

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Дуальность двумерной теории поля и четырёхмерной электродинамики, приводящая к конечному значению затравочного заряда

В.И. Ритус

Обсуждается голографическая дуальность, состоящая в функциональном совпадении спектров среднего числа фотонов (или скалярных квантов), испускаемых точечным электрическим (скалярным) зарядом в  $3 + 1$ -пространстве, со спектрами среднего числа пар скалярных (спинорных) квантов, испускаемых точечным зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве. Будучи функциями двух переменных и функционалами общей траектории заряда и зеркала, спектры различаются лишь множителем  $e^2/\hbar c$  (хевисайдовы единицы). Требование  $e^2/\hbar c = 1$  приводит к уникальным значениям величины точечного заряда и его постоянной тонкой структуры,  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$ ,  $\alpha_0 = 1/4\pi$ , обладающим всеми свойствами, указанными Гелл-Маном и Лоу для конечного затравочного заряда. Это требование следует из предлагаемого голографического принципа квантования затравочного заряда, согласно которому излучения заряда и зеркала, находящиеся соответственно в четырёхмерном пространстве и на его внутренней двумерной поверхности, должны обладать тождественно совпадающими спектрами. Дуальность обязана интегральной связи причинных функций Грина для  $3 + 1$ - и  $1 + 1$ -пространств и связям плотностей тока и заряда в  $3 + 1$ -пространстве со скалярными произведениями скалярного и спинорного безмассовых полей в  $1 + 1$ -пространстве. Обсуждается близость величин точечного затравочного заряда  $e_0 = \sqrt{\hbar c}$ , "зарядов"  $e_B = 1,077\sqrt{\hbar c}$  и  $e_L = 1,073\sqrt{\hbar c}$ , характеризующих сдвиги  $e_{B,L}^2/8\pi a$  энергии нулевых электромагнитных колебаний в вакууме нейтральными идеально проводящими поверхностями сферы радиуса  $a$  и куба с ребром  $2a$ , и умноженного на  $\sqrt{4\pi}$  заряда электрона  $e$ . Близость  $e_L \approx \sqrt{4\pi} e$  означает, что  $\alpha_0 \alpha_L \approx \alpha$  — постоянной тонкой структуры.

PACS numbers: 03.70.+k, 12.20.-m, 41.60.-m

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201306c.0591

## Содержание

## 1. Введение (592).

1.1. Вводные замечания. 1.2. Голографическая связь спектров излучения точечных заряда и зеркала и затравочный заряд. 1.3. Гелл-Ман и Лоу о точечном затравочном заряде.

2. Коэффициенты Боголюбова для полей со спином 0 и 1/2 в  $1 + 1$ -пространстве с зеркальной границей (595).

2.1. Коэффициенты Боголюбова для скалярного поля и граничные условия. 2.2. Коэффициенты Боголюбова для спинорного поля и граничное условие. 2.3. Поведение спина волны при её отражении от зеркала и неизменность коэффициентов Боголюбова.

## 3. Связь плотностей тока и заряда с коэффициентами Боголюбова скалярного и спинорного полей (598).

3.1. Действия и спектры числа квантов заряженных источников в  $3 + 1$ -пространстве. 3.2. Симметрия линейных связей коэффи-

циентов Боголюбова с плотностями тока и заряда. 3.3. Совпадение спина пар, излучаемых зеркалами, со спином квантов, излучаемых зарядами. 3.4. Функциональное совпадение спектров бозонных и фермионных пар, излучаемых зеркалами, со спектрами квантов, излучаемых электрическим и скалярным зарядами. 3.5. Совпадение спектров бозонных и фермионных пар при больших частотах.

## 4. Голографический принцип квантования затравочного заряда (602).

4.1. Связь причинных функций Грина в  $d$ - и  $d - 2$ -мерных пространствах. 4.2. Снова о функциональном совпадении спектров средних чисел квантов и пар, испускаемых зарядом и зеркалом в пространствах  $d = 4$  и  $d = 2$ .

## 5. Теория источников и спектры среднего числа квантов, излучаемых зарядами (604).

5.1. Вакуумная амплитуда источника частиц со спином 0. 5.2. Связь с методом вторичного квантования. 5.3. Вакуумная амплитуда источника частиц со спином 1.

## 6. Преобразование Боголюбова — квантовая теория излучения точечного зеркала (607).

6.1. Излучение пар из тождественных частицы и античастицы. 6.2. Излучение пар из нетождественных частицы и античастицы.

## 7. Обсуждение (612).

Список литературы (615).

В.И. Ритус. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация  
Тел. (499) 132-64-26. Факс (499) 135-85-33  
E-mail: ritus@lpi.ru

Статья поступила 27 июля 2012 г., после доработки 30 апреля 2013 г.

## 1. Введение

### 1.1. Вводные замечания

Хокинговский механизм образования частиц при формировании чёрной дыры аналогичен излучению идеального "зеркала", ускоренного в вакууме [1, 2]. В свою очередь, имеется тесная аналогия между излучением фотонов (другой вариант — скалярных квантов) ускоренным точечным электрическим (скалярным) зарядом в  $3+1$ -пространстве и излучением пар скалярных (спинорных) квантов ускоренным точечным зеркалом в  $1+1$ -пространстве [3, 4]. Все эти процессы оказываются взаимно связанными. Под точечным зеркалом, движущимся в  $1+1$ -пространстве, понимаются точки времениподобной кривой на  $x, t$ -плоскости, в которых скалярное или спинорное поле удовлетворяет граничному условию, не содержащему никаких размерных параметров.

В 1995 г. Никишовым и автором настоящей статьи было обнаружено, что спектр фотонов, излучаемых равноускоренным зарядом в  $3+1$ -пространстве, с точностью до множителя  $e^2/\hbar c$  (хевисайдовы единицы) совпадает со спектром пар скалярных квантов, излучаемых равноускоренным зеркалом в  $1+1$ -пространстве [3]. Такое совпадение оказалось справедливым и для любых других общих движений заряда и зеркала. В работе [4] было показано, что спектр скалярных квантов, излучаемых ускоренным скалярным зарядом в  $3+1$ -пространстве, совпадает со спектром пар спинорных квантов, излучаемых зеркалом при аналогичном ускорении в  $1+1$ -пространстве (снова с точностью до множителя  $e^2/\hbar c$ ,  $e$  — скалярный заряд).

Дальнейшие работы автора были посвящены изучению обнаруженной дуальности между излучением одиночных квантов ускоренным в  $3+1$ -пространстве зарядом и рождением пар ускоренным в  $1+1$ -пространстве зеркалом и причинами совпадения соответствующих спектров квантов и пар. Существенно использовалась интерпретация  $\beta$ -коэффициента Боголюбова как амплитуды источника пары частиц, направленных в противоположные стороны. Оказалось, что бозонная и фермионная пары, излучаемые зеркалом, имеют те же спины 1 и 0, что и фотоны и скалярные кванты, излучаемые электрическим и скалярным зарядами [5].

При учёте квантовых обменных эффектов амплитуды сохранения вакуума ускоренными зарядом и зеркалом в  $3+1$ - и  $1+1$ -пространствах различаются не только множителем  $e^2/\hbar c$  в функционале действия для заряда. Обменные эффекты, однако, не влияют на функционально совпадающие спектры средних чисел квантов и пар, излучаемых зарядом и зеркалом [6].

Существенную роль в дуальности спектров играет связь причинных функций Грина в  $3+1$ - и  $1+1$ -пространствах [7, 8]. Требование полного совпадения спектров заряда и зеркала приводит к квантованию электрического и скалярного зарядов с общим значением  $e_0 = \sqrt{\hbar c}$ . Это значение обладает всеми свойствами конечного затравочного заряда, указанными в работе Гелл-Мана и Лоу [9]. Будучи малым ( $\alpha_0 = 1/4\pi \ll 1$ ), оно оставляет электромагнитное взаимодействие слабым при всех передаваемых импульсах. Дуальность была распространена на взаимодействия заряда и зеркала с сопровождающими их полями, несущими пространствуподобные импульсы. Эти поля определяют  $\alpha$ -коэффициенты Бого-

любова и сдвиги вещественных частей действий, т.е. фазы вакуум-вакуумных амплитуд.

Структура обзора такова: раздел 1 — основные результаты, демонстрирующие голографическую связь спектров излучения заряда и зеркала; разделы 2 и 3 — методы вычислений и детальные связи коэффициентов Боголюбова с плотностями тока и заряда; раздел 4 — наиболее существенные физические величины и их связи, лежащие в основе обсуждаемой дуальности; разделы 5 и 6 — краткие изложения теории источников Швингера и теории коэффициентов Боголюбова; наконец, раздел 7 — обсуждение принципиальных моментов и величины  $e_0 = \sqrt{\hbar c}$  для затравочного заряда.

В статье используются: метрика  $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ , запись 4-векторов  $k^\alpha = (\mathbf{k}, k^0)$ , единицы Хевисайда для заряда и естественная система единиц  $\hbar = c = 1$ , кроме мест, где необходимо подчеркнуть квантовый и релятивистский смысл величины. Под "принципом квантования заряда" в статье понимается исходный физический постулат, приводящий к конкретной связи величины заряда с постоянной Планка, т.е. к "квантованию заряда". Для затравочного заряда — это связь  $e_0^2 = \hbar c$ .

### 1.2. Голографическая связь спектров излучения точечных заряда и зеркала и затравочный заряд

$1+1$ -пространство может рассматриваться как внутренняя граница  $3+1$ -пространства, внешняя граница которого находится на бесконечности. Предполагается, что в  $1+1$ -пространстве существуют скалярное и спинорное безмассовые поля и излучение пар квантов этих полей, вызываемое граничным условием на ускоренно движущемся *точечном* "зеркале" в этом  $1+1$ -пространстве, рассматривается *квантовой теорией*.

Её методом исследования являются преобразования Боголюбова [10] и соответствующие коэффициенты  $\alpha_{\omega'\omega}$ ,  $\beta_{\omega'\omega}$ , связывающие полные in- и out-системы решений волнового уравнения. При ускоренном движении зеркала коэффициент  $\beta_{\omega'\omega} \neq 0$ , in- и out-системы неэквивалентны и зеркало излучает пары квантов с частотами  $\omega$ ,  $\omega'$  и спектром

$$d\bar{n}_{\omega'}^{B,F} = |\beta_{\omega'\omega}^{B,F}|^2 \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \quad (1.1)$$

среднего числа пар. Индексами В и F помечаются величины, относящиеся к бозонному (скалярному) и фермионному (спинорному) полям, кванты которых образуют бозонную и фермионную пары.

В  $3+1$ -пространстве, по внутренней одномерной границе которого движутся *точечные* электрический и скалярный заряды, процессы излучения безмассовых квантов этими зарядами рассматриваются *квазиклассической теорией* источников Швингера [11]; в ней основным инструментом исследования является амплитуда сохранения вакуума  $\exp(iW/\hbar)$  в присутствии источника. Таким образом, действие  $W$  является функционалом плотности электрического тока или плотности скалярного заряда.

При ускоренном движении заряда мнимая часть действия отлична от нуля, положительна и после деления на постоянную Планка  $\hbar$  определяет среднее число  $\bar{N}$  квантов, излучённых зарядом за всё время:

$$\frac{2}{\hbar} \text{Im } W^{(s)} = \bar{N}^{(s)} = \int d\bar{n}_k^{(s)}. \quad (1.2)$$

Спектр  $d\bar{n}_k^{(s)}$  среднего числа квантов со спином  $s$  и волновым вектором  $k^z = (\mathbf{k}, k^0)$  определяется фурье-компонентами плотности электрического тока или плотности скалярного заряда:

$$d\bar{n}_k^{(1)} = \frac{|j_z(k)|^2}{\hbar c} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}, \quad d\bar{n}_k^{(0)} = \frac{|\rho(k)|^2}{\hbar c} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}. \quad (1.3)$$

Для траекторий заряда, лежащих в  $x, t$ -плоскости  $3 + 1$ -пространства Минковского, спектральные плотности  $|j_z(k)|^2$ ,  $|\rho(k)|^2$  зависят только от двух компонент  $k_{\pm} = k^0 \pm k^1$  волнового вектора и не зависят от азимутального угла  $\varphi$  проекции  $\mathbf{k}_{\perp}$  вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{\perp}$  на плоскость, ортогональную оси движения.

Представив инвариантное число состояний кванта в виде

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} = \frac{dk_+ dk_- d\varphi}{(4\pi)^2 2\pi}$$

и проинтегрировав спектры (1.3) по  $\varphi$ , получим

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1)} = \frac{|j_z(k_+, k_-)|^2}{\hbar c} \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2}, \quad (1.4)$$

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^{(0)} = \frac{|\rho(k_+, k_-)|^2}{\hbar c} \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2}.$$

Рассматриваемая дуальность утверждает, что спектры (1.4) фотонов и скалярных квантов, испущенных зарядами в  $3 + 1$ -пространстве, с точностью до множителя  $e^2/\hbar c$  (заряд  $e$  в хевисайдовых единицах) совпадают со спектром (1.1) бозонных и фермионных пар, испущенных зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве:

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1)} = \frac{e^2}{\hbar c} d\bar{n}_{\omega'\omega}^B, \quad d\bar{n}_{k_+k_-}^{(0)} = \frac{e^2}{\hbar c} d\bar{n}_{\omega'\omega}^F, \quad (1.5)$$

если траектории заряда и зеркала одинаковы и если компоненты  $k_{\pm} = k^0 \pm k^1$  волнового 4-вектора  $k^z$  кванта, излучаемого зарядом, отождествить с удвоенными частотами  $\omega, \omega'$  квантов пары, излучаемой зеркалом:

$$k_+ = 2\omega, \quad k_- = 2\omega'. \quad (1.6)$$

Иными словами, голографическая дуальность утверждает, что число состояний кванта в  $3 + 1$ -пространстве после интегрирования по  $\varphi$  совпадает с числом состояний пары квантов в  $1 + 1$ -пространстве:

$$\frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2} = \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}, \quad (1.7)$$

а спектральные плотности различаются лишь множителем  $e^2/\hbar c$ :

$$|j_z(k_+, k_-)|^2 = \frac{e^2}{\hbar c} |\beta_{\omega'\omega}^B|^2, \quad |\rho(k_+, k_-)|^2 = \frac{e^2}{\hbar c} |\beta_{\omega'\omega}^F|^2. \quad (1.8)$$

Поскольку кванты пары безмассовые, они обладают двумерными волновыми векторами  $(\omega, \omega)$  и  $(-\omega', \omega')$ . Тогда  $2\omega$  и  $2\omega'$  в формуле (1.6) — это единственные ненулевые "плюс"- и "минус"-компоненты этих векто-

ров и одновременно — это плюс- и минус-компоненты двумерного времениподобного волнового вектора  $(k^1, k^0)$  пары в целом,

$$k^1 = \omega - \omega', \quad k^0 = \omega + \omega', \quad (1.9)$$

$$k_+ = k^0 + k^1 = 2\omega, \quad k_- = k^0 - k^1 = 2\omega'.$$

В свою очередь, эти последние совпадают с плюс- и минус-компонентами четырёхмерного вектора  $k^z$  кванта, испускаемого зарядом в  $3 + 1$ -пространстве. Таким образом, формулы (1.6), (1.9) и (1.7), связывающие волновой 4-вектор кванта в  $3 + 1$ -пространстве с волновыми 2-векторами пары и её частиц в  $1 + 1$ -пространстве, имеют очень прозрачный физический смысл. Мы ещё вернёмся к ним позднее.

При больших значениях  $\omega, \omega'$  спектральные плотности  $|\beta_{\omega'\omega}^B|^2, |\beta_{\omega'\omega}^F|^2$  перестают различаться, т.е. перестают зависеть от спина частиц пары:

$$|\beta_{\omega'\omega}^B|^2 = |\beta_{\omega'\omega}^F|^2, \quad \omega, \omega' \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Это будет показано в разделе 3. Таким образом, спин частиц пары не влияет на вероятность излучения пары в этой области  $\omega, \omega'$ . Тем не менее спектральные плотности по-прежнему остаются, теперь уже одинаковыми, функциями аналогами траектории зеркала и функциями  $\omega, \omega'$ .

Тогда в силу (1.5), (1.8) естественно предположить, что и спектральные плотности  $|j_z(k_+, k_-)|^2, |\rho(k_+, k_-)|^2$  при больших значениях  $k_{\pm}$  не должны зависеть от спина излучаемых квантов, т.е. должны быть одинаковыми. А это означает, что должны быть одинаковыми величины электрического и скалярного зарядов. Именно поэтому они обозначены в (1.5), (1.8) одной и той же буквой.

Так как  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(s)}$  и  $d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}$  суть средние значения целочисленных наблюдаемых — числа квантов в  $3 + 1$ -пространстве и числа пар квантов в  $1 + 1$ -пространстве, — находящихся согласно (1.6) в тесно связанных друг с другом квантовых состояниях, то интересно проследить эту связь подробнее для отдельных кванта и пары.

Связь (1.6) компонент  $k_{\pm}$  волнового 4-вектора  $k^z = (\mathbf{k}, k^0)$  кванта с частотами  $\omega, \omega'$  квантов пары означает, что

$$k^0 = \omega + \omega', \quad k^1 = \omega - \omega'. \quad (1.11)$$

Иными словами, временная и продольная компоненты волнового 4-вектора кванта одновременно являются временной и пространственной компонентами волнового 2-вектора пары, состоящей из двух безмассовых квантов с волновыми 2-векторами  $(\omega, \omega)$  и  $(-\omega', \omega')$ . Такая пара имеет массу

$$m = \sqrt{k_0^2 - k_1^2} = k_{\perp} = 2\sqrt{\omega\omega'}, \quad (1.12)$$

совпадающую с величиной поперечного импульса  $k_{\perp}$  кванта в  $3 + 1$ -пространстве. Хотя термины масса и импульс удобны, параметры  $m$  и  $k_{\perp}$  — чисто геометрические, с размерностью обратной длины.

Таким образом, каждому безмассовому кванту, испущенному в  $3 + 1$ -пространстве с волновым 4-вектором  $k^z = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{\perp}, k^0)$ ,  $k^0 = (k_1^2 + k_{\perp}^2)^{1/2}$ , можно поставить в соответствие массивную пару, испущенную в  $1 + 1$ -пространстве с волновым 2-вектором  $(\mathbf{k}_1, k^0)$  и массой  $m = k_{\perp}$ , равной величине поперечного импульса кванта в  $3 + 1$ -пространстве.

Это соответствие состоит прежде всего в том, что независимо от величины  $e^2/\hbar c$  для любых одинаковых траекторий заряда и зеркала вероятность испускания зарядом кванта в состоянии  $k_+$ ,  $k_-$  равна вероятности излучения зеркалом пары квантов в состоянии  $\omega$ ,  $\omega'$ :

$$\frac{d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}}{\int d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}} = \frac{d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}}{\int d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}}, \quad \text{если } k_+ = 2\omega, \quad k_- = 2\omega'. \quad (1.13)$$

Напомним, что компоненты  $k_{\pm}$  импульсов кванта и пары одинаковы. Параметр  $e^2/\hbar c$  в левой части сократился и вероятности излучения квантов со спином 1 и 0 тождественно совпали с вероятностями излучения бозонных и фермионных пар как функции двух переменных  $k_+ = 2\omega$ ,  $k_- = 2\omega'$  и функционалы одинаковых траекторий заряда и зеркала.

Однако средние значения  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}$  и  $d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}$  *целочисленных наблюдаемых* — числа квантов в состоянии  $k_+$ ,  $k_-$  и числа пар квантов в состоянии  $\omega$ ,  $\omega'$ , находящихся в одинаковых фазовых объёмах (1.7), — будут одинаковыми, только если  $e^2/\hbar c = 1$ .

В этом случае устанавливается взаимно однозначное соответствие между испущенными зарядом квантами с компонентами  $k_+$ ,  $k_-$  в фазовом объёме  $dk_+ dk_- / (4\pi)^2$  и испущенными зеркалом парами квантов с частотами  $\omega$ ,  $\omega'$  в фазовом объёме  $d\omega d\omega' / (2\pi)^2$ . Такое соответствие можно считать голографическим, так как одномерную пространственную ось  $x$ , вдоль которой движется зеркало и заряд и распространяются пары, можно рассматривать как внутреннюю границу трёхмерного пространства, в котором распространяются кванты, испущенные зарядом.

Естественно, что и полное среднее число испущенных квантов в случае  $e^2/\hbar c = 1$  будет равно полному среднему числу испущенных пар:

$$\bar{N}^{(1,0)} = \frac{e^2}{\hbar c} \bar{N}^{B,F} \Big|_{e^2/\hbar c=1} = \bar{N}^{B,F}. \quad (1.14)$$

При ином значении  $e^2/\hbar c$  равенство (1.14) нарушалось бы, несмотря на совпадение геометрических механизмов рождения квантов и пар квантов, выражаемое совпадением распределений вероятностей (1.13) для любой общей траектории заряда и зеркала.

