Сентябрь 2012 г. **Том 182, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О некоторых полезных соответствиях в классической магнитостатике и о мультипольных представлениях магнитного потенциала эллипсоида

Р.З. Муратов

Показано, что правило Феррерса, которое связывает потенциалы объёмных и поверхностных распределений скалярных источников (зарядов или масс) одного и того же геометрического тела, распространяется и на потенциалы (векторный и скалярный) магнитного поля векторных источников (объёмных и поверхностных плотностей стационарного тока). Показано, что у тела с заданной намагниченностью магнитные мультипольные моменты, рассчитанные по формулам для связанных магнитных зарядов, совпадают с моментами амперовых токов. Использование этих результатов с учётом универсальности мультипольных выражений потенциала позволяет сравнительно просто получить (что и сделано) формулы мультипольного представления скалярного магнитного потенциала эллипсоида.

PACS numbers: 41.20.Gv, 41.20.Gz DOI: 10.3367/UFNr.0182.201209d.0987

Содержание

1. Введение

Обсуждаемые в данной статье вопросы теории потенциала, представляющие и самостоятельный интерес, возникли в нашем случае в связи с построением мультипольного представления скалярного магнитного потенциала эллипсоида. В отличие от теоретического анализа электростатического или гравитационного потенциалов скалярных источников (плотности заряда или массы), теоретический анализ магнитного потенциала уже по причине векторного характера его источников (объёмной $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и (или) поверхностной $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ плотностей тока) связан с существенно бóльшим объёмом сопутствующих вычислений. Дополнительное усложнение по сравнению со случаем скалярных источников привносит то обстоятельство, что вектор плотности стационарного тока должен удовлетворять условию соленоидальности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{1}$$

и граничному условию

$$j_n\big|_S = 0 \tag{2}$$

на поверхности S токовой области. Наконец, наиболее радикальное различие между скалярным потенциалом зарядов (масс) и скалярным магнитным потенциалом токов состоит в том, что в области пространства, где есть токи, скалярного потенциала не существует. Таким образом, как хорошо известно, для скалярного потенциала нет уравнения Пуассона и, следовательно, нет его формального решения, представляющего потенциал в виде интеграла от источников и статической функции Грина. Стандартный выход из этой ситуации — это обращение к векторному потенциалу магнитного поля.

Естественно, однако, что в тех случаях, когда основной интерес связан с наружным полем (как, например, при построении мультипольного представления магнитного потенциала[1] эллипсоида), использование скаляр-

Р.З. Муратов. Московский государственный горный университет, Ленинский просп. 6, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: rodeszmu@yandex.ru

Статья поступила 21 марта 2011 г.

[1] Полезность мультипольных представлений заключается, в частности, в том, что их использование существенно упрощает (для источников, распределённых в эллипсоидальной области пространства) решение сформулированной Я.И. Френкелем (см. [1, с. 103], [2, с. 524]) задачи об эквивалентных, т.е. создающих одинаковые внешние поля, источниках.

ного потенциала становится возможным и целесообразным, в особенности тогда, когда пространственная область с токами является односвязной. Обсуждаемые в настоящей статье соотношения носят достаточно общий характер (в отношении как геометрического вида области с токами, так и вида функций, описывающих токи) и являются полезными при рассмотрении конкретных задач.

2. Правило Феррерса для векторного и скалярного магнитных потенциалов

В 1877 г. в работе Феррерса [3] была установлена связь между гравитационными потенциалами объёмных и поверхностных распределений источников одного и того же геометрического тела. Этот результат (правило Феррерса) применительно к кулоновским полям состоит в следующем. Располагая аналитическим выражением потенциала Φ^{T} заряда, распределённого в объёме V с плотностью $\rho(x,y,z)$, где ρ — однородная (степени k) функция координат, можно, используя формулу

$$\Phi = (k+2)\Phi^{\mathrm{T}} - \mathbf{r}\,\frac{\partial \Phi^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{r}}\,, \tag{3}$$

найти потенциал Φ поверхностного заряда, распределённого с плотностью $\sigma = \rho\, p$ на границе S того же объёма. Здесь (и далее в этом разделе) для произвольной точки K на границе S величина p — это длина перпендикуляра, опущенного из начала координат (находящегося внутри V) на касательную к поверхности S плоскость, которая проходит через K. Существенно, что в правиле Феррерса (3) точку наблюдения можно выбирать как внутри, так и вне области V, а форма этой области может быть произвольной.

Представляет интерес выяснить, распространяется ли правило Феррерса на стационарные магнитные поля. Этот вопрос мы рассмотрим, следуя рассуждениям, во многом аналогичным приведённым в [4] при доказательстве формулы (3).

Пусть некоторая ограниченная односвязная область пространства (в дальнейшем именуемая телом) характеризуется объёмом V, в котором циркулируют токи плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Будем считать замкнутую поверхность S, охватывающую V, гладкой и выпуклой и выберем начало координат внутри V. В области, занимаемой токами, вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ не является потенциальным. Поэтому, как указывалось, скалярный потенциал магнитного поля не имеет прямого выражения через плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, подобного выражению электростатического потенциала через соответствующую плотность заряда. Остаётся использовать векторный потенциал[2]

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V'.$$

Каждую декартову компоненту объёмной плотности тока будем считать однородной (степени k) функцией координат, так что

$$\mathbf{j}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^k\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\,, \tag{4}$$

где λ — произвольная постоянная. Векторный потенциал того же тела в точке $\lambda\,\mathbf{r}$, очевидно, имеет вид

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathbf{r}) = \frac{\lambda^{k+2}}{\mathrm{c}}\int_{\overline{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V' = \lambda^{k+2}\,\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\,, \tag{5}$$

где $\overline{V}$ — объём тела, граница которого подобна границе исходного тела и расположена подобно ей, но находится в λ раз ближе к началу координат[3], а $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})$ отличается от $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})$ только тем, что областью интегрирования $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})$ является не V, а $\overline{V}$. При выводе (5) использовались замена переменных интегрирования $\mathbf{r}' \to \lambda\mathbf{r}'$ и свойство (4).

Положим теперь $\lambda = 1+\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Тогда границы объёмов V и $\overline{V}$ образуют гомотетическую оболочку, толщина которой в произвольной точке $\mathrm{d}p = p\varepsilon$. Согласно принципу суперпозиции, векторный потенциал оболочки представляет собой разность между векторными потенциалами ограничивающих её тел при условии, что в объёме, общем для обоих тел, плотности их токов совпадают. Сказанное, естественно, справедливо и в отношении любой декартовой компоненты векторного потенциала. В частности, компонента $\mathrm{d}A_x$ векторного потенциала бесконечно тонкой оболочки с бесконечно малой поверхностной плотностью тока $\mathrm{d}\mathbf{i} = \mathbf{j}\,\mathrm{d}p = \mathbf{j}\,p\varepsilon$ выражается в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_x &= A_x^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) - \overline{A}_x^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) = \\ &= A_x^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) - (1+\varepsilon)^{-k-2}A_x^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{r}) = \\ &= \left[(k+2)A_x^{\mathrm{T}} - \mathbf{r}\nabla A_x^{\mathrm{T}}\right]\varepsilon\,,\end{aligned} \tag{6}$$

или

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \left\{(k+2)\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) - (\mathbf{r}\nabla)\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\right\}\varepsilon\,.$$

Учитывая, что ε — постоянное (хотя и сколь угодно малое) число, заключаем, что поверхностному току с *конечной* плотностью

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r}')\,p(\mathbf{r}')\,, \qquad \mathbf{r}' \in S\,, \tag{7}$$

циркулирующему в оболочке с нулевой толщиной, соответствует векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (k+2)\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) - (\mathbf{r}\nabla)\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\,. \tag{8}$$

В формуле (8) точка наблюдения может быть выбрана как внутри, так и вне объёма V.

Рассмотрим теперь магнитную индукцию $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, в частности какую-либо из её декартовых компонент, например B_z. Последовательно получаем

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (k+1)\,B_z^{\mathrm{T}} - x\,\frac{\partial B_z^{\mathrm{T}}}{\partial x} - y\,\frac{\partial B_z^{\mathrm{T}}}{\partial y} - z\,\frac{\partial B_z^{\mathrm{T}}}{\partial z}\,, \tag{9}$$

[2] Мы будем различать векторный потенциал $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})$ объёмных токов и векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ поверхностных токов одного и того же тела. Следует также различать обозначения скорости света c и полуоси c эллипсоида.

