

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Лучевой и волновой хаос в подводных акустических волноводах

А.Л. Вировлянский, Д.В. Макаров, С.В. Прантц

В 1990-е годы в акустике океана появилось новое направление исследований, связанное с изучением хаотического поведения лучевых траекторий в неоднородных волноводах. Выяснилось, что на дистанциях порядка тысячи километров лучевой хаос уже хорошо развит и его учёт необходим при описании дальнего распространения звука в океане. Теоретический анализ лучевого хаоса и его проявлений при конечной длине волны — волнового хаоса — в значительной мере основывается на методах, развитых в теории динамического и квантового хаоса. В обзоре на конкретных примерах обсуждаются результаты, полученные в этой области за прошедшие двадцать лет.

PACS numbers: 05.45.-a, 43.30.Bp, 43.30.Cq, 43.30. Dr

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201201b.0019

Содержание

1. Введение (19).
2. Основные уравнения (21).
 - 2.1. Уравнение Гельмгольца и параболическое уравнение.
 - 2.2. Приближение геометрической оптики и гамильтонов формализм.
 - 2.3. Времена прихода лучей.
 - 2.4. Переменные действие – угол.
 - 2.5. Модовое представление волнового поля.
 - 2.6. Лучевой подход для описания модовой структуры поля.
3. Внутренние волны и другие неоднородности в океане (24).
4. Акустическая термометрия и эксперименты по дальнему распространению звука в океане (25).
5. Лучевой и волновой хаос в волноводах с периодическими неоднородностями (27).
 - 5.1. Хаос в волноводах с плавной зависимостью возмущения от глубины.
 - 5.2. Динамика лучей при наличии быстрых осцилляций неоднородности по глубине.
 - 5.3. Лучевой и волновой хаос в случайно-неоднородных волноводах: квазидетерминированный подход.
6. Волноводы со случайными неоднородностями скорости звука (39).
 - 6.1. Статистическое описание лучевого хаоса.
 - 6.2. Распределения параметров хаотических лучей.
 - 6.3. Сглаженная интенсивность волнового поля.
 - 6.4. Времена прихода хаотических лучей.
 - 6.5. Сглаженное распределение звуковой энергии между нормальными модами волновода.
7. Заключение (46).

Список литературы (47).

1. Введение

Возможность распространения звука в океане на расстояния порядка нескольких сотен и даже тысяч километров обусловлена существованием рефракционного волновода естественного происхождения, который называется подводным звуковым каналом (ПЗК) [1–3]. Вертикальный профиль скорости звука в глубоководных ПЗК обычно имеет минимум на глубине около 1 км. Вследствие этого часть звуковой энергии оказывается захваченной волноводом, что предохраняет её от сильного затухания в результате отражений от поглощающего дна. Опыты по дальнему распространению звука чаще всего проводятся на частотах порядка 100 Гц, для которых диссилияция в морской воде невелика (лишь несколько децибел на 1000 км). Поэтому сигналы на таких частотах удается уверенно регистрировать даже на дистанциях наблюдения, превышающих 10000 км [4].

Волновое поле в ПЗК подчиняется обычному линейному волновому уравнению. Поэтому для его описания можно использовать общезвестные методы, которые традиционно применяются для анализа полей в волноводах разной физической природы.

Интенсивные теоретические и экспериментальные исследования дальнего распространения звука в океане ведутся более шестидесяти лет. Уже в середине 1980-х годов этот вопрос считался хорошо изученным. Однако впоследствии выяснилось, что существует не принимавшийся ранее во внимание фактор, который в значительной степени определяет структуру звуковых полей на тысячекилометровых трассах. Речь идет о лучевом хаосе, значение которого в акустике океана было осознано лишь в начале 1990-х годов. Важную роль в этом сыграли работы С.С. Абдуллаева и Г.М. Заславского [5–9], результаты которых суммированы в их обзоре [10], опубликованном в УФН в 1991 г. (см. также монографию [11]). Несмотря на то что указанные работы посвящены анализу общих вопросов, связанных с хаотической динамикой лучей в неоднородных волноводах, они в

А.Л. Вировлянский. Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
Д.В. Макаров, С.В. Прантц. Тихоокеанский океанологический
институт ДВО РАН,
ул. Балтийская 43, 690041 Владивосток, Российская Федерация
Тел. (4232) 31-26-02. Факс (4232) 31-25-73
E-mail: prants@poi.dvo.ru

Статья поступила 15 марта 2011 г.,
после доработки 29 апреля 2011 г.

значительной мере инициировали активное изучение хаотических явлений в приложении к задачам подводной акустики. Примерно в это же время (конец 1980-х – начало 1990-х годов) в США был опубликован ряд статей, с которых фактически началось систематическое исследование лучевого и волнового хаоса в глубоководных ПЗК [12–15].

В настоящем обзоре мы ставим целью дать читателю представление о результатах, полученных в данной области за прошедшие 20 лет. Не имея возможности (ввиду ограниченности объема обзора) сделать полный обзор исследований по данной тематике, мы останавливаемся в основном на тех вопросах, в решении которых авторы принимали непосредственное участие. Вынужденную краткость изложения мы постарались компенсировать приложением подробного списка публикаций по обсуждаемой проблеме.

Явление лучевого хаоса заключается в том, что траектория луча, заданная детерминированными уравнениями Гамильтона, ведет себя подобно случайному процессу. Хаотические траектории крайне чувствительны к малым вариациям начальных условий: разность вертикальных координат (глубин) z двух траекторий с близкими начальными условиями с увеличением расстояния r возрастает (в среднем) по экспоненциальному закону [10, 16–18]

$$\Delta z \sim \exp(vr), \quad (1)$$

где v — так называемый показатель Ляпунова. По тому же закону (и с тем же v) возрастают разности углов скольжения лучей. Оценки показывают, что в реалистичных моделях ПЗК показатель v имеет значения порядка $0,01 \text{ км}^{-1}$ [16, 19]. На дистанциях, превышающих 1000 км, хаос уже хорошо развит и его учёт становится принципиально необходимым. В настоящее время изучение лучевого хаоса, а также его проявлений при конечной длине волны — *волнового хаоса* — рассматривается как одно из направлений теории дальнего распространения звука в океане [20].

Явления лучевого и волнового хаоса имеют хорошо известные "прототипы" в механике, которые называются соответственно динамическим и квантовым хаосом [21–25]. Дело в том, что лучевая траектория в неоднородном волноводе описывается теми же уравнениями Гамильтона, что и нелинейный осциллятор, на который действует нестационарная (детерминированная) внешняя сила. Типичной является ситуация, в которой осциллятор ведет себя квазислучайным образом [26, 27]. Анализ структуры фазового пространства такого осциллятора представляет собой классическую задачу теории динамического хаоса. Объектами изучения теории квантового хаоса являются системы, классические аналоги которых демонстрируют хаотическое поведение. Нелинейный осциллятор, возбуждаемый нестационарной внешней силой, также попадает в эту категорию. Его волновая функция подчиняется уравнению Шредингера, имеющему в точности тот же вид, что и параболическое уравнение, задающее звуковое поле в волноводе.

Указанная аналогия с нелинейным осциллятором позволяет применять методы теории динамического и квантового хаоса при изучении акустических полей. Однако, несмотря на совпадение исходных уравнений, постановки задач, возникающих при анализе хаоса в

механике и акустике, нередко существенно различаются. Так, например, одним из основных объектов исследования в акустике океана является время пробега звука вдоль лучевой траектории, которое для краткости называют *временем прихода луча* [16, 19, 28–32]. Аналог этой величины в механике — действие — обычно не изменяется в экспериментах, поэтому его изучению в теории динамического хаоса не уделяется большого внимания. Далее мы увидим, что для поля импульсного сигнала в механике вообще трудно найти естественный аналог.

Горизонтальные масштабы вариаций параметров среды в океане обычно по крайней мере на два порядка превышают вертикальные [33], поэтому горизонтальной рефракцией акустических волн во многих случаях можно пренебречь. Пользуясь этим приближением, далее мы будем рассматривать аксиально симметричную (т.е. фактически двумерную) модель среды, в которой скорость звука c зависит лишь от двух координат: расстояния r и глубины z . Поле скорости звука $c(r, z)$ представим в виде [19, 33]

$$c(r, z) = \bar{c}(z) + \delta c(r, z), \quad (2)$$

где $\bar{c}(z)$ — невозмущенный плавный профиль, $\delta c(r, z)$ — малое возмущение, ответственное за возникновение хаоса. Исследования лучевого хаоса в подводной акустике начались с анализа волноводов с периодической зависимостью δc от расстояния [10, 12, 14]. Такой выбор типа возмущения был обусловлен возможностью прямого использования известных результатов из теории динамического хаоса. Несмотря на очевидную искусственность периодической модели, с её помощью удалось установить ряд общих свойств хаотической динамики лучей, которые остаются в силе и для волноводов с более реалистичными неоднородностями.

Примером вполне реалистичной модели является волновод с возмущением $\delta c(r, z)$, порождённым случайными внутренними волнами со статистикой, заданной спектром Гаррета–Манка [33]. Такое возмущение обычно рассматривают при анализе акустических полей в глубоком море в рамках теории распространения волн в случайных средах [33]. Обратим внимание на принципиальное обстоятельство, заключающееся в том, что в данной теории и теории лучевого и волнового хаоса поля в случайно-неоднородных волноводах изучаются в разных, дополняющих друг друга, аспектах.

В теории распространения волн в случайных средах описание лучей (как и других характеристик волновых полей) основывается на понятии статистического ансамбля реализаций среды. Статистические характеристики луча с заданными стартовыми параметрами z_0 и χ_0 — начальной глубиной и углом выхода соответственно — определяются усреднением по лучам с такими же начальными условиями в различных реализациях среды, образующих ансамбль. В подводной акустике данный подход является традиционным, и большинство работ по анализу стохастической лучевой структуры поля выполнены в его рамках [33, 34].

В работах по исследованию лучевого хаоса анализ влияния флуктуаций скорости звука $\delta c(r, z)$ ведётся с других позиций. Хаотическое поведение лучей изучается в детерминированной среде с пространственными вариациями скорости звука, заданными отдельной реализацией случайного возмущения $\delta c(r, z)$. Поскольку при

$r \gg v^{-1}$ лучевые траектории с близкими начальными условиями становятся практически независимыми, усреднение по начальным условиям можно трактовать как статистическое. Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что найденные таким образом статистические характеристики хаотических лучей слабо зависят от конкретной реализации $\delta c(r, z)$, использованной при расчётах [35–37]. Поэтому можно ожидать, что анализ статистики лучей в отдельной реализации поля скорости звука даст результаты, близкие к тем, которые были бы получены при усреднении по ансамблю волноводов. Однако важный и очень интересный вопрос о том, насколько хорошо одна реализация неоднородностей представляет весь статистический ансамбль, изучен ещё недостаточно.

Материалы данного обзора расположены следующим образом. В разделе 2 кратко обсуждаются методы описания полей в ПЗК, которые будут использоваться в настоящем обзоре. В разделе 3 перечислены основные типы неоднородностей океана, оказывающих влияние на распространение звуковых волн. В разделе 4 объяснён основной принцип акустического мониторинга температурных полей в океане на основе измерений времён прихода звуковых импульсов, распространяющихся по разным лучевым траекториям. Здесь же дан краткий обзор ряда важных экспериментов по дальнему распространению звука в океане, результаты которых подтверждают применимость лучевого описания звуковых полей на тысячекилометровых трассах. Раздел 5 посвящён анализу моделей ПЗК с периодическими неоднородностями. В нём обсуждаются механизмы возникновения лучевого хаоса при различных соотношениях между масштабами неоднородности, а также проявления хаоса в свойствах волновой динамики. В разделе 6 речь идёт о лучевом и волновом хаосе в более реалистичных моделях ПЗК с флуктуациями скорости звука, вызванными случайными внутренними волнами. Изложен метод статистического описания хаотических лучевых траекторий и показано, каким образом он может быть применён для оценки сглаженного распределения интенсивности поля при конечной длине волны. Значительное внимание в разделе 6 удалено анализу времён прихода хаотических лучей. Показано также, что использование взаимосвязи между лучевым и модовым представлениями поля в волноводе позволяет применить стохастическую лучевую теорию для анализа модовой структуры поля в условиях волнового хаоса.

2. Основные уравнения

В этом разделе приведены основные уравнения, которые применяются при описании звуковых полей в глубоководных ПЗК. Даны определения тех характеристик поля, которые используются в разделах 3–6.

2.1. Уравнение Гельмгольца и параболическое уравнение

Все движения в водной толще происходят так медленно, что за время пробега звуковой волны через неоднородность последняя не успевает заметно измениться. Это позволяет использовать приближение замороженных неоднородностей, в рамках которого параметры среды считаются независящими от времени t . Далее мы рассматриваем глубоководные ПЗК с полем скорости звука

(2), где $\delta c(r, z)$ — слабое возмущение, вызванное влиянием случайных внутренних волн [1]. Считаем, что ось z направлена вертикально вниз, а поверхность воды находится на горизонте $z = 0$. Также полагаем, что невозмущённый профиль скорости звука $\bar{c}(z)$ имеет единственный минимум на горизонте $z = z_a$, который называется осью ПЗК. Звуковое давление $\tilde{v}(r, z, t)$ описывается линейным волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{v} = 0. \quad (3)$$

Его решение удобно представить в виде интеграла Фурье:

$$\tilde{v}(r, z, t) = \int d\Omega v(r, z, \Omega) \exp(-i\Omega t), \quad (4)$$

где $v(r, z, \Omega)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца [2, 3]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} v = 0 \quad (5)$$

с соответствующими граничными условиями.