В то время как спектр пар квантов  $d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}$  является *чисто геометрическим*, т.е. определяется безразмерной функцией величин с размерностями степеней длины и времени, спектр квантов  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}$  отличается от него дополнительным безразмерным множителем  $e^2/\hbar c$  с величинами  $e^2$  и  $\hbar$  негеометрической размерности. При  $e^2/\hbar c = 1$  спектр  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}$  совпадает с  $d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}$ , т.е. обладает той же информацией и становится геометрическим. При  $e^2/\hbar c \neq 1$  этот множитель и спектр  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}$  содержат информацию негеометрического характера, которой нет у спектра  $d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}$ ; голографический принцип не выполнен. Так, значение  $e^2/\hbar c < 1$  свидетельствовало бы об экранировании затравочного заряда.

Голографический принцип требует совпадения информации, содержащихся в спектрах  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)}$  и  $d\bar{n}_{\omega'\omega}^{B,F}$ , что эквивалентно квантованию затравочного заряда, т.е. фиксированию его связи  $e^2/\hbar c = 1$  с постоянной Планка. Такое совпадение возможно благодаря голографическому дуализму *квазиклассического* описания излучения квантов точечным зарядом в  $3+1$ -пространстве и

*квантового* описания излучения пар квантов точечным зеркалом в  $1+1$ -пространстве.

Поскольку заряды и зеркало считаются точечными, то полученное таким образом квантованное значение заряда должно относиться к голому, незранированному поляризации вакуума заряду, который мы обозначим через  $e_0$ . Таким образом,  $e_0^2 = \hbar c$ ,  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$ , а значение соответствующей постоянной тонкой структуры равно

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{4\pi}. \quad (1.15)$$

Оно одинаково для голых электрического и скалярного зарядов и мало по сравнению с единицей.

### 1.3. Гелл-Ман и Лоу о точечном затравочном заряде

Полученный результат согласуется с асимптотическим поведением эффективной константы взаимодействия  $\alpha(k^2/m^2, \alpha)$ , описанным в известной работе Гелл-Мана и Лоу [9] как вариант (b).

В этой работе показано, что эффективный параметр взаимодействия ("бегущая константа", эффективный заряд, ...), определяемый произведением

$$\alpha d_R \left( \frac{k^2}{m^2}, \alpha \right) \quad (1.16)$$

постоянной тонкой структуры  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$  и перенормированного пропагатора фотона  $d_R$ , в области больших значений переданного импульса становится функцией одного аргумента:

$$\alpha \left( \frac{k^2}{m^2}, \alpha \right) \equiv \alpha d_R^{\text{as}} \left( \frac{k^2}{m^2}, \alpha \right) = F \left( \frac{k^2}{m^2} \phi(\alpha) \right), \quad k^2 \gg m^2. \quad (1.17)$$

Это означает, что при  $k^2 \gg m^2$  функциональный вид  $\alpha(k^2/m^2, \alpha)$  перестаёт зависеть от значения постоянной тонкой структуры, которая в этом случае входит только в масштабный множитель  $\phi(\alpha)$ , влияющий на шкалу импульсов.

Этот результат получен исследованием функции  $d_R(k^2/m^2, \alpha)$  по теории возмущений. В асимптотической области  $x \equiv k^2/m^2 \rightarrow \infty$  функция  $d_R(x, \alpha)$  оказывается двойным рядом по степеням  $\alpha$  и  $\ln x$  с конечными численными коэффициентами. Сходимость этого ряда остаётся неизвестной. Однако подразумевается, что ряд для  $d_R(x, \alpha)$  определяет функцию, которая удовлетворяет тем же функциональным уравнениям, которые авторы вывели для этого ряда.

Авторы обсуждают два возможных поведения функции  $F((k^2/m^2)\phi(\alpha))$  при  $k^2/m^2 \rightarrow \infty$ .

(а) Если при  $k^2/m^2 \rightarrow \infty$  функция  $F((k^2/m^2)\phi) \rightarrow \infty$ , то  $e_0^2$  — квадрат незранированного, голого заряда — бесконечен и особенность в центре зарядового распределения оказывается более сильной, чем  $\delta(\mathbf{x})$ , которая соответствовала бы конечному точечному заряду. На такой результат указывает теория возмущений.

(б) Если при  $k^2/m^2 \rightarrow \infty$  функция  $F((k^2/m^2)\phi)$  стремится к конечному значению  $\alpha_0 = e_0^2/4\pi\hbar c$ , то это значение не должно зависеть от постоянной тонкой структуры  $\alpha$  и должно быть больше, чем  $\alpha$ . В этом случае на очень малых расстояниях распределение заряда описывается пространственной дельта-функцией  $e_0\delta(\mathbf{x})$  с конечным значением незранированного затравочного заряда  $e_0$ .

Для облегчения сравнения уравнения (1.17) с рядами теории возмущений авторы использовали его другую форму:

$$\ln \frac{k^2}{m^2} = \int_{x(1,\alpha)}^{\alpha(x,\alpha)} \frac{dz}{\psi(z)}, \quad x = \frac{k^2}{m^2} \gg 1, \quad (1.18)$$

в которой решающее значение имеет функция Гелл-Мана – Лоу  $\psi(z)$ . Она инвариантна относительно мультипликативного изменения аргумента функции  $F$  в представлении (1.17). Дело в том, что функция  $\phi(\alpha)$  определена с точностью до мультипликативной постоянной, от которой эффективный заряд  $\alpha d_R^{\text{as}}$  не зависит, но функция  $F(x\phi)$  зависит. Выражая её аргумент через обратную функцию,

$$x\phi(\alpha) = \tilde{F}(\alpha(x,\alpha)), \quad (1.19)$$

и дифференцируя логарифм полученного выражения по  $x$ , мы устраняем мультипликативный произвол функций  $\phi(\alpha)$  и  $\tilde{F}(z)$  и получаем дифференциальную форму уравнения Гелл-Мана – Лоу:

$$x \frac{\partial \alpha(x,\alpha)}{\partial x} = \psi(\alpha(x,\alpha)), \quad (1.20)$$

где

$$\frac{1}{\psi(z)} = \frac{d}{dz} [\ln \tilde{F}(z)]. \quad (1.21)$$

Согласно теории возмущений поведение  $\psi(z)$  при малых  $z$  таково [12]:

$$\psi(z) = \frac{z^2}{3\pi} + \frac{z^3}{4\pi^2} + \left[ \zeta(3) - \frac{101}{96} \right] \frac{z^4}{3\pi^3} + \dots, \quad \zeta(3) = 1,202\dots \quad (1.22)$$

Если  $\psi(z)$  положительна для всех  $z > \alpha(1,\alpha)$ , то эффективный параметр взаимодействия  $\alpha(x,\alpha)$  стремится к бесконечности либо при  $x \rightarrow \infty$ , если интеграл  $\int_{x(1,\alpha)}^{\infty} dz/\psi(z)$  расходится на верхнем пределе, либо при  $x \rightarrow x_0 = \exp \left[ \int_{x(1,\alpha)}^{\infty} dz/\psi(z) \right]$ , если этот интеграл сходится. В последнем случае  $\alpha(x,\alpha)$  имеет полюс Ландау при  $x = x_0 \sim \exp(3\pi/\alpha)$  [13].

В обоих случаях сингулярность  $\alpha(x,\alpha)$  находится в далёкой асимптотической области, где все члены ряда теории возмущений для  $\alpha d_R(x,\alpha)$  сравнимы по величине. Серьёзное исследование полного выражения для  $\alpha d_R(x,\alpha)$  в этой области отсутствует. Поэтому поведение  $\psi(z)$  при больших  $z$ , приводящее к большим значениям  $\alpha(x,\alpha)$ , не имеет достаточного обоснования в рамках существующей теории. К такому выводу приходят авторы [14–17].

Если, тем не менее, функция  $\psi(z)$  имеет смысл, то другой возможностью является обращение  $\psi(z)$  в нуль в некоторой конечной точке  $z = \alpha_0 > \alpha(1,\alpha)$ . Тогда если интеграл  $\int_{x(1,\alpha)}^z dz/\psi(z)$  при  $z \rightarrow \alpha_0$  расходится, то  $\alpha(x,\alpha) \rightarrow \alpha_0$  при  $x \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\alpha_0$  является затравочной постоянной тонкой структуры.

Будучи корнем уравнения  $\psi(z) = 0$ ,  $\alpha_0$  обладает следующими свойствами, указанными Гелл-Маном и Лоу для конечного затравочного заряда:

- 1)  $\alpha_0$  не зависит от  $\alpha$ ,
- 2)  $\alpha_0 > \alpha$ ,

3)  $\alpha_0$  определяет величину  $e_0 = \pm \sqrt{4\pi\alpha_0 \hbar c}$  незранированного точечного заряда с пространственным распределением  $e_0 \delta(\mathbf{x})$ .

В нашем подходе мы исходим из точечности заряда, ускоренно двигающегося по времениподобной траектории, и получаем для  $\alpha_0$  конечное значение  $\alpha_0 = 1/4\pi$ , которое обладает свойствами 1), 2) и, кроме того, остаётся малым:  $\alpha_0 \approx 0,08$ . Последнее означает, что электромагнитное взаимодействие остаётся слабым при всех передаваемых импульсах, вплоть до объединения со столь же слабыми другими взаимодействиями.

Связь с рассмотрением Гелл-Мана и Лоу не случайна. По существу, Гелл-Ман и Лоу рассматривают взаимодействие двух ультрарелятивистских зарядов при их лобовом столкновении друг с другом, когда в области их максимального сближения они обмениваются квантом с гигантским пространствуподобным импульсом и меняют свои скорости на противоположные. В этой области взаимодействие зарядов описывается функцией  $\alpha d_R(x,\alpha)$ , учитывающей при  $x = k^2/m^2 \rightarrow \infty$  все радиационные поправки, а сами заряды, согласно варианту (b), становятся точечными. Это означает, что каждый из них движется по времениподобной траектории с очень большим ускорением и обладает незранированным зарядом  $e_0$ .

Спектр излучения одного из таких зарядов описывается теорией источников Швингера. Он содержится в мнимой части самодействия  $W$ , определяющего амплитуду  $\exp(iW/\hbar)$  сохранения вакуума классическим источником. Этот спектр обнаруживает голографическую связь со спектром пар квантов, излучаемых в  $1+1$ -пространстве точечным зеркалом, двигающимся по той же траектории, что и заряд. Обладая на 2 единицы меньшей размерностью, это пространство является внутренним для  $3+1$ -пространства, в котором находится излучение заряда, что и даёт основание назвать связь спектров голографической.

## 2. Коэффициенты Боголюбова для полей со спином 0 и 1/2 в $1+1$ -пространстве с зеркальной границей

### 2.1. Коэффициенты Боголюбова для скалярного поля и граничные условия

В задачах с двигающимися зеркалами обычно используются полная in-система  $\{\phi_{\text{in}\omega'}, \phi_{\text{in}\omega'}^*\}$  и полная out-система  $\{\phi_{\text{out}\omega'}, \phi_{\text{out}\omega'}^*\}$  решений волнового уравнения [18, 19]. Для безмассового скалярного поля  $\phi$ , удовлетворяющего в  $1+1$ -пространстве волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0, \quad u = t - x, \quad v = t + x, \quad (2.1)$$

они даются выражениями

$$\phi_{\text{in}\omega'}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\omega'}} \left[ \exp(-i\omega'v) - \exp(-i\omega'f(u)) \right], \quad (2.2)$$

$$\phi_{\text{out}\omega'}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\omega'}} \left[ \exp(-i\omega'g(v)) - \exp(-i\omega'u) \right], \quad (2.3)$$

каждое из которых состоит из падающей на зеркало и отражённой от него волн. В соответствии с индексами in и out предполагается, что рассмотрение ведётся в

правой от зеркала полуплоскости  $x, t$ . In- и out-решения считаются монохроматическими с частотами  $\omega'$  и  $\omega$  соответственно в далёком прошлом и далёком будущем. Эти решения удовлетворяют нулевому граничному условию

$$\phi(u, v) \Big|_{\text{traj}} = 0 \quad (2.4)$$

на траектории точечного зеркала. На  $u, v$ -плоскости траектория описывается любой из двух взаимно обратных функций

$$v_{\text{traj}} = f(u), \quad u_{\text{traj}} = g(v); \quad f(g(v)) = v. \quad (2.5)$$

Так что символ traj в (2.4) означает, что переменные  $u, v$  связаны соотношениями (2.5).

Заметим, что всё сказанное справедливо и для поля слева от зеркала, если индексы in и out поменять местами. Однако мы будем рассматривать процессы в поле справа от зеркала.

Любое решение волнового уравнения с нулевым граничным условием на зеркале может быть разложено как по in-, так и по out-системе. Коэффициенты Боголюбова  $\alpha, \beta$  возникают при разложении одной из этих систем по другой:

$$\phi_{\text{out } \omega} = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} (\alpha_{\omega'\omega} \phi_{\text{in } \omega'} + \beta_{\omega'\omega} \phi_{\text{in } \omega'}^*), \quad (2.6)$$

$$\phi_{\text{in } \omega'} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (\alpha_{\omega'\omega}^* \phi_{\text{out } \omega} - \beta_{\omega'\omega} \phi_{\text{out } \omega}^*). \quad (2.7)$$

Они определяются скалярными произведениями:

$$\alpha_{\omega'\omega}^{\text{B}} = i \int \phi_{\text{in } \omega'}^* \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_{\text{out } \omega} dx, \quad (2.8)$$

$$\beta_{\omega'\omega}^{\text{B}*} = i \int \phi_{\text{in } \omega'}^* \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_{\text{out } \omega}^* dx. \quad (2.9)$$

Индекс В отмечает принадлежность коэффициентов бозонному (скалярному) полю. Из условия ортогональности и нормировки того и другого наборов следует, что

$$\int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} (\alpha_{\omega'\omega} \alpha_{\omega'\omega}^* - \beta_{\omega'\omega} \beta_{\omega'\omega}^*) = 2\pi \delta(\omega - \omega''), \quad (2.10)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} (\alpha_{\omega'\omega} \beta_{\omega'\omega} - \beta_{\omega'\omega} \alpha_{\omega'\omega}) = 0.$$

Явные выражения функций in- и out-наборов позволяют записать коэффициенты Боголюбова в виде преобразований Фурье:

$$\alpha_{\omega'\omega}^{\text{B}}, \beta_{\omega'\omega}^{\text{B}*} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \int_{-\infty}^\infty du \exp(\mp i\omega u + i\omega' f(u)) = \quad (2.11)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty dv \exp(i\omega' v \mp i\omega g(v)). \quad (2.12)$$

Здесь верхний знак относится к  $\alpha$ , а нижний — к  $\beta^*$ .

Легко видеть, что эти выражения лоренц-инвариантны, как и должно быть для скалярных произведений решений волнового уравнения.

При постоянной скорости зеркала  $\beta$  in- и out-системы всё ещё различаются, но в этом случае

$$\beta_{\omega'\omega} = 0, \quad \alpha_{\omega'\omega} = 2\pi \delta(D(\beta)\omega' - D(-\beta)\omega), \quad (2.13)$$

$$D(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = e^\alpha, \quad \beta = \tanh \alpha.$$

Доплеровские факторы  $D(\pm\beta)$  связывают частоты  $\omega', \omega$  падающей и отражённой волн с частотами  $D(\beta)\omega', D(-\beta)\omega$  этих волн в собственной системе зеркала. При  $\beta = 0$  in- и out-системы совпадают.

Скалярные произведения (2.8), (2.9) для функций только in- или только out-набора сводятся к выражениям (2.13), взятым при  $\beta = 0$ , т.е. переходят в условия ортогональности и нормировки набора. При этом частоты  $\omega', \omega$  обретают одинаковую ковариантность.

Заметим, что если заменить граничное условие на зеркале  $\phi|_{\text{traj}} = 0$  условием равенства нулю производной поля  $\phi$  вдоль нормали  $n^\alpha$  к мировой линии зеркала

$$n^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \Big|_{\text{traj}} \equiv \sqrt{f'(u)} \frac{\partial \phi}{\partial v} - \sqrt{g'(v)} \frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{\text{traj}} = 0, \quad (2.14)$$

то в in- и out-решениях (2.2), (2.3) изменятся знаки перед вторыми членами, т.е. уходящими направо волнами. Однако коэффициенты Боголюбова останутся теми же, так что спектр излучения нечувствителен к подобному изменению граничного условия на зеркале. Можно говорить о вырождении коэффициентов Боголюбова по отношению к замене граничного условия Дирихле (2.4) граничным условием Ноймана (2.14).

Б.М. Барбашов<sup>1</sup> обратил внимание автора на то, что общее решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничному условию (2.4), можно представить в виде

$$\phi(u, v) = F(v) - F(f(u)) \quad \text{или} \quad G(g(v)) - G(u), \quad (2.15)$$

где  $F(v)$  и  $G(u)$  — произвольные функции своего аргумента. Им можно придать смысл падающей и отражённой волн в in- и out-решениях. В (2.2), (2.3) в качестве  $F$  и  $G$  использовались монохроматические плоские волны.

Нетрудно показать, что общее решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничному условию (2.14), имеет вид

$$\phi(u, v) = F(v) + F(f(u)) \quad \text{или} \quad G(g(v)) + G(u). \quad (2.16)$$

## 2.2. Коэффициенты Боголюбова для спинорного поля и граничное условие

Полные in- и out-системы  $\{\psi_{\text{in } \omega'}, \psi_{\text{in } \omega'}^*\}$  и  $\{\psi_{\text{out } \omega}, \psi_{\text{out } \omega}^*\}$  решений безмассового уравнения Дирака

$$\left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0, \quad (2.17)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix},$$

были получены в [4]. В так называемом спинорном представлении [20] решения с проекциями спина на ось  $x$ , равными  $s = \pm 1/2$ , выглядят следующим обра-

<sup>1</sup> Замечание на семинаре в Дубне.

зом:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in } \omega' + 1/2} &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \exp(-i\omega'v) + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{f'(u)} \exp(-i\omega'f(u)), \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in } \omega' - 1/2} &= \\ &= \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega'v) + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \sqrt{f'(u)} \exp(-i\omega'f(u)), \end{aligned} \quad (2.18б)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{out } \omega + 1/2} &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \sqrt{g'(v)} \exp(-i\omega g(v)) + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega u), \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{out } \omega - 1/2} &= \\ &= \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{g'(v)} \exp(-i\omega g(v)) + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \exp(-i\omega u). \end{aligned} \quad (2.19б)$$

Здесь

$$\xi_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

— двухкомпонентные спиноры, соответствующие проекциям спина  $\pm 1/2$ . Тогда биспиноры  $\psi_{\omega s}$  оказываются собственными функциями матрицы  $\Sigma_3$ :

$$\Sigma_3 \psi_s = 2s \psi_s, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Оператор  $\Sigma_3$  — сохраняющийся, он не зависит от времени и коммутирует с гамильтонианом уравнения Дирака в  $1 + 1$ -пространстве.

Различие между спинорами  $\xi, \eta$  заключается в том, что при лоренцевом преобразовании со скоростью  $v = \tanh \varphi$  вдоль оси  $x$  они преобразуются взаимно обратными матрицами:

$$B = \exp\left(-\frac{\varphi}{2} \sigma_3\right), \quad B^{-1} = \exp\left(\frac{\varphi}{2} \sigma_3\right). \quad (2.22)$$

Это означает, что

$$B \xi_{1,2} = \exp\left(\mp \frac{\varphi}{2}\right) \xi_{1,2}, \quad B^{-1} \eta_{1,2} = \exp\left(\pm \frac{\varphi}{2}\right) \eta_{1,2}, \quad (2.23)$$

а биспиноры  $\psi_s$  преобразуются  $4 \times 4$ -матрицей

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

При пространственном отражении спиноры  $\xi, \eta$  переходят друг в друга с сохранением проекции спина:

$$\xi_{1,2} \rightleftharpoons \eta_{1,2},$$

а биспиноры преобразуются матрицей  $\gamma^0$  (см. [20] §§ 19–21). В результате при пространственном отражении (состоящем в замене

$$u \rightleftharpoons v, \quad f(u) \rightleftharpoons g(v), \quad \omega \rightleftharpoons \omega', \quad \xi_{1,2} \rightleftharpoons \eta_{1,2}$$

и действию матрицы  $\gamma^0$ ) биспинорные in- и out-решения переходят друг в друга,

$$\psi_{\text{in } \omega' \pm 1/2} \rightleftharpoons \psi_{\text{out } \omega \pm 1/2},$$

не меняя проекции спина.

Каждое из приведённых in (out)-решений в  $x, t$ -плоскости справа от мировой линии зеркала описывает спинорное поле с определённой проекцией спина, состоящее из падающей на зеркало монохроматической (немонохроматической) и отражённой от него немонахроматической (монохроматической) волн.