[3] Слой, образующие поверхности которого подобны и подобно расположены, называют *гомотетическим*.

где в качестве A_x и A_y подставлены выражения, даваемые (8), и $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \operatorname{rot} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Вне объёма V вектор $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ потенциален: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = -\nabla\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}$. Это позволяет для точек наблюдения вне тела переписать (9) в виде

$$B_z = -(k+1)\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z} + x\,\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial x\,\partial z} + y\,\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial y\,\partial z} + z\,\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z^2}\,.$$

Здесь $\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}$ — внешний скалярный потенциал магнитного поля циркулирующих в теле объёмных токов плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z}\right) = \frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z} + z\,\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z^2}\,,$$

имеем окончательно

$$B_z = -(k+2)\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial x} + y\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial y} + z\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial z}\right). \quad (10)$$

Циклическая перестановка в (10) даёт аналогичные выражения для B_x и B_y, так что результат записывается и в векторном виде:

$$\mathbf{B} = -\nabla\tilde{\Phi}\,. \quad (11)$$

Здесь скалярный магнитный потенциал оболочки того же тела, поверхностные токи которой характеризуются плотностью (7), имеет вид[4]

$$\tilde{\Phi} = (k+2)\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}} - \mathbf{r}\,\frac{\partial\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{r}}\,. \quad (12)$$

Формулы (8) и (12) выражают правило Феррерса для магнитных полей постоянных токов, причём если первая из них справедлива во всём пространстве, то вторая — только вне области с токами.

3. О взаимном интегральном соответствии пуассоновых магнитных зарядов и амперовых молекулярных токов

Перейдём теперь к рассмотрению магнитных мультипольных моментов. Как известно, общей чертой мультипольных моментов любой физической природы (гравитационных, электрических, магнитных) является то, что, будучи интегральными характеристиками соответствующей системы источников, они "вбирают в себя" конкретную информацию о материальной структуре, форме и размерах системы, создающей соответствующее внешнее поле. Поэтому формулы, выраженные в терминах мультипольных моментов, всегда наделены чертами универсальности. Примером могут служить мультипольные разложения потенциалов электростатических полей для произвольных ограниченных в пространстве трёхмерных распределений заряда (см., например, [5]). Эти формулы, описывающие поля вне системы источников, одинаково справедливы и для дискретных, и для непрерывных распределений (по объёму, поверхности, линии) зарядов, свободных или связанных. Аналогичные формулы, получающиеся из первых в результате замены электрических моментов магнитными и приравнивания нулю монопольного момента, справедливы и для магнитных полей, обусловленных электрическими токами. При этом не имеет значения, являются ли токи токами проводимости или относятся к конвекционным или молекулярным.

Другой пример — мультипольные представления внешнего электростатического (гравитационного) потенциала зарядов (масс), непрерывно распределённых (с полиномиальной зависимостью от координат) по объёму или поверхности эллипсоида [6–8]. Эти формулы, по сравнению с приведёнными в разделе 2, имеют более узкую степень универсальности — они относятся только к эллипсоидальным конфигурациям. В разделе 4 мы воспользуемся этой универсальностью, для того чтобы получить мультипольные представления скалярного магнитного потенциала стационарных токов в эллипсоиде.

Прежде, однако, рассмотрим некоторые математические следствия, касающиеся двух различных (имевших место в истории магнетизма) толкований происхождения магнитных полей магнетиков (неферромагнитных). Будем считать, что такого рода магнетик представляет собой некоторое односвязное тело, находящееся в немагнитной среде и испытывающее воздействие внешнего магнитного поля. Магнитные свойства такого магнетика, как известно, характеризует вектор намагниченности $\mathbf{I}$. Интересующий нас здесь вопрос — это магнитные мультипольные моменты тела, оперировать с которыми будем на основе полумикроскопического описания источников.

Пуассон [9–11] объяснял происхождение магнитного поля наличием связанных магнитных зарядов, объёмная $\tilde{\rho}$ и поверхностная $\tilde{\sigma}$ плотности которых выражаются формулами

$$\tilde{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{I}\,, \qquad \tilde{\sigma} = I_n \quad (13)$$

соответственно. Эти формулы аналогичны выражению плотностей связанных электрических зарядов через поляризацию $\mathbf{P}$. Максвелл в *Трактате об электричестве и магнетизме* [12, п. 430] отклонил как противоречащий эксперименту конкретный механизм намагничивания, предложенный Пуассоном. Примечательны, однако, завершающие критическое высказывание Максвелла слова: "*Of course the value of Poisson's mathematical investigations remains unimpaired, as they do not rest on his hypothesis, but on the experimental fact of induced magnetization*"[5].

Ампер [12–14] считал источником магнитного поля магнетиков молекулярные токи, связь которых с намагниченностью характеризуют формулы

$$\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = \mathrm{c}\operatorname{rot}\mathbf{I}\,, \qquad \mathbf{i}_{\mathrm{A}} = \mathrm{c}\operatorname{Rot}\mathbf{I}\,. \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{j}_{\mathrm{A}}$ и $\mathbf{i}_{\mathrm{A}}$ — объёмная и поверхностная плотности молекулярных (амперовых) токов соответственно, а $\operatorname{Rot}\mathbf{I}$ — обозначение так называемого *поверхностного ротора* вектора $\mathbf{I}$ (см., например, [15]),

$$\operatorname{Rot}\mathbf{I} = \left[\mathbf{n}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)\right] = -\left[\mathbf{n}\mathbf{I}\right]. \quad (15)$$

[4] Произвольную постоянную, возникающую при нашем выводе (12), положим равной нулю, так что оба потенциала, $\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$, при $\mathbf{r} \to \infty$ стремятся к нулю.

[5] "Разумеется, ценность математических исследований Пуассона остаётся незатронутой, поскольку они основываются не на его гипотезах, а на экспериментальном факте индуцированной намагниченности".

Единичный вектор $\mathbf{n}$ внешней нормали к поверхности S тела направлен из среды 1, в которой $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$, в среду 2, где в нашем случае $\mathbf{I}_2 = 0$. Заметим, что условиям (1) и (2) амперовы токи удовлетворяют автоматически.

Очевидно, что мультипольные системы могут образовываться как зарядами, так и токами. В связи с этим возникает вопрос: как соотносятся между собой магнитные мультипольные моменты пуассоновых магнитных зарядов (13) и магнитные мультипольные моменты амперовых молекулярных токов (14)? При этом речь идёт, разумеется, об одном и том же теле с намагниченностью $\mathbf{I}$. Напомним, что вектор $\mathbf{I}$ — это средняя плотность магнитного (дипольного) момента в физически бесконечно малом объёме, т.е. магнитный момент тела

$$\mathfrak{M} = \int \mathbf{I}\,\mathrm{d}V\,. \tag{16}$$

Магнитные мультипольные моменты магнитных зарядов определяются формулами

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \begin{cases} \displaystyle\int \tilde{\rho}(\mathbf{r})\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V\,, \\ \displaystyle\oint \tilde{\sigma}(\mathbf{r})\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S\,, \end{cases} \qquad l = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

которые совершенно аналогичны определению электростатических (в последних, правда, допустимо также значение $l = 0$) мультипольных моментов (см., например, [16]). Введённые в работе [17] тензоры $\theta_{i_1\ldots i_l} = \hat{D}_{i_1}\ldots\hat{D}_{i_l}\times 1$ являются результатом воздействия на единицу произведения компонент векторного оператора $\hat{\mathbf{D}} = 2\mathbf{r}(\mathbf{r}\nabla) - r^2\nabla + \mathbf{r}$. В частности,

$$\theta^{(0)} = 1\,, \qquad \theta_i = x_i\,, \qquad \theta_{ij} = 3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\,,$$
$$\theta_{ijk} = 3\big(5x_ix_jx_k - r^2\langle\langle\delta_{ij}x_k\rangle\rangle\big)\,,$$
$$\theta_{ijkl} = 3\big(35x_ix_jx_kx_l - 5r^2\langle\langle\delta_{ij}x_kx_l\rangle\rangle + r^4\langle\langle\delta_{ij}\,\delta_{kl}\rangle\rangle\big)\,,$$
$$\theta_{ijklm} = 15\big(63x_ix_jx_kx_lx_m - 7r^2\langle\langle\delta_{ij}x_kx_lx_m\rangle\rangle + r^4\langle\langle\delta_{ij}\,\delta_{kl}x_m\rangle\rangle\big).$$

