

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Гравитационная масса фотонов

Р.И. Храпко

*Показано, что гравитационная масса фотонов или тел совпадает с их инертной массой. Рассмотрено движение мимо центра гравитационного притяжения и свободное падение на такой центр.*

**Ключевые слова:** принцип эквивалентности, масса

PACS number: 04.20. – q

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511f.1225

## Содержание

1. Введение (1225).
2. Гравитационная сила перпендикулярна скорости (1226).
3. Гравитационная сила направлена по скорости (1227).
4. Заключение (1227).

Список литературы (1227).

## 1. Введение

Как известно, траектория импульса излучения, проходящего мимо Солнца, отклоняется в сторону Солнца от прямой линии. Это свидетельствует о наличии ускорения фотона, которое направлено перпендикулярно его скорости. А это ускорение означает, что:

1) фотон испытывает силу притяжения  $\mathbf{F}$  и проявляет инерцию, т.е. имеет инертную массу  $m_i$ , согласно закону

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \quad (1)$$

2) сила, действующая на фотон, есть гравитационная сила  $\mathbf{F}$ , подчиняющаяся закону

$$\mathbf{F} = \gamma \frac{M m_g \mathbf{r}}{r^3} = m_g g \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2)$$

и, соответственно, фотон имеет гравитационную массу, которую мы обозначили  $m_g$ .

Как показано в разделе 2, ускорение фотона в данном случае равно ускорению свободного падения  $a = g \equiv \gamma M/r^2$ , а потому из равенства  $m_i a = m_g g$  следует равенство гравитационной и инертной масс фотона  $m_i = m_g$ .

Существенно, что инертные свойства любого объекта (тела или фотона) правильно определяются его ускорением по формуле (1) только в двух случаях:

1) когда скорость объекта перпендикулярна его ускорению, как в случае прохождения мимо Солнца,

2) когда скорость вообще отсутствует, т.е. тело покоится.

В общем же случае коэффициент пропорциональности в формуле (1) становится тензором,  $\mathbf{F} = \hat{m} \mathbf{a}$ , поскольку ускорение не совпадает с силой по направлению. Поэтому формула  $\mathbf{F} = \hat{m} \mathbf{a}$  не даёт правильного значения инерции объекта, т.е. его инертной массы  $m_i$ . Это хорошо видно на примере радиально падающего фотона: гравитационная сила (2) действует на фотон, а его ускорение равно нулю,  $\mathbf{a} = 0$ . Так что желание пользоваться формулой  $\mathbf{F} = \hat{m} \mathbf{a}$  для измерения инерции приводит к бесконечно большому значению инерции фотона. А инерция субсветовых частиц при таком измерении оказывается чрезмерно большой. Это следует из того, что ускорение частицы под действием продольной силы уменьшается с ростом скорости слишком быстро, поскольку коэффициент пропорциональности между силой и ускорением, согласно формуле

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

растёт быстрее, чем растёт инертная масса [1, 2]

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

(здесь  $m_0$  обозначает инвариантную массу, т.е. массу покоя).

Определению инертной массы радиально падающего объекта посвящён раздел 3. Там показано, что ускорение при вертикальном падении зависит от скорости по формуле  $a = g(1 - v^2/c^2)$ , т.е. сила (3), являющаяся в данном случае гравитационной, зависит от скорости по формуле

$$F = \frac{m_0 g}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_i g \quad (5)$$

(здесь использовано соотношение (4)). В силу равенства (2),  $F = m_g g$ , и равенства (5) гравитационная масса снова оказывается равна инертной массе.

Отметим здесь, что для непротиворечивого определения инертных свойства объекта следует пользоваться

**Р.И. Храпко.** Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе 4, 125993 Москва, Российская Федерация  
E-mail: khrapko\_ri@hotmail.com, http://khrapkor.wmsite.ru

Статья поступила 21 декабря 2014 г.,  
после доработки 14 сентября 2015 г.

не формулой  $\mathbf{F} = \dot{m}\mathbf{a}$ , а формулой  $\mathbf{p} = m_i\mathbf{v}$ , которая является определением инертной массы, поскольку для скорости и импульса объекта имеются бесспорные операционные определения [3]. В частности, для определения импульса необходимо остановить движущийся объект и измерить импульс силы,  $\int \mathbf{F} dt = \mathbf{p}$ , переданный преграде при остановке объекта. Определённая по формуле  $\mathbf{p} = m_i\mathbf{v}$  инертная масса  $m_i$  удовлетворяет закону сохранения.