Такие решения однозначно определяются заданием монохроматической волны на характеристике  $u = u_R^- \rightarrow -\infty$  в далёком прошлом (на характеристике  $v = v_R^+ \rightarrow \infty$  в далёком будущем), совпадением фаз падающей и отражённой волн на зеркале и соотношением  $j^1 = \dot{x}(t)j^0$  между пространственной и временной компонентами плотности тока,  $\dot{x}(t)$  — скорость зеркала. Последнее означает, что на траектории зеркала ток течёт только вдоль траектории; ток в направлении, нормальном к траектории, равен нулю:

$$n_x \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \Big|_{\text{traj}} = 0. \quad (2.24)$$

In- и out-решения удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\int dx \psi_{\text{in } \omega' s'}^+(x, t) \psi_{\text{in } \omega s}(x, t) = 2\pi \delta(\omega'' - \omega) \delta_{s' s}, \quad (2.25)$$

$$\int dx \psi_{\text{in } \omega' s'}^+(x, t) \psi_{\text{in } \omega s}^*(x, t) = 0.$$

Условия для out-решений аналогичны.

Коэффициенты Боголюбова определяются скалярными произведениями

$$\alpha_{\omega' s', \omega s}^F = \int dx \psi_{\text{in } \omega' s'}^+(x, t) \psi_{\text{out } \omega s}(x, t), \quad (2.26)$$

$$\beta_{\omega' s', \omega s}^{F*} = \int dx \psi_{\text{in } \omega' s'}^+(x, t) \psi_{\text{out } \omega s}^*(x, t). \quad (2.27)$$

Нетрудно показать, что они сводятся к выражениям

$$\alpha_{\omega' s', \omega s}^F, \beta_{\omega' s', \omega s}^{F*} = \int_{-\infty}^{\infty} du \sqrt{f'(u)} \exp(\mp i\omega u + i\omega' f(u)) = \quad (2.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dv \sqrt{g'(v)} \exp(i\omega' v \mp i\omega g(v)), \quad (2.29)$$

диагональным по проекции спина и независимым от неё. Поэтому в окончательных представлениях (2.28), (2.29) индексы проекции спина не выписываются. Однако, чтобы подчеркнуть различие коэффициентов Боголюбова для бозе- и ферми-полей, мы снабдили их индексами В и F соответственно. Как видно из сравнения (2.28), (2.29) с (2.11), (2.12), это различие сводится к замене функций  $\sqrt{f'(u)}, \sqrt{g'(v)}$  множителями  $\pm \sqrt{\omega/\omega'}$ ,  $\sqrt{\omega'/\omega}$ , обладающими теми же трансформационными свойствами по отношению к лоренцевым преобразованиям.

Заметим, что вместо решений  $\psi_{\omega s}$  с определённой проекцией  $s = \pm 1/2$  спина  $1/2$  можно использовать решения  $\psi_{\omega \lambda}$  с определённой киральностью  $\lambda = \pm 1$ , являющиеся собственными функциями матрицы  $\gamma^5$ . Оператор  $\gamma^5$  — сохраняющийся, он не зависит от времени и

коммутирует с гамильтонианом безмассового уравнения Дирака. Решения  $\psi_{\omega\lambda}$  связаны с  $\psi_{\omega s}$  соотношениями

$$\begin{aligned}\psi_{\pm 1} &= \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)(\psi_{+1/2} + \psi_{-1/2}), \\ \gamma^5 \psi_{\pm 1} &= \pm \psi_{\pm 1}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.30)$$

удовлетворяют тем же условиям ортогональности и нормировки, тому же граничному условию (2.24) и приводят к тем же коэффициентам Боголюбова.

Приведём явный вид in- и out-решений с определённой киральностью:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in } \omega' +} &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \exp(-i\omega'v) + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \sqrt{f'(u)} \exp(-i\omega'f(u)),\end{aligned}\quad (2.31a)$$

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in } \omega' -} &= \\ &= \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega'v) + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{f'(u)} \exp(-i\omega'f(u)),\end{aligned}\quad (2.31b)$$

$$\begin{aligned}\psi_{\text{out } \omega +} &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \sqrt{g'(v)} \exp(-i\omega g(v)) + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \exp(-i\omega u),\end{aligned}\quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned}\psi_{\text{out } \omega -} &= \\ &= \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{g'(v)} \exp(-i\omega g(v)) + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega u).\end{aligned}\quad (2.32b)$$

Как видно из этих решений, у волн с положительной киральностью спин падающей и отражённой волн направлен против импульса, а у волн с отрицательной киральностью — по импульсу. Такие киральности и соответствующие спиральности называются левой и правой, так что  $\gamma^5 \psi_{L,R} = \pm \psi_{L,R}$ . Таким образом, знак спиральности (проекции спина на направление импульса) противоположен знаку киральности.

Переход в систему координат с положительной скоростью  $v = \tanh \varphi$  вдоль оси  $x$  усиливает в  $e^{\varphi/2}$  раз падающую на зеркало волну и ослабляет во столько же раз отражённую волну независимо от принадлежности этих волн in- или out-решениям. Такой переход не изменяет, однако, лоренц-инвариантных коэффициентов Боголюбова, определяемых скалярными произведениями решений.

**2.3. Поведение спина волны при её отражении от зеркала и неизменность коэффициентов Боголюбова**  
Нетрудно видеть, что in (out)-решения  $\psi_{\pm}$  с киральностями  $\pm 1$  отличаются от in (out)-решений  $\psi_{\pm 1/2}$  с проекциями спина  $\pm 1/2$  перестановкой отражённых волн, т.е. перестановкой

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

биспинорных коэффициентов у этих волн. Такая перестановка меняет знак проекции спина у отражённых волн, сохраняя прежними трансформационные свойства

этих волн по отношению к лоренцевым преобразованиям (см. (2.22), (2.23)). Можно сказать, что система решений (2.18), (2.19) обслуживает зеркало, сохраняющее проекцию спина волны при отражении, а система решений (2.31), (2.32) — зеркало, сохраняющее при отражении спиральность, т.е. меняющее проекцию спина на противоположную. В обоих случаях трансформационные свойства отражённой волны по отношению к лоренцевым преобразованиям остаются прежними и противоположными трансформационным свойствам падающей волны.

Пространственное отражение спиральных решений эквивалентно перестановкам

$$\psi_{\text{in } \omega' \pm} \rightleftharpoons \psi_{\text{out } \omega \mp}$$

с изменением спиральности на противоположную.

Как видно из явных выражений для коэффициентов Боголюбова, они определяются произведениями падающих на зеркало или отражённых от зеркала волн, входящих в состав in- и out-решений. Такие произведения одинаковы для in- и out-решений, характеризуемых как проекцией спина, так и характеризуемых спиральностью (ср. (2.18), (2.19) с (2.31), (2.32)). Этим объясняется неизменность коэффициентов Боголюбова при переходе от системы решений, характеризуемых проекцией спина, к системе, характеризуемой спиральностью. Иными словами, коэффициенты Боголюбова вырождены по отношению к поведению спина при отражении волны от зеркала. Однако они диагональны как по проекции спина, так и по спиральности и не зависят от их значений.

### 3. Связь плотностей тока и заряда с коэффициентами Боголюбова скалярного и спинорного полей

#### 3.1. Действия и спектры числа квантов заряженных источников в 3+1-пространстве

Действие  $W$ , определяющее амплитуду  $\exp(iW/\hbar)$  сохранения вакуума в присутствии источника, хотя и считается классической величиной, тем не менее имеет, как и сама амплитуда, непосредственное отношение к квантовой теории. В частности, его удвоенная мнимая часть, делённая на постоянную Планка, равна полному среднему числу квантов, излучённых источником за всё время. Подробнее информацию, извлекаемую из амплитуды  $\exp(iW/\hbar)$ , мы обсудим в разделе 5.

Для вещественного векторного источника с плотностью тока  $j^\alpha(x)$  действие

$$W^{(1)} = \frac{1}{2c} \int d^4x d^4x' j_\alpha(x) A_4^f(x-x', \mu) j^\alpha(x'). \quad (3.1)$$

Поэтому полное число излучённых квантов определяется формулой

$$\begin{aligned}\bar{N}^{(1)} &= \frac{2}{\hbar} \text{Im } W^{(1)} = \\ &= \frac{1}{\hbar c} \int d^4x d^4x' j_\alpha(x) \text{Im } A_4^f(x-x', \mu) j^\alpha(x') = \\ &= \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k |j_x(k)|^2.\end{aligned}\quad (3.2)$$



Этот релятивистски инвариантный и положительный результат непосредственно следует из инвариантного представления причинной функции

$$\Delta_4^f(z, \mu) = i \int d\omega_k \exp(i\mathbf{kz} - ik^0|z^0|), \quad z = x - x', \quad (3.3)$$

$$d\omega_k = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}.$$

Действительно, символ мнимой части позволяет снять знак модуля у координаты  $z^0$  в представлении (3.3), так что

$$\text{Im} \Delta_4^f(z, \mu) = \text{Re} \int d\omega_k \exp(ik_z z^z), \quad z = x - x', \quad (3.4)$$

а дальнейшее интегрирование по  $x, x'$  приводит к написанному выражению. Спектральная плотность

$$|j_z(k)|^2 \equiv |\mathbf{j}(k)|^2 - |j_0(k)|^2 > 0 \quad (3.5)$$

лоренц-инвариантна и положительна, так как для времениподобных или изотропных  $k^\alpha$  4-вектор

$$j_z(k) = \int d^4x j_z(x) \exp(-ikx) \quad (3.6)$$

пространствуподобен благодаря сохранению тока

$$k^\alpha j_\alpha(k) = 0. \quad (3.7)$$

Поэтому  $\text{Im} W^{(1)} > 0$ .

Параметр  $\mu$ , имеющий размерность обратной длины, сохраняется для ликвидации инфракрасной расходимости в случае её возникновения и предполагается как угодно малым.

Для вещественного скалярного источника с плотностью заряда  $\rho(x)$  в приведённых выше формулах следует сделать замену  $j_\alpha(x) \rightarrow \rho(x)$ . Тогда полное число излучённых скалярных квантов равно

$$\begin{aligned} \bar{N}^{(0)} &= \frac{2}{\hbar} \text{Im} W^{(0)} = \\ &= \frac{1}{\hbar c} \int d^4x d^4x' \rho(x) \text{Im} \Delta_4^f(x - x', \mu) \rho(x') = \\ &= \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k |\rho(k)|^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

И здесь  $\text{Im} W^{(0)} > 0$ .

Таким образом, вероятности  $\exp(-2 \text{Im} W^{(1,0)}/\hbar)$  сохранения вакуума в присутствии излучающих векторного или скалярного источников меньше единицы.

Подынтегральные выражения в (3.2) и (3.8) представляют собой спектры среднего числа квантов со спином  $s = 1$  и  $0$ , приведённые во введении (формула (1.3)).

Для точечных электрического и скалярного зарядов, двигающихся по траектории  $x_\alpha(\tau)$  в  $3 + 1$ -пространстве Минковского, плотности тока и заряда и их фурье-компоненты определяются формулами

$$j_\alpha(x), \rho(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ \dot{x}_\alpha(\tau), 1 \} \delta_4(x - x(\tau)), \quad (3.9)$$

$$j_\alpha(k), \rho(k) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ \dot{x}_\alpha(\tau), 1 \} \exp(-ikx(\tau)). \quad (3.10)$$

В соответствии с принятыми выражениями для действия  $W$  и пропагатора  $\Delta_4^f$  предполагается, что  $e$  — электрический и скалярный заряды в хевисайдových единицах. В этом случае среднее число квантов, излучённых зарядом со всей траектории, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{N}^{(1,0)} &= \frac{2 \text{Im} W^{(1,0)}}{\hbar} = \\ &= \frac{e^2}{\hbar c} \iint d\tau d\tau' \{ \dot{x}_\alpha(\tau) \dot{x}^\alpha(\tau'), 1 \} \text{Im} \Delta_4^f(z, \mu), \\ z^\alpha &= x^\alpha(\tau) - x^\alpha(\tau'). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если траектория заряда лежит в  $x, t$ -плоскости, т.е. в  $1 + 1$ -пространстве, то в интеграле (3.10) фигурируют только нулевая и первая компоненты векторов  $x^\alpha(\tau), k^\alpha$ . При этом  $k^\alpha$  остаётся 4-вектором, так как квант распространяется в  $3 + 1$ -пространстве. Соответственно  $j_\alpha(k), \rho(k)$  зависят только от двух независимых переменных, в качестве которых удобно выбрать  $k_\pm = k^0 \pm k^1$ , где  $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$ . Представив инвариантную меру  $d\omega_k$  через переменные  $k_\pm$  и азимутальный угол  $\varphi$ , как это сделано во введении, получим для  $\bar{N}^{(1,0)}$  и спектров  $d\bar{n}_{k_+, k_-}^{(1,0)}$  выражения

$$\bar{N}^{(1,0)} = \int d\bar{n}_{k_+, k_-}^{(1,0)}, \quad (3.12)$$

$$d\bar{n}_{k_+, k_-}^{(1,0)} = \left\{ |j_z(k_+, k_-)|^2, |\rho(k_+, k_-)|^2 \right\} \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2},$$

приведённые во введении (формула (1.4)).

### 3.2. Симметрия линейных связей коэффициентов Боголюбова с плотностями тока и заряда

Из вторично-квантованной теории следует, что абсолютная амплитуда  $\langle \text{out} \omega'' \omega | \text{in} \rangle$  рождения пары и амплитуда  $\langle \text{out} \omega'' | \omega' \text{in} \rangle$  одночастичного рассеяния точечным зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве связаны соотношением

$$\langle \text{out} \omega'' \omega | \text{in} \rangle = - \sum_{\omega'} \langle \text{out} \omega'' | \omega' \text{in} \rangle \beta_{\omega' \omega}^*. \quad (3.13)$$

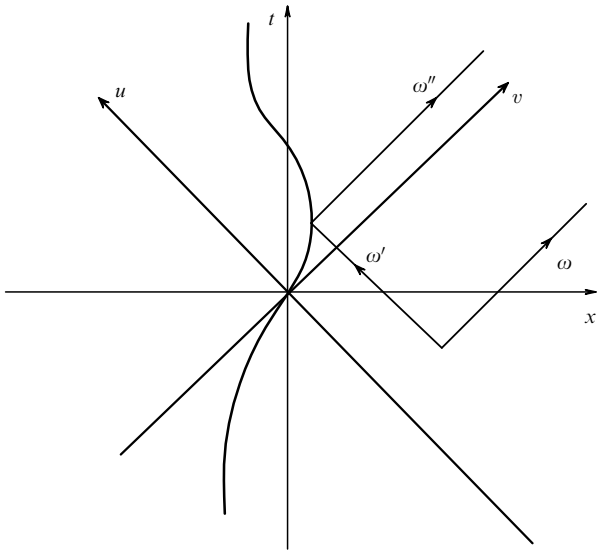
Эта формула позволяет интерпретировать  $\beta_{\omega' \omega}^*$  как амплитуду источника пары безмассовых частиц, потенциально испущенных направо и налево с частотами  $\omega$  и  $\omega'$  соответственно [5]. В то время как частица с частотой  $\omega$  беспрепятственно уходит направо, частица с частотой  $\omega'$  распространяется налево лишь некоторое время, а затем отражается зеркалом и излучается направо с изменённой частотой  $\omega''$  (см. рисунок). В таком случае на временном интервале между рождением пары и отражением левой частицы мы имеем дело с виртуальной парой с энергией  $k^0$ , импульсом  $k^1$  и массой  $m$ :

$$k^0 = \omega + \omega', \quad k^1 = \omega - \omega', \quad m = \sqrt{-k^2} = 2\sqrt{\omega\omega'}. \quad (3.14)$$

Помимо этого времениподобного полярного 2-вектора  $k^\alpha$ , очень важен пространствуподобный аксиальный 2-вектор  $q^\alpha$ , построенный с помощью антисимметричного единичного тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и вектора  $k^\beta$ ,

$$q_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} k^\beta, \quad q^0 = -k^1 = -\omega + \omega', \quad (3.15)$$

$$q^1 = -k^0 = -\omega - \omega' < 0.$$



**Рисунок.** Рождение ускоренным зеркалом пары безмассовых противоположно направленных частиц с частотами  $\omega, \omega'$ .

Посредством векторов  $k^\alpha$  и  $q^\alpha$  и плотностей тока и заряда (3.10) обсуждаемая дуальность в описании процессов в  $3+1$ - и  $1+1$ -пространствах, как и симметрия между коэффициентами  $\alpha_{\omega'\omega}$  и  $\beta_{\omega\omega'}$ , выражается особенно компактно.

Излучение бозонной пары в  $1+1$ -пространстве и кванта со спином  $s = 1$  в  $3+1$ -пространстве:

$$e\beta_{\omega'\omega}^{B*} = -\frac{q_x j^\alpha(k)}{\sqrt{k_+ k_-}}, \quad e\alpha_{\omega\omega'}^B = -\frac{k_x j^\alpha(q)}{\sqrt{k_+ k_-}}. \quad (3.16)$$

Излучение фермионной пары в  $1+1$ -пространстве и кванта со спином  $s = 0$  в  $3+1$ -пространстве:

$$e\beta_{\omega'\omega}^{F*} = \rho(k), \quad e\alpha_{\omega\omega'}^F = \rho(q). \quad (3.17)$$

Фигурирующие здесь плотности тока  $j^\alpha(k), j^\alpha(q)$  и заряда  $\rho(k), \rho(q)$  определяются формулой (3.10) как функционалы траектории  $x^\alpha(\tau)$  на  $x, t$ -плоскости, т.е. в  $1+1$ -пространстве, где они становятся функциями двумерных векторов  $k^\alpha, q^\alpha$  с компонентами (3.14), (3.15). Можно показать, что в  $1+1$ -пространстве  $j^\alpha(k)$  и  $j^\alpha(q)$  являются пространствуподобным и времениподобным полярными 2-векторами, если  $k^\alpha$  и  $q^\alpha$  являются времениподобным и пространствуподобным 2-векторами соответственно.

В вакууме безмассового скалярного или спинорного полей граничное условие на зеркале вызывает появление векторных или скалярных волн возмущения, билинейных по безмассовым полям. Имеются два типа таких волн:

1) волны с амплитудой  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$ , обладающие времениподобным импульсом  $k^\alpha$  с положительной частотой и уносящие энергию от зеркала;

2) волны с амплитудой  $\alpha_{\omega\omega'}^B$ , обладающие пространствуподобным импульсом  $q^\alpha$ , направленным налево к зеркалу, и сопровождающие его при движении.

Волны с пространствуподобными импульсами появляются даже тогда, когда зеркало покоится или движется равномерно (эффект Казимира), в то время как волны с времениподобными импульсами появляются только в случае ускоренного зеркала.

Пары бозе (ферми)-частиц имеют спин 1 (0), так как их источником является вектор плотности тока (скаляр плотности заряда) (см. (3.16) и (3.17), а также [11] или задачу 12.15 в [21]).

### 3.3. Совпадение спина пар, излучаемых зеркалами, со спином квантов, излучаемых зарядами

Рассмотрим связь выражений (3.16), (3.17) с исходными формулами (2.11), (2.12), (2.28), (2.29) для коэффициентов Боголюбова, перейдя в последних от переменных интегрирования  $u, v$  к координатам точек на траектории зеркала с моментами собственного времени  $\tau, \tau'$ :

$$u = x_-(\tau), \quad f(u) = x_+(\tau); \quad (3.18)$$

$$v = x_+(\tau'), \quad g(v) = x_-(\tau').$$

Тогда пары выражений для  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  и  $\alpha_{\omega\omega'}^B$  представляются  $\pm$  компонентами 2-векторов  $u^\alpha(k)$  и  $u^\alpha(q)$ , различающихся только физическим смыслом своих векторных аргументов  $k^\alpha$  и  $q^\alpha$ :

$$\beta_{\omega'\omega}^{B*} = \frac{k_-}{\sqrt{k_+ k_-}} u_+(k) = -\frac{k_+}{\sqrt{k_+ k_-}} u_-(k), \quad (3.19)$$

$$\alpha_{\omega\omega'}^B = \frac{q_-}{\sqrt{k_+ k_-}} u_+(q) = -\frac{q_+}{\sqrt{k_+ k_-}} u_-(q). \quad (3.20)$$

Векторы

$$u^\alpha(k) = \int dt \dot{x}^\alpha(\tau) \exp(-ikx(\tau)), \quad (3.21)$$

$$u^\alpha(q) = \int d\tau \dot{x}^\alpha(\tau) \exp(-iqx(\tau))$$

лишь отсутствием множителя  $e$  (заряда в хевисайдовых единицах) отличаются от плотностей тока

$$j^\alpha(k) = eu^\alpha(k), \quad j^\alpha(q) = eu^\alpha(q) \quad (3.22)$$

точечного заряда,двигающегося по той же траектории, что и зеркало. В случае  $\beta$ -коэффициента аргументом тока является времениподобный полярный вектор  $k^\alpha$  с компонентами (3.14), а в случае  $\alpha$ -коэффициента — пространствуподобный аксиальный вектор  $q^\alpha$  с компонентами (3.15).

Заметим, что двойные представления (3.19), (3.20) для коэффициентов  $\beta^*$  и  $\alpha$  связаны сохранением тока:

$$k_- u_+(k) + k_+ u_-(k) = -2k_x u^\alpha(k) = 0 \quad (3.23)$$

и аналогично для  $u^\alpha(q)$ :

$$q_- u_+(q) + q_+ u_-(q) = -2q_x u^\alpha(q) = 0. \quad (3.24)$$

Таким образом, компенсирующие друг друга слагаемые в этих законах сохранения имеют физический смысл коэффициентов Боголюбова  $\pm\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  и  $\pm\alpha_{\omega\omega'}^B$ .