Здесь δ_{kn} — символ Кронекера, двойными угловыми скобками ("кавычками") обозначена операция специальной симметризации. Последняя состоит в прибавлении к тензору, заключённому в "кавычки", всех получающихся из него несовпадающих тензоров при всевозможных перестановках его индексов. Например,

$$\langle\langle\delta_{ij}x_kx_l\rangle\rangle \equiv \delta_{ij}x_kx_l + \delta_{ik}x_jx_l + \delta_{jk}x_ix_l + \delta_{il}x_jx_k + \\ + \delta_{jl}x_ix_k + \delta_{kl}x_ix_j\,.$$

Магнитные мультипольные моменты токов (в нашем случае амперовых) даются формулами [5, 18]

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{(l+1)\mathrm{c}}\int_V [\mathbf{r}\,\mathbf{j}_\mathrm{A}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V\,, \\ \displaystyle\frac{1}{(l+1)\mathrm{c}}\oint_S [\mathbf{r}\,\mathbf{i}_\mathrm{A}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S\,. \end{cases} \qquad l = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Для того чтобы обе точки зрения (и Пуассона, и Ампера) одновременно непротиворечиво сосуществовали, выражения (17) и (18) должны, очевидно, приводить к совпадающим результатам. Доказательству этого и посвящён данный раздел.

Прежде, однако, проверим, насколько дипольные моменты амперовых объёмных токов

$$\mathfrak{M}_V = \frac{1}{2\mathrm{c}}\int [\mathbf{r}\,\mathbf{j}_\mathrm{A}]\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]\,\mathrm{d}V \tag{19}$$

и дипольные моменты амперовых поверхностных токов

$$\mathfrak{M}_S = \frac{1}{2\mathrm{c}}\oint [\mathbf{r}\,\mathbf{i}_\mathrm{A}]\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\oint [\mathbf{r}\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{I}]\,\mathrm{d}S \tag{20}$$

согласуются с формулой (16), определяющей намагниченность. Рассмотрим удвоенную сумму (19) и (20):

$$2\mathfrak{M} = \int [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]\,\mathrm{d}V + \oint [\mathbf{r}\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{I}]\,\mathrm{d}S = \\ = \int [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]\,\mathrm{d}V - \oint \big[\mathbf{r}[\mathbf{n}\mathbf{I}]\big]\,\mathrm{d}S\,, \tag{21}$$

где учтено (15). Для x-компоненты подынтегрального выражения в объёмном интеграле получаем

$$[\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_x = y\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{I} - z\,\mathrm{rot}_y\,\mathbf{I} = \\ = -\left(y\,\frac{\partial}{\partial y} + z\,\frac{\partial}{\partial z}\right)I_x + \frac{\partial}{\partial x}(yI_y + zI_z) = \\ = -\frac{\partial}{\partial y}(yI_x) - \frac{\partial}{\partial z}(zI_x) + \frac{\partial}{\partial x}(yI_y + zI_z) + 2I_x\,,$$

или

$$[\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_x - 2I_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}\,\mathbf{I}) - \mathrm{div}\,(I_x\,\mathbf{r})\,. \tag{22}$$

Интегрируя (22) по объёму тела и используя формулу Гаусса – Остроградского, находим

$$\int \big([\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_x - 2I_x\big)\,\mathrm{d}V = \oint n_x(\mathbf{r}\,\mathbf{I})\,\mathrm{d}S - \oint I_x(\mathbf{r}\mathbf{n})\,\mathrm{d}S\,. \tag{23}$$

Учитывая, что $\big[\mathbf{r}\,[\mathbf{n}\mathbf{I}]\big] = \mathbf{n}(\mathbf{r}\,\mathbf{I}) - \mathbf{I}(\mathbf{r}\mathbf{n})$, перепишем (23) в векторном виде:

$$\int [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]\,\mathrm{d}V = 2\int \mathbf{I}\,\mathrm{d}V + \oint \big[\mathbf{r}\,[\mathbf{n}\mathbf{I}]\big]\,\mathrm{d}S\,. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (21), убеждаемся в выполнении (16), а также в том, что при вычислении аддитивных интегральных характеристик, связанных с токами (в том числе с молекулярными), следует помнить о вкладе, вносимом поверхностными токами, когда они есть. К таким характеристикам относятся, разумеется, не только магнитный дипольный момент, но и моменты высших магнитных мультиполей.

То, что дипольный момент пуассоновых магнитных зарядов (13) тоже соответствует формуле (16), мы проверять не будем. Мы докажем более общее утверждение о совпадении магнитных мультипольных моментов произвольного ранга системы молекулярных токов (14) и системы магнитных зарядов (13), относящихся к одному и тому же телу с намагниченностью $\mathbf{I}$.

Будем исходить из выражений (18) для тензора магнитного мультипольного момента l-го ранга, рас-

сматривая сначала по отдельности вклад

$$\mathfrak{M}^{(V)}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathrm{c}} \int_V [\mathbf{r}\,\mathbf{j}_\mathrm{A}]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}V = \\ = \frac{1}{l+1}\int_V [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}V \tag{25}$$

в этот момент, даваемый объёмными токами плотностью $\mathbf{j}_\mathrm{A} = \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}$, и вклад

$$\mathfrak{M}^{(S)}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathrm{c}} \oint_S [\mathbf{r}\mathbf{i}_\mathrm{A}]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S = \\ = -\frac{1}{l+1}\oint_S \big[\mathbf{r}[\mathbf{n}\mathbf{I}]\big]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S \tag{26}$$

поверхностных токов плотностью $\mathbf{i}_\mathrm{A} = \mathrm{c}\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{I} = -\mathrm{c}\,[\mathbf{n}\mathbf{I}]$ (см. формулы (14), (15)).

Преобразуем подынтегральное выражение в (25). Последовательно получаем

$$[\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \varepsilon_{klm} x_l\,\varepsilon_{mnr}\frac{\partial I_r}{\partial x_n}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \varepsilon_{klm}\varepsilon_{nrm} x_l \frac{\partial I_r}{\partial x_n}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \\ = (\delta_{kn}\delta_{lr} - \delta_{kr}\delta_{ln})\,x_l\frac{\partial I_r}{\partial x_n}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = x_l\frac{\partial I_l}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} - x_l\frac{\partial I_k}{\partial x_l}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\,. \tag{27}$$

Здесь ε_{klm} — полностью антисимметричный единичный псевдотензор. Кроме того, для сокращения записи у тензора $\theta_{i_1\ldots i_l}$ временно опущены все тензорные индексы как не участвующие в проводимых преобразованиях. Каждое из замыкающих (27) слагаемых удобно привести к следующим видам:

$$x_l\frac{\partial I_l}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_l I_l\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) - I_l\frac{\partial\theta}{\partial x_l} - x_l I_l\,\Delta\theta\,, \tag{28}$$

$$x_l\frac{\partial I_k}{\partial x_l}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(x_l I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) - 3I_l\frac{\partial\theta}{\partial x_l} - I_k x_l\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\,. \tag{29}$$

Учтём теперь (см. [17]), что каждая компонента тензора $\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})$ является шаровой функцией, т.е. однородным гармоническим полиномом степени l. Это означает, что, во-первых, последнее слагаемое в (28) обращается в нуль, поскольку $\Delta\theta = 0$, а во-вторых, последнее слагаемое в (29) допускает применение к функции $\partial\theta/\partial x_k$ теоремы Эйлера об однородных функциях, так что[6]

$$x_l\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = (l-1)\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\,.$$

В результате (27) приобретает вид

$$[\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_l I_l\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) - I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(x_l I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) + 3I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} + (l-1)I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\,,$$

или

$$[\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{I}]_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_l I_l\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(x_l I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) + (l+1)I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbf{r}\mathbf{I}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(x_l I_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) + \\ + (l+1)\frac{\partial}{\partial x_k}(I_k\theta) - (l+1)\theta\,\mathrm{div}\,\mathbf{I}\,. \tag{30}$$

