бы крайне сложно.

7. Заключение

Настоящая статья посвящена анализу классических примеров волн на глубокой воде. Обращается внимание на то, что в лагранжевом описании решение для потенциальной волны Стокса в квадратичном приближении представляется как наложение двух течений: вихревой волны Герстнера и дрейфа (сдвигового течения) Стокса. Завихренности этих течений одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Выяснено, что этим же обстоятельством объясняется и отсутствие нелинейного члена в нелинейном уравнении Шрёдингера для волны Герстнера. Доказательство основано на выводе НУШ для слабозавихренных волн в лагранжевых переменных. Показано, что коэффициент нелинейности в НУШ для потенциальных волн совпадает по величине с усреднённым по вертикали дрейфом Стокса.

Авторы выражают благодарность С.Н. Власову за полезные обсуждения.

Работа Е.Н.П. осуществлялась в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 5.5176.2017/8.9) и при финансовой поддержке грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-2685.2018.5.

On the relation between Stokes drift and the Gerstner wave

A.A. Abrashkin⁽¹⁾, E.N. Pelinovsky⁽²⁾

⁽¹⁾ National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod Branch,
ul. B. Pecherskaya 25/12, 603155 Nizhny Novgorod, Russian Federation

⁽²⁾ Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: ⁽¹⁾aab rashkin@hse.ru, ⁽²⁾pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

This paper discusses the properties of two-dimensional, nonlinear, potential and vortex waves on the surface of an ideal liquid of infinite depth. It is shown that to quadratic order in the amplitude, the vorticity of the Gerstner wave is equal in magnitude and different in sign to that of the Stokes drift current in a surface layer. This allows a classic Stokes wave obtained in the framework of potential theory to be interpreted as a superposition of the Gerstner wave and Stokes drift. It is proposed that the nonlinearity coefficient in the nonlinear Shrödinger equation can be physically interpreted as the Doppler frequency shift over the vertically averaged Stokes drift current.

Keywords: waves on the water, vorticity, Stokes drift, Gerstner wave, nonlinear Shrödinger equation

PACS number: 47.35.Bb

Bibliography — 23 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **188** (3) 329–334 (2018)
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038089>

Список литературы

1. Gerstner F J *Theorie der Wellen* (Prague: Gottlieb Haase, 1804); *Ann. Physik* **32** 412 (1809)
2. Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932); Пер. на русск. яз.: Ламб Г *Гидродинамика* (М.-Л.: Гостехиздат, 1947)
3. Коchin Н Е, Кибель И А, Розе Н В *Теоретическая гидромеханика* Ч. 1 (М.: Физматлит, 1963); Пер. на англ. яз.: Kochin N E, Kibel' I A, Roze N V *Theoretical Hydromechanics* (New York: Interscience Publ., 1964)
4. Stokes G G *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **8** 441 (1847); *Mathematics and Physics Papers* Vol. 1 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1880) p. 197
5. Захаров В Е *Журн. приклад. мех. физ.* **9** (2) 86 (1968); Zakharov V E *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9** 190 (1968)
6. Benney D J, Newell A C *J. Math. Phys.* **46** 133 (1968)
7. Захаров В Е, Манаков С В, Новиков С П, Питаевский Л П *Теория солитонов: метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980); Пер. на англ. яз.: Novikov S, Manakov S V, Pitaevskii L P, Zakharov V E *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Methods* (Contemporary Soviet Mathematics) (New York: Consultants Bureau, 1984)
8. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **182** 569 (2012); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **55** 535 (2012)
9. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974); Пер. на русск. яз.: Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
10. Landau L D, Lifshitz E M *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
11. Карпман В И *Нелинейные волны в диспергирующих средах* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Karpmann V I *Non-linear Waves in Dispersive Media* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
12. Phillips O M *The Dynamics of the Upper Ocean* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977); Пер. на русск. яз.: Филипп О М *Динамика верхнего слоя океана* (Л.: Гидрометеоиздат, 1980)
13. Сретенский Л Н *Теория волновых движений жидкости* (М.: Наука, 1977)
14. Абрашкин А А, Якубович Е И *Вихревая динамика в лагранжевом описании* (М.: Физматлит, 2006)
15. Clamond D J *Fluid Mech.* **589** 433 (2007)
16. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **40** 1087 (1997)
17. Hasimoto H, Ono H *J. Phys. Soc. Jpn.* **33** 805 (1972)
18. Davey A *J. Fluid Mech.* **53** 769 (1972)
19. Yuen H C, Lake B M *Phys. Fluids* **18** 956 (1975)
20. Кадомцев Б Б, Карпман В И *УФН* **103** 193 (1971); Kadomtsev B B, Karpmann V I *Sov. Phys. Usp.* **14** 40 (1971)
21. Yuen H C, Lake B M, in *Advances in Applied Mechanics* Vol. 22 (Ed. C-S Yih) (Amsterdam: Elsevier, 1982) p. 67; Пер. на русск. яз.: Юэн Г, Лэйк Б *Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде* (М.: Мир, 1987)
22. Зейтунян Р Х *УФН* **165** 1403 (1995); Zeytounian R Kh *Phys. Usp.* **38** 1333 (1995)
23. Рабинович М И, Трубецков Д И *Введение в теорию колебаний и волн* (М.: Наука, 1984); Пер. на англ. яз.: Rabinovich M I, Trubetskoy D I *Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989)

Received 20 February 2017

Physics – *Uspekhi* **61** (3) (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.03.038089>