Так как  $k_\pm = \mp q_\pm$ , то полусуммы двух выражений для коэффициентов Боголюбова в (3.19) и (3.20) (умноженные на заряд) представляют собой произведения единичных векторов

$$-\frac{q_x}{\sqrt{k_+ k_-}}, \quad -\frac{k_x}{\sqrt{k_+ k_-}} \quad (3.25)$$

и векторов плотности тока  $j^z(k)$ ,  $j^z(q)$  соответственно (см. 3.16)).

Так как в  $1+1$ -пространстве  $j^z(k)$  и  $j^z(q)$  — пространствуподобный и времениподобный полярные векторы, а их аргументы  $k^z$  и  $q^z$  — времениподобный и пространствуподобный векторы, то  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  — псевдоскаляр, свёрнутый из пространствуподобных аксиального и полярного векторов, а  $\alpha_{\omega'\omega}^B$  — скаляр, свёрнутый из времениподобных полярных векторов.

Выражения (2.28), (2.29) для  $\beta^{F*}$ - и  $\alpha^F$ -коэффициентов фермионного поля той же заменой переменных интегрирования (3.18) сводятся к скалярам  $u(k)$ ,  $u(q)$ , различающимся только физическим смыслом своих аргументов  $k^z$  и  $q^z$ :

$$\begin{aligned}\beta_{\omega'\omega}^{F*} &= u(k) = \int d\tau \exp(-ikx(\tau)), \\ \alpha_{\omega'\omega}^F &= u(q) = \int d\tau \exp(-iqx(\tau)).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Они лишь отсутствием множителя  $e$  отличаются от фурье-образов

$$\rho(k) = eu(k), \quad \rho(q) = eu(q) \quad (3.27)$$

плотности скалярного заряда, движущегося по той же траектории, что и зеркало (см. (3.17)).

То, что амплитуда  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  источника виртуальной пары бозонов определяется током  $j^z(k_+, k_-)$ , а амплитуда  $\beta_{\omega'\omega}^{F*}$  источника пары фермионов — скаляром  $\rho(k_+, k_-)$ , означает, что спин бозонной пары равен 1, а спин фермионной — равен 0. Таким образом, совпадение спектров излучения зеркала в  $1+1$ -пространстве и зарядов в  $3+1$ -пространстве можно объяснить совпадением спина пары, излучаемой зеркалом, со спином кванта, излучаемого зарядом [5]. В этой связи заметим, что в скалярном произведении (3.16), определяющем  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$ , пространствуподобный псевдовектор  $-q_z/\sqrt{k_+k_-}$  ортогонален 2-импульсу пары, имеет длину, равную 1, и в собственной системе пары представляется только пространственной компонентой, как и вектор тока  $j^z(k)$ . Его можно считать вектором поляризации или спином бозонной пары.

В заключение разделов 3.2 и 3.3 заметим, что формулы (3.16), (3.17) и (3.19), (3.20), (3.26), (3.27) на уровне линейных связей демонстрируют дуализм квазиклассического описания излучения квантов точечным зарядом в  $3+1$ -пространстве и квантового описания излучения пар квантов точечным зеркалом в  $1+1$ -пространстве.

#### 3.4. Функциональное совпадение спектров бозонных и фермионных пар, излучаемых зеркалами, со спектрами квантов, излучаемых электрическим и скалярным зарядами

Среднее число излучённых зеркалом бозе- или ферми-квантов с частотой  $\omega$  в интервале  $d\omega$  определяется выражением

$$d\bar{n}_{\omega}^{B,F} = \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} |\beta_{\omega'\omega}^{B,F}|^2, \quad (3.28)$$

в котором интеграл есть среднее значение оператора  $N_{\text{out}\omega} = a_{\text{out}\omega}^{\dagger} a_{\text{out}\omega}$  числа out-частиц с частотой  $\omega$  в вакууме in-частиц:

$$\langle \text{in} | a_{\text{out}\omega}^{\dagger} a_{\text{out}\omega} | \text{in} \rangle = \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} |\beta_{\omega'\omega}|^2. \quad (3.29)$$

Так как частицы рождаются парами, то число пар равно числу частиц, если частица и античастица различаются, и вдвое меньше числа частиц, если частица и античастица тождественны. Мы будем рассматривать первый случай. Тогда полное среднее число излучённых пар равно

$$\bar{N}^{B,F} = \iint_0^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}^{B,F}|^2. \quad (3.30)$$

Такой физический смысл  $d\bar{n}_{\omega}^{B,F}$  и  $\bar{N}^{B,F}$  следует из вторичного квантования полей  $\phi$  и  $\psi$ , когда коэффициентом разложения поля по плоским волнам с положительной и отрицательной частотами придаётся смысл операторов поглощения частиц и рождения античастиц. Вторично-квантованная теория позволяет построить все возможные амплитуды многочастичного рождения, аннигиляции и рассеяния с помощью коэффициентов Боголюбова [5, 19, 22].

Коэффициенты Боголюбова и число состояний  $d\omega d\omega'/(2\pi)^2$  лоренц-инвариантны. Поэтому спектр  $d\bar{n}_{\omega}$  среднего числа испущенных квантов и полное среднее число квантов также релятивистски инвариантны.

Покажем теперь, что приведённые в (3.12) и (1.4) выражения для  $\bar{N}^{(1)}$  и  $\bar{N}^{(0)}$  только множителями  $e^2/\hbar c$  отличаются от полных средних чисел бозонных и фермионных пар

$$\bar{N}^{B,F} = \iint_0^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}^{B,F}|^2, \quad (3.31)$$

излучаемых точечным зеркалом в  $1+1$ -пространстве.

Рассмотрим сначала квадрат модуля

$$|\beta_{\omega'\omega}^B|^2 = \beta_{\omega'\omega}^B \beta_{\omega'\omega}^{B*},$$

используя для его сомножителей оба выражения, приведённые в (3.19). Тогда

$$|\beta_{\omega'\omega}^B|^2 = -\frac{1}{2}(u_+ u_-^* + u_- u_+^*) = u_z(k) u^{z*}(k) = |u_z(k)|^2. \quad (3.32)$$

Согласно (3.26), квадрат модуля коэффициента Боголюбова для ферми-поля есть не что иное, как

$$|\beta_{\omega'\omega}^F|^2 = |u(k)|^2. \quad (3.33)$$

В (3.32) и (3.33) времениподобный 2-вектор  $(k^1, k^0)$  связан с  $\omega$ ,  $\omega'$  формулами (3.14), т.е.

$$k^0 = \omega + \omega', \quad k^1 = \omega - \omega',$$

или, если угодно,

$$k_+ = 2\omega, \quad k_- = 2\omega'.$$

Тогда

$$\frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2}$$

и

$$\bar{N}^{B,F} = \iint_0^{\infty} \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2} \left\{ |u_z(k)|^2, |u(k)|^2 \right\}. \quad (3.34)$$

Поскольку  $j_x(k) = eu_x(k)$  и  $\rho(k) = eu(k)$ , то согласно (3.12) получаем связь

$$\bar{N}^{(1,0)} = \frac{e^2}{\hbar c} \bar{N}^{B,F}, \quad d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)} = \frac{e^2}{\hbar c} d\bar{n}_{k_+k_-}^{B,F} \quad (3.35)$$

как между полными средними числами квантов со спином 1 и 0, излучённых зарядами в 3 + 1-пространстве, и бозонных и фермионных пар, испущенных зеркалом в 1 + 1-пространстве, так и между их спектрами.

### 3.5. Совпадение спектров бозонных и фермионных пар при больших частотах

Рассмотрим спектры бозонных и фермионных пар, используя для  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  и  $\beta_{\omega'\omega}^{F*}$  исходные представления (2.11) и (2.28):

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^B = \left| \sqrt{\frac{k_+}{k_-}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left[ \frac{i}{2} (k_+u + k_-f(u)) \right] \right|^2 \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2}, \quad (3.36)$$

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^F = \left| \int_{-\infty}^{\infty} du \sqrt{f'(u)} \exp \left[ \frac{i}{2} (k_+u + k_-f(u)) \right] \right|^2 \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2}. \quad (3.37)$$

Как видно из этих выражений, они заметно различаются. Однако для достаточно гладкой траектории зеркала и больших значений  $k_{\pm}$ , когда интегралы в (3.36), (3.37) можно вычислять методом перевала, эти спектры совпадают. Действительно, в этом случае перевальная точка  $u = u_0$  удовлетворяет уравнению

$$f'(u_0) = -\frac{k_+}{k_-}$$

и лежит в комплексной плоскости  $u$ , так как на вещественной оси  $f'(u) > 0$  вследствие времениподобности траектории. Поэтому в области больших значений  $k_{\pm}$  спектры обладают общей экспоненциальной асимптотикой

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^B = d\bar{n}_{k_+k_-}^F = \frac{k_+}{k_-^2 |f''(u_0)|} \exp \left[ -\text{Im} (k_+u_0 + k_-f(u_0)) \right] \frac{dk_+ dk_-}{4\pi}. \quad (3.38)$$

Такое асимптотическое поведение согласуется с теоремой, по которой фурье-компонента гладкой функции в высокочастотной области уменьшается быстрее любой обратной целой степени частоты [23]. О высокочастотной асимптотике спектра в электродинамике см. [24].

Вместе с тем совпадение спектров бозонных и фермионных пар в области высоких частот  $\omega$ ,  $\omega'$  составляющих эти пары квантов со спином 0 и 1/2 может рассматриваться как проявление своеобразной суперсимметрии. Спектры совпадают, оставаясь, теперь уже одинаковыми, функционалами траектории зеркала и функциями двух переменных.

Поскольку спектры  $d\bar{n}_{k_+k_-}^B$  и  $d\bar{n}_{k_+k_-}^F$  бозонных и фермионных пар, излучаемых зеркалом, являются чисто геометрическими величинами и при  $k_{\pm} \rightarrow \infty$  совпадают, то в силу обнаруженной симметрии

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1)} = \frac{e^2}{\hbar c} d\bar{n}_{k_+k_-}^B, \quad d\bar{n}_{k_+k_-}^{(0)} = \frac{e^2}{\hbar c} d\bar{n}_{k_+k_-}^F$$

естественно предположить, что спектры  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1)}$ ,  $d\bar{n}_{k_+k_-}^{(0)}$  при больших значениях  $k_{\pm}$  не должны зависеть от спина излучаемых квантов, т.е. должны быть одинаковыми. Это означает, что должны быть одинаковыми величины электрического и скалярного зарядов.

## 4. Голографический принцип квантования затравочного заряда

### 4.1. Связь причинных функций Грина в $d$ - и $d-2$ -мерных пространствах

Принципиальной основой обсуждаемой дуальности служит связь между причинными функциями в  $d$ - и  $d-2$ -мерных пространствах Минковского:

$$\Delta_d^f(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \Delta_{d-2}^f(x, m). \quad (4.1)$$

Поскольку  $\Delta_d^f(x, \mu)$  удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$(-\partial_x^2 + \mu^2) \Delta_d^f(x, \mu) = \delta_d(x), \quad (4.2)$$

в котором  $\partial_x^2$  — лоренцев квадрат  $d$ -мерного вектора  $\partial_x = \partial/\partial x^{\alpha}$ , а  $\delta_d(x)$  —  $d$ -мерная дельта-функция Дирака, то связь (4.1) предполагает не только интегрирование по  $m^2$ , но и аналитическое продолжение правой части по аргументу  $x^2$  из  $d-2$ -мерной области в  $d$ -мерную.

Решение уравнения (4.2) может быть записано через функцию Макдональда:

$$\Delta_d^f(x, \mu) = \frac{i(\mu\sqrt{x^2})^{\nu}}{(2\pi)^{\nu+1} x^{2\nu}} K_{\nu}(\mu\sqrt{x^2}), \quad \nu = \frac{d-2}{2}, \quad (4.3)$$

если  $x^2 = \mathbf{x}^2 - x_0^2 > 0$ , и аналитически продолжено через верхнюю полуплоскость комплексного  $x^2$  на полуось  $x^2 < 0$ , где его удобно записать через функцию Ханкеля:

$$\Delta_d^f(x, \mu) = \frac{\exp(-i\pi\nu)(\mu\sqrt{-x^2 - i\epsilon})^{\nu}}{4(2\pi)^{\nu}(-x^2 - i\epsilon)^{\nu}} H_{\nu}^{(2)}(\mu\sqrt{-x^2 - i\epsilon}). \quad (4.4)$$

Нетрудно видеть, что интегральная связь (4.1) истекает из известной дифференциальной связи

$$- [z^{\nu} K_{\nu}(z)]' = z^{\nu} K_{\nu-1}(z) \quad (4.5)$$

между функциями Макдональда и исчезновения  $z^{\nu} K_{\nu}(z)$  на бесконечности (см. [25]).

Для нас существенна связь между функциями пространства в четырёхмерном ( $d=4$ ) и двумерном ( $d-2=2$ ) пространствах. Подчеркнём два обстоятельства.

1. Связь между процессами распространения в двух пространствах разной размерности не случайна, а однозначно определена математически формулой (4.1).

2. Существенно, что функция  $\Delta_4^f(x, \mu)$  в левой части (4.1) описывает распространение частицы с массой  $\mu$ , принимающей одно любое, например, как угодно малое, значение, а функция  $\Delta_2^f(x, m)$  в правой части (4.1) описывает распространение "частицы" с массой  $m$ , принимающей все возможные значения в интервале  $\mu \leq m < \infty$ . Такой "частицей" оказывается пара из двух разлетающихся в противоположные стороны *безмассовых* частиц, образуемых за счёт изменения энергии-импульса флуктуаций вакуумного поля в 1 + 1-прост-

ранстве ускоренно движущимся зеркалом. Эти частицы следует считать безмассовыми, иначе уравнение (4.1) не обладало бы единственным свободным параметром  $\mu$ .

Таким образом, уравнение (4.1) не только связывает пропагаторы кванта и пары в пространствах размерностей  $d = 4$  и  $d = 2$ , но и указывает на безмассовость частиц, образующих пару. Безмассовость частиц, образующих массивную пару в  $1 + 1$ -пространстве, — принципиальная, чисто геометрическая черта обсуждаемой дуальности.

#### 4.2. Снова о функциональном совпадении спектров средних чисел квантов и пар, испускаемых зеркалом и зеркалом в пространствах $d = 4$ и $d = 2$

Рассмотрим среднее число квантов, излучённых зарядом со всей траектории, целиком лежащей в  $x, t$ -плоскости. Если для таких траекторий в формуле (3.11) использовать связь причинных функций в  $3 + 1$ - и  $1 + 1$ -пространствах,

$$\Delta_4^f(z, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \Delta_2^f(z, m), \quad (4.6)$$

$$\Delta_2^f(z, m) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \exp \left[ im(z^1 \sinh \theta - |z^0| \cosh \theta) \right],$$

и приведённое представление для  $\Delta_2^f$  с двумерным вектором  $z^\alpha = x^\alpha(\tau) - x^\alpha(\tau')$ , то  $\text{Im} \Delta_4^f$  в (3.11) можно заменить выражением

$$\text{Im} \Delta_4^f(z, \mu) = \text{Re} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dm^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \exp(ikz) \quad (4.7)$$

и провести интегрирование по  $\tau, \tau'$ . Тогда  $\bar{N}^{(1,0)}$  станут равными

$$\bar{N}^{(1,0)} = \frac{e^2}{\hbar c} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dm^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \left\{ |u_x(k)|^2, |u(k)|^2 \right\}. \quad (4.8)$$

Здесь 2-вектор  $u_x(k)$  и скаляр  $u(k)$  определены в (3.21) и (3.26), а волновой 2-вектор  $(k^1, k^0)$  частицы с массой  $m$ , возникшей в  $1 + 1$ -пространстве, связан с волновым 4-вектором  $k^\alpha = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_\perp, k^0 = (k_1^2 + k_\perp^2 + \mu^2)^{1/2})$  кванта в  $3 + 1$ -пространстве соотношениями

$$k^1 = m \sinh \theta, \quad k^0 = m \cosh \theta, \quad m = \sqrt{k_\perp^2 + \mu^2}. \quad (4.9)$$

Заметим, что если  $m$  — масса частицы, то  $k^1/k^0 = \tanh \theta$  — её скорость, а  $\theta$  — быстрота. Такой физический смысл параметры  $m$  и  $\theta$  приобретают благодаря связи функций распространения в  $3 + 1$ - и  $1 + 1$ -пространствах.

Более того, согласно (4.9)  $k^1$  и  $k^0$  — это разность и сумма двух частот, определённых ниже формулой (4.11), т.е. частицу с массой  $m$  можно считать парой безмассовых частиц, разлетающихся в противоположных направлениях.

С другой стороны, для средних чисел  $\bar{N}^{\text{B,F}}$  бозонных и фермионных пар

$$\bar{N}^{\text{B,F}} = \iint_0^\infty \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}^{\text{B,F}}|^2 \quad (4.10)$$

с помощью замены переменных

$$\omega = \frac{1}{2} m \exp \theta, \quad \omega' = \frac{1}{2} m \exp(-\theta), \quad d\omega d\omega' = \frac{1}{4} dm^2 d\theta \quad (4.11)$$

можно получить точно те же выражения, что и в (4.8), но без множителя  $e^2/\hbar c$ :

$$\bar{N}^{\text{B,F}} = \int_0^\infty \frac{dm^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \left\{ |u_x(k)|^2, |u(k)|^2 \right\}, \quad (4.12)$$

$$\bar{N}^{(1,0)} = \frac{e^2}{\hbar c} \bar{N}^{\text{B,F}}.$$

Здесь 2-вектор  $(k^1, k^0)$  связан с частотами  $\omega, \omega'$  квантов пары соотношениями

$$k^1 = \omega - \omega' = m \sinh \theta, \quad k^0 = \omega + \omega' = m \cosh \theta, \\ m = 2\sqrt{\omega\omega'} = \sqrt{k_0^2 - k_1^2}. \quad (4.13)$$

Выражение (4.12) совпадает с ранее приведённым  $\bar{N}^{\text{B,F}}$  в формуле (3.34); в нём вместо  $\omega, \omega'$  использовались переменные  $k_+ = 2\omega, k_- = 2\omega'$ , эквивалентные переменным  $m, \theta$ , так как согласно (4.13)  $k_\pm = m \exp(\pm\theta)$ .

В то время как формула (4.9) связывает волновой 2-вектор  $(k^1, k^0)$  массивной частицы, появившейся в  $1 + 1$ -пространстве, с волновым 4-вектором кванта, излучаемого зарядом в  $3 + 1$ -пространстве, формула (4.13) придаёт ему смысл волнового вектора пары направленных в противоположные стороны безмассовых частиц с частотами  $\omega, \omega'$ . Пара имеет массу  $m$  в непрерывном спектре  $\mu \leq m < \infty$  и скорость  $\tanh \theta$  в интервале  $(-1, 1)$  и обязана своим появлением ускоренному точечному зеркалу в  $1 + 1$ -пространстве.

Таким образом, в формуле (4.8) для  $\bar{N}^{(1,0)}$  переменные  $m, \theta$  появились в результате перехода от  $\Delta_4^f$  к  $\Delta_2^f$  и имеют физический смысл массы и быстроты частицы в  $1 + 1$ -пространстве. В то же время плотность тока  $u_x(k)$  и плотность заряда  $u(k)$ , как и множитель  $e^2/\hbar c$ , появились в этой формуле как фурье-образы источников  $j_x(x)$  и  $\rho(x)$ , содержащихся в действиях  $W^{(1,0)}$ .

Такие же плотности  $u_x(k)$  и  $u(k)$  в формуле (4.12) для  $\bar{N}^{\text{B,F}}$  возникли по причине их участия в релятивистски инвариантной структуре скалярных произведений — коэффициентов Боголюбова  $\beta_{\omega'\omega}^{\text{B}}$  и  $\beta_{\omega'\omega}^{\text{F}}$  для скалярного и спинорного полей (см. (2.8), (2.9) и (2.26), (2.27)). Грубо говоря, наличие производной  $\partial_t$  в скалярных произведениях (2.8), (2.9) ведёт к их пропорциональности токам  $u_x(k), u_x(q)$ , а её отсутствие в скалярных произведениях (2.26), (2.27) приводит последние к скалярам  $u(k), u(q)$ . А переменные  $m, \theta$  появились в (4.12) благодаря замене частот квантов пары массой и быстротой самой пары.

Таким образом, квинтэссенцией обсуждаемой дуальности являются геометрические связи:

а) причинных функций Грина в  $3 + 1$ - и  $1 + 1$ -пространствах;

б) плотностей тока и заряда со скалярными произведениями скалярного и спинорного полей в тех же пространствах.