Подставляя (30) в объёмный интеграл (25) и трижды используя формулу Гаусса – Остроградского, приходим к окончательному выражению:

$$\mathfrak{M}^{(V)}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{l+1}\oint_S \mathbf{r}\mathbf{I}\frac{\partial}{\partial n}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S - \\ - \frac{1}{l+1}\oint_S (\mathbf{r}\mathbf{n})\,I_k\frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S + \\ + \oint_S (\mathbf{I}\mathbf{n})\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S - \int_V \theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{div}\,\mathbf{I}\,\mathrm{d}V\,. \tag{31}$$

Обратимся к интегралу (26). Раскрывая в нём двойное векторное произведение $\big[\mathbf{r}\,[\mathbf{n}\mathbf{I}]\big]$, получим формулу

$$\mathfrak{M}^{(S)}_{i_1\ldots i_l} = -\frac{1}{l+1}\oint_S n_k(\mathbf{r}\mathbf{I})\frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S + \\ + \frac{1}{l+1}\oint_S I_k(\mathbf{r}\mathbf{n})\frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S\,,$$

сложение которой с (31) даёт выражение для полного мультипольного момента

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \int\tilde{\rho}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}V + \oint\tilde{\sigma}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\,\mathrm{d}S$$

только через плотности (13) магнитного связанного заряда.

Таким образом, использование представлений о связанных магнитных зарядах при расчёте полных мультипольных моментов, учитывающих суммарный вклад объёмных и поверхностных источников, находится в количественном согласии с результатами, основанными на использовании амперовых токов. Этот вывод, который, следуя Максвеллу, мы рассматриваем как чисто математический, полезен тем, что он может быть (и в разделе 4 будет) использован как связующее звено между мультипольными формулами электростатики и магнитостатики.

В этой статье мы интересуемся магнитными полями главным образом в точках наблюдения, находящихся вне токовой области. По отношению к таким точкам разбиение токов на объёмные и поверхностные является в определённой мере условным, поскольку объёмные токи всегда можно заменить эквивалентными поверхностными. В этом убеждает следующее рассуждение. Пусть всё пространство заполнено сверхпроводником, в котором имеется полость, и в этой полости циркулирует стационарный электрический ток. Поскольку в толще сверхпроводника магнитное поле всегда отсутствует,

[6] Именно предстоящее использование теоремы Эйлера побудило нас вторую производную $\partial^2\theta/\partial x_l\,\partial x_k$ старомодно обозначить как $(\partial/\partial x_l)(\partial\theta/\partial x_k)$.

то, с точки зрения принципа суперпозиции, это означает, что магнитное поле, созданное объёмными токами полости, "гасится" магнитным полем поверхностных токов, наведённых на границе полости. Отсюда следует, что токи на поверхности полости, взятые с противоположным знаком, эквивалентны объёмным токам.

4. О мультипольных представлениях скалярного магнитного потенциала эллипсоида

В данном разделе в качестве геометрического объекта, в котором распределены постоянные источники магнитного поля, рассматривается трёхосный эллипсоид.

Как известно, для шара или сферы с полиномиальной (степени k) плотностью источников (зарядов или токов) все мультипольные моменты с рангами выше, чем k, равны нулю и, значит, мультипольное разложение даётся конечным рядом. В отличие от шара, для эллипсоида существование какого-либо момента невозможно без одновременного существования и всех высших мультипольных моментов той же чётности. Поэтому мультипольное разложение потенциала эллипсоида — это всегда бесконечный ряд. Между тем для объёмных и поверхностных внешних потенциалов эллипсоида, порождаемых *полиномиальными* плотностями, можно построить[7] [6–8] так называемое *мультипольное представление*, которое, как и отмеченное выше мультипольное разложение потенциала шара, имеет вид конечной суммы, составленной из произведений компонент мультипольных моментов на некоторые эталонные тензорные функции.

Напомним, какой вид имеют мультипольные представления электростатического потенциала эллипсоида. Если поверхность эллипсоида задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{32}$$

то одно из мультипольных представлений имеет одинаковый вид и для объёмных зарядов с полиномиальной плотностью

$$\rho(\mathbf{r})=\rho_L\equiv P_L(x,y,z)\,,\qquad L=0,1,\ldots, \tag{33}$$

и для зарядов, распределённых на границе эллипсоида с поверхностной плотностью $\sigma(\mathbf{r})=\sigma_{L+2}$, где

$$\sigma_L\equiv\rho_L\,p\,,\qquad L=0,1,\ldots, \tag{34}$$

и определяется выражением

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{L-2}(\mathbf{r})&\equiv\int\frac{\rho_{L-2}}{R}\,\mathrm{d}V\\ \Psi_L(\mathbf{r})&\equiv\oint\frac{\sigma_L}{R}\,\mathrm{d}S\end{aligned}\right\}=\sum_{\varkappa=0}^{L}q_{i_1\ldots i_\varkappa}\psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})\,,\quad\begin{cases}L=2,3,\ldots,\\ L=0,1,\ldots,\end{cases} \tag{35}$$

а другое является справедливым только в случае объёмного заряда с плотностью

$$\rho(\mathbf{r})=\rho_L^{\Gamma}\equiv\Gamma_L\left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\,,\frac{z}{c}\right),\qquad L=0,1,\ldots \tag{36}$$

и даётся формулой

$$\Phi_L^{\Gamma}(\mathbf{r})\equiv\int\frac{\rho_L^{\Gamma}}{R}\,\mathrm{d}V=\sum_{\varkappa=0}^{L}\tilde{q}_{i_1\ldots i_\varkappa}\,\varphi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})\,. \tag{37}$$

Здесь нам удобнее потенциалы объёмных и поверхностных источников, обозначаемые в разделе 2 одинаково, обозначить по-разному (как Φ и Ψ соответственно). В формулах (33), (36) P_L и Γ_L — полиномы степени L, причём Γ_L — гармоническая функция своих аргументов; величина

$$p=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2} \tag{38}$$

представляет собой расстояние от центра эллипсоида до касательной плоскости в точке (x,y,z); R — расстояние от элемента интегрирования $\mathrm{d}V$ или $\mathrm{d}S$ до точки наблюдения вне эллипсоида. Неприводимые совершенно симметричные тензоры $\varphi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})$ и $\psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})$ — это так называемые *тензор-потенциалы* эллипсоида и гомеоида[8] соответственно. Эти тензоры служат своеобразными эталонными специальными функциями, порождёнными теорией мультипольного представления. Каждая компонента этих тензоров является гармонической функцией декартовых координат. Явный вид тензоров-потенциалов известен, но в данной статье не используется.

Величины $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $\tilde{q}_{i_1\ldots i_\varkappa}$, играющие роль коэффициентов в (35) и (37), являются компонентами тензоров так называемых *парциальных* электрических мультипольных моментов. Существенно, что $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $\tilde{q}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ с помощью линейных рекуррентных соотношений в конечном счёте выражаются через компоненты тензоров *полных* электрических мультипольных моментов $Q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ эллипсоида. Эти соотношения для $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ имеют следующий (зависящий от чётности тензорного ранга) вид [7]:

$$\begin{aligned}q_{j_1\ldots j_{2l+1}}&=Q_{j_1\ldots j_{2l+1}}-(4l+1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+3}{(2l+2n+3)!!}\times\\ &\times\langle\!\langle q_{j_1\ldots j_{2n+1}}\varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}}\ldots\varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}}\rangle\!\rangle\,,\\ q_{j_1\ldots j_{2l}}&=Q_{j_1\ldots j_{2l}}-(4l-1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+1}{(2l+2n+1)!!}\times\\ &\times\langle\!\langle q_{j_1\ldots j_{2n}}\varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}}\ldots\varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}}\rangle\!\rangle\,,\end{aligned} \tag{39}$$

где[9]

$$\varkappa_{ij}\equiv a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}=\begin{cases}a_{(i)}^2\,, & i=j\,,\\ 0\,, & i\neq j\,.\end{cases}$$

[7] Отметим, что все полученные для гравитационных полей аналитические результаты работ [6–8] непосредственно переходят в записанные в гауссовой системе единиц их электрические аналоги, если гравитационную постоянную заменить единицей, а плотность и мультипольные моменты масс трактовать как плотность заряда и электростатические мультипольные моменты соответственно.