На интересующих нас дистанциях порядка нескольких сотен и тысяч километров "выживают" лишь волны с достаточно малыми углами скольжения χ , захваченные ПЗК. Именно они и будут предметом нашего изучения. В глубоководных ПЗК, типичных для умеренных и низких широт, углы скольжения волн, распространяющихся без взаимодействия с дном (типичная глубина океана на этих широтах 5–6 км), не превышают 14° – 16° . Для их описания можно воспользоваться малоугловым приближением. Представим v в виде

$$v(r, z, \Omega) = r^{-1/2} u(r, z, \Omega) \exp(ikr), \quad (6)$$

где $k = \Omega/c_0$ — волновое число в однородной среде с постоянной скоростью звука c_0 , примерно равной средней скорости звука в ПЗК, $u(r, z, \Omega)$ — плавная огибающая комплексной амплитуды поля. В тех случаях, когда речь идёт о поле монохроматического источника, аргумент Ω функции $u(r, z, \Omega)$ будем опускать. Подставляя (6) в (5) и пренебрегая второй производной u по r , получаем так называемое стандартное параболическое уравнение [38–40]:

$$2ik \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2k^2 [U(z) + V(r, z)] u = 0, \quad (7)$$

где

$$U(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_0^2}{\bar{c}^2(z)} \right), \quad V(r, z) \simeq \frac{\delta c(r, z)}{c_0}. \quad (8)$$

Нестационарное волновое поле, возбуждённое импульсным источником, может быть синтезировано из решений параболического уравнения (7) на различных несущих частотах в соответствии с формулой

$$v(r, z, t) = r^{-1/2} \int d\Omega' u(r, z, \Omega') s(\Omega') \exp \left[i\Omega' \left(\frac{r}{c_0} - t \right) \right], \quad (9)$$

где $s(\Omega)$ — спектр излучённого звукового импульса. Заметим, что (7) формально совпадает с квантовомеханическим уравнением Шредингера. В этой аналогии

r играет роль времени, k^{-1} — роль постоянной Планка, а $U + V$ — потенциала. Эта аналогия с квантовой механикой открывает широкие возможности для применения методов динамического и квантового хаоса при изучении лучевого и волнового хаоса в ПЗК. Отметим, что интегрирование по Ω в (9) формально отвечает интегрированию по постоянной Планка. Именно это обстоятельство мы имели в виду, говоря во введении о трудности отыскания квантово-механического аналога для поля импульсного сигнала.

2.2. Приближение геометрической оптики и гамильтонов формализм

В приближении геометрической оптики, когда длина волны $\lambda = 2\pi/k$ мала по сравнению с характерными размерами неоднородностей среды L_{inh} , решение параболического уравнения (7) ищется в виде [2, 3, 41]

$$u = A \exp(i k S), \quad (10)$$

где $A(r, z)$ и $S(r, z)$ — амплитуда и эйконал луча соответственно. Обе эти функции выражаются через параметры лучевых траекторий. Для описания траекторий воспользуемся гамильтоновым формализмом [10, 42, 43]. В его рамках траектория в каждой точке дистанции r характеризуется своей глубиной (вертикальной координатой) z и обобщённым импульсом (или просто импульсом) p . В малоугловом приближении $p = \tan \chi$, где χ — угол скольжения луча. Зависимости z и p от расстояния задаются уравнениями Гамильтона (лучевыми уравнениями):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (11)$$

где $H(r, p, z)$ — гамильтониан системы лучей. В нашей задаче он имеет вид

$$H(r, p, z) = H_0(p, z) + V(r, z), \quad (12)$$

где

$$H_0(p, z) = \frac{p^2}{2} + U(z). \quad (13)$$

Лучевые траектории в невозмущённом (плоскослоистом) ПЗК представляют собой периодические осциллирующие кривые. Пример траектории, показанный на рис. 1, рассчитан для волновода с так называемым каноническим профилем скорости звука, который также называют профилем Манка [1, 2],

$$\bar{c}(z) = c_0 \left\{ 1 + \epsilon \left[\exp \left(\frac{2(z_a - z)}{z_{th}} \right) + 2 \frac{z - z_a}{z_{th}} - 1 \right] \right\}, \quad (14)$$

где $c_0 = 1,5 \text{ км с}^{-1}$, $z_a = 1 \text{ км}$, $\epsilon = 0,0057$, $z_{th} = 1 \text{ км}$. Угол скольжения данной траектории на оси волновода — горизонте, отвечающем минимуму скорости звука, равен 10° . Длина цикла (период) осцилляций составляет около 50 км, что типично для ПЗК в глубоком море.

Эйконал луча $S(r, z)$, который является полным аналогом механического действия [42], выражается интегралом:

$$S = \int (p dz - H dr),$$

вычисляемым вдоль лучевой траектории.

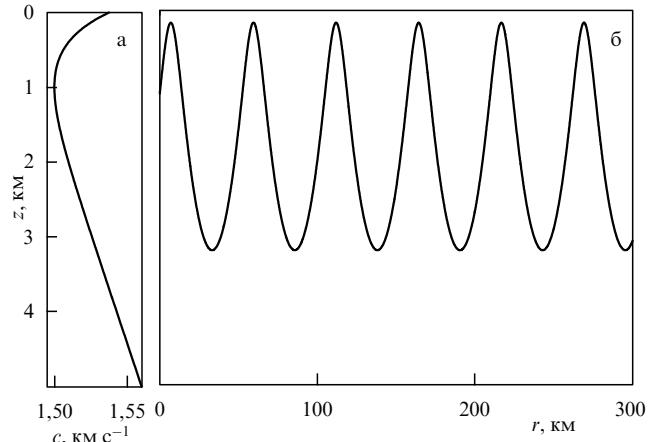


Рис. 1. Канонический профиль скорости звука (а) и пример лучевой траектории в невозмущённом ПЗК с таким профилем (б).

В рассматриваемой двумерной среде волновое поле представлено однопараметрическим семейством лучевых траекторий $z(r, \alpha)$, где α — параметр, маркирующий траектории [41]. Можно показать, что в малоугловом приближении амплитуда луча [37, 43]

$$A = \frac{C}{\sqrt{|\partial z / \partial \alpha|}}, \quad (15)$$

где коэффициент C определяется источником. Приближение геометрической оптики нарушается на каустиках, где производные $\partial z / \partial \alpha$ обращаются в нуль.

В качестве примера возьмём монохроматический точечный источник с координатами $(0, z_s)$. Возбуждающее им поле представляет собой решение параболического уравнения (7) с начальным условием

$$u(0, z) = \delta(z - z_s). \quad (16)$$

Вблизи источника решение имеет тот же вид, что в однородном пространстве с $c(r, z) = c_0$:

$$u(r, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i r}} \exp \left[ik \frac{(z - z_s)^2}{2r} \right]. \quad (17)$$

Поскольку все лучи выходят из одной точки, в качестве α естественно взять начальный импульс луча p_0 . Подставляя (15) в (10) и сравнивая результат с (17), получим

$$A = \sqrt{\frac{k}{2\pi i |\partial z / \partial p_0|}}. \quad (18)$$

Характерной особенностью волноводного распространения является многолучёвость. Как правило, в точку наблюдения попадают несколько лучей, которые иногда называют собственными (в англоязычной литературе — eigenrays). Вклад каждого из них задаётся формулой (10), а комплексная амплитуда поля выражается как сумма,

$$u(r, z) = \sum_j A_j \exp \left(ik S_j - i \mu_j \frac{\pi}{2} \right), \quad (19)$$

где индекс j нумерует собственные лучи, μ_j — количество касаний каустик j -м лучом (индекс Маслова).

2.3. Времена прихода лучей

В приближении геометрической оптики сигнал в точке приёма представляет собой суперпозицию звуковых импульсов, каждый из которых пришёл по одному из собственных лучей. Такие импульсы мы называем *лучевыми*. Времена их прихода, которые, как указано во введении, называются временами прихода лучей, являются основными информационными параметрами при решении задач акустического мониторинга температурных полей океана (см. раздел 4). По этой причине их анализу в акустике океана уделяется большое внимание.

Существует очень простая связь между временем прихода луча и эйконалом лучевой траектории, которая выясняется после подстановки (10) в (9). Полученное выражение задаёт лучевой импульс. Поскольку параметры траектории, а вместе с ними и обе функции, A и S , не зависят от Ω , то легко увидеть, что время прихода луча

$$t = \frac{r + S}{c_0}. \quad (20)$$

Для анализа пространственно-временной структуры импульсного сигнала на заданной дистанции наблюдения в акустике океана широко используется характеристика звукового поля, которая называется *t–z-диаграммой* или *временным фронтом* (от англ. — *timefront*). Временной фронт представляет собой распределение приходов лучей в плоскости времени–глубина. Пример *t–z-диаграммы* представлен на рис. 2. Диаграмма построена для точечного источника в невозмущённом ПЗК с профилем Манка (14), приведённым на рис. 1. Каждая точка на графике показывает время прихода и глубину одного из лучей на дистанции наблюдения 400 км. Расчёт выполнен для лучей, выходящих под углами скольжения в интервале $\pm 12^\circ$ из точечного источника, расположенного на оси волновода на глубине 1 км.

Диаграмма, которая представляет собой две кусочно-ломанные линии, сдвинутые относительно друг друга по оси времени t , состоит из сегментов, каждый из которых формируется лучами с одинаковыми идентификаторами $\pm M$, где \pm — знак угла выхода луча из источника, M —

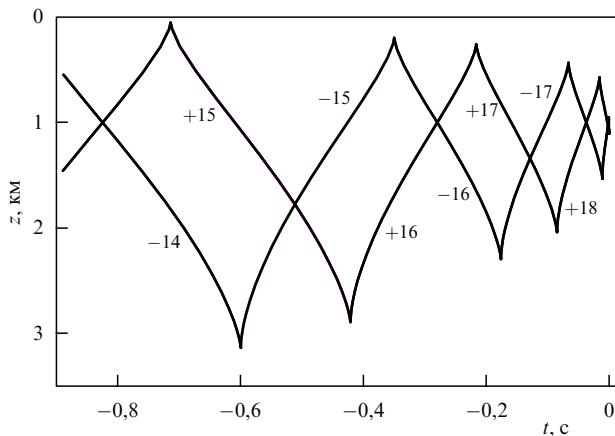


Рис. 2. Временной фронт (*t–z-диаграмма*), представляющий распределение приходов лучей на дистанции 400 км в плоскослоистом волноводе с каноническим профилем скорости звука (14). Рядом с сегментами диаграммы указаны идентификаторы формирующих их лучей.

число точек поворота лучевой траектории. Такой вид *t–z-диаграммы* типичен для плоскослоистой или плавно изменяющейся с расстоянием модели ПЗК. С увеличением дистанции количество сегментов диаграммы возрастает, но среднее расстояние между ними остаётся неизменным [37, 43].

Вопрос о распределении приходов хаотических лучей в плоскости времени–глубина в возмущённом ПЗК рассмотрен в разделе 6.4.

2.4. Переменные действие – угол

В невозмущённом (плоскослоистом) волноводе с $V = 0$ гамильтониан $H = H_0$ остаётся постоянным вдоль лучевой траектории. При этом переменная действия определена как интеграл вдоль цикла осцилляций траектории [10, 42]:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dz = \frac{1}{\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \sqrt{2[H_0 - U(z)]}, \quad (21)$$

где z_{\min} и z_{\max} — соответственно глубины верхней и нижней точек поворота луча, удовлетворяющие условию $U(z) = H_0$. Формула (21) неявно задаёт функцию $H_0(I)$, выражающую зависимость гамильтониана от переменной действия. Каноническое преобразование

$$p = p(I, \theta), \quad z = z(I, \theta), \quad (22)$$

связывающее переменные импульс–координата (p, z) и действие – угол (I, θ), определено соотношениями

$$p = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial G}{\partial I}, \quad (23)$$

где $G(I, z)$ — производящая функция. При $p > 0$

$$G(I, z) = \int_{z_{\min}}^z dz P(I, z), \quad P(I, z) = \sqrt{2[H_0(I) - U(z)]}. \quad (24)$$

Если $p < 0$, то $G(I, z)$ должна быть заменена функцией $2\pi I - G(I, z)$. Определённая таким образом угловая переменная θ , изменяющаяся внутри каждого периода луча от 0 до 2π , интерпретируется как фаза лучевой траектории. Её следует отличать от угла скольжения луча. Для того чтобы сделать θ непрерывной функцией расстояния r , в начале каждого нового цикла её значение следует увеличивать на 2π [42]. Согласно теореме Лиувилля якобиан любого канонического преобразования равен единице [42], поэтому

$$\frac{\partial(I(p, z), \theta(p, z))}{\partial(p, z)} = \frac{\partial(p(I, \theta), z(I, \theta))}{\partial(I, \theta)} = 1. \quad (25)$$

Каноническое преобразование, введённое для невозмущённого волновода, формально может быть использовано и при наличии возмущения. При $V \neq 0$ лучевые уравнения принимают вид

$$\frac{dI}{dr} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (26)$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \omega + \frac{\partial V}{\partial I}, \quad (27)$$

где $\omega(I) = dH_0(I)/dI$ — угловая пространственная частота осцилляций лучевой траектории в невозмущён-

ном волноводе. Длина цикла невозмущённого луча $D(I) = 2\pi/\omega(I)$.

Далее мы будем использовать функции $I(r, I_0, \theta_0)$ и $\theta(r, I_0, \theta_0)$ для обозначения переменной действия и угловой переменной луча на дистанции r . Аргументы I_0 и θ_0 представляют собой начальные значения этих переменных при $r = 0$. Иногда удобнее будет пользоваться аналогичными функциями $I(r, p_0, z_0)$ и $\theta(r, p_0, z_0)$, где p_0 и z_0 — начальные значения импульса и координаты луча соответственно.