Конечно, не следует думать, что всякий раз, когда заряд и зеркало проходят один и тот же участок их общей траектории, испускание кванта с 4-импульсом  $k^\alpha = (\mathbf{k}, k^0)$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_\perp, k^0 = (k_1^2 + k_\perp^2)^{1/2}$  зарядом в  $3 + 1$ -пространстве сопровождается испусканием пары с 2-импульсом  $(\mathbf{k}_1, k^0)$  и массой  $m = k_\perp$  зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве. Так было бы, если бы существовала

физическая связь, объединяющая испускание кванта в  $3 + 1$ -пространстве и испускание пары в  $1 + 1$ -пространстве в одно событие, и существовала бы теория, содержащая, в частности, для этих пространств теорию источников Швингера и теорию преобразований Боголюбова. В такой теории условие  $e^2/\hbar c = 1$  выполнялось бы автоматически.

Однако, если  $e^2/\hbar c = 1$ , то и при отсутствии такой физической связи и теории при очень большом числе проходов по траектории средние числа квантов и пар, испущенных зарядом и зеркалом с одинаковых участков траектории и обладающих однозначно связанными квантовыми числами, будут как угодно близкими. В этом случае имеется информационная, голографическая связь между процессами излучения в 4-мерном и 2-мерном пространствах. Согласно этой связи, совпадают спектры *средних чисел* квантов и пар, испущенных зарядом и зеркалом со всей их общей траектории. Они совпадают как функции двух переменных и функционалы траектории.

Обсуждаемая дуальность, связывающая классическую и квантовую теории в пространствах Минковского 4-х и 2-х измерений, в некотором смысле напоминает дуальность классического и квантового описаний в пространствах соседних размерностей, провозглашённую 'т Хофтом [26] и Саскиндом [27] как голографический принцип. Такая дуальность действительно была обнаружена Губсером, Клебановым и Поляковым [28] и Малдасеной [29] для различных типов квазиклассической супергравитации в анти-де-ситтеровском пространстве и квантовыми конформными теориями на границе этого пространства. Кажется правдоподобным, по крайней мере в нашем случае, что причиной таких дуальностей может быть соответствие между отдельной частицей в пространстве более высокой размерности и парой частиц в пространстве более низкой размерности. Описание большего числа частиц в пространстве низкой размерности требует учёта квантово-механических интерференционных эффектов.

## 5. Теория источников и спектры среднего числа квантов, излучаемых зарядами

Проследим, как возникает квантовый спектр  $d\bar{n}_k$  среднего числа излучаемых квантов и его связь  $d\mathcal{E}_k = \hbar\omega d\bar{n}_k$  с классическим спектром  $d\mathcal{E}_k$  средней энергии излучения, исходя из теории источников, изложенной Швингером в монографии [11]. В этой теории полное описание процессов испускания и поглощения частиц даётся амплитудой сохранения вакуума в присутствии источника  $S$ :

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^S = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W(S)\right). \quad (5.1)$$

При этом удвоенная мнимая часть действия  $W$ , делённая на постоянную Планка  $\hbar$ , равна среднему числу  $\bar{N}$  частиц, образованных источником за всё время. В свою очередь,  $\bar{N}$  представляет собой интеграл от спектра  $d\bar{n}_k$  среднего числа излучаемых квантов,

$$\bar{N} = \frac{2 \operatorname{Im} W}{\hbar} = \int d\bar{n}_k, \quad (5.2)$$

каждый из которых уносит импульс  $\hbar\mathbf{k}$  и энергию  $\hbar\omega$ , определяемые волновым вектором  $k^\alpha = (\mathbf{k}, k^0)$ ,  $k^0 = \omega/c$ .

Такова непосредственная связь очень важной квазиклассической величины с наиболее важным объектом квантовой физики — квантами поля источника.

Квазиклассичность вакуумной амплитуды заключается в том, что движение источника считается заданным, т.е. пренебрегается воздействием испускания и поглощения квантов на источник, а также пренебрегается взаимодействием между квантами. Это приближение напоминает приближение, используемое при вычислении спектра излучения чёрного тела: температура газа фотонов в полости чёрного тела считается заданной, не зависящей от испускания и поглощения квантов, а взаимодействием между квантами пренебрегается.

В следующем ниже изложении рекомендуется обратить внимание на появление целых чисел  $n_k = 0, 1, 2, \dots$  — чисел квантов, заполняющих состояние с импульсом  $k^\alpha = (\mathbf{k}, k^0)$ , и процедуру превращения их в средние числа заполнения  $\bar{n}_k$  и в спектральное распределение  $d\bar{n}_k$  среднего числа квантов. В упоминаемой выше связи между спектром среднего числа излучаемых квантов и спектром средней энергии излучения отражено представление об энергии  $\hbar\omega$  на один квант.

**5.1. Вакуумная амплитуда источника частиц со спином 0**  
Действие  $W$  квадратично по источникам и для частиц со спином нуль представляется выражением

$$W(\rho) = \frac{1}{2c} \int d^4x d^4x' \rho(x) A^f(x-x', \mu) \rho(x') \quad (5.3)$$

со скалярной функцией  $\rho(x)$  — плотностью скалярного заряда — в качестве источника. Размерность  $\rho(x)$  равна  $e \text{ см}^{-3}$ . Размерность скалярного заряда  $e$  такая же, как электрического, т.е. равна эрг<sup>1/2</sup> см<sup>1/2</sup>.

Причинная функция распространения поля, создаваемого источником, подчиняется уравнению

$$(-\partial_x^2 + \mu^2) A^f(x-x') = \delta(x-x'). \quad (5.4)$$

Она релятивистски инвариантна, симметрична,

$$A^f(x-x') = i \int d\omega_k \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - ik^0|x^0-x'^0|], \quad (5.5)$$

$$d\omega_k = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}, \quad k^0 = \frac{\omega}{c} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2},$$

и содержит постоянную Планка только в параметре  $\mu = mc/\hbar$ , имеющем смысл обратной комптоновской длины квантов поля. Пространственные и временная компоненты волнового вектора  $k^\alpha = (\mathbf{k}, k^0)$  имеют размерность обратной длины, 4-вектор координаты  $x^\alpha = (\mathbf{x}, x^0 = ct)$ . Размерность инвариантной меры  $d\omega_k$  — квадрат обратной длины.

Предположим, что источник  $\rho(x)$  состоит из излучающего  $\rho_2(x)$  и поглощающего  $\rho_1(x)$  источников,

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x),$$

занимающих конечные пространственно-временные области, в которых процессы поглощения источником  $\rho_1(x)$  происходят после окончания процессов излучения источником  $\rho_2(x)$ . В таком случае амплитуду  $\langle 0_+ | 0_- \rangle^{\rho}$

можно представить в виде

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\rho_1} \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar c} \int d^4x d^4x' \rho_1(x) A^f(x-x', \mu) \rho_2(x') \right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\rho_2}, \quad (5.6)$$

используя симметрию показателя экспоненциальной функции относительно перестановки  $\rho_1(x) \rightleftharpoons \rho_2(x)$  и симметрию причинной функции. В дальнейшем, как правило, множитель  $1/\hbar c$  в показателе экспоненциальной функции будем считать равным единице, т.е. использовать систему единиц, в которой  $\hbar, c = 1$ .

В соответствии с причинным расположением источников этот показатель можно записать в виде суммы по дискретным значениям волнового вектора,

$$\begin{aligned} & i \int d^4x d^4x' \rho_1(x) A^f(x-x') \rho_2(x') = \\ & = i \int d^4x d^4x' \rho_1(x) \left[ i \int d\omega_k \exp(ik(x-x')) \right] \rho_2(x') = \\ & = \sum_k i\rho_{1k}^* i\rho_{2k}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

если использовать следующие определения:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \sqrt{d\omega_k} \rho(k), \quad \rho(k) = \int d^4x \rho(x) \exp(-ikx), \\ \rho^*(k) &= \rho(-k), \end{aligned} \quad (5.8)$$

и считать, что каждое дискретное значение волнового вектора находится внутри соответствующего интервала  $d^3k$ . Тогда экспоненциальную функцию в (5.6) можно представить в виде произведения экспоненциальных функций, относящихся к отдельным значениям  $k$ ,

$$\begin{aligned} \exp \left[ \sum_k i\rho_{1k}^* i\rho_{2k} \right] &= \prod_k \exp [i\rho_{1k}^* i\rho_{2k}] = \\ &= \prod_k \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(i\rho_{1k}^*)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \frac{(i\rho_{2k})^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

или в виде произведения соответствующих разложений этих функций. Заметим, что размерность  $\rho_k$  равна размерности заряда  $e$ , так что показатель в (5.6), содержащий множитель  $1/\hbar c$ , безразмерен.

Здесь впервые для каждого  $k$  возникают целые числа  $n_k = 0, 1, 2, \dots$ , которые можно трактовать как числа частиц в состоянии с волновым вектором  $k$ , лежащим в интервале  $d^3k$ . Иными словами, это числа заполнения различных состояний  $k$ .

Полученное разложение (5.9) позволяет представить вакуумную амплитуду (5.1) для причинно-упорядоченной пары источников в виде

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho = \sum_{\{n_k\}} \langle 0_+ | \{n_k\} \rangle^{\rho_1} \langle \{n_k\} | 0_- \rangle^{\rho_2} \quad (5.10)$$

со следующими выражениями для многочастичных амплитуд рождения и поглощения:

$$\langle \{n_k\} | 0_- \rangle^\rho = \langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho \prod_k \frac{(i\rho_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}, \quad (5.11)$$

$$\langle 0_+ | \{n_k\} \rangle^\rho = \langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho \prod_k \frac{(i\rho_k^*)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}. \quad (5.12)$$

Символ  $\{n_k\}$  обозначает набор целых чисел заполнения всех состояний  $k$ , характеризующий рассматриваемые многочастичные амплитуды. Иными словами,  $\{n_k\}$  — это  $n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3}, \dots$ , где  $k_1, k_2, k_3, \dots$  — волновые векторы, фигурирующие в произведении  $\prod_k$ . Соответственно  $\sum_{\{n_k\}}$  обозначает сумму по целым числам  $n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3}, \dots$ , каждое из которых принимает значения  $0, 1, 2, \dots$ .

То, что числа  $n_k$  представляют собой числа заполнения состояний с соответствующим импульсом  $k$ , подтверждается законом преобразования многочастичных амплитуд при трансляции источника в пространстве-времени. А именно, при замене  $\rho(x)$  на  $\rho(x+X)$  фурье-компонента источника и амплитуды вероятностей рождения и поглощения приобретают фазовые множители:

$$\begin{aligned} \rho(k) &\rightarrow \exp(ikX) \rho(k), \\ \langle \{n_k\} | 0_- \rangle^\rho &\rightarrow \exp(iKX) \langle \{n_k\} | 0_- \rangle^\rho, \\ \langle 0_+ | \{n_k\} \rangle^\rho &\rightarrow \langle 0_+ | \{n_k\} \rangle^\rho \exp(-iKX). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Их фаза пропорциональна полному волновому 4-вектору

$$K^\mu = \sum_k n_k k^\mu \quad (5.14)$$

многочастичного состояния  $\{n_k\}$ . Каждое значение импульса в этой сумме умножается на число частиц, обладающих этим импульсом.

Сумма абсолютных вероятностей рождения частиц источником  $\rho$  во всех возможных состояниях должна быть равна единице. Для амплитуды (5.11) это означает, что

$$\sum_{\{n_k\}} |\langle \{n_k\} | 0_- \rangle^\rho|^2 = |\langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho|^2 \exp \left[ \sum_k |\rho_k|^2 \right] = 1. \quad (5.15)$$

Но согласно исходному выражению (5.1) для вакуумной амплитуды

$$\begin{aligned} |\langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho|^2 &= \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \text{Im} W \right) = \\ &= \exp \left[ - \int d^4x d^4x' \rho(x) \text{Im} A^f(x-x') \rho(x') \right] = \\ &= \exp \left[ - \int d^4x d^4x' \rho(x) \int d\omega_k \exp(ik(x-x')) \rho(x') \right] = \\ &= \exp \left[ - \sum_k |\rho_k|^2 \right], \end{aligned} \quad (5.16)$$

т.е. условие полноты (5.15) действительно выполнено.

Отсюда с точностью до фазового множителя

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\rho = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_k |\rho_k|^2 \right) \quad (5.17)$$

и тогда, согласно (5.11),

$$\langle \{n_k\} | 0_- \rangle^\rho = \prod_k \frac{(i\rho_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \exp \left( -\frac{1}{2} |\rho_k|^2 \right). \quad (5.18)$$

Таково выражение для амплитуды вероятности рождения многочастичного состояния  $\{n_k\}$  источником  $\rho$ .

Очевидно, что каждый сомножитель этой амплитуды представляет собой амплитуду вероятности излучения целого числа  $n_k$  квантов с импульсом  $k$  в интервале  $d^3k$ :

$$\langle n_k | 0_- \rangle^\rho = \frac{(i\rho_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \exp\left(-\frac{1}{2} |\rho_k|^2\right), \quad (5.19)$$

а квадрат её модуля — вероятность излучения  $n_k$  квантов в моде  $k$ :

$$|\langle n_k | 0_- \rangle^\rho|^2 = \frac{|\rho_k|^{2n_k}}{n_k!} \exp(-|\rho_k|^2). \quad (5.20)$$

Эта вероятность совпадает с распределением Пуассона со средним значением числа излучённых квантов в моде  $k$ , равным  $\bar{n}_k = |\rho_k|^2$ .

## 5.2. Связь с методом вторичного квантования

Вспомним теперь о методе вторичного квантования [30, 31] и об одномодовых когерентных состояниях  $|\alpha\rangle$ , собственных для оператора поглощения  $a$  с комплексным собственным значением  $\alpha$ :  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  [32–34]. Оператор  $a$  и сопряжённый ему оператор  $a^+$  действуют в пространстве чисел заполнения, уменьшая и увеличивая на единицу число частиц в состояниях с определённым их числом:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (5.21)$$

и подчиняются перестановочному соотношению

$$aa^+ - a^+a = 1. \quad (5.22)$$

Состояние  $|\alpha\rangle$  может быть представлено разложением по  $n$ -квантовым состояниям,

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (5.23)$$

собственным для оператора  $a^+a$  числа квантов с собственным значением  $n$ :  $a^+a|n\rangle = n|n\rangle$ . Амплитуда вероятности найти в состоянии  $|\alpha\rangle$   $n$  квантов равна

$$\langle n|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (5.24)$$

а сама вероятность даётся распределением Пуассона

$$w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n}) \quad (5.25)$$

со средним числом квантов

$$\bar{n} = \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (5.26)$$

в моде.

Приведённые соотношения демонстрируют интересное свойство когерентного состояния. Благодаря тому, что в нём имеется неопределённое число квантов, исчезновение одного из них по существу не меняет состояние, а умножает его лишь на число.

Таким образом, амплитуда  $\langle n_k | 0_- \rangle^\rho$  совпадает с амплитудой  $\langle n|\alpha\rangle$ , если отождествить комплексное число  $i\rho_k$  с  $\alpha$ , а целое число  $n_k$  с  $n$ ; при этом  $|\rho_k|^2$  приобретает физический смысл среднего числа частиц, порождённых

источником  $\rho$  в состоянии (моде)  $k$ , т.е.

$$\bar{n}_k = |\rho_k|^2 = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} |\rho(k)|^2 = d\bar{n}_k. \quad (5.27)$$

Тогда среднее число частиц, образованных источником во всех состояниях, равно, согласно (5.16), удвоенной мнимой части действия в единицах  $\hbar$ :

$$\begin{aligned} \bar{N}^{(0)} &= \overline{\sum_k n_k} = \sum_k \bar{n}_k = \frac{1}{\hbar c} \sum_k |\rho_k|^2 = \\ &= \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k |\rho(k)|^2 = \frac{2}{\hbar} \text{Im } W^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Появившийся здесь индекс у  $\bar{N}$  и  $W$  обозначает спин излучаемых квантов. Этими формулами мы уже пользовались во введении.

Аналогично среднее значение 4-импульса, излучённого источником, равно

$$\bar{K}^\mu \equiv \overline{\sum_k k^\mu n_k} = \sum_k k^\mu \bar{n}_k = \int d\omega_k |\rho(k)|^2 k^\mu. \quad (5.29)$$

## 5.3. Вакуумная амплитуда источника частиц со спином 1

Для безмассовых частиц со спином 1 — фотонов — источником является сохраняющийся 4-вектор плотности тока  $j^\alpha(x)$ , а амплитудой сохранения вакуума — величина

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle^j &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} W(j)\right) = \\ &= \exp\left[\frac{i}{2\hbar c} \int d^4x d^4x' j^\alpha(x) \Delta^j(x-x', \mu) j_\alpha(x')\right], \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\partial_\alpha j^\alpha(x) = 0.$$

$\Delta^j$  сохраняется как угодно малый параметр массы, что удобно для устранения инфракрасной расходимости в случае её возможного появления. Заметим, что размерность  $j^\alpha(x)$  совпадает с размерностью  $\rho(x)$ , так как размерности электрического и скалярного зарядов одинаковы.

Подобно вакуумной амплитуде для скалярного источника, амплитуда (5.30) описывает систему векторных источников произвольной интенсивности при условии, что между частицами отсутствует эффективное взаимодействие и что при излучении и поглощении отдельных частиц источники не меняют своих свойств (классичность источников).

Действие для векторного источника отличается от действия для скалярного заменой в последнем  $\rho(x)$  на  $j^\alpha(x)$ . Поэтому, используя вместо (5.8) определения

$$\begin{aligned} j_k^\alpha &= \sqrt{d\omega_k} j^\alpha(k), \quad j^\alpha(k) = \int d^4x \exp(-ikx) j^\alpha(x), \\ j^{\alpha*}(k) &= j^\alpha(-k), \end{aligned} \quad (5.31)$$

для вакуумной амплитуды с причинной последовательностью источников  $j_1^\alpha, j_2^\alpha$  получим

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^j = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j_1} \exp\left[\sum_k i j_{1k}^{\alpha*} g_{\alpha\beta} i j_{2k}^\beta\right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j_2}. \quad (5.32)$$

Введём четвёрку взаимно ортогональных единичных 4-векторов  $e_{k\lambda}^\alpha$ , нумеруемых индексом  $\lambda = 0, 1, 2, 3$  и направленных соответственно вдоль временной и трёх



пространственных осей специальной системы координат с осью 3 вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , т.е. в этой системе  $e_{k\lambda}^\alpha = \delta_\lambda^\alpha$ . Тогда в произвольной системе координат метрический тензор  $g^{\alpha\beta}$  можно представить в виде

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1,2} e_{k\lambda}^\alpha e_{k\lambda}^\beta + e_{k3}^\alpha e_{k3}^\beta - e_{k0}^\alpha e_{k0}^\beta. \quad (5.33)$$

Из условия сохранения тока  $k_\alpha j^\alpha(k) = 0$  и изотропности 4-импульса фотона  $k^2 = 0$  следует, что в упомянутой специальной системе координат  $j^3 = j^0$ . Поэтому в произвольной системе

$$e_{k3\alpha} j^\alpha(k) = -e_{k0\alpha} j^\alpha(k)$$

и тогда

$$\sum_k j_{1k}^{\alpha*} g_{\alpha\beta} j_{2k}^\beta = \sum_{k\lambda=1,2} j_{1k\lambda}^* j_{2k\lambda}, \quad (5.34)$$

где  $j_{k\lambda} = \sqrt{d\omega_k} j^\alpha(k) e_{k\lambda\alpha}$ ,  $\lambda = 1, 2$ .

В результате для амплитуд многофотонного рождения и поглощения токком  $j$  получим выражения

$$\langle \{n_{k\lambda}\} | 0_- \rangle^j = \langle 0_+ | 0_- \rangle^j \prod_{k\lambda} \frac{(i j_{k\lambda})^{n_{k\lambda}}}{\sqrt{n_{k\lambda}!}}, \quad (5.35)$$

$$\langle 0_+ | \{n_{k\lambda}\} \rangle^j = \langle 0_+ | 0_- \rangle^j \prod_{k\lambda} \frac{(i j_{k\lambda}^*)^{n_{k\lambda}}}{\sqrt{n_{k\lambda}!}}. \quad (5.36)$$

Приведённые амплитуды для векторного источника отличаются от соответствующих выражений для скалярного заменой в последних символа  $\rho$  на  $j$ ,  $\rho_k$  на  $j_{k\lambda}$ ,  $n_k$  на  $n_{k\lambda}$ , поскольку состояние фотона, в отличие от состояния скалярного кванта, характеризуется не только импульсом, но и поперечной поляризацией, принимающей два независимых значения.

Для вероятности сохранения вакуума в присутствии векторного источника с помощью исходного выражения (5.30) для амплитуды получаем

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^j|^2 = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im} W^{(1)}\right), \quad (5.37)$$

где по аналогии с (5.16)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\hbar} \text{Im} W^{(1)} &= \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k |j_x(k)|^2 = \\ &= \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k \sum_{\lambda=1,2} |j_x(k) e_{k\lambda}^\alpha|^2 = \sum_{k\lambda} \bar{n}_{k\lambda}^{(1)} = \bar{N}^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Индекс у  $W$  и  $\bar{N}$  обозначает спин излучаемых квантов. Подчеркнём, что удвоенная мнимая часть действия содержит вклад обеих поляризаций. Она является суммой средних чисел заполнения состояний  $k\lambda$ , отнюдь не целых чисел  $n_{k\lambda}$ , которые фигурировали в многочастичных амплитудах.