[8] Термин *гомеоид* (*a homœoid*), введённый Томсоном (лордом Кельвином) и Тэтом [19] для обозначения бесконечно тонкого слоя, образованного двумя подобными и подобно ориентированными поверхностями, используется здесь, как и в монографии Рауса [20], для эллипсоидального простого слоя, если поверхностная плотность источников пропорциональна p.

[9] Полуось эллипсоида, лежащая на оси координаты x_i, обозначается через $a_{(i)}$. Нетензорные индексы заключены в скобки.

Формулы для $\tilde{q}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ отличаются от формул (39) для $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ лишь тем, что в числителях дробей под знаками суммы $4n+3$ следует заменить произведением $(4n+3)\times\times(4n+5)$, а $4n+1$ — произведением $(4n+1)(4n+3)$.

Таким образом, любое полиномиальное объёмное распределение (в том числе (36)) имеет мультипольное представление потенциала в виде (35), причём гармоническое распределение (36) обладает ещё и дополнительным (использующим мультиполи более низкого ранга) представлением своего потенциала в виде (37). Однако мультипольное представление (35) носит более общий характер, являясь справедливым не только для объёмных, но и для поверхностных распределений заряда, у которых отношение σ/p полиномиально. При этом два вида поверхностных распределений на эллипсоиде, а именно σ_0 и σ_1, имеют мультипольные представления их потенциалов, не воспроизводимые никакими объёмными распределениями заряда. В то же время произвольное полиномиальное объёмное распределение всегда можно заменить поверхностным распределением заряда, имеющим такое же мультипольное представление потенциала.

Как показано в [21] на примере простейших частных случаев, мультипольные представления скалярного потенциала эллипсоида существуют и в случае магнитных полей, создаваемых постоянными электрическими токами. Приводимый ниже вывод соответствующих общих формул служит, кроме того, иллюстрацией использования результатов, полученных в разделах 2, 3.

Предположим, что некий (неферромагнитный) магнетик имеет форму эллипсоида (32) и характеризуется наведённой намагниченностью $\mathbf{I}$. Если при этом отсутствует ток проводимости, то, как известно [22, 23], рассматриваемая магнитостатическая задача (в данном случае о поле эллипсоида) математически эквивалентна электростатической (в отсутствие свободных зарядов), отличаясь от последней лишь заменой $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}\to\mathbf{B}$. Учитывая результат раздела 3, мы вправе утверждать, что если решение такой электростатической задачи для внешней области представлено в виде полного скалярного потенциала $\Phi_\Sigma=\Phi+\Psi$, выраженного через электростатические мультипольные моменты $Q_{i_1\ldots i_l}$, то замена

$$\Phi_\Sigma\to\tilde{\Phi}_\Sigma\,,\quad \mathbf{P}\to\mathbf{I}\,,\quad Q_{i_1\ldots i_l}\to\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\,,\quad l=1,2,\ldots \tag{40}$$

($\mathbf{P}$ — вектор поляризации, $\tilde{\Phi}_\Sigma=\tilde{\Phi}+\tilde{\Psi}$ — сумма объёмного и поверхностного скалярных магнитных потенциалов соответственно) даёт внешнее решение соответствующей магнитостатической задачи.

Теперь представим себе, что в эллипсоиде (32) распределён электрический заряд, характеризующийся объёмной ρ_L и (или) поверхностной σ_{L+2} плотностью, причём полный заряд эллипсоида Q равен нулю. Мультипольное представление потенциала такой системы зарядов ничем не отличается от мультипольного представления потенциала системы связанных зарядов, объёмная, $\rho=-\operatorname{div}\mathbf{P}$, и поверхностная, $\sigma=P_n$, плотности которых являются полиномами L-й и $(L+2)$-й степеней соответственно. (Такие плотности обеспечивает вектор поляризации $\mathbf{P}$, все декартовы компоненты которого являются полиномами степени $L+1$.)

Отсюда в соответствии с (40) из (35) и (39) следует, что магнетик эллипсоидальной формы, связанные магнитные заряды (13) которого характеризуются полиномиальными плотностями таких же степеней, создаёт наружное магнитное поле со скалярным потенциалом

$$\left.\begin{matrix}\tilde{\Phi}_{L-2}(\mathbf{r})\\ \tilde{\Psi}_L(\mathbf{r})\end{matrix}\right\}=\sum_{\varkappa=1}^{L}\mathrm{m}_{i_1\ldots i_\varkappa}\,\psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})\quad\left\{\begin{matrix}L=3,4,\ldots,\\ L=1,2,\ldots,\end{matrix}\right. \tag{41}$$

причём

$$\begin{aligned}\mathrm{m}_{j_1\ldots j_{2l+1}}&=\mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l+1}}-(4l+1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+3}{(2l+2n+3)!!}\times\\&\quad\times\langle\!\langle\mathrm{m}_{j_1\ldots j_{2n+1}}\,\varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}}\ldots\varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}}\rangle\!\rangle\,,\\ \mathrm{m}_{j_1\ldots j_{2l}}&=\mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l}}-(4l-1)!!\sum_{n=1}^{l-1}\frac{4n+1}{(2l+2n+1)!!}\times\\&\quad\times\langle\!\langle\mathrm{m}_{j_1\ldots j_{2n}}\,\varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}}\ldots\varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}}\rangle\!\rangle\,.\end{aligned} \tag{42}$$

Здесь $\mathrm{m}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ — парциальные (см. ниже) и полные магнитные мультипольные моменты соответственно, и учтено отсутствие магнитных монополей.

Принимая во внимание результаты раздела 3, мы вправе считать, что мультипольное представление (41) скалярного магнитного потенциала обусловлено не связанными магнитными зарядами, а системой амперовых токов (14), характеризуемых намагниченностью $\mathbf{I}$, каждая декартова компонента которой является полиномом степени $L+1$.

Наконец, опираясь на универсальность мультипольных формул, можно утверждать, что мультипольное представление (41) магнитного потенциала эллипсоида справедливо не только для молекулярных токов (14), но и для токов проводимости или конвекционных токов, у которых декартовы компоненты векторов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{i}(\mathbf{r})/p$ представляют собой полиномы L-й и $(L+2)$-й степеней соответственно, а сами токи, как и всякие стационарные токи в ограниченной области пространства, подчиняются условиям (1) и (2).

Таким образом, для электрических токов в эллипсоидальной области, плотности которых были только что охарактеризованы, мультипольное представление их наружного скалярного магнитного потенциала установлено.

Казалось бы, что совершенно аналогичное рассуждение применимо и в отношении мультипольного представления (37) потенциала, создаваемого системой зарядов (36), разумеется, при условии равенства нулю её полного заряда. Действительно, свободные заряды с плотностью (36) можно заменить связанными электрическими зарядами с той же плотностью, при этом электростатический потенциал сохраняет вид (37), только теперь и $L\geqslant 1$, и $\varkappa\geqslant 1$. Далее, используя правила перехода (40), находим, что система связанных магнитных зарядов, объёмная плотность $\tilde{\rho}_L^{\,\Gamma}$ которых является, как и (36), полиномиальной (степени L) гармонической функцией[10], создаёт вне эллипсоида скалярный магнитный потенциал, имеющий следующее мультипольное представление:

$$\tilde{\Phi}_L^{\,\Gamma}(\mathbf{r})\equiv\int\frac{\tilde{\rho}_L^{\,\Gamma}}{R}\,\mathrm{d}V=\sum_{\varkappa=1}^{L}\tilde{\mathrm{m}}_{i_1\ldots i_\varkappa}\,\varphi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})\,. \tag{43}$$

[10] Здесь и далее (включая приложение), когда речь идёт о гармонической функции, описывающей источники эллипсоида, подразумевается, что эта функция является гармонической в координатах x/a, y/b, z/c.