2.5. Модовое представление волнового поля

На любой дистанции r волновое поле может быть представлено в виде разложения

$$u(r, z) = \sum_m a_m(r) \varphi_m(z), \quad (28)$$

где $\varphi_m(z)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в невозмущённом волноводе [2, 44]. Каждое слагаемое суммы (28) описывает нормальную моду. Для простоты мы ограничиваемся анализом вкладов мод, обе точки поворота которых находятся внутри водной толщи. В приближении Венцеля–Крамерса–Бриллюэна m -я собственная функция полностью определяется параметрами невозмущённой лучевой траектории с переменной действия (обозначим её I_m), удовлетворяющей правилу квантования [2, 44, 45]

$$kI_m = m - \frac{1}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (29)$$

В интервале глубин между точками поворота m -я собственная функция может быть представлена в виде [2, 44, 45]

$$\varphi_m(z) = \varphi_m^+(z) + \varphi_m^-(z), \quad (30)$$

где

$$\varphi_m^\pm(z) = [D(I_m) P(I_m, z)]^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \left[kG(I_m, z) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (31)$$

2.6. Лучевой подход

для описания модовой структуры поля

Лучевой подход для вычисления амплитуд мод $a_m(r)$ в неоднородном волноводе ($V \neq 0$) заключается в разложении лучевого представления поля (19) по нормальным модам и вычислении получающихся при этом интегралов методом стационарной фазы. Детальное обсуждение данного вопроса содержится в работах [37, 43, 46–48]. Оказывается, что каждая мода формируется вкладами лучей — мы называем их *модовыми лучами*, — переменные действия которых на дистанции наблюдения r удовлетворяют условию

$$I(r, I_0, \theta_0) = I_m. \quad (32)$$

Параметры I_0 и θ_0 связаны между собой, и эта связь определяется источником, возбуждающим поле. Следует подчеркнуть, что при заданном m величина I_m зависит от несущей частоты Ω и для разных Ω условие (32) выделяет разные лучи.

В качестве простейшего примера рассмотрим ситуацию, в которой в начальной точке дистанции возбуждена только одна мода с номером m_0 , т.е.

$$u(0, z) = \varphi_{m_0}(z). \quad (33)$$

Лучи, формирующие поле $u(r, z)$, выходят со всех глубин z_0 между точками поворота данной моды. Все они имеют одинаковые начальные значения переменной действия, равные I_{m_0} . Поскольку мода представляет собой суперпозицию двух квазиплоских волн (так называемых волн Бриллюэна, заданных функциями $\varphi_m^+(z)$ и $\varphi_m^-(z)$), то из каждой точки выходят две траектории с начальными импульсами $p_0 = \pm P(I_{m_0}, z_0)$. Условие (32) в данном примере принимает вид

$$I(r, I_{m_0}, \theta_0) = I_m. \quad (34)$$

Условие (34) определяет значения θ_0 (а значит, и z_0), отвечающие модовым лучам. Вклад одного модового луча в амплитуду моды a_m имеет вид [37, 43, 47–49]

$$a_m(r) = Q \exp [i(\Phi + \beta)], \quad (35)$$

где

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi k |\partial I(r, I_{m_0}, \theta_0)/\partial \theta_0|}} \exp [\pm ikG(I_{m_0}, z_0)], \quad (36)$$

$$\Phi = k[S(r, Z_m) + \sigma G(I_m, Z_m)]. \quad (37)$$

Здесь Z_m — глубина модового луча на дистанции наблюдения, $S(r, Z_m)$ — его эйконал, $\sigma = -\text{sgn } p$, p — импульс модового луча, β — независящая от частоты постоянная.

Использование приведённых выше соотношений позволяет рассчитать амплитуду моды в полной аналогии с тем, как это делается при расчёте поля в заданной точке волновода. Сначала из условия (32) определяются параметры модовых лучей (аналогов собственных лучей). Если таких лучей оказывается несколько, то амплитуда моды вычисляется суммированием их вкладов. Аналогичным образом можно рассчитывать амплитуды мод, возбуждённых точечным источником [37, 43, 47–49].

Обсуждаемый подход устанавливает связь между лучевым и модовым представлениями поля в переменном по трассе волноводе. С его помощью результаты исследования динамики лучей при наличии возмущения δc могут быть применены для анализа вызванных возмущением вариаций амплитуд мод.

3. Внутренние волны и другие неоднородности в океане

В современной акустике океана принято считать, что основным фактором, вызывающим хаотическое поведение лучевых траекторий в глубоком море, являются флуктуации скорости звука, индуцированные случайными внутренними волнами [1, 19]. Несмотря на относительную малость этих флуктуаций, $\delta c/c_0 \simeq 5 \times 10^{-4}$, вызываемые ими искажения звукового поля, накапливаясь по мере распространения звука, оказываются заметными уже на дистанциях порядка 100 км. Данные флуктуации можно оценить [50], основываясь на модели спектра внутреннего волнения Гарретта–Манка [1, 50, 51]:

$$\frac{\delta c}{c_0} = \frac{\mu}{g} N^2(x, y, z) \zeta(x, y, z), \quad (38)$$

где $\mu = 24,5$, N — частота плавучести, которая максимальна на глубине термоклина, $\zeta(x, y, z)$ описывает вертикальные смещения частиц жидкости во внутренней

волне. Последнюю функцию представляют в виде суперпозиции мод внутренних волн со случайными амплитудами, статистика которых задаётся эмпирическим спектром Гаррета – Манка. Дисперсия флуктуаций скорости звука, вызванных внутренними волнами, уменьшается с увеличением глубины. Вблизи поверхности среднеквадратичная величина δc по порядку величины равна 1 м с^{-1} . Случайное поле внутренних волн в океане содержит большое число мод. Их горизонтальные периоды варьируются от нескольких сотен метров до нескольких сотен километров, а вертикальные — от нескольких десятков до нескольких сотен метров. Спектральные веса высших мод относительно малы, однако они обусловливают тонкую структуру поля скорости звука. Аналитические оценки и данные численного моделирования свидетельствуют, что результаты расчётов параметров поля, выполненных с использованием модели, удовлетворительно согласуются с данными натурных экспериментов на трассах длиной порядка нескольких сотен и тысяч километров [1, 52].

Следует отметить, что указанная модель учитывает вклады лишь фоновых внутренних волн, для описания которых используется линейное приближение. Наряду с фоновыми внутренними волнами в океане встречаются цуги интенсивных нелинейных внутренних волн, не отвечающих спектру Гаррета – Манка. Их влияние может быть определяющим в шельфовых зонах Мирового океана на относительно коротких звуковых трассах (несколько десятков километров) [53, 54].

В океане имеется ряд других факторов, вызывающих вариации поля скорости звука. Один из них связан с влиянием волн Росби, возникающих вследствие изменения силы Кориолиса с широтой. Это планетарные волны, распространяющиеся с востока на запад с горизонтальным масштабом порядка нескольких сотен километров, вертикальными смещениями порядка 10 см и периодами от нескольких дней для баротропных волн до нескольких месяцев для бароклинных. Волны Росби, в отличие от внутренних волн, можно считать периодическим или квазипериодическим возмущением и моделировать суперпозицией нескольких мод.

Крупномасштабные океанские течения типа Гольфстрима и Куросио, когда трасса пересекает эти струи, существенно искажают профиль скорости звука: изменяется глубина залегания оси ПЗК, происходит трансформация обычного ПЗК в двойной или даже полное исчезновение волновода. От меандрирующих струй таких течений отщепляются синоптические вихри (ринги), рассеивающие звуковые волны. Границы течений, так называемые фронты с большими горизонтальными градиентами гидрологических параметров, вызывают рефракцию и обратное рассеяние звука. Фронты являются областями интенсивного турбулентного перемешивания вод с различной температурой и солёностью, вследствие чего возникает дифракционное рассеяние звуковых волн.

Помимо струйных течений в океане существуют и другие когерентные структуры, оказывающие существенное влияние на распространение звука на большие расстояния. Это так называемые синоптические вихри — мезомасштабные неоднородности в океане с характерными горизонтальными масштабами от нескольких десятков до нескольких сотен километров. Это перемещающиеся вихревые структуры циклонического и антициклонического типа с холодным или тёплым ядром,

повсеместно существующие в океане и имеющие время жизни от нескольких месяцев до более одного года. Характерный вертикальный размер синоптических вихрей составляет от нескольких сотен метров до более одного километра. Разница температуры воды в вихре и вне его является причиной сильных неоднородностей поля скорости звука, хорошо описываемых двумерной моделью [43]. В океане имеются также топографические вихри — квазистационарные образования синоптического масштаба, формирующиеся над подводными горами и впадинами.

Наличие сильных крупномасштабных неоднородностей в некоторых случаях требует учёта трёхмерных возмущений поля скорости звука. Однако пространственные масштабы данных неоднородностей обычно настолько велики, что их роль в возникновении хаотической динамики лучей относительно мала. Поэтому такие неоднородности в данном обзоре не рассматриваются. Влияние поверхностного волнения мы также не учитываем. Объектом нашего исследования являются захваченные ПЗК волны, распространяющиеся под относительно малыми углами скольжения без отражений не только от поглощающего дна, но и от шероховатой поверхности воды. Предполагается, что единственной причиной флуктуаций скорости звука δc служат внутренние волны.

4. Акустическая термометрия и эксперименты по дальнему распространению звука в океане

Исследования дальнего распространения звука в океане направлены, в первую очередь, на решение задач акустического мониторинга температурных полей в водной толще. Вариации температуры вызывают возмущение поля скорости звука δc , которое в свою очередь приводит к вариациям звукового поля. Долговременные измерения параметров звукового поля в принципе позволяют восстанавливать вариации δc (путём решения соответствующей обратной задачи), которые затем легко пересчитываются в вариации температуры. Акустический мониторинг имеет ряд преимуществ над другими дистанционными методами. Например, возможности спутникового зондирования ограничены поверхностным слоем, тогда как использование акустических методов позволяет "заглянуть" в глубь океана.

Наиболее известная схема акустического мониторинга — метод акустической томографии океана — была предложена в классической работе Манка и Вунша [55]. Подход Манка и Вунша основывается на том факте, что на достаточно больших дистанциях могут неплохо разрешаться звуковые импульсы, приходящие в точку приёма по разным лучам. Более того, времена прихода этих лучевых импульсов с хорошей точностью предсказываются в рамках простейшей модели среды, которая не учитывает флуктуаций скорости звука, вызванных внутренними волнами и другими относительно мелко-масштабными неоднородностями.

Процедура решения обратной задачи в методе акустической томографии океана основана на следующих простых соображениях. Представим поле скорости звука в виде $c(x, y, z) = c_{\text{ref}}(x, y, z) + \delta c(x, y, z)$, где $c_{\text{ref}}(x, y, z)$ — некоторое типичное поле на исследуемой акватории, построенное на основе многолетних наблюдений (информация извлекается из соответствующих баз дан-

ных), $\delta c(x, y, z)$ — подлежащее восстановлению возмущение данного поля. Если возмущение не слишком велико, то в первом приближении можно считать, что оно не приводит к заметному искажению лучевых траекторий. Изменение времени прихода луча δt выражается соотношением [55]

$$\delta t = - \int_{\Gamma} \frac{\delta c}{c_{\text{ref}}^2} ds, \quad (39)$$

где интегрирование идёт вдоль невозмущённой траектории Γ ; ds — элемент длины дуги. Формула (39) даёт необходимую для решения обратной задачи связь между неизвестным возмущением δc и измеряемыми смещениями времён прихода лучей δt . В работе [55] предложен метод решения обратной задачи, который потом получил развитие в многочисленных работах других авторов (см. монографию [56] и ссылки в ней).

Метод Манка и Вунша был апробирован в демонстрационном эксперименте, выполненном в 1981 г. в Атлантике на акватории размерами $300 \times 300 \text{ км}^2$ [57]. Полученные данные хорошо соответствовали результатам прямых измерений вариаций температурного поля контактными методами.

Лучевой хаос накладывает жёсткие ограничения на возможности метода Манка–Вунша. Дело в том, что схема Манка–Вунша предполагает вычисление семейства собственных лучей, связывающих приёмник и источник звука. В условиях лучевого хаоса, вследствие крайне высокой чувствительности траекторий к малым вариациям начальных условий, количество собственных лучей экспоненциально возрастает с увеличением дистанции, а решение обратной задачи на длинных трассах становится практически невозможным [15].

Рядом авторов рассматривается аналог метода акустической томографии океана, который называется методом модовой томографии. Этот метод основан на использовании в качестве измеряемых акустических

параметров либо фаз комплексных амплитуд нормальных мод, либо времён прихода звуковых импульсов, переносимых отдельными модами [58–60]. Изменение этих параметров, как и изменение времён прихода лучей, могут быть просто выражены через возмущение δc . В модовой томографии также существуют ограничения, обусловленные лучевым хаосом: рассеяние на внутренних волнах приводит к увеличению длительности модовых импульсов, попутно придавая им крайне нерегулярную форму [61, 62].

Метод акустической томографии был предложен для реконструкции возмущений температурных полей на акваториях с характерными размерами порядка нескольких сотен (до одной тысячи) километров. В 1990-е годы на повестку дня был поставлен вопрос об акустическом зондировании акваторий с характерными размерами 5–10 тыс. км (это характерные размеры океанов). Целью ставилась диагностика климатических вариаций средней температуры океана и анализ проявлений парникового эффекта. Вывод о принципиальной возможности решения этой задачи был сделан на основе анализа данных ряда крупномасштабных морских экспериментов.