Среднее значение 4-импульса излучения равно, очевидно,

$$\bar{K}^\mu = \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k |j_x(k)|^2 k^\mu = \sum_{k\lambda} \bar{n}_{k\lambda} k^\mu. \quad (5.39)$$

Оно также определяется средними числами заполнения состояний  $k\lambda$  и, таким образом, радикально отличается от волнового вектора многочастичного состояния (см. (5.14)).

В заключение этого раздела подчеркнём некоторые особенности квазиклассической теории источников.

1. Несмотря на классичность действия  $W$ , его удвоенная мнимая часть, делённая на  $\hbar$ , согласно (5.28), (5.38) имеет физический смысл среднего числа квантов, образованных скалярным или векторным источником. Тем самым устанавливается поучительная связь действия со вторично-квантованной теорией поля, в которой числа заполнения состояний играют роль независимых переменных. Присутствие в вакууме классического источника делает вакуумное состояние  $|0_- \rangle^\rho$  или  $|0_- \rangle^j$  аналогом когерентного состояния  $|\alpha\rangle$ , собственного для оператора поглощения в методе вторичного квантования.

2. Величина среднего значения числа частиц, образуемых источником в вакууме, ничем не ограничена и не обязана быть малой.

3. Распределение Пуассона означает, что кванты излучаются независимо. При этом частицы испускаются независимо не только внутри одной области импульсов  $\Delta = d^3k$ , но и в двух разных импульсных областях  $\Delta_1 = d^3k_1$ ,  $\Delta_2 = d^3k_2$ . Действительно, в объединённом интервале  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$  среднее число квантов  $\bar{n}_\Delta = \bar{n}_{\Delta_1} + \bar{n}_{\Delta_2}$ , а распределение по числу излучённых квантов согласно теореме сложения распределений Пуассона снова будет пуассоновским:

$$w_\Delta(n) = \sum_{m=0}^n w_{\Delta_1}(m) w_{\Delta_2}(n-m) = \frac{(\bar{n}_\Delta)^n}{n!} \exp(-\bar{n}_\Delta), \quad n \equiv n_\Delta. \quad (5.40)$$

Интервал  $\Delta$  можно распространить на весь диапазон импульсов. Тогда  $n_\Delta = N$ ,  $\bar{n}_\Delta = \bar{N}$  и вероятность испускания источником  $N$  частиц во все возможные состояния равна

$$w(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} \exp(-\bar{N}). \quad (5.41)$$

Для пуассоновского распределения характерна следующая связь среднего квадрата флуктуации числа частиц со средним числом частиц

$$\overline{(N - \bar{N})^2} = \overline{N^2} - \bar{N}^2 = \bar{N}. \quad (5.42)$$

## 6. Преобразование Боголюбова — квантовая теория излучения точечного зеркала

### 6.1. Излучение пар

#### из тождественных частицы и античастицы

Для последовательного описания квантованного волнового поля, находящегося как справа, так и слева от точечного зеркала и удовлетворяющего на зеркале единому условию, удобно использовать два полных набора  $\{\phi_{\text{out}\omega}, \phi_{\text{out}\omega}^*\}$  и  $\{\phi_{\text{in}\omega'}, \phi_{\text{in}\omega'}^*\}$  решений волнового уравнения, приведённых для бозе- и ферми-полей в разделе 2 (см. также [3, 4]). Обладая в правой полуплоскости Минковского физическим смыслом out- и in-наборов и удовлетворяя граничному условию на зеркале, эти решения без изменения своего функционального вида гладко продолжимы в левую полуплоскость. Однако в левой полуплоскости эти наборы приобретают физический смысл in- и out-наборов соответственно и их нужно обозначать здесь как  $\{\phi_{\text{in}\omega}, \phi_{\text{in}\omega}^*\}$  и  $\{\phi_{\text{out}\omega'}, \phi_{\text{out}\omega'}^*\}$ .

В действительности каждое такое решение однозначно характеризуется частотой  $\omega$  или  $\omega'$  своей монохроматической составляющей, бегущей направо или налево, и условием на зеркале. При лоренцевом преобразовании со скоростью  $\beta$  вдоль оси  $x$  частоты  $\omega$  и  $\omega'$  преобразуются в  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\omega}'$  по взаимно обратным законам:

$$\tilde{\omega} = D^{-1}(\beta)\omega, \quad \tilde{\omega}' = D(\beta)\omega', \quad D(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad (6.1)$$

где  $D(\beta)$  — доплеровский фактор. Таким образом,  $\omega$  и  $\omega'$  обладают противоположной ковариантностью. В дальнейшем частоты, преобразующиеся как  $\omega$ , будут снабжаться чётным числом штрихов, а преобразующиеся как  $\omega'$  — нечётным. Тогда индекс in или out в дополнение к частотному просто указывает сторону плоскости Минковского, в которой рассматривается решение.

Разложение решений первого набора по решениям второго и обратное разложение записывалось нами (в правой полуплоскости) в виде

$$\phi_{\text{out } \omega} = \alpha_{\omega' \omega} \phi_{\text{in } \omega'} + \beta_{\omega' \omega} \phi_{\text{in } \omega}^*, \quad (6.2)$$

$$\phi_{\text{in } \omega'} = \alpha_{\omega' \omega}^* \phi_{\text{out } \omega} \mp \beta_{\omega' \omega} \phi_{\text{out } \omega}^*, \quad (6.3)$$

или, если использовать матричную запись,

$$\begin{pmatrix} \phi_{\text{out}} \\ \phi_{\text{out}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \beta^+ & \alpha^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\text{in}} \\ \phi_{\text{in}}^* \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{\text{in}} \\ \phi_{\text{in}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \mp \beta \\ \mp \beta^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\text{out}} \\ \phi_{\text{out}}^* \end{pmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем верхний и нижний знаки соответствуют бозе- и ферми-полям, которые теперь обозначаются одной буквой  $\phi$ . Вследствие ортогональности и нормировки решений в обоих наборах, матрицы, фигурирующие в (6.4), взаимнообратны. Это означает, что коэффициенты Боголюбова удовлетворяют четырём независимым матричным соотношениям:

$$\alpha^+ \alpha \mp \beta^+ \beta = 1, \quad \beta^+ \alpha^* \mp \alpha^+ \beta^* = 0, \quad (6.5)$$

$$\alpha \alpha^+ \mp \beta^* \tilde{\beta} = 1, \quad \alpha \beta^+ \mp \beta^* \tilde{\alpha} = 0.$$

В левой полуплоскости соотношения (6.2)–(6.4) сохраняются, но новый физический смысл требует перестановки индексов in  $\rightleftharpoons$  out у функций, что равносильно замене

$$\alpha \rightarrow \alpha^+, \quad \beta \rightarrow \mp \tilde{\beta}. \quad (6.6)$$

Для квантованного поля в правой полуплоскости связь in- и out-операторов рождения  $a^+$  и поглощения  $a$  даётся преобразованиями Боголюбова

$$\begin{pmatrix} a_{\text{in}} \\ a_{\text{in}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^* \\ \beta & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\text{out}} \\ a_{\text{out}}^+ \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\begin{pmatrix} a_{\text{out}} \\ a_{\text{out}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^+ & \mp \beta^+ \\ \mp \tilde{\beta} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\text{in}} \\ a_{\text{in}}^+ \end{pmatrix}.$$

Для поля в левой полуплоскости в преобразованиях (6.7) у операторов  $a, a^+$  следует переставить индексы in  $\rightleftharpoons$  out. Это снова равносильно замене (6.6).

Следуя работе Де Витта [19] и его обозначениям, представим вектор вакуумного состояния поля в далёком прошлом в виде разложения по векторам  $n$ -частич-

ных состояний поля в далёком будущем:

$$|\text{in}\rangle = \exp(iW) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n/2}}{n!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} V_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n \text{out}\rangle. \quad (6.8)$$

В нашем случае под квантовыми числами  $i_1 i_2 \dots i_n$  out-состояний отдельных частиц следует понимать частоты, преобразующиеся как  $\omega$  или как  $\omega'$ , если речь идёт о поле соответственно справа или слева от зеркала.

Используя уравнение  $a_{\text{in}}|\text{in}\rangle = 0$ , преобразования (6.7) и разложение (6.8), нетрудно показать [19, 22], что относительные амплитуды  $V_{i_1 i_2 \dots i_n}$  рождения  $n$  частиц для нечётного  $n$  равны нулю, а для чётного  $n$  выражаются через амплитуду рождения пары частиц:

$$V_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_p \delta_p V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \dots V_{i_{n-1} i_n}. \quad (6.9)$$

Здесь  $\sum_p$  означает суммирование по  $n!/2^{n/2}(n/2)!$  различным спариваниям индексов  $i_1 i_2 \dots i_n$ , а  $\delta_p = 1$  для бозонов и  $\delta_p = \pm 1$  для фермионов — соответственно чётности или нечётности перестановки, приводящей к данному спариванию. Амплитуды рождения пары частиц с частотами  $\omega'', \omega$  в правой области и частотами  $\omega''', \omega'$  в левой равны

$$V_{\omega'' \omega} = i(\alpha^{-1} \beta^*)_{\omega'' \omega}, \quad V_{\omega''' \omega'} = -i(\beta \alpha^{-1})_{\omega''' \omega'}^*. \quad (6.10)$$

Они связаны друг с другом преобразованием (6.6), симметричны для бозе-поля и антисимметричны для ферми-поля, как это следует из (6.5).

Указанное число членов в амплитуде (6.9) возникает в связи с её симметризацией (антисимметризацией) и равно числу  $n!$  перестановок её индексов, уменьшенному в  $2^{n/2}$  раз благодаря уже существующей симметрии (антисимметрии) двухчастичных амплитуд и в  $(n/2)!$  раз из-за несущественности перестановок этих амплитуд.

Рождение частиц парами обязано линейности преобразований Боголюбова по операторам  $a, a^+$ . Оператор  $a_{\text{in}}$  при действии на  $n$ -частичное out-состояние превращает его в суперпозицию  $n-1$ -частичного и  $n+1$ -частичного out-состояний. Поэтому в разложении нулевого вектора  $a_{\text{in}}|\text{in}\rangle$  по  $n$ -частичным out-состояниям равные нулю коэффициенты разложения представляют собой линейную связь между амплитудами  $n+1$ -частичного и  $n-1$ -частичного рождений. Так как  $n \geq 0$ , амплитуда одночастичного рождения  $V_{i_1}$  оказывается равной нулю, а вместе с ней и все амплитуды образования нечётного числа частиц.

Абсолютные амплитуды  $n$ -частичного рождения определены и связаны с относительными амплитудами соотношением

$$\langle \text{out } i_1 i_2 \dots i_n | \text{in} \rangle \equiv \langle \text{out } | a_{\text{out } i_n} \dots a_{\text{out } i_2} a_{\text{out } i_1} | \text{in} \rangle = \exp(iW) i^{n/2} V_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (6.11)$$

Амплитуда сохранения вакуума  $\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \exp(iW)$  с точностью до фазового множителя определяется равенством единице полной вероятности перехода из начального вакуумного состояния

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |\langle \text{out } i_1 i_2 \dots i_n | \text{in} \rangle|^2 = \exp(-2 \text{Im } W) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |V_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2. \quad (6.12)$$

Сумму относительных вероятностей

$$q_n = \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |V_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 \quad (6.13)$$

рождения  $n$  частиц (или  $n/2$  пар), находящихся в правой части (6.12), будем называть статсуммой. Можно показать, что в рассматриваемом случае образования пар тождественных частиц и античастиц статсумма равна

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |V_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 &= \det(1 \mp M)^{\mp 1/2} = \\ &= \exp\left(\mp \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(1 \mp M)\right), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $M = VV^+$  — эрмитова положительно полуопределённая матрица, образованная из матриц (6.10). В частности, первые четыре члена статсуммы, определяемые относительными амплитудами

$$1, \quad V_{i_1 i_2}, \quad V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \pm V_{i_1 i_3} V_{i_2 i_4} + V_{i_1 i_4} V_{i_2 i_3}, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} &V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} V_{i_5 i_6} \pm V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_5} V_{i_4 i_6} + V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_6} V_{i_4 i_5} \pm \\ &\pm V_{i_1 i_3} V_{i_2 i_4} V_{i_5 i_6} + V_{i_1 i_3} V_{i_2 i_5} V_{i_4 i_6} \pm V_{i_1 i_3} V_{i_2 i_6} V_{i_4 i_5} + \\ &+ V_{i_1 i_4} V_{i_2 i_3} V_{i_5 i_6} \pm V_{i_1 i_4} V_{i_2 i_5} V_{i_3 i_6} + V_{i_1 i_4} V_{i_2 i_6} V_{i_3 i_5} \pm \\ &\pm V_{i_1 i_5} V_{i_2 i_3} V_{i_4 i_6} + V_{i_1 i_5} V_{i_2 i_4} V_{i_3 i_6} \pm V_{i_1 i_5} V_{i_2 i_6} V_{i_3 i_4} + \\ &+ V_{i_1 i_6} V_{i_2 i_3} V_{i_4 i_5} \pm V_{i_1 i_6} V_{i_2 i_4} V_{i_3 i_5} + V_{i_1 i_6} V_{i_2 i_5} V_{i_3 i_4} \end{aligned}$$

и формулой (6.13), равны соответственно

$$q_0 = 1, \quad q_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M, \quad q_4 = \frac{1}{8} (\operatorname{tr} M)^2 \pm \frac{1}{4} \operatorname{tr} M^2, \quad (6.16)$$

$$q_6 = \frac{1}{48} (\operatorname{tr} M)^3 \pm \frac{1}{8} \operatorname{tr} M \operatorname{tr} M^2 + \frac{1}{6} \operatorname{tr} M^3.$$

Первый член в  $q_6$  описывает независимое испускание трёх пар, второй — интерференцию двух пар и независимое испускание одной пары, а третий — интерференцию трёх пар.

Вообще,  $\operatorname{tr} M^k$  описывает интерференцию  $k$  пар, если  $k \geq 2$ , а  $(\operatorname{tr} M)^k$  — независимое испускание  $k$  пар.

Абсолютные вероятности образования  $n$  пар равны  $p_{2n} = p_0 q_{2n}$ , где  $p_0$  — вероятность сохранения вакуума:

$$p_0 = \exp(-2 \operatorname{Im} W), \quad 2 \operatorname{Im} W = \mp \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(1 \mp M). \quad (6.17)$$

Поскольку относительные вероятности  $q_{2n}(M)$  рождения  $n$  пар являются однородными функциями степени  $n$ ,  $q_{2n}(\lambda M) = \lambda^n q_{2n}(M)$ , среднее число пар удобно вычислять по формуле

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_{2n} = p_0 \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n q_{2n}(M) \Big|_{\lambda=1} = \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} 2 \operatorname{Im} W(\lambda M) \Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{M}{1 \mp M}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Для правой и левой областей матрицы  $M$  различны:

$$M = VV^+ = \begin{cases} \beta^+ \beta (1 \pm \beta^+ \beta)^{-1}, & (6.19) \\ \beta^* \tilde{\beta} (1 \pm \beta^* \tilde{\beta})^{-1}, & (6.20) \end{cases}$$

но связаны друг с другом преобразованием (6.6). Однако положительно определённые величины  $\operatorname{tr} M^n$ ,  $n = 1, 4$  УФН, т. 183, № 6

$2, \dots$ , являются инвариантами этого преобразования. Поэтому приведённые выше полные вероятности сохранения вакуума  $p_0$ , рождения  $n$  пар  $p_{2n}$ , среднее число пар  $\bar{n}$  одинаковы для правой и левой областей. В частности, величины

$$p_0 = \exp(-2 \operatorname{Im} W), \quad 2 \operatorname{Im} W = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(1 \pm \beta^+ \beta), \quad (6.21)$$

$$p_2 = \exp(-2 \operatorname{Im} W) \frac{1}{2} \operatorname{tr} \beta^+ \beta (1 \pm \beta^+ \beta)^{-1}, \quad (6.22)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \beta^+ \beta \quad (6.23)$$

не меняются при замене (6.6) или  $\beta^+ \beta \rightarrow \beta \beta^+$ . Обратим внимание на простоту формулы для  $\bar{n}$  и её отличие от  $2 \operatorname{Im} W$ . Мы обсудим это различие в конце раздела.

Тем не менее частотные распределения вероятностей и среднего числа частиц не обладают лево-правой симметрией. Так, вероятность рождения одной пары, одна из частиц которой имеет определённую частоту, а другая — любую, для правой области равна

$$p_{2\omega} = \exp(-2 \operatorname{Im} W) \left( \frac{\beta^+ \beta}{1 \pm \beta^+ \beta} \right)_{\omega\omega}, \quad (6.24)$$

а для левой области равна

$$p_{2\omega'} = \exp(-2 \operatorname{Im} W) \left( \frac{\beta \beta^+}{1 \pm \beta \beta^+} \right)_{\omega'\omega'}. \quad (6.25)$$

Функционально различаются между собой и частотные распределения среднего числа частиц, излучённых зеркалом направо и налево:

$$N_{\omega} = (\beta^+ \beta)_{\omega\omega}, \quad N_{\omega'} = (\beta \beta^+)_{\omega'\omega'}. \quad (6.26)$$

Наряду с амплитудами (6.11) рождения зеркалом частиц из вакуума необходимо рассмотреть амплитуды одночастичного рассеяния зеркалом

$$\langle \operatorname{out} \omega | \omega' \operatorname{in} \rangle = \langle \operatorname{out} | a_{\operatorname{out} \omega} a_{\operatorname{in} \omega'}^+ | \operatorname{in} \rangle = \exp(iW) \alpha_{\omega\omega'}^{-1}, \quad (6.27)$$

$$\langle \operatorname{out} \omega' | \omega \operatorname{in} \rangle = \langle \operatorname{out} | a_{\operatorname{out} \omega'} a_{\operatorname{in} \omega}^+ | \operatorname{in} \rangle = \exp(iW) \alpha_{\omega\omega'}^{-1*} \quad (6.28)$$

для правой и левой областей соответственно. Эти амплитуды различаются только своими фазами. Разумеется, они связаны между собой преобразованием (6.6), но нас будет интересовать их связь с соответствующими амплитудами рождения пары:

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{out} \omega'' \omega | \operatorname{in} \rangle &= -\exp(iW) (\alpha^{-1} \beta^*)_{\omega''\omega} = \\ &= -\sum_{\omega'} \langle \operatorname{out} \omega'' | \omega' \operatorname{in} \rangle \beta_{\omega'\omega}^*, \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{out} \omega' \omega''' | \operatorname{in} \rangle &= \exp(iW) (\beta \alpha^{-1})_{\omega'\omega'''}^* = \\ &= \sum_{\omega} \beta_{\omega'\omega}^* \langle \operatorname{out} \omega''' | \omega \operatorname{in} \rangle. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Поскольку амплитуды рождения пары и амплитуды одночастичного рассеяния являются величинами, экспериментально измеримыми, в принципе, по соответ-

ствующим вероятностям, то соотношения (6.29), (6.30) позволяют экспериментально измерить величину  $\beta_{\omega'\omega}^*$ . Более того, эти соотношения позволяют рассматривать  $\beta_{\omega'\omega}^*$  как амплитуду источника пары частиц, потенциально излучаемых направо и налево с частотами  $\omega$  и  $\omega'$  соответственно. При этом если частица с частотой  $\omega$  реально вылетела направо, то частица с частотой  $\omega'$  не вылетает налево, а испытывает внутреннее отражение и реально излучается направо с изменённой частотой  $\omega''$ . И наоборот, если частица с частотой  $\omega'$  реально вылетела налево, то частица с частотой  $\omega$  не может вылететь направо, а после внутреннего отражения излучается реально налево с другой частотой  $\omega'''$ .

Для фермионов амплитуда  $\beta_{\omega'\omega}^F$  диагональна по проекции спина in- и out-волн (см. раздел 2 и [4]). Но одна из волн, формирующих  $\beta_{\omega'\omega}^F$ , имеет отрицательную частоту и поэтому описывает античастицу с частотой и проекцией спина, противоположными по знаку частоте и проекции спина этой волны (см. § 26 в [20] или § 9 гл. 2 в [35]). Таким образом, спин пары рождающихся фермионов равен нулю. Это подтверждается скалярностью тождественно равных друг другу интегралов в (2.28), (2.29), в которых  $du\sqrt{f'(u)}$  и  $dv\sqrt{g'(v)}$  суть элементы собственного времени  $dt$ , и их совпадением,

$$\beta_{\omega'\omega}^{F*} = \frac{1}{e} \rho(k_+, k_-), \quad (6.31)$$

с фурье-компонентой плотности скалярного заряда в  $3+1$ -пространстве.