Входящие в (43) *парциальные* магнитные мультипольные моменты $\tilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ объёмных токов с помощью рекуррентных формул

$$\tilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2l+1}} = \widetilde{\mathfrak{M}}_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(4n+3)(4n+5)}{(2l+2n+5)!!}\times$$
$$\times\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2n+1}}\,\varkappa_{j_{2n+2}\,j_{2n+3}}\ldots\varkappa_{j_{2l}\,j_{2l+1}}\right\rangle\!\!\right\rangle, \quad l=0,1,2,\ldots, \tag{44}$$
$$\tilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2l}} = \widetilde{\mathfrak{M}}_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!!\sum_{n=1}^{l-1}\frac{(4n+1)(4n+3)}{(2l+2n+3)!!}\times$$
$$\times\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2n}}\,\varkappa_{j_{2n+1}\,j_{2n+2}}\ldots\varkappa_{j_{2l-1}\,j_{2l}}\right\rangle\!\!\right\rangle, \quad l=1,2,3,\ldots$$

выражаются в конечном счёте через полные мультипольные моменты $\widetilde{\mathfrak{M}}_{i_1\ldots i_\varkappa}$. Таким образом, как и в электростатическом случае, существует дополнительное (использующее моменты более низкого ранга) мультипольное представление магнитного потенциала. Однако пока остаётся невыясненным, каким электрическим токам соответствует представление (43).

Для того чтобы разобраться в этом, обратимся к более простым — парциальным — источникам, которые в построении мультипольных представлений потенциалов эллипсоида играют ключевую роль [6–8]. Применительно к объёмному заряду парциальной называют плотность, имеющую вид однородного (скажем, степени ν) гармонического полинома. Мультипольное представление соответствующего *парциального* потенциала известно [7]. Если полный заряд эллипсоида Q равен нулю, то мы вправе считать, что речь идёт о связанных зарядах. В свою очередь систему связанных электрических зарядов и её внешний потенциал в соответствии с (40) мы можем заменить системой магнитных связанных зарядов и её потенциалом. Таким образом, скалярный парциальный потенциал магнитного поля приобретает следующее мультипольное представление[11]:

$$\tilde{\Phi}^{(\nu)} = \tilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_\nu}\,\varphi_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{i+j+k=\nu}\frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\,\tilde{\mathfrak{m}}_{ijk}\,\varphi_{ijk}\,, \qquad \nu\geqslant 1\,, \tag{45}$$

имеющее вид полной свёртки двух симметричных тензоров ν-го ранга. Приведённые здесь выражения даны как в обычной тензорной записи, где по двум повторяющимся индексам подразумевается суммирование, так и в так называемой *трёхиндексной записи*. Последняя применима только к симметричным тензорам (или, по крайней мере, по отношению к той совокупности индексов, по которым тензор симметричен), что понятно из примера

$$\varphi_{klm} \equiv \varphi_{\underbrace{x\ldots x}_{k\text{ раз}}\,\underbrace{y\ldots y}_{l\text{ раз}}\,\underbrace{z\ldots z}_{m\text{ раз}}}\,.$$

Парциальные магнитные потенциалы (45) могут, разумеется, создаваться и электрическими токами. Для ответа на вопрос о том, как эти парциальные токи "выглядят", обратимся, как и в разделе 3, к неферромагнитному магнетику с наведённой намагниченностью $\mathbf{I}$, только теперь будем иметь дело с телом эллипсоидальной формы. Если декартовы компоненты вектора $\mathbf{I}$ имеют вид однородных гармонических полиномов степени $\nu+1$, то, как показано в приложении, соответствующая такой намагниченности плотность $\tilde{\rho}$ магнитного заряда эллипсоида тоже представляет собой однородный гармонический полином (степени ν), т.е. является парциальной, и, следовательно, возникающее поле характеризуется потенциалом (45). Понятно, что соответствующий этой же намагниченности $\mathbf{I}$ амперов ток $\mathbf{j}_{\mathrm{A}}$, даваемый (14), следует считать парциальным. В приложении показано, что каждая декартова компонента вектора $\mathbf{j}_{\mathrm{A}}$ представляет собой однородный гармонический полином степени ν.

Вследствие универсальности мультипольное представление (45) парциального магнитного потенциала сохраняет свой вид и для токов проводимости. В этом случае плотность парциального объёмного тока эллипсоида даётся выражениями[12]

$$\frac{j_x^{(\nu)}}{a} = \sum_{k+l+m=\nu}\frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\alpha_{x;\,klm}\left(\frac{x}{a}\right)^k\left(\frac{y}{b}\right)^l\left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{46}$$
$$\frac{j_y^{(\nu)}}{b} = \sum_{k+l+m=\nu}\frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\alpha_{y;\,klm}\left(\frac{x}{a}\right)^k\left(\frac{y}{b}\right)^l\left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{47}$$
$$\frac{j_z^{(\nu)}}{c} = \sum_{k+l+m=\nu}\frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\alpha_{z;\,klm}\left(\frac{x}{a}\right)^k\left(\frac{y}{b}\right)^l\left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{48}$$

где полиномы являются гармоническими и $\nu\geqslant 1$. Ток (46)–(48) должен, кроме того, удовлетворять условиям (1) и (2). Совокупность коэффициентов $\alpha_{x;\,klm}$, $\alpha_{y;\,klm}$, $\alpha_{z;\,klm}$ образует тензор $(\nu+1)$-го ранга, симметричный по всем индексам, кроме одного, который отделён от остальных индексов точкой с запятой. В отношении симметричных индексов здесь и далее используется трёхиндексная запись, при этом сумма $k+l+m=\nu$ указывает число симметричных индексов тензора.

Если в объёме эллипсоида циркулирует ток, у которого любая декартова компонента вектора плотности $\mathbf{j}_L^{\Gamma}(x/a, y/b, z/c)$ является гармоническим полиномом степени L, и условия (1) и (2) удовлетворяются, то справедливо равенство

$$\mathbf{j}_L^{\Gamma}\left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\,,\frac{z}{c}\right) = \sum_{\nu=1}^{L}\mathbf{j}^{(\nu)}\left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\,,\frac{z}{c}\right). \tag{49}$$

Последнее очевидно, поскольку всякий гармонический полином является суммой однородных гармонических полиномов. Согласно принципу суперпозиции, току (49) соответствует сумма потенциалов (45), даваемая (43). Таким образом, вид токов, соответствующих магнитному потенциалу (43), установлен.

Можно увидеть, что характер зависимости тока (46)–(48) от координат (однородность степени ν) удовлетворяет условию применимости правила Феррерса. Воспользуемся этой возможностью.

Обозначая через $\tilde{\Psi}$ магнитный потенциал поверхностных токов, правило Феррерса (12) можно перепи-

[11] В этом разделе парциальные магнитные мультипольные моменты $\tilde{\mathfrak{m}}_{ijk}$ объёмных источников отмечены тильдой, чтобы отличить их от моментов $\mathfrak{m}_{ijk}$ поверхностных источников.

[12] Заметим, что прямое доказательство того, что ток (46)–(48) создаёт вне эллипсоида потенциал (45), оказалось, в согласии со сказанным во введении, слишком громоздким, поэтому оно здесь не приводится. Заметим также, что выражение для простейшего (парциального) объёмного тока в эллипсоиде и мультипольное представление его скалярного потенциала можно найти в [21].

сать в виде

$$\tilde{\Psi}^{(\nu)} = \hat{F}^{(\nu)}\tilde{\Phi}^{(\nu)}\,, \tag{50}$$

где в соответствии с (7) плотность поверхностного (парциального) тока $\mathbf{i}^{(\nu)} = \mathbf{j}^{(\nu)}p$, а оператор

$$\hat{F}^{(\nu)} = \nu + 2 - \mathbf{r}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,.$$

Подставляя в (50) выражение (45), получаем

$$\tilde{\Psi}^{(\nu)} = \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\,\tilde{\mathrm{m}}_{ijk}\,\hat{F}^{(\nu)}\varphi_{ijk}\,. \tag{51}$$

Теперь воспользуемся формулой [6, 8]

$$\psi_{ijk} = \frac{1}{2\nu+3}\,\hat{F}^{(\nu)}\varphi_{ijk}\,, \qquad \nu = i+j+k\,,$$

выражающей тензор-потенциал ψ_{ijk} гомеоида через тензор-потенциал φ_{ijk} эллипсоида. Формула (51) приобретает вид

$$\tilde{\Psi}^{(\nu)} = (2\nu+3)\sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\,\tilde{\mathrm{m}}_{ijk}\,\psi_{ijk}\,. \tag{52}$$