Самый известный и впечатляющий из таких экспериментов был проведён в 1991 г. совместными усилиями учёных разных стран под руководством У. Манка (США) [4]. В этом эксперименте звук когерентного источника был зарегистрирован в различных областях Атлантического и Тихого океанов на рекордно большом расстоянии, порядка 18 тыс. км. (рис. 3). Удавалось разрешать лучевые импульсы с временами прихода, различавшиеся всего лишь на несколько миллисекунд. Этот эксперимент стал проверкой возможностей регистрации звуковых сигналов на таких больших расстояниях перед запланированными работами по акустической термометрии океана. Источники звука размещались на косе, опущенной с борта судна на глубину оси локального ПЗК

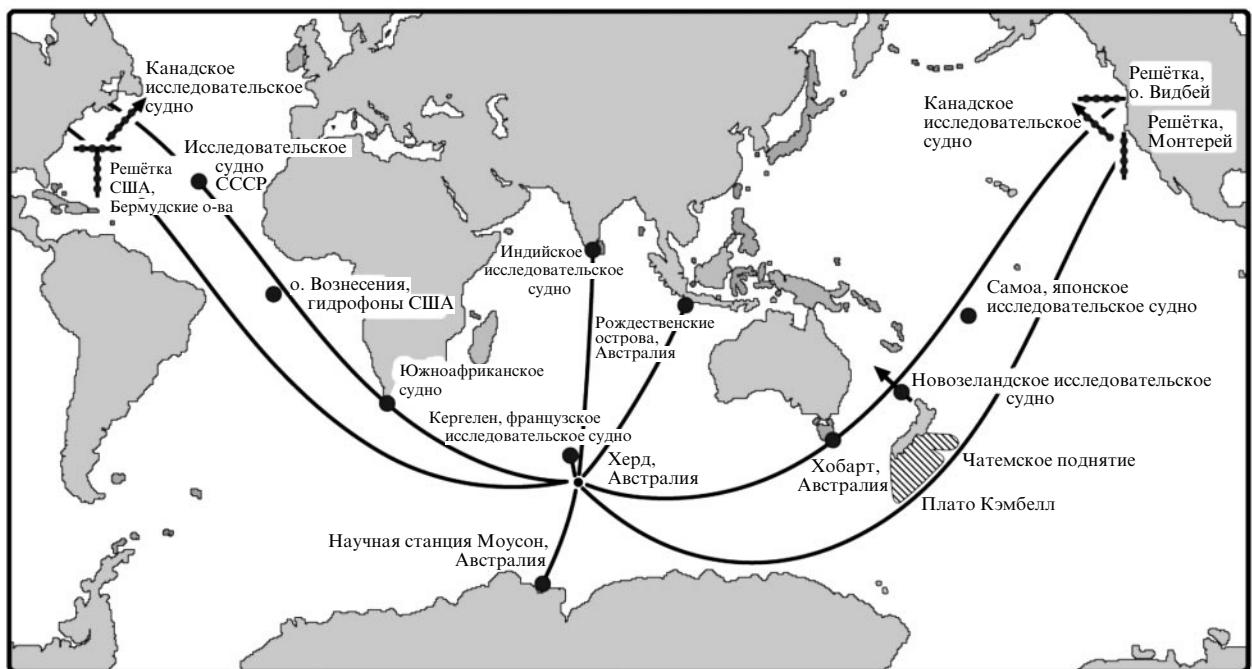


Рис. 3. Схема эксперимента по дальнему распространению звука в океане [4]. Тёмными кружками показано расположение приёмных систем.

(175 м) вблизи австралийского острова Херд, расположенного в субантарктической зоне Индийского океана. Излучались монохроматические и узкополосные импульсные сигналы на частотах, близких к 60 Гц. Максимальная мощность излучения достигала 220 дБ.

Важный натурный эксперимент АЕТ (Acoustic Engineering Test) проводился в течение недели в ноябре 1994 г. Источник широкополосных сигналов с центральной частотой 75 Гц находился в северной части Тихого океана на глубине 625 м вблизи оси ПЗК. Сигналы регистрировались около Гавайских островов с помощью вертикальной цепочки из 20 приёмных гидрофонов. Расстояние между соседними гидрофонами составляло 35 м (1,75 длины волны звука на частоте 75 Гц), и они перекрывали диапазон глубин от 900 до 1600 м. Акустическая трасса длиной 3252 км не пересекала крупномасштабных гидрологических структур типа фронтов и течений, и на её пути не было больших подводных хребтов.

Анализ результатов эксперимента АЕТ был проведён в ряде работ [19, 63–65]. Начальная часть регистрируемого сигнала была достаточно устойчивой, и в ней можно было уверенно разрешить и идентифицировать приходы импульсов, распространяющихся по крутым лучам. Поздняя часть регистрируемого сигнала, напротив, была неустойчивой, и в ней нельзя было выделить никаких устойчивых приходов.

Качественное различие свойств ранней и поздней частей звукового сигнала было объяснено с помощью теории лучевого хаоса. В работе [19] было проведено численное моделирование лучевой динамики в условиях эксперимента АЕТ с учётом внутренних волн со спектром Гарретта–Манка. Результаты такого моделирования согласуются в целом с результатами эксперимента (рис. 4). Расчёты подтверждают, что разбегание траекторий с близкими начальными условиями происходит по закону (1). Исследована зависимость показателя Ляпунова v от угла скольжения χ_0 , под которым луч пересекает ось ПЗК. Для пологих лучей ($|\chi_0| \leq 5^\circ$) типичная величина v составляет $1/100 \text{ км}^{-1}$, а для крутых ($6^\circ \leq \chi_0 \leq 11^\circ$) она уменьшается до $1/300 \text{ км}^{-1}$. Таким образом, крутые лучи существенно менее хаотичны, чем пологие. Это частично объясняет устойчивость начальной части сигнала, формируемой вкладами крутых лучей.

Аналогичная картина была обнаружена в эксперименте Slice89 [66, 67], проведённом в 1989 г. на трассе длиной 1000 км в северо-восточной части Тихого океана при использовании источника с частотой 250 Гц и вертикальной антенны длиной 3 км с 50 гидрофонами. Заметим, что хаотичность пологих лучей не является общей закономерностью распространения звука в глубоком океане. Например, эксперименты, проведённые в Японском море, с источником вблизи полуострова Гамова [68–70] свидетельствуют о достаточно высокой устойчивости приосевых лучей, что связано, по всей видимости, с особенностями поля внутренних волн в данном районе.

Эти и другие натурные эксперименты доказали, что низкочастотные акустические сигналы могут распространяться на многие тысячи километров со сравнительно малым затуханием. Оказалось, что даже на таких длинных трассах важные особенности звукового поля хорошо описываются в рамках геометрической

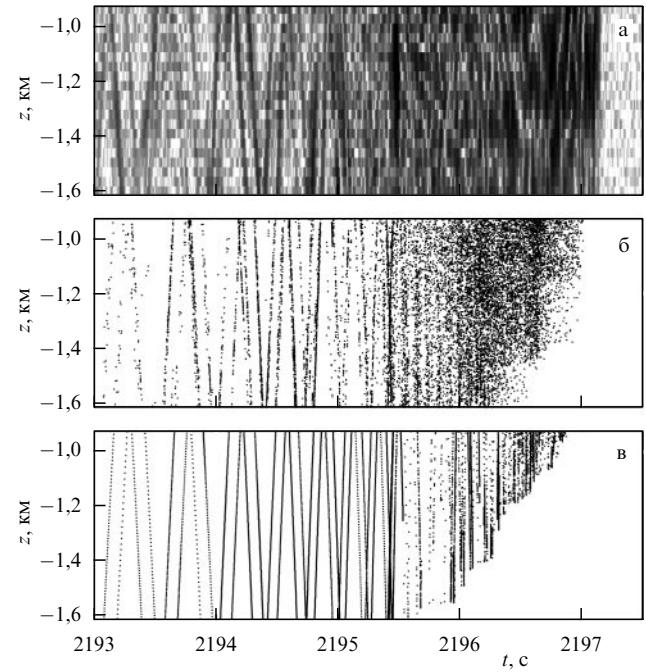


Рис. 4. Измеренная и рассчитанные t - z -диаграммы эксперимента АЕТ. (а) Типичный результат измерения интенсивности звука с динамическим диапазоном 30 дБ. (б) Рассчитанная t - z -диаграмма с учётом внутренних волн. (в) То же без внутренних волн [19]. (Вертикальная ось направлена вверх, поэтому глубина океана z принимает отрицательные значения.)

оптики. В частности, звуковые импульсы, приходящие в точку наблюдения по крутым лучам и формирующие начальную часть сигнала, во многих случаях могут быть разрешены и идентифицированы. Более того, показано, что долговременное наблюдение за вариациями времён прихода лучевых импульсов позволяет отслеживать климатические вариации средней температуры [71]. С другой стороны, эксперименты свидетельствуют, что флуктуации скорости звука, вызванные внутренними волнами и другими гидрологическими неоднородностями, оказывают сильное влияние на распространение звука на большие расстояния. Это указывает на необходимость учёта эффектов лучевого хаоса для адекватного описания звуковых полей на больших расстояниях.

5. Лучевой и волновой хаос в волноводах с периодическими неоднородностями

В этом разделе рассмотрены упрощённые модели ПЗК, в которых возмущения скорости звука являются периодическими функциями горизонтальной координаты. Обсуждаются основные механизмы возникновения лучевого хаоса. Исследуется структура фазового пространства модели с периодичностью, а также проявления лучевого хаоса при конечной длине волны. Предположение о периодичности возмущения, безусловно, является очень сильной идеализацией, поскольку в действительности неоднородность скорости звука в океане характеризуется широким пространственным спектром, не имеющим выделенных пиков. Для того чтобы несколько сгладить это противоречие, вниманию читателей представлен подход, позволяющий применить некоторые результаты теории периодически-неоднородных волн-

водов для анализа хаотической динамики лучей в случайно-неоднородных волноводах.

5.1. Хаос в волноводах

с плавной зависимостью возмущения от глубины

5.1.1. Нелинейный резонанс. Рассмотрим наиболее простой сценарий возникновения лучевой хаотичности в ПЗК. Возьмём за основу лучевой гамильтониан (12) и положим, что возмущение $V(r, z)$ может быть представлено в следующем виде:

$$V(r, z) = V(r + \lambda_r z, z) = \varepsilon \bar{V}(r, z), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (40)$$

где \bar{V} — некоторая "медленная" функция вертикальной координаты z . Лучевой гамильтониан, выраженный в переменных действие–угол, выглядит следующим образом:

$$H = H_0(I) + \varepsilon \bar{V}(I, \vartheta, r). \quad (41)$$

Разлагая \bar{V} в двойной ряд Фурье,

$$\bar{V}(I, \vartheta, r) = \sum_{l, m} \bar{V}_{l, m}(I) \exp [i(l\vartheta - m k_r r)], \quad (42)$$

приводим лучевые уравнения (26) и (27) к виду [40]

$$\frac{dI}{dr} = -\frac{i\varepsilon}{2} \sum_{l, m} l \bar{V}_{l, m}(I) \exp [i(l\vartheta - m k_r r)] + \text{с.с.}, \quad (43a)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \omega(I) + \frac{i\varepsilon}{2} \sum_{l, m} \frac{\partial \bar{V}_{l, m}}{\partial I} \exp [i(l\vartheta - m k_r r)] + \text{с.с.}, \quad (43b)$$

где $\bar{V}_{l, m}$ — фурье-амплитуда, $k_r = 2\pi/\lambda_r$, с.с. — комплексно сопряжённая часть выражения. При выполнении условия

$$l\omega(I) - m k_r = 0 \quad (44)$$

в уравнениях (43a), (43b) возникает резонанс, аналогичный обычному нелинейному резонансу в классической механике (с той лишь разницей, что роль времени играет горизонтальная координата r), получивший название пространственного нелинейного резонанса [10]. В дальнейшем мы будем называть нелинейный резонанс с $l = l^*$ и $m = m^*$ резонансом $l^*: m^*$. Поскольку условие (44) может выполняться для различных значений l , m и I , резонансы всюду плотно покрывают фазовое пространство. Вместе с тем лишь незначительная их доля, соответствующая достаточно малым значениям l и m , оказывает существенное влияние на динамику лучей, поскольку фурье-амплитуды разложения (42) быстро спадают с возрастанием номера гармоники.

Выделим резонанс с $l = l_0$, $m = m_0$ и $I = I_0$ и рассмотрим динамику в его окрестности. После отбрасывания нерезонансных членов и подстановки $\bar{V}_{l, m} = V_0 \exp(i\psi_0)$, где $V_0 \in \mathbb{R}$, в уравнения (43a), (43b), получаем

$$\frac{dI}{dr} = \varepsilon l_0 V_0 \sin(l_0 \vartheta - m_0 k_r r + \psi_0), \quad (45a)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V_0}{\partial I} \cos(l_0 \vartheta - m_0 k_r r + \psi_0). \quad (45b)$$

Считая, что отклонение действия от резонансного значения $\Delta I = I - I_0$ является малым, мы можем воспользоваться приближениями $\omega(I) = \omega(I_0) + \omega' \Delta I$, где $\omega' = d\omega/dI$, и $V_0 = V_0(I_0)$. Отбросим также член порядка ε в правой части (45b). Таким образом, мы приходим к

системе уравнений

$$\frac{d(\Delta I)}{dr} = -\varepsilon l_0 V_0 \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{dr} = l_0 \omega' \Delta I, \quad (46)$$

где введена новая переменная $\Psi = l_0 \vartheta - m_0 k_r r + \psi_0 - \pi$. Система уравнений (46) соответствует гамильтониану

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} l_0 \omega' (\Delta I)^2 - \varepsilon l_0 V_0 \cos \Psi. \quad (47)$$

Этот гамильтониан формально совпадает с гамильтонианом нелинейного маятника, поэтому траектории решений (46) имеют вид финитных или инфинитных колебаний. Захват в резонанс соответствует финитным колебаниям, когда значение действия луча I локализуется внутри небольшого интервала в окрестности $I = I_0$. Ширина этого интервала даётся формулой

$$\Delta I_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{|\omega'|}}. \quad (48)$$

Сведение неинтегрируемой системы уравнений (43a), (43b) к интегрируемой системе (46) является приближённым, и оно возможно только при выполнении определённых условий. Во-первых, должно выполняться условие умеренной нелинейности

$$\varepsilon \ll \alpha \ll \varepsilon^{-1}, \quad (49)$$

где α — безразмерный параметр нелинейности,

$$\alpha = \frac{|\omega'| I}{\omega}. \quad (50)$$

Во-вторых, интегрируемость теряется при перекрытии резонансов, соседствующих в фазовом пространстве. Это происходит при выполнении неравенства

$$K = \frac{\Delta I_{\max}}{\delta I} \gtrsim 1, \quad (51)$$

где δI — расстояние между резонансами по действию. Условие (51) называется критерием Чирикова [72]. При перекрытии резонансов в фазовом пространстве образуется хаотическое море, которое может быть весьма обширным. Если луч принадлежит хаотическому морю, то его траектория становится нерегулярной, а действие луча перестаёт быть медленно изменяющейся величиной и оно может сильно отклоняться от начального значения.