## 2. Гравитационная сила перпендикулярна скорости

Собственно, это Эйнштейн строго показал, что излучение переносит инерцию между испускающими и поглощающими телами [4]. Однако ещё раньше понимали, что излучение притягивается к Земле и, значит, имеет гравитационную массу и инертную массу. Согласно этому пониманию, в 1801 г. Золднер использовал законы Ньютона

$$F = \frac{kmM}{r^2}, \quad F = ma, \quad (6)$$

считая, что гравитационная масса равна инертной массе (цитировано по [5]). Он рассуждал так же, как 110 лет спустя рассуждал Резерфорд, наблюдая отклонение альфа-частиц. Золднер нашёл, что световой поток должен отклоняться, проходя мимо массы  $M$ , на угол  $\alpha$ :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{kmM}{c^2 R}, \quad \alpha \approx \frac{2kmM}{c^2 R} \quad (7)$$

(здесь  $R$  — прицельное расстояние). Однако в 1919 г. экспедиция Эддингтона, наблюдавшая солнечные затмения, обнаружила, в соответствии с теорией Эйнштейна, вдвое большее отклонение.

Гинзбург [5] объяснял это реальное удвоение отклонения по сравнению с формулой (7) неевклидовостью пространства в поле тяготения. Дело в том, что притяжение Солнца отклоняет излучение или движущееся тело от движения по геодезической линии трёхмерного пространства. Но сама эта геодезическая линия вблизи Солнца отклоняется от геодезической линии, проходящей вдали от Солнца, на тот же угол  $\alpha$ . Поэтому и происходит двойное отклонение траектории вблизи Солнца по сравнению с траекторией, проходящей вдали от Солнца. При этом только половина этого двойного отклонения происходит из-за солнечного притяжения; вторая половина есть следствие искривления трёхмерного пространства Солнцем. Это явление представлено на рисунке.

Для фактического расчёта этого явления в трёхмерном пространстве мы воспользуемся пространством-временем с координатами Шварцшильда  $t, r, \theta, \varphi$ , мет-

рикой

$$ds^2 = \frac{r-1}{r} dt^2 - \frac{r}{r-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8)$$

(мы положили  $c = r_g = 2M = 1$ ) и уравнением для геодезических линий при использовании  $t$  как параметра ( $\sin^2 \theta = 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{dx^i}{dt} &\equiv \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \alpha \frac{dx^i}{dt}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{r-1}{2r^3}, \quad \Gamma_{rr}^r = -\Gamma_{tr}^t = \frac{-1}{2r(r-1)}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -(r-1). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь правая часть уравнения геодезических не равна нулю, а пропорциональна касательному вектору, потому что  $t$  не является каноническим параметром.

Для расчёта ускорения, которое испытывает объект, пролетающий мимо Солнца, достаточно рассмотреть круговые орбиты [6, 7]. Для таких орбит положим в (9)  $dr/dt \equiv 0$  и будем иметь только уравнение для  $i = r$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= 0, \\ \frac{r-1}{2r^3} &= (r-1) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2r^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно подсчитать, что при  $r = 3/2$  геодезическая линия (10) делается изотропной, т.е. представляет орбиту фотона. Действительно, из (8) с учётом (10) получается

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv \frac{r-1}{r} dt^2 - r^2 d\varphi^2 = \left( \frac{r-1}{r} - \frac{r^2}{2r^3} \right) dt^2 = 0, \\ r &= \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Мировая линия (10) является геодезической линией пространства-времени, которая представляет движение по окружности в пространстве. Центростремительное ускорение такого движения определяется второй производной по времени радиального отклонения этой окружности,  $r = \text{const}$ , от касательной геодезической линии двумерного подпространства  $r, \varphi$  с метрикой

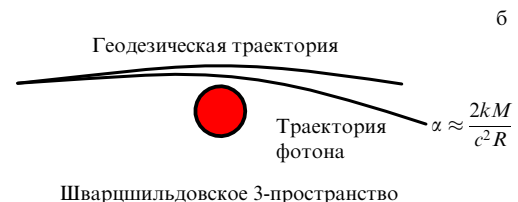
$$dl^2 = \frac{r}{r-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (12)$$

Уравнение такой геодезической линии,  $r(\varphi)$ , мы сейчас найдём. Используя в уравнении (9)  $\varphi$  в качестве параметра и учитывая, что для касательной линии в точке  $\varphi = 0$  будет  $dr/d\varphi = 0$ , получаем при  $\varphi = 0, i = r$ :

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} + \Gamma_{rr}^r \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \alpha \frac{dr}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = r-1. \quad (13)$$



$$\frac{kmM}{r^2} = ma \rightarrow \alpha \approx \frac{2kM}{c^2 R}$$



**Рис.** Траектория фотона отклоняется от геодезической траектории пространства из-за притяжения Солнца (а). Но сама геодезическая траектория искривлена из-за того, что Солнце искривляет пространство (б).