Нам остаётся заменить парциальные мультипольные моменты $\tilde{\mathrm{m}}_{ijk}$ объёмных источников (46)–(48) парциальными моментами m_{ijk} поверхностных источников $\mathbf{i}^{(\nu)} = \mathbf{j}^{(\nu)}p$. Соответствующая формула, доказанная в [7] для электрических мультиполей, которая, разумеется, является верной после требуемых переобозначений и для магнитных мультиполей, имеет вид $(2\nu+3)\,\tilde{\mathrm{m}}_{ijk} = \mathrm{m}_{ijk}$. Таким образом, окончательно получим

$$\tilde{\Psi}^{(\nu)} = \mathrm{m}_{j_1\ldots j_\nu}\,\psi_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\,\mathrm{m}_{ijk}\,\psi_{ijk}\,. \tag{53}$$

Пусть теперь поверхностный ток в эллипсоиде таков, что каждая декартова компонента отношения $\mathbf{i}/p$ представляет собой произвольный полином степени $L > 0$, т.е.

$$\mathbf{i}_L = \mathbf{j}_L\left(\frac{x}{a}\,,\,\frac{y}{b}\,,\,\frac{z}{c}\right)p\,. \tag{54}$$

В этом случае к каждой компоненте плотности тока (а значит, к вектору в целом) можно применить известную формулу (см., например, [24]) разложения полинома по шаровым функциям (однородным гармоническим полиномам). Это даёт

$$\mathbf{j}_L = \sum_{k=1}^{L}\sum_{l=0}^{[k/2]}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^l \mathbf{j}^{(k-2l)}\,, \tag{55}$$

где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$. Если (55) подставить в (54), использовать применимое в этом случае уравнение связи (32) и учесть, что сумма шаровых функций одинаковой степени — это шаровая функция той же степени, то для плотности тока $\mathbf{i}_L$ и (в соответствии с принципом суперпозиции) для потенциала $\tilde{\Psi}_L$ получаем

$$\mathbf{i}_L = \sum_{\nu=1}^{L}\mathbf{i}^{(\nu)}\,, \qquad \tilde{\Psi}_L = \sum_{\nu=1}^{L}\tilde{\Psi}^{(\nu)}\,,$$

т.е. независимое подтверждение нижней формулы (41).

5. Заключение

Подводя итоги, перечислим некоторые особенности найденных мультипольных представлений.

Мультипольное представление внешних объёмных $\tilde{\Phi}$ и поверхностных $\tilde{\Psi}$ магнитных потенциалов эллипсоида универсально в том смысле, что потенциалы $\tilde{\Psi}_{L+2}$ неотличимы от потенциалов $\tilde{\Phi}_L$ $(L = 1, 2, \ldots)$, как это следует из (41). Поэтому по внешнему скалярному потенциалу эллипсоида невозможно определить, какими токами (поверхностными с плотностью $\mathbf{i}_{L+2}$, или объёмными с плотностью $\mathbf{j}_L$, или их комбинацией) он порождён. В то же время магнитное поле поверхностного тока $\mathbf{i}_1$ не может быть воспроизведено никаким объёмным током.

Универсальность проявляется также в том, что для фиксированной точки наблюдения мультипольное представление инвариантно при переходе от одного эллипсоида к любому другому, софокусному с ним. Эта инвариантность — следствие аналогичной инвариантности тензора-потенциала гомеоида (см. [6]). Таким образом, внешний магнитный потенциал эллипсоида не несёт информации о размерах эллипсоида (32) и о конкретном виде (коэффициентах) полинома, описывающего источники, но зависит от точки наблюдения, степени полиномиальности $\mathbf{j}$ или $\mathbf{i}/p$, а также от размеров и ориентации эллиптического диска — предельной фигуры семейства софокусных эллипсоидов.

Для потенциалов $\tilde{\Phi}_L^{\Gamma}$ эллипсоида, в котором плотность тока $\mathbf{j}_L$ является гармоническим полиномом переменных x/a, y/b, z/c, помимо универсального представления, использующего тензор-потенциал гомеоида, существует ещё одно, даваемое формулами (43), (44), мультипольное представление, использующее тензор-потенциал эллипсоида. Это специфическое представление более "экономично", поскольку оперирует с мультиполями, максимальный ранг которых на две единицы ниже, чем в универсальном представлении. Внешние потенциалы $\tilde{\Phi}_L^{\Gamma}$ тоже являются инвариантами при софокусном преобразовании эллипсоидов.

Рассмотренные в данной статье магнитостатические соответствия и использованные магнито-электростатические аналогии, разумеется, не являются исчерпывающими. Другие полезные аналогии можно найти, например, в недавней статье [25].

Что касается методической поучительности настоящей статьи, то с точки зрения автора она заключается в следующем:

а) использование старых результатов, утративших физическую достоверность, но сохраняющих математическую надёжность, иногда позволяет упростить получение нужного результата;

б) вывод универсальных формул можно проводить в рамках более узкого подвида физических систем.

Автор искренне благодарен Б.М. Болотовскому и С.П. Ефимову за внимание к работе и полезные обсуждения.

6. Приложение. О парциальных источниках магнитного поля эллипсоида

Рассмотрим связь, существующую между *парциальными* объёмными плотностями зарядовых и токовых источни-

ков эллипсоидального тела. Связующим звеном между зарядами (магнитными) и токами (амперовыми) служит вектор наведённой намагниченности $\mathbf{I}$.

Пусть декартовы компоненты намагниченности представляют собой однородные гармонические (относительно координат $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/b$, $\bar{z} = z/c$) полиномы степени $\nu + 1$:

$$I_x = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,m!}\, \varkappa_{x;klm}\, \bar{x}^k \bar{y}^l \bar{z}^m\,, \tag{A.1}$$

$$I_y = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,m!}\, \varkappa_{y;klm}\, \bar{x}^k \bar{y}^l \bar{z}^m\,, \tag{A.2}$$

$$I_z = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,m!}\, \varkappa_{z;klm}\, \bar{x}^k \bar{y}^l \bar{z}^m\,. \tag{A.3}$$

Входящие в (A.1)–(A.3) коэффициенты $\varkappa_{x;klm}$, $\varkappa_{y;klm}$ и $\varkappa_{z;klm}$ полиномов образуют тензор $(\nu+2)$-го ранга, симметричный по всем индексам, кроме первого (отделённого от остальных точкой с запятой), а для остальных индексов использована трёхиндексная запись. Что касается условия гармоничности полиномов, то в данном случае оно обеспечивается неприводимостью тензора $\varkappa$ по симметричным индексам, т.е. соотношениями

$$\varkappa_{x;k+2,l,m} + \varkappa_{x;k,l+2,m} + \varkappa_{x;k,l,m+2} = 0\,, \tag{A.4}$$

$$\varkappa_{y;k+2,l,m} + \varkappa_{y;k,l+2,m} + \varkappa_{y;k,l,m+2} = 0\,, \tag{A.5}$$

$$\varkappa_{z;k+2,l,m} + \varkappa_{z;k,l+2,m} + \varkappa_{z;k,l,m+2} = 0\,, \tag{A.6}$$

выражающими в трёхиндексной записи обращение в нуль свёртки тензора $\varkappa$ по любой паре симметричных индексов.

Выбранному виду намагниченности соответствует, по Пуассону, объёмная плотность (связанного) магнитного заряда

$$\tilde{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{I} = -\sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{(k-1)!\,l!\,m!}\, \frac{\varkappa_{x;klm}}{a}\, \bar{x}^{k-1} \bar{y}^l \bar{z}^m - \\ - \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!(l-1)!m!}\, \frac{\varkappa_{y;klm}}{b}\, \bar{x}^k \bar{y}^{l-1} \bar{z}^m - \\ - \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,(m-1)!}\, \frac{\varkappa_{z;klm}}{c}\, \bar{x}^k \bar{y}^l \bar{z}^{m-1}\,.$$

Замена индексов суммирования ($k \to k+1$ в первой, $l \to l+1$ во второй и $m \to m+1$ в третьей суммах) даёт

$$\tilde{\rho} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \alpha_{klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m,$$

где трёхиндексные компоненты симметричного по всем индексам тензора α (ν-го ранга) определены формулой

$$\frac{\alpha_{klm}}{\nu+1} \equiv -\frac{\varkappa_{x;k+1,l,m}}{a} - \frac{\varkappa_{y;k,l+1,m}}{b} - \frac{\varkappa_{z;k,l,m+1}}{c}\,. \tag{A.7}$$

Заметим, что совершенно симметричный тензор α неприводим. Действительно, его свёртка по любым двум индексам равна нулю. Трёхиндексная форма записи этого утверждения имеет вид

$$\alpha_{k+2,l,m} + \alpha_{k,l+2,m} + \alpha_{k,l,m+2} = 0$$

и является следствием равенства

$$\frac{1}{a}\left(\varkappa_{x;k+3,l,m} + \varkappa_{x;k+1,l+2,m} + \varkappa_{x;k+1,l,m+2}\right) + \\ + \frac{1}{b}\left(\varkappa_{y;k+2,l+1,m} + \varkappa_{y;k,l+3,m} + \varkappa_{y;k,l+1,m+2}\right) + \\ + \frac{1}{c}\left(\varkappa_{z;k+2,l,m+1} + \varkappa_{z;k,l+2,m+1} + \varkappa_{z;k,l,m+3}\right) = 0\,,$$

которое удовлетворяется в силу (A.4)–(A.6).