Влияние перекрытия резонансов на динамику лучей в горизонтально-периодическом волноводе может быть визуализировано с помощью отображения Пуанкаре

$$p_{m+1} = p(r = \lambda_r | p_m, z_m, r = 0), \quad (52)$$

$$z_{m+1} = z(r = \lambda_r | p_m, z_m, r = 0),$$

которое устанавливает связь между импульсом p_m и глубиной z_m луча на расстоянии $r = m\lambda_r$ со значениями этих переменных на расстоянии $r = (m+1)\lambda_r$, т.е. через период возмущения. Фазовый портрет отображения Пуанкаре, так называемое сечение Пуанкаре, даёт качественное представление о характере движения лучей, соответствующих различным начальным условиям. В качестве примера рассмотрим канонический ПЗК Манка (14) и возмущение скорости звука

$$\delta c = 2\varepsilon c_0 \frac{z}{z_{\text{th}}} \exp\left(-\frac{2z}{z_{\text{th}}}\right) \sin \frac{2\pi r}{\lambda_r}, \quad (53)$$

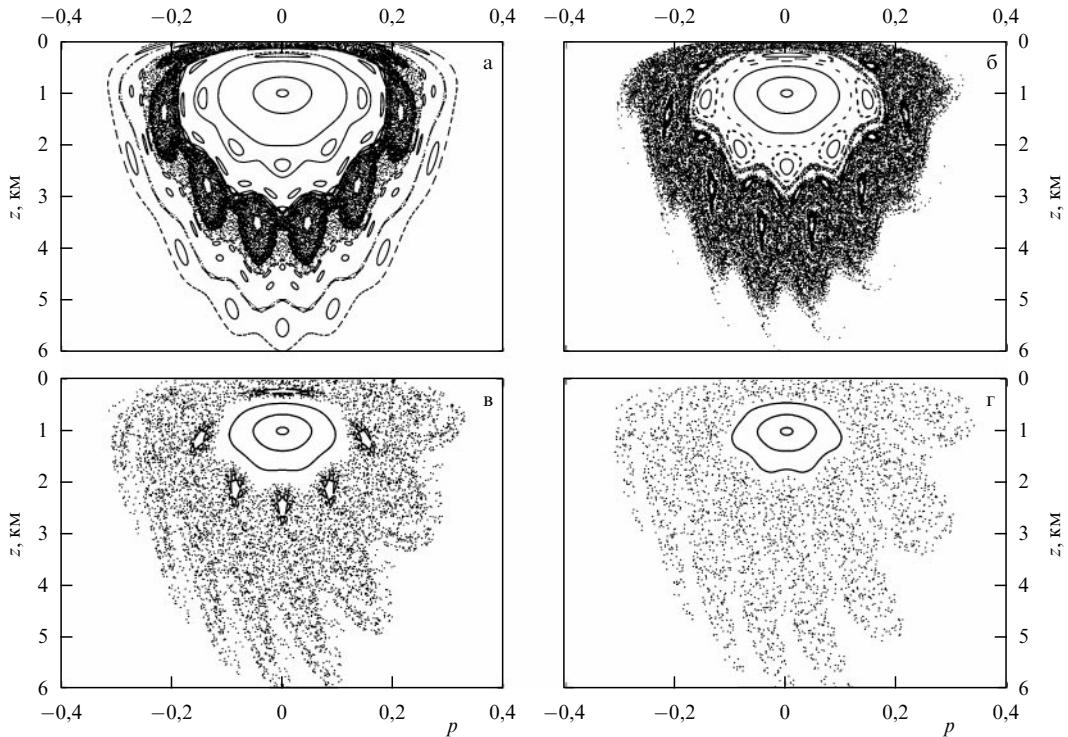


Рис. 5. Трансформация сечения Пуанкаре при увеличении амплитуды возмущения скорости звука: (а) $\varepsilon = 0,005$, (б) $\varepsilon = 0,01$, (в) $\varepsilon = 0,02$, (г) $\varepsilon = 0,04$.

где $\lambda_r = 10$ км. Такая модель приближённо описывает эффект, создаваемый первой модой поля внутренних волн. На сечениях Пуанкаре множества начальных условий, соответствующих нелинейным резонансам, проявляются как цепочки звеньев эллипсоидальной формы, а хаотические слои выглядят как беспорядочные облака точек. Разделение фазового пространства на области регулярного и хаотического поведения является типичным для слабовозмущённых гамильтоновых систем. Как продемонстрировано на рис. 5, с возрастанием ε области регулярного движения становятся всё меньше и меньше, а хаотическое море — всё шире и шире вследствие усиления перекрытия резонансов. Резонансы могут перекрываться не полностью, а только частично. В этом случае звенья резонансных цепочек превращаются в цепочки островов устойчивости, омыемых хаотическим морем. Например, на рис. 5в видна цепочка островов устойчивости, соответствующая частично перекрытому резонансу 5:1.

Величина параметра перекрытия K существенно зависит не только от силы возмущения, но и от степени нелинейности невозмущённых колебаний луча в волноводе. В частности, можно показать, что

$$K \sim \sqrt{\varepsilon\alpha}, \quad (54)$$

т.е. лучи, характеризующиеся большими значениями α , гораздо легче становятся хаотическими. Это обстоятельство дало основание трактовать параметр α как параметр стабильности лучей [73, 74]. Такая трактовка, впрочем, может оказаться несостоятельной при наличии сильных осцилляций неоднородности по глубине (см. раздел 5.2).

Если при некотором значении действия луча I производная $d\omega/dI$ и, следовательно, параметр α обра-

щаются в нуль, то левое неравенство в (49) не выполняется, и приведённая выше теория нелинейного резонанса становится неприменимой. Этот случай отвечает локальному вырождению соответствующей гамильтоновой системы с образованием так называемого незакрученного тора (shearless torus). Исследованию динамики вблизи незакрученных торов посвящена обширная литература (см., например, монографию [75], а также статьи [76–78]). Известно, что незакрученные торы обладают исключительной способностью сохранять устойчивость по Ляпунову [79]. Кроме того, обращение в нуль производной $d\omega/dI$ означает пониженную расходимость ближайших лучей, что приводит к образованию слаборасходящегося пучка [80–83]. Условие $d\omega/dI = 0$ приближённо выполняется в ПЗК в Японском море для лучей, пересекающих ось канала под углом около 2° . Возникающий в этом случае слаборасходящийся пучок может служить объяснением устойчивости приосевых лучей, на которую указывают результаты экспериментов [69, 70]. Аналоги слаборасходящихся пучков встречаются в квантовой механике, например, при описании ферромагнитных спиновых цепочек в магнитном поле [84]. Также отметим, что параметр α асимптотически связан с волноводным инвариантом Чупрова, характеризующим временные и пространственные масштабы интерференционной картины акустического поля [85–87].

5.1.2. Влияние нелинейного резонанса лучей на свойства волнового поля. Кажется очевидным, что хаотическая динамика лучей должна найти своё отражение в волновой картине. Для того чтобы разобраться в этом вопросе, воспользуемся периодичностью возмущения и введём оператор Флоке \hat{F} , связывающий комплексные амплитуды поля в двух точках дистанции, отстоящих на период

неоднородности λ_r :

$$\hat{F}u(r, z) = u(r + \lambda_r, z). \quad (55)$$

В квантовой механике аналогичный оператор используется при описании систем с периодическим по времени возмущением. Он широко применяется в теории квантового хаоса [88].

Согласно теореме Флоке, решение параболического уравнения (7) в волноводе с периодическим возмущением может быть представлено в виде суммы собственных функций оператора (55) (далее мы будем называть их модами Флоке):

$$u_m(r, z) = \exp\left(-\frac{i k \epsilon_m r}{\lambda_r}\right) \Psi_m(r, z), \quad (56)$$

где $\Psi_m(r + \lambda_r, z) = \Psi_m(r, z)$, ϵ_m — некоторые вещественные константы, $m = 1, 2, \dots$. Моды Флоке являются математическим аналогом состояний Флоке в квантовой механике, а величины ϵ_m — аналогами квазиэнергий [23, 88, 89]. Поскольку оператор Флоке является эрмитовым, функции $\Psi_m(r, z)$ образуют полный ортонормированный базис. Моды Флоке могут быть выражены через моды невозмущённого волновода $\varphi_m(z)$. Для этого рассмотрим функции

$$\psi_m(z) \equiv \Psi_m(0, z) \quad (57)$$

и представим каждую из них в виде разложения

$$\psi_m(z) = \sum_q C_{qm} \varphi_q(z). \quad (58)$$

Для того чтобы найти коэффициенты C_{qm} , воспользуемся матричным представлением оператора Флоке

$$F_{mn} = \int dz \varphi_m(z) \hat{F} \varphi_n(z), \quad (59)$$

где $\hat{F} \varphi_n(z)$ означает решение параболического уравнения (7) при $r = \lambda_r$, полученное с начальным условием $u(0, z) = \varphi_n(z)$. Собственные числа ξ_m и собственные векторы \mathbf{X}_m матрицы оператора \hat{F} , удовлетворяющие уравнению

$$\hat{F} \mathbf{X}_m = \xi_m \mathbf{X}_m, \quad (60)$$

определяют связь между модами невозмущённого волновода и модами Флоке. В частности, мы имеем

$$\xi_m = \exp(-ik\epsilon_m),$$

а компоненты m -го собственного вектора \mathbf{X}_m представляют собой коэффициенты разложения (58) (C_{1m}, C_{2m}, \dots).

С помощью мод Флоке мы можем представить волновое поле при $r = n\lambda_r$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) в виде разложения

$$u(n\lambda_r, z) = \sum_m g_m(n) \psi_m(z), \quad (61)$$

где

$$g_m(n) = \exp(-ink\epsilon_m) g_m(0). \quad (62)$$

Вновь обратимся к аналогии между волновой и квантовой динамикой. Хорошо известно, что воздействие

периодического возмущения на квантовую систему с дискретным спектром приводит к резонансным переходам между энергетическими уровнями, связанными соотношением

$$\frac{1}{\hbar} \Delta E_{m+\Delta m, m} = \omega_f, \quad (63)$$

где \hbar — постоянная Планка, $\Delta E_{m+\Delta m, m} = E_{m+\Delta m} - E_m$, E_m — энергия, соответствующая m -му уровню, ω_f — частота возмущения. Аналогичное явление происходит и в периодически-неоднородных волноводах, где периодическая горизонтальная неоднородность приводит к резонансной перекачке акустической энергии между модами невозмущённого волновода. В этом случае условие резонанса имеет вид

$$k \Delta E_{m+\Delta m, m} = k_r, \quad (64)$$

где $\Delta E_{m+\Delta m, m}$ — разность между соответствующими собственными значениями задачи Штурма–Лиувилля в невозмущённом волноводе. Если разность $\Delta E_{m+\Delta m, m}$ мала, то мы можем записать

$$k_r = k \Delta E_{m+\Delta m, m} \simeq \frac{dE}{dI}(I_{m+\Delta m} - I_m) = \omega \Delta m, \quad (65)$$

где I_m — значения переменной действия, удовлетворяющие правилу квантования (29). Таким образом, Δm совпадает с порядком соответствующего лучевого нелинейного резонанса. Более того, поскольку существует соответствие между лучами и модами, устанавливаемое правилом квантования (29), наиболее интенсивно обменяются энергией те моды невозмущённого волновода, для которых значения действия принадлежат области нелинейного лучевого резонанса, т.е. если

$$k(I_0 - \Delta I_{\max}) + \frac{1}{2} \leq m \leq k(I_0 + \Delta I_{\max}) + \frac{1}{2}. \quad (66)$$

Если лучевой резонанс является хорошо изолированным и не перекрывает своим соседями, то эволюция мод невозмущённого волновода, удовлетворяющих (66), управляется главным образом отдельным блоком матрицы оператора Флоке, хорошо изолированным от остальной матрицы. Каждый такой блок порождает свою серию мод Флоке. При перекрытии резонансов также перекрываются и соответствующие блоки. В результате неравенство (66) нарушается и число эффективно взаимодействующих мод резко увеличивается. Это явление известно в теории квантового хаоса как делокализация [90].

Для анализа связи между волновой функцией квантово-механической системы и структурой фазового пространства классического аналога этой системы часто используется функция Вигнера, которую иногда называют квазивероятностью совместного распределения импульса и координаты [91]. В теории волн функция Вигнера волнового поля в вертикальном сечении волновода $\psi(z)$, заданная соотношением

$$W(p, z) = \frac{k}{2\pi} \int d\zeta \psi\left(z - \frac{\zeta}{2}\right) \psi^*\left(z + \frac{\zeta}{2}\right) \exp(ikp\zeta), \quad (67)$$

трактуется как локальный пространственный спектр поля [43]. Некоторые важные свойства данной характеристики поля становятся лучше видны после перехода к

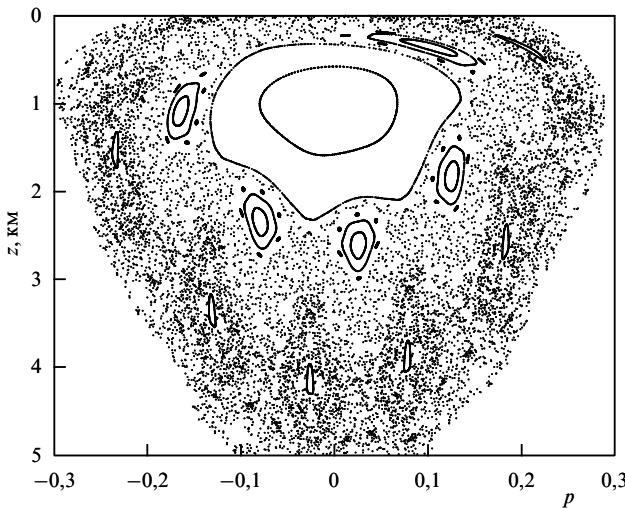


Рис. 6. Фазовый портрет системы лучей в модели волновода, заданной соотношениями (14) и возмущением (53) с амплитудой $\varepsilon = 0,01$ и горизонтальным периодом $\lambda_r = 10$ км [89].