Это уравнение и даёт искомую вторую производную радиального отклонения круговой орбиты от геодезической линии. Вторая производная по временной координате получается с использованием (10):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{r-1}{2r^3}. \quad (14)$$

Теперь можем найти центростремительное ускорение на произвольной круговой орбите. Оно оказывается равным обычному  $g$ , как было упомянуто во введении:

$$a = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}} \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{r}{r-1}} = g. \quad (15)$$

Дело в том, что кривизна мировой линии неподвижного тела (для которого  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ ) равна  $D^2 r/dt^2 = \Gamma_{tt}^r = (r-1)/(2r^3)$ . А в рамках общей теории относительности неподвижное тело имеет ускорение свободного падения, которое и выражается формулой

$$g = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}} \frac{D^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{r}{r-1}}. \quad (16)$$

### 3. Гравитационная сила направлена по скорости

При рассмотрении вертикально падающего объекта уравнение (9) даёт [8]

$$\begin{aligned} \text{для } i = t: \quad \Gamma_{tt}^r 2 \frac{dr}{dt} &\equiv \frac{1}{r(r-1)} \frac{dr}{dt} = \alpha, \\ \text{для } i = r: \quad \frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Gamma_{tt}^r &\equiv \\ &\equiv \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2r(r-1)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = \alpha \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Исключая  $\alpha$ , получаем уравнение геодезической линии:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{3}{2r(r-1)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = 0. \quad (17)$$

Производная  $dr/dt$  связана со скоростью:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{dr}{dt} \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} = -\frac{dr}{dt} \frac{r}{r-1}, \\ g_{tt} &= \frac{r-1}{r}, \quad g_{rr} = \frac{r}{r-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

а вторая производная  $d^2 r/dt^2$  связана с ускорением:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \frac{r}{r-1} \right) = \\ &= -\sqrt{\frac{r}{r-1}} \left( \frac{d^2 r}{dt^2} \frac{r}{r-1} - \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \frac{1}{(r-1)^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя сюда вторую производную из (17) и первую производную из (18), получим

$$a = \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{r}{r-1}} (1-v^2) = g(1-v^2). \quad (20)$$

То есть  $a = g(1-v^2/c^2)$ , как было упомянуто во введении.

### 4. Заключение

Рассмотрено движение тел и излучения мимо центра гравитационного притяжения и их свободное падение на такой центр в рамках общей теории относительности для расчёта трёхмерного ускорения, которое сопровождает такое движение и наблюдается в трёхмерном пространстве вокруг притягивающего центра. В результате показано, что гравитационная сила, действующая на гравитационную массу объекта, вызывает ускорение, соответствующее такой инертной массе объекта, которая равна его гравитационной массе. Это справедливо и для фотонов. Двойное отклонение фотонов при прохождении их вблизи притягивающего центра объясняется не их двойной гравитационной массой, а искривлением геодезической линии вблизи притягивающего центра по сравнению с удалённой геодезической линией [9].

### Список литературы

1. Савельев И В *Курс общей физики* Т. 3 (М.: Наука, 1971) с. 223; Savelyev I V *Physics, a General Course* Vol. 3 (Moscow: Mir, 1981)
2. Савельев И В *Курс общей физики* Т. 1 (СПб.: Лань, 2007) с. 53; Savelyev I V *Fundamentals of Theoretical Physics* Vol. 1 (Moscow: Mir, 1982)
3. Храпко Р И *УФН* **170** 1363 (2000); Khrapko R I *Phys. Usp.* **43** 1267 (2000)
4. Einstein A *Ann. Physik* **18** 639 (1905)
5. Гинзбург В Л *УФН* **59** 11 (1956)
6. Khrapko R I *Eur. J. Phys.* **36** 058002 (2015)
7. Khrapko R I, in *ICGAC-12. Abstracts of XIIth Intern. Conf. on Gravitation, Astrophysics and Cosmology, Dedicated to the Centenary of Einstein's General Relativity Theory, June 28–July 5, 2015, Moscow, Russia* (Moscow: Russian Gravitational Soc., Peoples' Friendship Univ. of Russia, 2015) p. 48; <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=141&module=files>
8. Khrapko R *Eur. J. Phys.* **36** 038001 (2015)
9. Храпко Р И "Летающая тарелка — аппарат для исследования сверхтяжелых звезд" *Знание — сила* (3) 32 (1972), <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=90&module=files>

### Gravitational mass of the photons

R.I. Khrapko

Moscow Aviation Institute, Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russian Federation

E-mail: khrapko\_ri@hotmail.com, <http://khrapkori.wmsite.ru>

It is shown that the gravitational and inertial masses of a photon or indeed of any body are equal. Motion past and free fall onto a center of gravitational attraction are considered.

**Keywords:** equivalence principle, mass

PACS numbers: **04.20. – q**

Bibliography — 9 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **185** (11) 1225–1227 (2015)

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511f.1225

Received 21 December 2014, revised 14 September 2015

*Physics – Uspekhi* **58** (11) (2015)