Неприводимость тензора α обеспечивает гармоничность полинома $\tilde{\rho}(x/a,\, y/b,\, z/c)$ и доказывает, что $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(\nu)}$, т.е. объёмная плотность рассматриваемого связанного магнитного заряда является парциальной плотностью.

Намагниченности (A.1)–(A.3) соответствует объёмная плотность амперовых токов $\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = \mathrm{c}\operatorname{rot}\mathbf{I}$. В частности,

$$\frac{(j_{\mathrm{A}})_x}{\mathrm{c}} = \frac{\partial I_z}{\partial y} - \frac{\partial I_y}{\partial z} = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,(l-1)!\,m!}\, \frac{\varkappa_{z;klm}}{b}\, \bar{x}^k \bar{y}^{l-1} \bar{z}^m - \\ - \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,(m-1)!}\, \frac{\varkappa_{y;klm}}{c}\, \bar{x}^k \bar{y}^l \bar{z}^{m-1}.$$

Замена индексов суммирования ($l \to l+1$ в первой и $m \to m+1$ во второй суммах) позволяет объединить суммы. Это даёт

$$\frac{(j_{\mathrm{A}})_x}{\mathrm{c}} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \beta_{x;klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m,$$

где

$$\frac{\beta_{x;klm}}{\nu+1} \equiv \frac{\varkappa_{z;k,l+1,m}}{b} - \frac{\varkappa_{y;k,l,m+1}}{c}\,.$$

Легко увидеть, что из неприводимости по симметричным индексам y- и z-компонент тензора $\varkappa$ следует неприводимость x-компоненты тензора β. Действительно,

$$\frac{1}{\nu+3}\left(\beta_{x;k+2,l,m} + \beta_{x;k,l+2,m} + \beta_{x;k,l,m+2}\right) = \\ = \frac{1}{b}\left(\varkappa_{z;k+2,l+1,m} + \varkappa_{z;k,l+3,m} + \varkappa_{z;k,l+1,m+2}\right) - \\ - \frac{1}{c}\left(\varkappa_{y;k+2,l,m+1} + \varkappa_{y;k,l+2,m+1} + \varkappa_{y;k,l+1,m+3}\right) = 0\,.$$

Очевидно, что аналогичными свойствами обладают и y-компонента, и z-компонента тензора β.

Таким образом, плотность $\mathbf{j}_{\mathrm{A}}$ амперова тока, соответствующая намагниченности (A.1)–(A.3), является плотностью парциального тока, т.е. $\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = \mathbf{j}^{(\nu)}$.

Список литературы

1. Френкель Я И *Собрание избранных трудов* Т. 1 *Электродинамика* (*Общая теория электричества*) (М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956)
2. Френкель Я И *Электродинамика* Т. 2 (Л.–М.: ОНТИ, 1935)
3. Ferrers N M *Quart. J. Pure Appl. Math.* **14** (53) 1 (1877)
4. Муратов Р З *Потенциалы эллипсоида* (М.: Атомиздат, 1976)
5. Медведев Б В *Начала теоретической физики* (М.: Наука, 1977)
6. Ефимов С П, Муратов Р З *Астрон. журн.* **67** 302 (1990) [Efimov S P, Muratov R Z *Sov. Astron.* **34** 152 (1990)]

7. Ефимов С П, Муратов Р З *Астрон. журн.* **67** 314 (1990) [Efimov S P, Muratov R Z *Sov. Astron.* **34** 157 (1990)]
8. Муратов Р З *Астрон. журн.* **70** 1271 (1993) [Muratov R Z *Astron. Rep.* **37** 641 (1993)]
9. Poisson S D *Mémoir. l'Acad. Sci. Paris* **5** 247 (1821 – 1822)
10. Mattis D C *The Theory of Magnetism: An Introduction to the Study of Cooperative Phenomena* (New York: Harper & Row, 1965) [Маттис Д *Теория магнетизма. Введение в изучение кооперативных явлений* (М.: Мир, 1967)]
11. Whittaker E T *A History of the Theories of Aether and Electricity* Vol. 1 *The Classical Theories* (London: T. Nelson, 1951) [Уиттекер Э *История теории эфира и электричества. Классические теории* (Ижевск: РХД, 2001)]
12. Maxwell J C *A Treatise on Electricity and Magnetism* Vol. 2 (London: Oxford Univ. Press, 1891) [Максвелл Дж К *Трактат об электричестве и магнетизме* Т. 2 (М.: Наука, 1989)]
13. Ampère A-M *J. Physique* **93** 447 (1821) [Ампер А М *Электродинамика* (М.: Изд-во АН СССР, 1954) с. 283]
14. Ampère A-M *Mémoir. l'Acad. Sci.* **6** 175 (1827) [Ампер А М *Электродинамика* (М.: Изд-во АН СССР, 1954) с. 7]
15. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1989) [Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow : Mir Publ., 1979)]
16. Муратов Р З *ЖТФ* **67** (4) 1 (1997) [Muratov R Z *Tech. Phys.* **42** 325 (1997)]
17. Ефимов С П *ТМФ* **39** 219 (1979) [Efimov S P *Theor. Math. Phys.* **39** 425 (1979)]
18. Муратов Р З *ЖТФ* **72** (4) 6 (2002) [Muratov R Z *Tech. Phys.* **47** 380 (2002)]
19. Thomson W, Tait P G *Treatise on Natural Philosophy* Pt. 2 (Cambridge: The Univ. Press, 1912)
20. Routh E J *A Treatise on Analytical Statics* Vol. 2 (Cambridge: The Univ. Press, 1922)
21. Муратов Р З, Шкуратник В Л *ЖТФ* **75** (8) 1 (2005) [Muratov R Z, Shkuratnik V L *Tech. Phys.* **50** 961 (2005)]
22. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1992) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
23. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941) [Стрэттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М. – Л.: ГИТТЛ, 1948)]
24. Hobson E W *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge: The Univ. Press, 1931) [Гобсон Е В *Теория сферических и эллипсоидальных функций* (М.: ИЛ, 1952)]
25. Агре М Я *УФН* **181** 173 (2011) [Agre M Ya *Phys. Usp.* **54** 167 (2011)]

Some useful correspondences in classical magnetostatics, and the multipole representations of the magnetic potential of an ellipsoid

R.Z. Muratov
Moscow State Mining University,
Leninskii prosp. 6, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: *rodeszmu@yandex.ru*

It is shown that, for a given geometric body, Ferrers' theorem not only relates the potentials of volume- and surface-distributed scalar (charge or mass) sources (which it is known to do), but also relates the vector (scalar) magnetic field potentials produced by the volume- and surface-distributed densities of a stationary current (i.e., vector sources). For a body with a given magnetization, the magnetic multipole moments calculated from expressions for polarization magnetic charges are shown to be equal to those of Ampere currents. Using these results and noting the universality of the multipole expressions, multipole representations of the scalar magnetic potential of an ellipsoid can be — indeed, have been — obtained rather straightforwardly.

PACS numbers: 41.20.Gv, 41.20.Gz DOI: 10.3367/UFNr.0182.201209d.0987

Bibliography — 25 references *Received 21 March 2011*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (9) 987 – 997 (2012) *Physics – Uspekhi* **55** (9) (2012)