сглаженной функции Вигнера [91]

$$w(p, z) = \frac{1}{2\pi\Delta_p\Delta_z} \int dp' dz' W(p', z') \times \\ \times \exp \left[-\frac{(z - z')^2}{2\Delta_z^2} - \frac{(p - p')^2}{2\Delta_p^2} \right]. \quad (68)$$

Если масштабы сглаживания, Δ_p и Δ_z , удовлетворяют условию $\Delta_p\Delta_z = 1/(2k)$, то формулы (67) и (68) задают так называемое преобразование Хузими [22]. Нетрудно проверить, что в данном случае

$$w(p, z) = \left| (2\pi\Delta_z^2)^{1/4} \int dz' \psi^*(z') \exp \left[ikp(z' - z) - \frac{(z' - z)^2}{4\Delta_z^2} \right] \right|^2, \quad (69)$$

т.е. $w(p, z)$ представляет собой проекцию $\psi(z)$ на так называемое когерентное состояние (состояние с минимальной неопределенностью [45]). Преобразование Хузими (69) собственной функции $\psi_m(z)$ обозначим как $w_m(p, z)$.

В качестве примера рассмотрим функцию $w_m(p, z)$ волновода с опорным профилем скорости звука (14) и периодическим возмущением (53) с амплитудой $\varepsilon = 0,01$ и горизонтальным периодом $\lambda_r = 10$ км [43, 89, 92]. Фазовый портрет системы лучей в таком волноводе представлен на рис. 6.

На рисунке 7 показаны некоторые характерные функции Хузими мод Флоке данного волновода. На всех графиках изображены контуры основных островов с фазового портрета. Это большой центральный остров, который окружён пятью меньшими островами, формируемыми периодическими орбитами резонанса 5:1. Каждый из пяти островов в свою очередь окружён шестью небольшими сателлитами. Рисунок 7 демонстрирует, что разные моды Флоке локализованы в различных частях фазового пространства. Моды, изображённые на рис. 7а, б и д, локализованы внутри островов стабильности, и, следовательно, они формируются регулярными лучами. Мода на рис. 7в, локализованная вблизи границ островов резонанса 5:1, является примером состояния, одновременно принадлежащего и устойчивой зоне, и

хаотическому морю. Подобные состояния отвечают за туннелирование между областями регулярного и хаотического движения [93]. Такой процесс невозможен в классической динамике лучей. На рисунке 7г мода Флоке локализована в окрестности неустойчивой периодической лучевой орбиты резонанса 5:1. В отображении Пуанкаре эта орбита представлена пятью тёмными кружками, которые на рис. 7д находятся в максимумах функции Хузими. Эффект локализации моды Флоке вблизи неустойчивой периодической орбиты ещё более ярко наблюдается в распределении интенсивности поля данной моды в продольном сечении волновода, т.е. в плоскости $r-z$. Вблизи периодической траектории наблюдается усиление интенсивности [43, 92]. Аналогичное явление в теории квантового хаоса известно как образование шрамов (англ. scarring) [94]. И наконец, на рис. 7е изображена мода Флоке, принадлежащая хаотическому морю, т.е. формируемая хаотическими лучами.

5.2. Динамика лучей при наличии быстрых осцилляций неоднородности по глубине

5.2.1. Вертикальный резонанс. В разделе 5.1 мы описали механизм возникновения лучевого хаоса в том случае, когда возмущение скорости звука плавно зависит от глубины z . Теперь перейдём к более сложному случаю, в котором возмущение быстро осциллирует по глубине. В реальном океане такие осцилляции порождаются высокими модами поля внутренних волн. В качестве примера рассмотрим простую модель, в которой возмущение подводного звукового канала описывается формулой

$$V(r, z) = \varepsilon Y(z) \sin k_z z \sin k_r r, \quad (70)$$

где $Y(z)$ — медленно изменяющаяся функция,

$$k_z \gg \left| \frac{dY}{dz} \right|. \quad (71)$$

При выполнении неравенства (71) возмущение быстро осциллирует вдоль траектории луча, за исключением областей, удовлетворяющих условию

$$\frac{d\Psi^\pm}{dr} = k_z p \pm k_r \simeq 0, \quad (72)$$

где $\Psi^\pm = k_z z \pm k_r r$. В этих областях осцилляции возмущения "замораживаются" и возникает так называемый вертикальный резонанс, являющийся разновидностью резонанса в системах с быстрыми и медленными колебаниями, подробно исследованного в серии работ А.И. Нейштадта и его коллег [95–99]. В нашем случае в роли медленных колебаний выступают колебания луча в волноводе с частотой ω . В основе предложенного группой А.И. Нейштадта подхода лежит разделение движения на резонансное и нерезонансное с последующим их анализом по отдельности. В нерезонансном режиме система лучевых уравнений может быть сведена к интегрируемой с помощью метода усреднения [100]. Рассмотрим движение луча вблизи одного из резонансов (72), например, резонанса, соответствующего $d\Psi^+/dr = 0$. В этом случае уравнение для траектории луча может быть приведено к виду

$$\frac{d^2z}{dr^2} = \frac{dp}{dr} = -\frac{dU}{dz} - \frac{\varepsilon}{2} k_z Y(z) \sin \Psi^+. \quad (73)$$

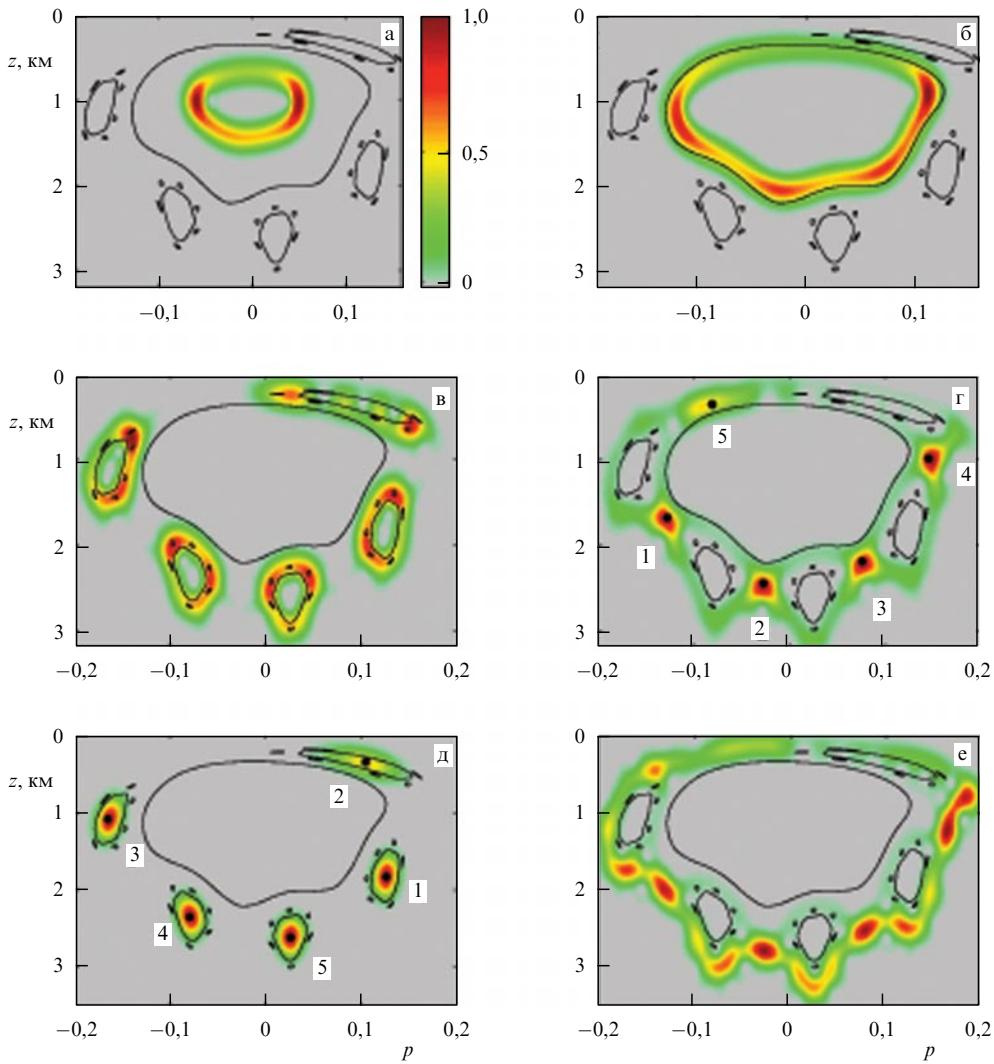


Рис. 7. Функции Хузими для различных мод Флоке на частоте 200 Гц [89]. Сплошные кривые показывают границы островов с фазовым портретом на рис. 6.

Используя (73), несложно получить систему уравнений в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi^+}{dr} &= k_z y = \frac{\partial \tilde{H}(\Psi^+, y)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dr} &= -\frac{\varepsilon}{2} k_z Y(z) \sin \Psi^+ - \frac{dU}{dz} = -\frac{\partial \tilde{H}(\Psi^+, y)}{\partial \Psi^+}, \end{aligned} \quad (74)$$

описывающую поведение луча вблизи вертикального резонанса. Здесь y — отклонение от резонанса по переменной p , определяемое выражением

$$y = p - p_{\text{res}} = p + \frac{k_r}{k_z}. \quad (75)$$

Резонансный гамильтониан \tilde{H} , соответствующий (74), имеет следующий вид:

$$\tilde{H}(\Psi^+, y) = \frac{k_z y^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2} k_z Y \cos \Psi^+ + \frac{dU}{dz} \Psi^+. \quad (76)$$

При выполнении неравенства

$$\left| \frac{dU}{dz} \right| < \frac{\varepsilon k_z Y}{2} \quad (77)$$

фазовый портрет системы уравнений (74) при фиксированном значении z содержит ограниченную сепаратрисой

область колебательного движения, соответствующую вертикальному резонансу. Площадь этой области, зависящая от z , изменяется вдоль луча, поэтому лучи имеют возможность пересекать сепаратрису, попадая внутрь сепаратрисной петли и, соответственно, в вертикальный резонанс. Критерий попадания в вертикальный резонанс может быть сформулирован в виде неравенства [101]

$$\tilde{H} \Big|_{z(r)} \leq \tilde{H}_s \Big|_{z(r)}, \quad (78)$$

где H_s — значение гамильтониана \tilde{H} на сепаратрисе, значения фазы Ψ^+ ограничены интервалом $[-\pi, \pi]$, а индекс $z(r)$ означает, что \tilde{H} и \tilde{H}_s вычисляются вдоль траектории луча $z(r)$. Площадь резонансной области достигает максимума при $dU/dz = 0$, т.е. при прохождении лучом оси ПЗК. В этом случае следует ожидать наибольшего влияния вертикального резонанса. Принимая это во внимание, а также учитывая (72), находим уравнение, определяющее лучи, наиболее подверженные влиянию вертикального резонанса [102, 103],

$$p(z_a, H) = \sqrt{2[H - U(z_a)]} \simeq \frac{k_r}{k_z}, \quad (79)$$

где z_a — глубина оси канала.

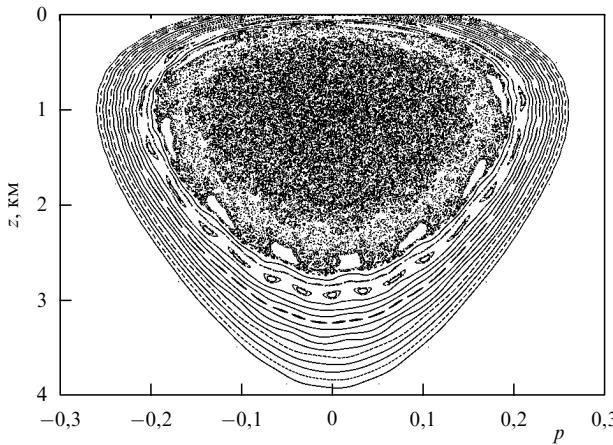


Рис. 8. Сечение Пуанкаре для ПЗК с биэкспоненциальным профилем скорости звука и возмущением (70).

Попав в вертикальный резонанс, луч впоследствии выходит из него, поскольку неравенство (77) может выполняться только вдоль ограниченного участка траектории. Каждое прохождение луча через вертикальный резонанс приводит к скачку действия луча I . Как доказано в [95, 96], величина этого скачка крайне чувствительна к начальным условиям, поэтому многократные прохождения через резонанс порождают хаотическую диффузию. Более того, Нейштадт и Васильев [104] доказали отсутствие устойчивых периодических траекторий, пересекающих сепаратрисы резонансной области.

Таким образом, рассеяние лучей на вертикальном резонансе порождает лучевой хаос. В этом случае уравнение (79) определяет расположение хаотического слоя в фазовом пространстве. Например, в случае сильных вертикальных осцилляций, $k_r \ll k_z$, вертикальный резонанс приводит к хаосу лучей, распространяющихся под малыми углами к оси канала и принадлежащих центральной области фазового пространства. Это продемонстрировано на рис. 8, где изображено сечение Пуанкаре, рассчитанное для ПЗК с биэкспоненциальным профилем скорости звука

$$c(z) = c_0 \left\{ 1 + \frac{b^2}{2} [\exp(-az) - \eta]^2 \right\}, \quad (80)$$

где $c_0 = 1480 \text{ м с}^{-1}$, $a = 0,5 \text{ км}^{-1}$, $b = 0,557$, $\eta = 0,6065$. Возмущение имеет вид (70), где

$$Y(z) = \frac{z}{z_{\text{th}}} \exp\left(-\frac{2z}{z_{\text{th}}}\right). \quad (81)$$

Значения параметров возмущения: $z_{\text{th}} = 1 \text{ км}$, $\epsilon = 0,005$, $k_z = 2\pi/0,2 \text{ км}^{-1}$, $k_r = 2\pi/5,0 \text{ км}^{-1}$. Как видно из представленного сечения Пуанкаре, лучи, идущие под малыми углами к оси канала, принадлежат обширному хаотическому морю. Это помогает объяснить на качественном уровне характерные особенности принимаемых акустических сигналов в ряде экспериментов по дальнему распространению звука [19, 66]. Во-первых, приосевые лучи характеризуются наименьшими скоростями распространения сигнала, поэтому рассеяние на вертикальном резонансе может служить объяснением сильной расплывчатости и нерегулярности в поздней части звукового сигнала. Во-вторых, как отмечалось

выше, динамика лучей, не попадающих в вертикальный резонанс, может быть сведена к интегрируемой с помощью усреднения по быстрым фазам Ψ^\pm . Поэтому такие лучи являются устойчивыми по Ляпунову. Это даёт ключ к пониманию стабильности ранних приходов сигнала, формируемых относительно крутыми лучами. Отсюда следует, что ранние приходы вполне могут быть использованы для решения задач гидроакустической томографии.