Амплитуда  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  источника бозонной пары, согласно (2.11), (2.12), линейно выражается через фурье-компоненты  $j_{\pm}(k)$  плотности тока электрического заряда в  $3+1$ -пространстве:

$$\beta_{\omega'\omega}^{B*} = -\sqrt{\frac{k_+}{k_-}} \frac{j_-}{e} = \sqrt{\frac{k_-}{k_+}} \frac{j_+}{e}, \quad (6.32)$$

$$j_- = e \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left[ \frac{i}{2} (k_+ u + k_- f(u)) \right], \quad (6.33)$$

$$j_+ = e \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp \left[ \frac{i}{2} (k_- v + k_+ g(v)) \right]$$

(см. также (3.19) и формулы (43), (44) в [3]). Последнее равенство в (6.32) есть не что иное, как условие поперечности тока  $k_+ j_- + k_- j_+ = 0$ . Из (6.32) видно также, что  $\beta_{\omega'\omega}^{B*}$  — псевдоскаляр, так как при отражении  $k_{\pm} \rightarrow k_{\mp}$ ,  $j_{\pm} \rightarrow j_{\mp}$  и  $\beta^B$  меняет знак. Вектор  $j_x(k)$  пространствуподобен и в системе, где  $k_+ = k_-$  (или  $\omega = \omega'$ ), имеет только пространственную компоненту, равную как раз  $e\beta_{\omega'\omega}^{B*}$ . В ковариантной форме

$$e\beta_{\omega'\omega}^{B*} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} k^{\alpha} j^{\beta}}{\sqrt{k_+ k_-}}.$$

Таким образом, источником бозонной пары является сохраняющийся вектор тока (6.33), а это означает, что её спин равен 1 [11].

То, что спин бозонной пары равен 1, а фермионной — равен 0, существенно для понимания совпадения спектров зеркала и заряда.

Если  $\beta_{\omega'\omega}^*$  мало, т.е. мало среднее число излучаемых квантов, то, как легко получить из формул (2.11), (2.28),

$$\alpha_{\omega'\omega} \approx 2\pi\delta(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}), \quad \alpha_{\omega\omega'}^{-1} \approx 2\pi\delta(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'), \quad (6.34)$$

где  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega}'$  связаны с  $\omega$ ,  $\omega'$  преобразованием (6.1), в котором  $\beta$  — эффективная скорость зеркала на участке излучения. В этом приближении амплитуды (6.29), (6.30) излучения пары частиц с частотами  $\omega$ ,  $\omega''$  направо и пары частиц с частотами  $\omega'$ ,  $\omega'''$  налево равны соответственно

$$\langle \text{out } \omega'' \omega | \text{in} \rangle \approx -\exp(iW) D^{-1}(\beta) \beta_{\omega'\omega}^*, \quad \omega' = D^{-2}(\beta) \omega'', \quad (6.35)$$

$$\langle \text{out } \omega' \omega''' | \text{in} \rangle \approx \exp(iW) D(\beta) \beta_{\omega'\omega}^*, \quad \omega = D^2(\beta) \omega'''. \quad (6.36)$$

Эти формулы, включая связь между частотами падающей на зеркало и отражённой от него волн, подтверждают данную выше интерпретацию  $\beta_{\omega'\omega}^*$ .

Обратим теперь внимание на интерференционные эффекты в рождении бозе- и ферми-частиц. Наиболее существенными они становятся тогда, когда матрицы  $M$  для бозонов и фермионов удовлетворяют условиям

$$\mp \frac{1}{2} \text{tr} \ln(1 \mp M) = \mp \ln \left( 1 \mp \frac{1}{2} \text{tr} M \right),$$

т.е.

$$\frac{1}{2} \text{tr} M^n = \left( \frac{1}{2} \text{tr} M \right)^n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.37)$$

Тогда статсумма (6.14) для бозе- и ферми-частиц сводится соответственно к выражениям

$$\frac{1}{1 - (1/2) \text{tr} M} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{2} \text{tr} M. \quad (6.38)$$

Это означает, что вероятности рождения  $n$  пар бозонов образуют геометрическую прогрессию:

$$p_{2n}^B = p_0^B q_2^{Bn}, \quad p_0^B = 1 - \frac{1}{2} \text{tr} M, \quad q_2^B = \frac{1}{2} \text{tr} M, \quad (6.39)$$

а вероятности излучения двух и более пар фермионов исчезают, т.е. возможно рождение только одной фермионной пары:

$$p_0^F = \left( 1 + \frac{1}{2} \text{tr} M \right)^{-1}, \quad p_2^F = p_0^F \frac{1}{2} \text{tr} M, \quad p_{2n}^F = 0, \quad n \geq 2. \quad (6.40)$$

Иными словами, условия (6.37) означают наиболее конструктивную интерференцию бозонов и наиболее деструктивную интерференцию фермионов. В этих случаях средний квадрат флуктуации числа бозонных пар всегда больше  $\bar{n}^B$ , а фермионных пар — меньше  $\bar{n}^F$  и равен  $\bar{n}(1 \pm \bar{n})$ , где

$$0 < \bar{n}^B = \frac{(1/2) \text{tr} M}{1 - (1/2) \text{tr} M} = \frac{1}{2} \text{tr} (\beta^+ \beta)^B < \infty, \quad (6.41)$$

$$0 < \bar{n}^F = \frac{(1/2) \text{tr} M}{1 + (1/2) \text{tr} M} = \frac{1}{2} \text{tr} (\beta^+ \beta)^F < 1.$$

Менее интересен случай, когда интерференционными эффектами можно пренебречь. В этом случае

$$\text{tr} M^k \ll \text{tr} M, \quad 1; \quad k \geq 2 \quad (6.42)$$

или на языке матриц  $\beta$ ,  $\beta^+$ :

$$\text{tr} (\beta^+ \beta)^k \ll \text{tr} \beta^+ \beta, \quad 1; \quad k \geq 2.$$

Тогда распределение вероятностей по числу рождённых пар совпадает с пуассоновским:

$$p_{2n} = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!}, \quad \bar{n} = \frac{1}{2} \text{tr} \beta^+ \beta. \quad (6.43)$$

Для него средний квадрат флуктуации числа пар равен

$$\overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n},$$

в отличие от  $\bar{n}(1 \pm \bar{n})$  для геометрического распределения (6.39) и распределения Бернулли (6.40).

## 6.2. Излучение пар

### из нетождественных частицы и античастицы

В случае рождения пар из нетождественных частицы и античастицы ( $ab$ -пары) прямое и обратное преобразования Боголюбова (6.7) заменяются такими:

$$\begin{pmatrix} a_{\text{in}} \\ b_{\text{in}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{aa} & \beta_{ab}^* \\ \beta_{ba} & \alpha_{bb}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\text{out}} \\ b_{\text{out}}^+ \end{pmatrix}, \quad (6.44)$$

$$\begin{pmatrix} a_{\text{out}} \\ b_{\text{out}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{aa}^+ & \mp \beta_{ba}^+ \\ \mp \beta_{ab}^+ & \tilde{\alpha}_{bb}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\text{in}} \\ b_{\text{in}}^+ \end{pmatrix}.$$

Эти преобразования содержат не две, а четыре матрицы  $\alpha_{aa}$ ,  $\alpha_{bb}$ ,  $\beta_{ab}$ ,  $\beta_{ba}$ , которые удовлетворяют не четырём соотношениям (6.5), а шести:

$$\begin{aligned} \alpha_{aa}^+ \alpha_{aa} \mp \beta_{ba}^+ \beta_{ba} &= 1, & \alpha_{bb}^+ \alpha_{bb} \mp \beta_{ab}^+ \beta_{ab} &= 1, \\ \beta_{ba}^+ \alpha_{bb}^* \mp \alpha_{aa}^+ \beta_{ab}^* &= 0, & \alpha_{aa} \alpha_{aa}^+ \mp \beta_{ab}^* \tilde{\beta}_{ab} &= 1, \\ \alpha_{bb} \alpha_{bb}^+ \mp \beta_{ba}^* \tilde{\beta}_{ba} &= 1, & \alpha_{aa} \beta_{ba}^+ \mp \beta_{ab}^* \tilde{\alpha}_{bb} &= 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Впрочем, эти соотношения можно записать в форме (6.5), если под  $\alpha$  и  $\beta$  понимать  $2 \times 2$ -матрицы, составленные из указанных четырёх:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{aa} & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{ab} \\ \beta_{ba} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Как видно из (6.44), перестановка  $\text{in} \rightleftharpoons \text{out}$  эквивалентна теперь замене

$$\begin{aligned} \alpha_{aa} &\rightarrow \alpha_{aa}^+, & \alpha_{bb} &\rightarrow \alpha_{bb}^+, \\ \beta_{ab} &\rightarrow \mp \tilde{\beta}_{ba}, & \beta_{ba} &\rightarrow \mp \tilde{\beta}_{ab}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

которую можно представить в форме (6.6), если под  $\alpha$  и  $\beta$  понимать матрицы (6.46).

Используя для  $\text{in}$ -состояния вакуума разложение типа (6.8) и уравнения  $a_{\text{in}}|\text{in}\rangle = b_{\text{in}}|\text{in}\rangle = 0$ , можно показать, что все амплитуды испускания нечётного числа частиц равны нулю, а амплитуды рождения чётного числа частиц представляют собой произведения амплитуд рождения  $ab$ -пар:

$$\begin{aligned} V_{\omega''\omega}^{ab} &= i(\alpha_{aa}^{-1} \beta_{ab}^*)_{\omega''\omega}, \\ V_{\omega''\omega'}^{ab} &= -i(\beta_{ab} \alpha_{bb}^{-1})_{\omega''\omega'}^* \end{aligned} \quad (6.48)$$

соответственно для правой и левой областей. Как следует из (6.45), амплитуды (6.48) обладают свойством бозе-симметрии или ферми-антисимметрии:

$$\begin{aligned} V_{\omega''\omega}^{ab} &= \pm V_{\omega''\omega}^{ba} \equiv \pm i(\alpha_{bb}^{-1} \beta_{ba}^*)_{\omega''\omega}, \\ V_{\omega''\omega'}^{ab} &= \pm V_{\omega''\omega'}^{ba} \equiv \mp i(\beta_{ba} \alpha_{aa}^{-1})_{\omega''\omega'}^*. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Таким образом, амплитуду образования  $ab$ -пары можно обозначить через  $V_{i_1 i_2}$ , где индекс  $i_1$  характеризует состояние частицы, а индекс  $i_2$  — античастицы. Рождение двух  $ab$ -пар описывается амплитудой

$$V_{i_1 i_2 i_3 i_4} = V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \pm V_{i_3 i_2} V_{i_1 i_4}, \quad (6.50)$$

симметричной (антисимметричной) отдельно по состояниям  $i_1, i_3$  частиц и отдельно — по состояниям  $i_2, i_4$  античастиц. Приведём ещё амплитуду рождения трёх пар:

$$\begin{aligned} V_{i_1 i_2 \dots i_6} &= V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} V_{i_5 i_6} \pm V_{i_3 i_2} V_{i_1 i_4} V_{i_5 i_6} + V_{i_5 i_2} V_{i_3 i_4} V_{i_1 i_6} \pm \\ &\pm V_{i_1 i_2} V_{i_5 i_4} V_{i_3 i_6} + V_{i_5 i_2} V_{i_1 i_4} V_{i_3 i_6} \pm V_{i_5 i_2} V_{i_3 i_4} V_{i_1 i_6}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

В общем случае амплитуда рождения  $n/2$  пар имеет вид

$$V_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_p \delta_p V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \dots V_{i_{n-1} i_n}, \quad (6.52)$$

где сумма берётся по всем  $(n/2)!$  членам, отличающимся перестановкой нечётных индексов (или, что то же самое, перестановкой чётных индексов), причём в случае фермионов  $\delta_p = \pm 1$  для чётной или нечётной перестановки соответственно, а в случае бозонов  $\delta_p = 1$ . Тогда амплитуда  $V_{i_1 i_2 \dots i_n}$  будет симметричной (антисимметричной) как по состояниям частиц  $i_1 i_3 \dots i_{n-1}$ , так и по состояниям  $i_2 i_4 \dots i_n$  античастиц.

Относительная вероятность

$$q_n = \frac{1}{(n/2)!(n/2)!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |V_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 \quad (6.53)$$

рождения  $n/2$  пар, состоящих из нетождественных частицы и античастицы, содержит множитель  $1/(n/2)!(n/2)!$ , который вместе с симметрией (антисимметрией) амплитуды  $V_{i_1 i_2 \dots i_n}$  отдельно по чётным и отдельно по нечётным индексам позволяет провести суммирование по состояниям частиц и античастиц, считая диапазоны изменения квантовых чисел этих состояний независимыми. Без этого множителя в сумму по  $i_1 i_2 \dots i_n$  должны были бы входить только физически различные состояния. В нашем случае, например, это означало бы, что частоты частиц должны удовлетворять условию  $\omega_1 \geq \omega_3 \geq \dots \geq \omega_{n-1}$ , а частоты античастиц — условию  $\omega_2 \geq \omega_4 \geq \dots \geq \omega_n$ .

По приведённым выше относительным амплитудам нетрудно построить первые четыре члена статсуммы:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, & q_2 &= \text{tr} M, & q_4 &= \frac{1}{2}(\text{tr} M)^2 \pm \frac{1}{2} \text{tr} M^2, \\ q_6 &= \frac{1}{6}(\text{tr} M)^3 \pm \frac{1}{2} \text{tr} M \text{tr} M^2 + \frac{1}{3} \text{tr} M^3. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Для статсуммы в целом получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n/2)!(n/2)!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |V_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 &= \\ &= \det(1 \mp M)^{\mp 1} = \exp(\mp \text{tr} \ln(1 \mp M)). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Здесь, как и в (6.14),  $M = VV^+$  — эрмитова положительно полуопределённая матрица. Она даётся формулами (6.19), (6.20), в которых под  $\beta$  понимается соответственно  $\beta_{ba}$  и  $\beta_{ab}$ .

Так же как и выше, абсолютные вероятности образования  $n$  пар из нетождественных частицы и античас-

тицы равны  $p_{2n} = p_0 q_{2n}$ , где  $p_0$  — вероятность сохранения вакуума:

$$p_0 = \exp(-2 \operatorname{Im} W), \quad (6.56)$$

$$2 \operatorname{Im} W = \mp \operatorname{tr} \ln(1 \mp M) = \pm \operatorname{tr} \ln(1 \pm \beta^\pm \beta).$$

Среднее число пар, вычисленное согласно правилу (6.18), равно

$$\bar{n} = \operatorname{tr} \frac{M}{1 \mp M} = \operatorname{tr} \beta^\pm \beta. \quad (6.57)$$

Видно, что эти формулы отличаются от соответствующих формул (6.17) и (6.18) для рождения пар тождественных частиц заменой в последних  $(1/2) \operatorname{tr}$  на  $\operatorname{tr}$ . В силу  $a \rightleftharpoons b$  симметрии в матрицах под знаком  $\operatorname{tr}$  под  $\beta$  можно понимать как  $\beta_{ba}$ , так и  $\beta_{ab}$ .

Нетрудно видеть, что это правило связывает все формулы для интегральных характеристик рождения пар тождественных частиц с формулами соответствующих характеристик рождения  $ab$ -пар. Так, чтобы получить из формул (6.21)–(6.23), (6.37)–(6.43) аналогичные выражения для рождения  $ab$ -пар, достаточно заменить в этих формулах  $(1/2) \operatorname{tr}$  на  $\operatorname{tr}$ , а под  $\beta$  понимать  $\beta_{ab}$  или  $\beta_{ba}$ .

Что касается спектральных характеристик, приведённых например в формулах (6.24)–(6.26), то они не претерпевают изменений при переходе к рассматриваемому случаю, если под  $\beta$  понимать  $\beta_{ba}$  ( $\beta_{ab}$ ) для спектра частиц (античастиц), испущенных направо, и  $\beta_{ab}$  ( $\beta_{ba}$ ) для спектра частиц (античастиц), испущенных налево.

В самом деле, для дифференциальной вероятности  $p_{2\omega}$ , приведённой в (6.24), исходный интеграл

$$p_{2\omega} = \int_0^\infty \frac{d\omega''}{2\pi} |\langle \text{out } \omega \omega'' | \text{in} \rangle|^2 \quad (6.58)$$

представляет её как сумму вероятностей физически различных событий независимо от того, тождественны частицы или нет. Но полная вероятность образования пары  $p_2$  как сумма вероятностей физически различных событий для тождественных частиц представляется интегралом

$$p_2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega''}{2\pi} |\langle \text{out } \omega \omega'' | \text{in} \rangle|^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} p_{2\omega}, \quad (6.59)$$

так как в этом случае состояния различаются лишь значениями большей  $\omega$  и меньшей  $\omega''$  частот двух тождественных частиц. В то же время для  $ab$ -пары

$$p_2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega''}{2\pi} |\langle \text{out } \omega \omega'' | \text{in} \rangle|^2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} p_{2\omega}, \quad (6.60)$$

так как состояния различаются несвязанными между собой значениями частот  $\omega''$  и  $\omega$  частицы и античастицы, различающихся в свою очередь по разному взаимодействию со счётчиками.

Возвращаясь к амплитуде рождения  $ab$ -пары,

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | b_{\text{out } \omega''} a_{\text{out } \omega} | \text{in} \rangle &\equiv \langle \text{out } \omega \omega'' | \text{in} \rangle = \\ &= -\exp(iW) (\alpha_{aa}^{-1} \beta_{ab}^*)_{\omega \omega''} = \mp \exp(iW) (\alpha_{bb}^{-1} \beta_{ba}^*)_{\omega'' \omega}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

заметим, что она сводится к произведению амплитуды  $\beta_{ab}^*$  или  $\beta_{ba}^*$  источника противоположно направленных  $a, b$ -частиц и амплитуды  $\alpha_{aa}^{-1}$  или  $\alpha_{bb}^{-1}$  обратного рассеяния одной из них, в результате чего обе частицы пары движутся в одном направлении. Симметрия (6.49) не позволяет установить, какая из частиц  $ab$ -пары испытывает обратное рассеяние.

## 7. Обсуждение

Сконцентрируем внимание на нескольких важных моментах, лежащих в основе наблюдаемой дуальности, приводящей к квантованию затравочного заряда.

1. Для квантования заряда принципиальным оказалось существование физических величин (спектров числа квантов, излучаемых *зарядом*, и числа пар, излучаемых *нейтральным зеркалом*) с одинаковым квантовым смыслом своих наблюдаемых. Для любой общей траектории заряда и зеркала эти спектры различаются только множителем  $e^2/\hbar c$ :

$$d\bar{n}_{k_+k_-}^{(1,0)} = \frac{e^2}{\hbar c} d\bar{n}_{\omega\omega'}^{\text{B,F}}. \quad (7.1)$$

Требование тождественного совпадения спектров средних значений целочисленных наблюдаемых — квантов и пар — фиксирует связь квадрата заряда с постоянной Планка:  $e_0^2 = \hbar c$ .

2. Точность заряда и зеркала означает, что заряд рассматривается на очень малых расстояниях и неэкранировано поляризацией вакуума, так что  $e_0$  — его неэкранированное значение, а зеркало характеризуется граничным условием, не содержащим размерных параметров.

3. Связь между излучением квантов в  $3+1$ -пространстве и излучением пар квантов в  $1+1$ -пространстве не случайна. Она продиктована интегральной связью причинных функций Грина в этих пространствах, образующей основу голографического принципа квантования заряда.

4. Связь функций Грина приводит к связи между волновым 4-вектором кванта, излучаемого зарядом, и волновым 2-вектором массивной пары, излучаемой зеркалом. В свою очередь, 2-вектор пары определяется частотами безмассовых квантов, составляющих пару.

5. Кванты, излучаемые в  $3+1$ -пространстве векторным и скалярным источниками  $j_x(x)$  и  $\rho(x)$ , имеют спин 1 и 0. Пары квантов скалярного и спинорного полей, излучаемые в  $1+1$ -пространстве зеркалом, имеют спин 1 и 0 потому, что амплитуды их источников —  $\beta^{\text{B,F}}$ -коэффициенты Боголюбова — пропорциональны вектору  $u_x(k)$  и скаляру  $u(k)$  благодаря структуре соответствующих скалярных произведений. Связь плотностей тока  $j_x(k)$  и заряда  $\rho(k)$  с коэффициентами Боголюбова  $\beta_{\omega'\omega}^{\text{B}}$  и  $\beta_{\omega'\omega}^{\text{F}}$  ответственна за функциональное совпадение спектров фотонов и скалярных квантов, испускаемых зарядами, со спектрами бозонных и фермионных пар, испускаемых зеркалом.