5.2.2. Бифуркации периодических орбит. В теории вертикального резонанса динамика лучей исследуется в несколько ином ключе, чем в теории нелинейного резонанса, рассмотренного в разделе 5.1. Попробуем выяснить, как эти два подхода соотносятся друг с другом [43, 105]. С этой целью рассмотрим гамильтониан

$$H = H_0(I) + \epsilon F(I, \vartheta, r) \sin(k_z z(I, \vartheta)), \quad (82)$$

с периодическим возмущением $F(I, \vartheta, r) = F(I, \vartheta, r + \lambda_r)$. Допустим, функция F имеет много горизонтальных гармоник. Тогда условие (79) принимает вид

$$p_{\max}^{(m)} = \frac{mk_r}{k_z}, \quad (83)$$

где m — номер гармоники. Рассмотрим выделенный нелинейный резонанс

$$l\omega = mk_r = \frac{2\pi m}{\lambda_r}. \quad (84)$$

Резонансная фурье-амплитуда возмущения вычисляется следующим образом:

$$H_{l,m} = \frac{1}{8\pi i \lambda_r} \int_{-\lambda_r/2}^{\lambda_r/2} dr \exp\left(-i \frac{2\pi mr}{\lambda_r}\right) W_l(I, r) + \text{с.с.}, \quad (85)$$

$$W_l(I, r) = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta F(I, \vartheta, r) \exp(-il\vartheta + ik_z z) - \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta F(I, \vartheta, r) \exp(-il\vartheta - ik_z z). \quad (86)$$

При больших k_z интегралы в правой части (86) могут быть вычислены с помощью метода стационарной фазы. Введём обозначение

$$\Psi_{1,2} = -l\vartheta \pm k_z z(\vartheta), \quad (87)$$

тогда условия стационарной фазы примут вид

$$\frac{d\Psi_{1,2}}{d\vartheta} = -l \pm k_z \frac{dz}{d\vartheta} = -l \pm \frac{k_z p}{\omega} = 0. \quad (88)$$

В соответствии с (84) частота ω может быть заменена величиной mk_r/l , и мы получаем

$$mk_r \pm k_z p(I, \vartheta) = 0. \quad (89)$$

Вклад точек стационарной фазы зависит от второй производной

$$\frac{d^2\Psi_{1,2}}{d\vartheta^2} = \pm \frac{k_z}{\omega^2} \frac{dp}{dr}. \quad (90)$$

Используя приближение

$$\frac{dp}{dr} \approx -\frac{dU}{dz} \quad (91)$$

и проводя интегрирование в (86), находим

$$W(I, r) \approx \frac{1}{2i} \sum_j \left(D \sqrt{k_z \left| \frac{dU}{dz} \right|} \right)^{-1} F(\vartheta_j, r) \times \\ \times \exp \left(i\Psi_j + i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \frac{d\Psi_j^2}{d\vartheta^2} \right) + \text{с.с.}, \quad (92)$$

где мы опустили индекс l ; ϑ_j — j -е решение уравнения (89) относительно ϑ , Ψ_j — соответствующее ему значение Ψ_1 или Ψ_2 . Из (92) следует, что функция $H_{l,m}(I)$ имеет сингулярность, если $dU/dz = 0$ и $|p| = p_{\text{res}}$. Сопоставляя это с (89), мы обнаруживаем, что сингулярность возникает при выполнении условия вертикального резонанса (83). Отсюда следует, что нелинейные резонансы, находящиеся в непосредственной близости от зоны вертикального резонанса в фазовом пространстве, претерпевают значительное уширение. Это способствует локальному усилению перекрытия резонансов и появлению обширного хаотического слоя. С другой стороны, нелинейные резонансы, расположенные на отдалении от зоны вертикального резонанса, оказываются подавленными, поскольку значения соответствующих им фурье-амплитуд близки к нулю из-за сильных осцилляций подынтегрального выражения в (86).

Однако в рассматриваемом случае возможен гораздо более интересный сценарий возникновения хаоса. Селективное усиление фурье-амплитуд может привести к возрастанию производных $dH_{l,m}/dI$ и $d^2H_{l,m}/dI^2$. Последствия этого могут быть проиллюстрированы следующим образом. Возьмём уравнение (45б) и перепишем его в виде

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_{l,m}(I)}{\partial I} \cos \Psi_{l,m}, \quad (93)$$

где $\Psi_{l,m} = l\vartheta - mk_r r + \phi_0$. Рассмотрим свойства уравнения (93) в окрестности эллиптических лучевых орбит нелинейного резонанса, удовлетворяющих условиям $\Psi_{l,m} = 0$ и $l d\vartheta/dr = mk_r$. Тогда (93) преобразуется в следующее уравнение:

$$\frac{m}{l} k_r = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_{l,m}(I)}{\partial I}. \quad (94)$$

Если

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| > \varepsilon \left| \frac{\partial^2 H_{l,m}}{\partial I^2} \right|, \quad (95)$$

то уравнение (94) имеет единственный корень, определяющий значение переменной действия, соответствующее эллиптической точке. Однако при наличии вертикального резонанса это неравенство перестаёт выполняться уже при малых значениях амплитуды возмущения ε . В этом случае могут появиться два дополнительных корня, каждый из которых также соответствует периодической лучевой орбите, эллиптической или гиперболической. Таким образом, происходит бифуркация одного из двух типов: либо бифуркация вилки, либо бифуркация седло-центр. Аналогичная ситуация возникает и с гиперболическими лучевыми орбитами, отвечающими условиям $\Psi_{l,m} = \pi$ и $l d\vartheta/dr = mk_r$. Бифуркации эллиптических и гиперболических орбит происходят почти при одних и тех же значениях ε . Возникающие в результате бифуркации новые эллиптические орбиты могут соответствовать новым цепочкам островков в

фазовом пространстве; в этом случае нелинейный резонанс кратности $l:m$ приобретает два сателлита. При дальнейшем возрастании ε размножение периодических лучевых орбит продолжается.

В качестве иллюстрации проследим, как при малых значениях амплитуды возмущения ε рождается хаотический слой, изображённый на рис. 8. Рисунок 9 иллюстрирует эволюцию сечения Пуанкаре с возрастанием ε . Вертикальный резонанс с $p_{\text{max}} = 0,04$ приводит к уширению нелинейного резонанса 15:2. В результате этот резонанс оказывается заметным на сечении Пуанкаре даже при чрезвычайно малых ε . При $\varepsilon = 0,0001$ цепочка островов, соответствующая резонансу 15:2, выглядит как обычная резонансная цепочка в невырожденных гамильтоновых системах (рис. 9а). При $\varepsilon = 0,0002$ этого уже сказать нельзя — острова "вытягиваются" вдоль радиальной координаты (рис. 9б). Это "вытягивание" приводит в конечном счёте к бифуркациям особых точек. Результат бифуркаций представлен на рис. 9в, где мы видим появление двух цепочек-сателлитов с таким же числом островов. Таким образом, нелинейный резонанс 15:2 становится трёхкратно вырожденным. При дальнейшем возрастании ε на месте сепаратрис вырожденных резонансов образуется хаотический слой. Данный пример свидетельствует о том, что хаос в условиях вертикального резонанса может развиваться по сценарию, характерному для вырожденных гамильтоновых систем [75–79, 106].

5.2.3. Влияние вертикального резонанса на свойства волнового поля. Применимость лучевого метода требует малости длины акустической волны по сравнению с масштабами неоднородности океана. Океан является стратифицированной средой, и масштаб изменчивости вдоль горизонтальных координат L_r на два-три порядка больше, чем масштаб изменчивости по глубине, т.е.

$$L_z \ll L_r. \quad (96)$$

С другой стороны, волновой вектор акустической волны также имеет две компоненты, вертикальную и горизонтальную. ПЗК способен удерживать внутри себя только те волны, которые распространяются под малыми углами к горизонтальной плоскости, поэтому вертикальное волновое число, как правило, гораздо меньше горизонтального. Отсюда следует, что вертикальная длина акустической волны может быть одного порядка с L_z . Тогда лучевое приближение будет некорректно описывать влияние вертикальной неоднородности на распространение волны [107].

В работе [108] показано, что мелкомасштабные структуры профиля скорости звука не оказывают значительного влияния на рефракцию звуковых волн и что точность лучевого моделирования может быть существенно улучшена за счёт сглаживания возмущённого профиля скорости звука. Однако при сглаживании удаляются мелкомасштабные вариации возмущения по глубине, которые играют ключевую роль в стохастизации приосевых лучей. Это наводит на мысль о том, что волновые эффекты должны подавлять влияние вертикального резонанса на приосевое распространение звука.

Для того чтобы проверить последнее утверждение, обратимся к свойствам мод Флоке для модели ПЗК, соответствующей рис. 8. Рисунок 10 демонстрирует распределения Хузими для двух типичных мод Флоке

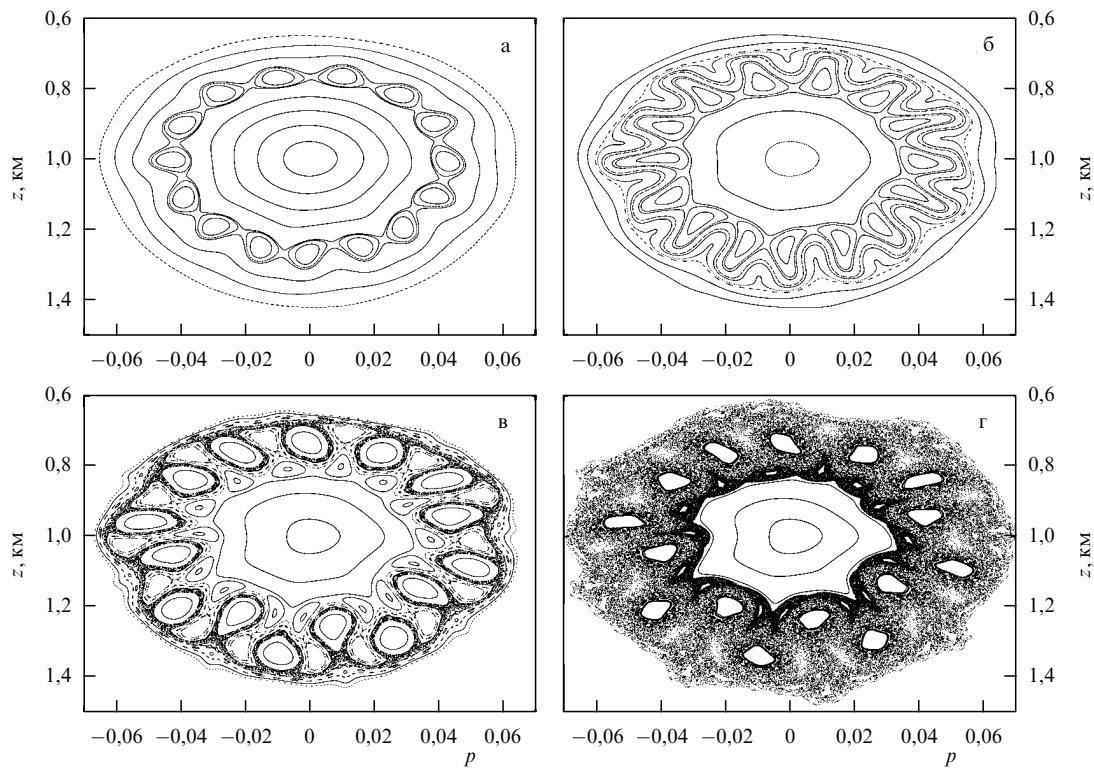


Рис. 9. Возникновение хаотического слоя в окрестности вертикального резонанса при $\lambda_z = 0,2$ км и $\lambda_r = 5$ км: (а) $\varepsilon = 0,0001$, (б) $\varepsilon = 0,0002$, (в) $\varepsilon = 0,00035$, (г) $\varepsilon = 0,0005$.

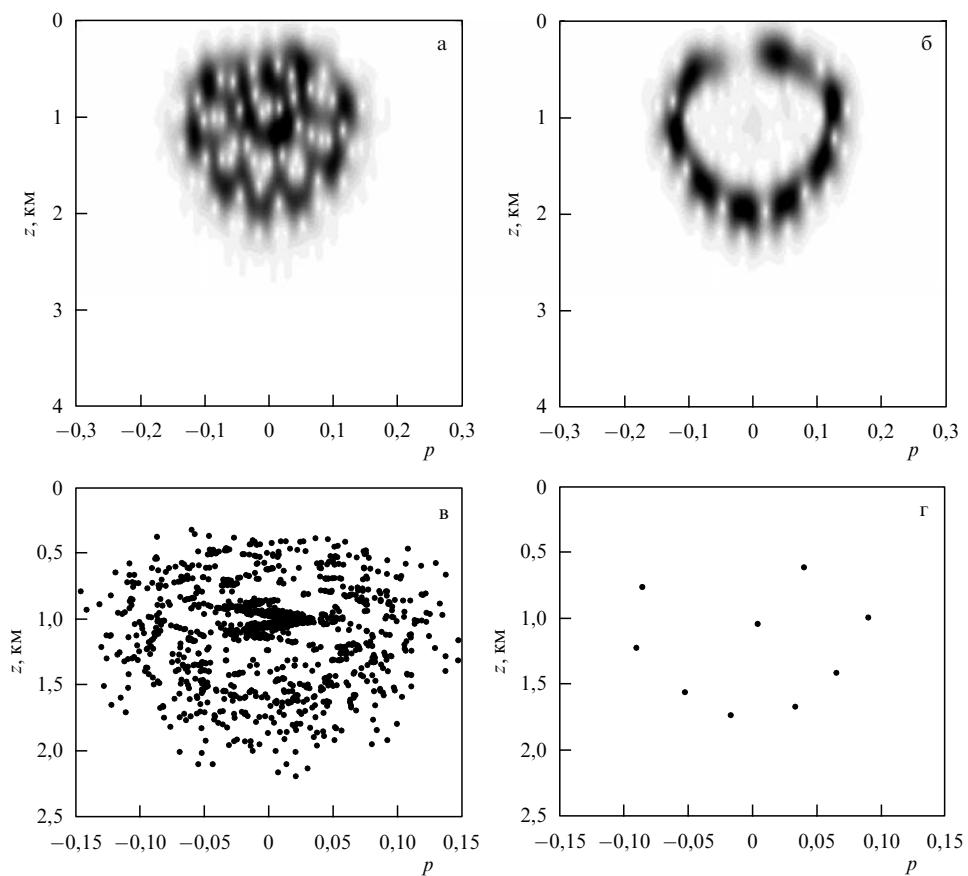


Рис. 10. (а) Пример распределения Хузими для моды Флоке, покрывающей хаотический слой. (б) Распределение Хузими для моды Флоке, локализованной в окрестности периодических орбит резонанса 8:1. (в) Расположение в фазовом пространстве орбит периода $8\lambda_r$, (г) наиболее устойчивые из этих орбит [112].