6. Обратим внимание на различие между действием  $W^{(1,0)}$ , определяющим амплитуду сохранения вакуума в присутствии заряженного источника, и действием  $W^{\text{B,F}}$ , определяющим амплитуду сохранения вакуума в присутствии зеркала. В то время как удвоенная мнимая часть первого непосредственно связана со средним числом

излучаемых квантов:

$$\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} W^{(1,0)} = \bar{N}^{(1,0)} = \frac{1}{\hbar c} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \left\{ |j_x(k)|^2, |\rho(k)|^2 \right\}, \quad (7.2)$$

удвоенная мнимая часть второго отличается от среднего числа излучаемых пар

$$\bar{N}^{B,F} = \operatorname{tr} (\beta^+ \beta)^{B,F} \equiv \iint_0^\infty \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}^{B,F}|^2 \quad (7.3)$$

и непосредственно связана с ним только при малом  $\operatorname{tr} (\beta^+ \beta)^2$  по сравнению с  $\operatorname{tr} \beta^+ \beta$ :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} W^{B,F} &= \pm \operatorname{tr} \ln (1 \pm \beta^+ \beta)^{B,F} \Big|_{\beta^+ \beta \ll 1} = \\ &= \operatorname{tr} (\beta^+ \beta)^{B,F} \mp \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\beta^+ \beta \beta^+ \beta)^{B,F} + \dots \leq \bar{N}^{B,F}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Квантово-механические обменные эффекты притяжения бозе-частиц и отталкивания ферми-частиц приводят к отличию  $2 \operatorname{Im} W^{B,F}$  от  $\bar{N}^{B,F}$ . Вместе с тем точные выражения для  $\bar{N}^{(1,0)}$  и  $\bar{N}^{B,F}$  удивительно просты и именно они связаны обсуждаемой дуальностью (см. (7.1)–(7.3)).

Представление (7.4) аналогично вириальному разложению давления идеального бозе- или ферми-газа по степеням параметра вырождения — среднего числа частиц в 3-объёме, определяемом тепловой де-бройлевской длиной волны (см. § 56 в [36]).

Другим, более близким к (7.4) примером является удвоенная мнимая часть действия, определяющего амплитуду  $\exp(iW/\hbar)$  сохранения вакуума в присутствии постоянного электрического поля  $\varepsilon$ , рождающего пары. Согласно Никишову [37, 38],

$$\frac{2 \operatorname{Im} W}{\hbar} = \pm \sum_r \int \frac{d^3 p V}{(2\pi\hbar)^3} \ln (1 \pm \bar{n}_p), \quad (7.5)$$

$$\bar{n}_p = \exp \left( -\pi \frac{m^2 + p_\perp^2}{|e\varepsilon|} \right),$$

где  $\bar{n}_p$  — среднее число образованных полей пар с частицей (или античастицей) в состоянии с данным импульсом и проекцией спина:  $p = \mathbf{p}, r$ ; верхний и нижний знаки соответствуют бозонным и фермионным парам, состоящим из противоположно заряженных массивных частиц и античастиц со спином  $s = 0$  или  $s = 1/2$ . Распределение  $\bar{n}_p$  вырождено по проекции спина  $r$  и по продольной полю компоненте импульса  $p_\parallel$  с кратностями вырождения  $2s + 1$  и  $L_\parallel \Delta p_\parallel / 2\pi\hbar$ , где  $\Delta p_\parallel = e\varepsilon T$  (см. [37–39]). Интегрирование по  $\mathbf{p}$  приводит к ряду для мнимой части лагранжевой функции Гейзенберга – Эйлера [40, 41]:

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{L} = (2s + 1) \frac{(e\varepsilon)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n^2} \exp \left( -\frac{\pi n}{\beta} \right), \quad \beta = \frac{|e\varepsilon|}{m^2}. \quad (7.6)$$

Его первый член — среднее число пар в единице 4-объёма. Следующие члены — квантово-механические обменные поправки, описывающие бозе-притяжение или ферми-отталкивание частиц при данной средней 4-плотности их числа. Они возникают из-за когерентного рождения двух и более пар в одном и том же 4-объёме формирования пары (см. [42, 43]).

Во всех приведённых примерах  $2 \operatorname{Im} W^{B,F}$  обладают точно такой же функциональной зависимостью от средних чисел заполнения  $\bar{n}_k^{B,F}$ , что и термодинамические потенциалы бозе- и ферми-газов:

$$\Omega^{B,F} = \mp T \sum_k \ln (1 \pm \bar{n}_k^{B,F}).$$

Найденное значение затравочного заряда  $e_0 = \pm \sqrt{\hbar c}$  и соответствующее значение постоянной тонкой структуры  $\alpha_0 = 1/4\pi$  обладают свойствами, указанными Гелл-Маном и Лоу для конечного затравочного заряда (см. вариант (b) их работы [9], а также раздел 1). Эти свойства свидетельствуют о геометрическом происхождении полученного значения  $\alpha_0$ , что естественно, так как при вычислении спектров использовались решения волновых уравнений для безмассовых полей, а траектории точечных зарядов и зеркал описывались времениподобными кривыми.

Между прочим, Дирак, обсуждая в университете Нового Южного Уэльса величину постоянной тонкой структуры  $\alpha$  и отношение массы протона к массе электрона, заметил, что "вполне вероятно, что подобные постоянные составлены из простых величин типа  $4\pi$ " [44]. Можно было бы поразиться удивительной интуиции Дирака, если бы он имел в виду не значение  $\alpha$ , а значение затравочной постоянной тонкой структуры  $\alpha_0$ , которое согласно обсуждаемой дуальности как раз равно  $1/4\pi$ . Различие этих двух величин обязано поляризации вакуума точечным электрическим зарядом, и их отношение  $\alpha_0/\alpha = 10,90\dots$  — это диэлектрическая проницаемость вакуума.

Значение  $e_0 = \sqrt{\hbar c}$  настолько многозначительно, что крайне желательно найти альтернативную возможность его обоснования и вычисления. В этой связи естественно проанализировать старое предложение Казимира о нахождении  $\alpha$ .

Как известно, чисто электромагнитная классическая модель электрона невозможна — для устойчивости распределения заряда нужно добавить так называемые натяжения Пуанкаре. В 1953 г. Казимир, рассчитавший притяжение двух идеально проводящих параллельных пластин из-за уменьшения между ними электромагнитной энергии нулевых колебаний, предложил электромагнитную модель электрона [45], в которой натяжения Пуанкаре возникают за счёт энергии нулевых колебаний.

Согласно этой модели электрон представляет собой проводящую сферическую оболочку с поверхностным зарядом  $e$ . Электростатическая энергия такого заряда равна

$$E = \frac{e^2}{8\pi a}, \quad (7.7)$$

если  $a$  — радиус сферы, а заряд  $e$  измеряется в хевисайдских единицах. Казимир предположил, что эта энергия кулоновского расталкивания может быть скомпенсирована отрицательным сдвигом энергии квантовых флуктуаций электромагнитного поля в вакууме, возникающим из-за взаимодействия флуктуаций с проводящей оболочкой и приводящим к силам притяжения.

Конкретный расчёт изменения энергии нулевых колебаний из-за присутствия нейтральной идеально проводящей сферической оболочки был сделан Т. Бойером [46]. Он показал, что сдвиг энергии квантовых флуктуаций не отрицателен, как в случае пластин, а положителен и

равен

$$E_B = \frac{0,09\hbar c}{2a}. \quad (7.8)$$

Через четыре года Б. Дэвис [47] подтвердил знак  $E_B$  и вычислил коэффициент 0,09 с тремя значащими цифрами: 0,0924. В 1978 г. Балиан и Дюплантье [48] также получили положительный коэффициент с теми же тремя значащими цифрами. В том же году Милтон, Де Раад и Швингер [49] нашли положительный коэффициент с пятью значащими цифрами: 0,092353 (см. также их работу [50]). Таким образом, казимировские силы не могут играть роль натяжений Пуанкаре, а электрон не обладает той экзотической структурой, которую предложил Казимир.

Если бы знак коэффициента был отрицательным, то величина заряда, выводимая из условия его устойчивости,

$$E + E_B = 0, \quad (7.9)$$

определялась бы соответствующей "постоянной тонкой структуры"

$$\alpha_B = \frac{e_B^2}{4\pi\hbar c} \approx 0,0924, \quad (7.10)$$

которая почти в 13 раз превышает постоянную тонкой структуры  $\alpha = 1/137$ .

Однако найденная Бойером энергия  $E_B$  имеет очень важный самостоятельный физический смысл. Это энергия взаимодействия нейтральной идеально проводящей сферической оболочки с флуктуациями электромагнитного поля в вакууме. Она определяется решениями чисто геометрических уравнений Максвелла для поля внутри и вне идеально проводящей оболочки и граничными условиями на ней, *не содержащими никаких размерных параметров*, кроме радиуса оболочки.

Квантованное электромагнитное поле представляется системой независимых гармонических осцилляторов, частоты  $\omega_k$  которых определены решениями уравнений Максвелла. Такая система даже в основном состоянии имеет ненулевую энергию

$$E = \sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_k, \quad (7.11)$$

называемую энергией нулевых колебаний (zero-point energy). В отсутствие проводящей сферы частоты  $\omega_k$  определяются граничными условиями на сфере очень большого радиуса,  $R \gg a$ . Присутствие проводящей сферы радиуса  $a$  внутри этой очень большой сферы изменяет энергию  $E$  на конечную величину  $E_B$  (7.8) за счёт заметного изменения частот  $\omega_k \sim c/a$  граничными условиями на проводящей сфере. Высокие частоты  $\omega_k \gg c/a$  этими условиями не меняются и в пределе  $R/a \rightarrow \infty$  не дают вклада в разность  $E_B = E_{\text{sph}} - E$  энергий нулевых колебаний со сферой  $a$  и без неё.

В результате энергия  $E_B$  по своей форме совпадает с кулоновской энергией сферы с радиусом  $a$  и зарядом

$$e_B = \sqrt{4\pi \cdot 0,0924 \hbar c} = 1,077\sqrt{\hbar c}. \quad (7.12)$$

Его величина характеризует интенсивность взаимодействия проводящей сферы с квантовыми флуктуациями электромагнитного поля в вакууме, определяется произведением  $\hbar c$  мировых постоянных в результате чисто геометрического квантования и *не зависит от радиуса*

*сферы, который может быть как угодно малым*. Она близка к величине затравочного заряда  $e_0 = \sqrt{\hbar c}$ , полученной из совпадения спектров среднего числа квантов, излучённых точечным зарядом в  $3 + 1$ -пространстве, и среднего числа пар, испущенных точечным зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве.

Различие между  $e_B$  и  $e_0$  может быть связано с разной геометрией (и топологией) проводящей сферы и точечного зеркала, а близость — с тем, что взаимодействия проводящей сферы и точечного зеркала с флуктуациями соответствующих полей в вакуумах  $3 + 1$ - и  $1 + 1$ -пространств действительно определяют с разной степенью приближения очень важную квантовую величину — величину *затравочного* заряда.

В то время как подход к квантованию, основанный на совпадении спектров излучения точечных заряда и зеркала, отличается своей релятивистской инвариантностью, подход, основанный на совпадении кулоновской и казимировской энергий заряженной и нейтральной проводящих оболочек, зависит от геометрии этих оболочек. Так, при замене сферы поверхностью куба с ребром  $2a$  (равным диаметру сферы) казимировская энергия  $E_B$  заменяется на энергию

$$E_L = \frac{0,0916 \hbar c}{2a}, \quad \alpha_L = \frac{e_L^2}{4\pi\hbar c} \approx 0,0916, \quad (7.13)$$

найденную Лукошем [51]. Она меньше, чем на 1%, отличается от  $E_B$ . Казимировская энергия других компактных оболочек рассмотрена в [52].

Любопытно, что произведения<sup>2</sup>

$$\alpha_0 \alpha_B = \frac{1}{136,069} \quad \text{и} \quad \alpha_0 \alpha_L = \frac{1}{137,101} \quad (7.14)$$

чисто геометрических постоянных мало отличаются от постоянной тонкой структуры  $\alpha = 1/137,036$ , которая заключена между ними:  $\alpha_0 \alpha_L < \alpha < \alpha_0 \alpha_B$ . Не означает ли это, что существует правильный (или полуправильный) многогранник, идеально проводящая поверхность которого сдвигает энергию электромагнитных вакуумных флуктуаций на величину

$$E_G = \frac{\alpha_G \hbar c}{2a}, \quad (7.15)$$

в которой параметр  $\alpha_G$  как раз равен  $4\pi\alpha$ , т.е.  $\alpha_0 \alpha_G = \alpha$ ,  $a$  — радиус вписанной в многогранник сферы. Симметрия такой поверхности была бы чрезвычайно интересна.

В этом случае величина  $\alpha_G$ , равная отношению  $\alpha/\alpha_0$  квадратов физического и затравочного зарядов, была бы обратным значением диэлектрической проницаемости вакуума. Полученные Бойером и Лукошем величины  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$  можно было бы рассматривать как приближённые обратные значения диэлектрической проницаемости вакуума.

В заключение приведём аналитическое выражение для  $\alpha_0 \alpha_L$ , численно отличающееся от экспериментального  $\alpha$  меньше, чем на 0,05%:

$$\alpha_0 \alpha_L = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi}{16} \left[ 1 - \frac{1}{\pi^3} \sum_{m_1, m_2, m_3=-\infty}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2} \right]. \quad (7.16)$$

Значение входящей сюда суммы (дзета-функции Эпштейна) равно 16,53231596... [51].

<sup>2</sup> Значения  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$  взяты из [49] и [51].



Автор благодарен М.А. Васильеву, Б.Л. Воронову, Л.В. Келдышу, А.И. Никишову и А.Е. Шабаду за полезные обсуждения и замечания.

Работа поддержана программой Президиума РАН "Экспериментальные и теоретические исследования фундаментальных взаимодействий на ускорителях ЦЕРН".

## Список литературы

- Hawking S W *Nature* **248** 30 (1974)
- Hawking S W *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1975)
- Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **108** 1121 (1995) [Nikishov A I, Ritus V I *JETP* **81** 615 (1995)]
- Ритус В И *ЖЭТФ* **110** 526 (1996) [Ritus V I *JETP* **83** 282 (1996)]
- Ритус В И *ЖЭТФ* **114** 46 (1998) [Ritus V I *JETP* **87** 25 (1998)]; "Поправка" *ЖЭТФ* **115** 384 (1999) ["Erratum" *JETP* **88** 207 (1999)]
- Ритус В И *ЖЭТФ* **116** 1523 (1999) [Ritus V I *JETP* **89** 821 (1999)]
- Ritus V I *ЖЭТФ* **124** 14 (2003) [*JETP* **97** 10 (2003)]
- Ritus V I *ЖЭТФ* **129** 664 (2006) [*JETP* **102** 582 (2006)]
- Gell-Mann M, Low F E *Phys. Rev.* **95** 1300 (1954)
- Боголюбов Н Н *ЖЭТФ* **34** 58 (1958) [Bogolyubov N N *Sov. Phys. JETP* **7** 41 (1958)]
- Schwinger J *Particles, Sources, and Fields* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1970) [Швингер Ю *Частицы, источники, поля* Т. 1 (М.: Мир, 1973)]
- Baker M, Johnson K *Phys. Rev.* **183** 1292 (1969)
- Landau L D, in *Niels Bohr and the Development of Physics* (Ed. W Pauli) (New York: McGraw-Hill, 1955) [Ландау Л Д, в сб. *Нильс Бор и развитие физики* (Под ред. В Паули) (М.: ИЛ, 1958)]
- Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1976) [Bogolyubov N N, Shirkov D V *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: John Wiley, 1980)]
- Itzykson C, Zuber J-B *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill International Book Co., 1980) [Итциксон К, Зюбер Ж-Б *Квантовая теория поля* Т. 2 (М.: Мир, 1984)]
- Huang K *Quarks, Leptons and Gauge Fields* (Singapore: World Scientific, 1982) [Хуанг К *Кварки, лептоны и калибровочные поля* (М.: Мир, 1985)]
- Huang K, in *Asymptotic Realms of Physics. Essays in Honor of Francis E. Low* (Eds A H Guth, K Huang, R L Jaffe) (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1983)
- Birrell N D, Davies P C W *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982) [Биррелл Н, Девис П *Квантовые поля в искривленном пространстве-времени* (М.: Мир, 1984)]
- DeWitt B S *Phys. Rep.* **19** 295 (1975)
- Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989) [Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999)]
- Lightman A P, Press W H, Price R N, Teukolsky S A *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1975) [Лайтман А, Пресс В, Прайс Р, Тюкольски С *Сборник задач по теории относительности и гравитации* (М.: Мир, 1979)]
- Wald R M *Commun. Math. Phys.* **45** 9 (1975)
- Titchmarsh E C *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford: The Clarendon Press, 1937) [Титчмарш Е *Введение в теорию интегралов Фурье* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948)]
- Аббасов И И, Болотовский Б М, Давыдов В А *УФН* **149** 709 (1986) [Abbasov I I, Bolotovskii B M, Davydov V A *Sov. Phys. Usp.* **29** 788 (1986)]
- Dwight H B *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* (New York: Macmillan, 1961) [Двайт Г Б *Таблицы интегралов и другие математические формулы* (М.: Наука, 1978)]
- 't Hooft G, in *Salamfestschrift* (World Scientific Series in 20th Century Physics, Vol. 4, Eds A Ali, J Ellis, S Randjbar-Daemi) (Singapore: World Scientific, 1993); gr-qc/9310026
- Susskind L J. *Math. Phys.* **36** 6377 (1995)
- Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998)
- Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998)
- Dirac P A M *Proc. R. Soc. Lond. A* **114** 243 (1927); *Proc. R. Soc. Lond. A* **114** 710 (1927)
- Fock V Z. *Phys.* **75** 622 (1932)
- Schrödinger E *Naturwissenschaften* **14** 664 (1926)
- von Neumann J *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: J. Springer, 1932) [*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1955); фон Нейман И *Математические основы квантовой механики* (М.: Наука, 1964)]
- Glauber R J *Phys. Rev.* **130** 2529 (1963); **131** 2766 (1963)
- Ахмезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1969) [Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Interscience Publ., 1965)]
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1976) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Vol. 1* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
- Никишов А И *ЖЭТФ* **57** 1210 (1969) [Nikishov A I *Sov. Phys. JETP* **30** 660 (1970)]
- Никишов А И *Тр. ФИАН* **111** 152 (1979)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
- Heisenberg W, Euler H Z. *Phys.* **98** 714 (1936)
- Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
- Ритус В И *ДАН СССР* **275** 611 (1984) [Ritus V I *Sov. Phys. Dokl.* **29** 227 (1984)]
- Лебедев С Л, Ритус В И *ЖЭТФ* **86** 408 (1984) [Lebedev S L, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **59** 237 (1984)]
- Dirac P A M *Directions in Physics* (Eds H Hora, J R Shepanski) (New York: Wiley, 1978)
- Casimir H B G *Physica* **19** 846 (1953)
- Boyer T H *Phys. Rev.* **174** 1764 (1968)
- Davies B J. *Math. Phys.* **13** 1324 (1972)
- Balian R, Duplantier B *Ann. Physics* **112** 165 (1978)
- Milton K A, DeRaad L L (Jr.), Schwinger J *Ann. Physics* **115** 388 (1978)
- Schwinger J, DeRaad L L (Jr.), Milton K A *Ann. Physics* **115** 1 (1978)
- Lukosz W *Physica* **56** 109 (1971)
- Гриб А А, Мамаев С Г, Мостепаненко В М *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (М.: Энергоатомиздат, 1988)

## Duality of two-dimensional field theory and four-dimensional electrodynamics leading to finite value of the bare charge

V.I. Ritus. P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation  
Tel. +7 (499) 132 64 26. Fax +7 (499) 135 85 33. E-mail: ritus@lpi.ru

The holographic duality consisting in the functional coincidence of the spectra of the mean number of photons (or scalar quanta) emitted by a point electric (scalar) charge in  $3+1$ -space with the spectra of the mean number of pairs of scalar (spinor) quanta emitted by a point mirror in  $1+1$ -space is discussed. Because they are functions of two variables and functionals of the common trajectory of the charge and the mirror, the spectra differ only by a factor  $e^2/\hbar c$  (Heaviside units). The requirement  $e^2/\hbar c = 1$  leads to unique values for the magnitude of the point charge and its fine structure constant,  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$ ,  $\alpha_0 = 1/4\pi$ , all their properties being as stated by Gell-Mann and Low for the finite bare charge. This requirement follows from the holographic bare charge quantization principle we propose here, according to which the charge and mirror radiations located correspondingly in four-dimensional space and on its internal two-dimensional surface must have identically coincident spectra. The duality is due to the integral connection of the causal Green functions for  $3+1$ - and  $1+1$ -spaces and to connections of the current and charge densities in  $3+1$ -space with the scalar products of scalar and spinor massless fields in  $1+1$ -space. We discuss the close similarity of the values of the point bare charge  $e_0 = \sqrt{\hbar c}$ , the "charges"  $e_B = 1.077\sqrt{\hbar c}$  and  $e_L = 1.073\sqrt{\hbar c}$  characterizing the shifts  $e_{B,L}^2/8\pi a$  of the energy of zero-point electromagnetic oscillations in vacuum by the neutral ideally conducting surfaces of a sphere of radius  $a$  and a cube of side  $2a$ , and the electron charge  $e$  multiplied by  $\sqrt{4\pi}$ . The near equality  $e_L \approx \sqrt{4\pi} e$  means that  $\alpha_0 \alpha_L \approx \alpha$  — the fine structure constant.

PACS numbers: **03.70.+k**, **12.20.-m**, **41.60.-m**

Bibliography — 52 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (6) 591–615 (2013)

DOI: 10.3367/UFN.0183.201306c.0591

Received 27 July 2012, revised 30 April 2013

*Physics – Uspekhi* **56** (6) (2013)