при частоте звука 200 Гц. Часть мод Флоке "растянута" в фазовом пространстве, подобно моде, изображённой на рис. 10а, покрывая почти полностью хаотическое море. Насколько такие моды Флоке отвечают неустойчивости распространения звука под малыми углами к оси ПЗК? В работе [109] с помощью критерия Лебёфа – Вороса [110] показано, что эти моды Флоке можно классифицировать только как "слабохаотические". В работе [111] с помощью функции Хузими (69) была исследована динамика волнового пакета в фазовом пространстве. Обнаружено, что при частоте 200 Гц (и меньших частотах) фазовый объём, занимаемый волновым пакетом, осциллирует, вместо того чтобы монотонно возрастать с увеличением горизонтальной координаты r , как предполагается теорией предполагаемого лучевого хаоса.

Мы хотим сфокусировать внимание на следующем явлении. Многие из мод Флоке, принадлежащих хаотическому морю, выглядят как цепочки из восьми упорядоченных всплесков интенсивности (рис. 10б). Каждый такой всплеск расположен в окрестности одной из периодических орбит резонанса 8:1. Все эти орбиты являются неустойчивыми, что даёт право связать образование всплесков со шрамами, т.е. волновыми функциями, локализованными в окрестности неустойчивых периодических орбит [94].

С другой стороны, как показано в разделе 5.2.2, в условия вертикального резонанса число периодических орбит может резко возрастать в результате каскада бифуркаций. Действительно, прямое вычисление периодических лучевых орбит длиной $8\lambda_r$, которые могут соответствовать цепочке из восьми всплесков интенсивности, даёт огромное количество решений, причём начальные точки орбит беспорядочно расположены в фазовом пространстве (рис. 10в). Если учесть, что вклад каждой орбиты обратно пропорционален скорости её ляпуновской расходимости, то ситуация несколько проясняется: восемь из девяти наиболее устойчивых орбит расположены в окрестности эллиптических точек резонанса 8:1 (рис. 10г).

Отметим, что в окрестности каждой из этих восьми орбит присутствует кластер из несколько менее устойчивых орбит. При недостаточно высокой частоте звука вклады отдельных орбит, принадлежащих одному и тому же кластеру, являются неразличимыми. В результате кластеры отражаются в модах Флоке как *супершрамы* — пятна высокой интенсивности, сопутствующие бифуркациям орбит [113]. С понижением частоты звука следы бифуркаций периодических орбит в структуре мод Флоке становятся всё слабее и слабее, до тех пор пока не исчезают совсем [103, 109, 111].

5.3. Лучевой и волновой хаос в случайно-неоднородных волноводах: квазидетерминированный подход

Методы и подходы, применяемые для исследования детерминированных периодических волноводов, существенно отличаются от методов теории волн в случайных средах. Одним из важнейших свойств периодических волноводов, во многом определяющих как динамику лучей, так и волновую динамику, является чёткое разделение фазового пространства лучевых уравнений на регулярные и хаотические области. Движение лучей регулярно и предсказуемо внутри первых и проявляет стохастические свойства внутри последних. Это, несомненно,

накладывает отпечаток на свойства акустических полей при выполнении условий соответствия между лучевым и волновым описаниями.

Понятия неустойчивости лучей по Ляпунову и горизонта предсказуемости также применимы и к волноводам со случайнym возмущением. При этом предполагается эргодичность динамики лучей в фазовом пространстве, что является вполне естественным, поскольку наличие широкого спектра гармоник возмущения не оставляет шансов на существование непроницаемых зон устойчивости. Вместе с тем исследование статистики показателей Ляпунова на конечном расстоянии от источника показывает, что значительная часть лучей сохраняет устойчивость на расстояниях, существенно превышающих ляпуновский горизонт [18]

$$r_{\text{Ляп}} = \frac{1}{v}, \quad (97)$$

где v — глобальный показатель Ляпунова (т.е. показатель Ляпунова при $r \rightarrow \infty$).

Такие лучи формируют компактные пучки, которые могут выделяться по интенсивности вследствие пониженной геометрической расходимости. В работе [31] этим пучкам дано название "когерентные кластеры". Следует отличать когерентные кластеры от областей случайной фокусировки поля, связанных с образованием каустик [114, 115]. Главное отличие заключается в том, что начальные условия для лучей, принадлежащих когерентному кластеру, образуют компактное множество в фазовом пространстве, расположение которого будет изменяться от одной реализации случайной неоднородности к другой. Подобного рода множества могут быть выделены различными способами, например, путём расчёта карты показателей устойчивости в фазовом пространстве или с помощью вычисления собственных функций оператора Фробениуса – Перрона [116]. В случае возмущения, состоящего из малого числа гармоник, можно воспользоваться методом, предложенным в работе [117].

Если мы зададимся целью не только найти когерентные кластеры, но и дать некое физическое толкование их образования, то на помощь может прийти метод одноступенчатого отображения Пуанкаре [118–120], основанный на сведении лучевой задачи на ограниченном участке случайно-неоднородного волновода к эквивалентной квазидетерминированной задаче с периодической неоднородностью. Ниже мы дадим краткое описание этого метода.

Рассмотрим лучевой гамильтониан следующего вида:

$$H = \frac{p^2}{2} + U(z) + \varepsilon Y(z) \xi(r, z), \quad (98)$$

где $\varepsilon \ll 1$, $Y(z)$ — медленно изменяющаяся функция, $\xi(r, z)$ — случайная функция, удовлетворяющая условиям

$$\langle \xi(r, z) \rangle = 0, \quad \langle \xi^2(r, z) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (99)$$

Предположим, что $\xi(r, z)$ — дифференцируемая функция с известными спектральными свойствами, и рассмотрим её некоторую реализацию. Это даёт нам возможность трактовать $\xi(r, z)$ как некоторую неизвестную детерминированную функцию. Для того чтобы идентифициро-

вать области начальных условий, соответствующие когерентным кластерам, воспользуемся условием инвариантности на конечном интервале: если некоторое множество начальных условий в фазовом пространстве трансформируется само в себя без перемешивания при $r = \tau$, то оно соответствует траекториям, устойчивым по Ляпунову на интервале $r \in [0, \tau]$. Такие множества могут быть найдены с помощью отображения

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p(r = \tau | p_i, z_i, r = 0), \\ z_{i+1} &= z(r = \tau | p_i, z_i, r = 0), \end{aligned} \quad (100)$$

где $p(r = \tau | p_i, z_i, r = 0)$ и $z(r = \tau | p_i, z_i, r = 0)$ — решения лучевых уравнений при $r = \tau$, соответствующие начальным условиям $p(r = 0) = p_i$, $z(r = 0) = z_i$. Подчеркнём, что все итерации отображения производятся с использованием одного и того же "куска" функции $\xi(r, z)$. Отсюда следует, что отображение (100) эквивалентно обычному отображению Пуанкаре для гамильтониана (98), в котором функция $\xi(r, z)$ заменена периодической функцией $\tilde{\xi}$

$$\tilde{\xi}(r' + n\tau, z) = \xi(r', z), \quad 0 \leq r' \leq \tau, \quad (101)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Главным отличием отображения (100) от обычного сечения Пуанкаре является то, что отображение (100) описывает динамику только внутри ограниченного интервала $r \in [0, \tau]$, в то время как в обычном отображении Пуанкаре область значений r не ограничена. В связи с вышесказанным отображение (100) получило название одношагового отображения Пуанкаре.

Основное свойство одношагового отображения Пуанкаре вытекает из аналогии с обычным отображением Пуанкаре: *каждая точка непрерывной замкнутой траектории одношагового отображения Пуанкаре (100) соответствует начальному условию для траектории луча, который сохраняет устойчивость по Ляпунову на интервале $r \in [0, \tau]$.* Заметим, что обратное утверждение в общем случае неверно, поэтому приведённое условие устойчивости не является необходимым.

Главным достоинством одношагового отображения Пуанкаре является то, что оно допускает качественный анализ с помощью теории периодических волноводов. Для иллюстрации рассмотрим наиболее простой случай, в котором ξ не зависит от глубины z . Тогда, в соответствии с выводами раздела 5.1, структура фазового портрета отображения (100) определяется нелинейными резонансами

$$l\omega(I) = mk_r, \quad (102)$$

где $k_r = 2\pi/\tau$. При $\tau \ll 2\pi/\omega$ влиянием резонансов можно пренебречь, поскольку соответствующие им фурье-амплитуды являются малыми, и система лучевых уравнений может быть сведена к интегрируемой с помощью метода усреднения. Таким образом, хаотизация лучей происходит постепенно. Интерес представляет случай больших значений, $\tau \gg 2\pi/\omega$. Поскольку функция $\tilde{\xi}(r)$ содержит бесконечное число гармоник, каждому резонансному значению действия, удовлетворяющему (102), соответствует бесконечное число резонансов $n \times l : n \times m$, где n — целое число. Принимая во внимание, что амплитуды резонансов достаточно быстро убывают с возрастанием их порядка, мы можем пренебречь всеми резонансами с $|n| > 1$. Тогда легко

получить выражение для ширины резонанса по пространственной частоте колебаний луча в волноводе

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\varepsilon|\omega' Y_l \xi_m|}, \quad (103)$$

где Y_l и ξ_m — резонансные амплитуды рядов Фурье для функций $Y(\vartheta)$ и $\tilde{\xi}(r)$. Следует заметить, что с возрастанием τ флуктуации величины ξ_m ослабевают и $\xi_m \rightarrow \text{const} \times S(v = k_r)$, где $S(v)$ — спектральная плотность функции $\xi(r)$. Таким образом, при больших τ ширины резонансов достаточно слабо зависят от реализации случайного возмущения. Фурье-амплитуды Y_l также достаточно быстро убывают с возрастанием l , поэтому мы можем ограничиться рассмотрением только резонансов с $l = 1$. Тогда расстояние между ближайшими резонансами по частоте описывается простой формулой:

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (104)$$

Используя критерий Чирикова

$$K = \frac{\Delta\omega(\tau)}{\delta\omega(\tau)} \simeq 1, \quad (105)$$

можно оценить минимальное расстояние от источника звука, вплоть до которого динамика лучей является преимущественно устойчивой по Ляпунову.

Перейдём от лучевого описания к волновому. Теперь в качестве аналога одношагового отображения Пуанкаре выступает оператор сдвига [121]

$$\hat{G}u(r = 0, z) = u(r = \tau, z), \quad (106)$$

описывающий эволюцию волнового поля между $r = 0$ и $r = \tau$. Как одношаговое отображение является аналогом обычного отображения Пуанкаре, так и оператор \hat{G} является аналогом оператора Флоке (55). Собственные функции и собственные числа оператора \hat{G} определяются соотношением

$$\hat{G}u_m(r, z) = \exp(-ik\epsilon_m) u_m(r, z). \quad (107)$$

Как и оператор Флоке, оператор \hat{G} может быть представлен в базисе мод невозмущённого волновода с помощью выражения (59). О связи между устойчивостью (неустойчивостью) лучей и волновой динамикой можно судить как по структуре отдельных волновых функций, как мы это делали в разделе 5.1, так и по статистическим свойствам спектра. В теории квантового хаоса одной из наиболее презентативных характеристик, указывающих на степень проявления классического хаоса в квантовой динамике, является распределение межуровневых расстояний, определяемых как

$$s = \epsilon_{m+1} - \epsilon_m. \quad (108)$$

Применительно к оператору \hat{G} целесообразно использовать распределение межуровневых расстояний, усреднённое по ансамблю реализаций случайной неоднородности:

$$\rho(s, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_n(s, \tau), \quad (109)$$

где $P_n(s, \tau)$ — распределение межуровневых расстояний, вычисленное с n -й реализацией неоднородности. Регу-

лярная динамика лучей предполагает, что моды разделяются на отдельные группы, которые слабо взаимодействуют между собой. В результате, в соответствии с теорией случайных матриц, матрица оператора \hat{G} распадается на отдельные блоки, каждый из которых порождает свою серию собственных значений ϵ_m . При этом серии собственных значений, порождаемые различными блоками матрицы, не коррелируют друг с другом, вследствие чего статистика межуровневых расстояний описывается распределением Пуассона [88, 122]

$$\rho(s) \sim \exp(-s). \quad (110)$$

Глобальный эргодический хаос предполагает иную картину — все моды сильно взаимодействуют друг с другом, а волновые функции перекрываются в фазовом пространстве. В этом случае происходит "отталкивание" ближайших уровней и межуровневые расстояния распределены по закону Вигнера – Дайсона [88, 122]

$$\rho(s) = As^\zeta \exp(-Bs^2), \quad (111)$$

где A и B — константы, подбираемые исходя из условий нормировки

$$\int_0^\infty \rho(s) ds = 1, \quad \int_0^\infty s\rho(s) ds = 1, \quad (112)$$

а ζ принимает значения 1, 2 или 4 в зависимости от симметрий оператора \hat{G} . Собственные значения оператора \hat{G} унимодулярны (т.е. лежат на окружности единичного радиуса в комплексной плоскости), а сам оператор \hat{G} в общем случае не обладает симметрией по отношению к инверсии горизонтальной координаты r . Эти два обстоятельства указывают, что оператор \hat{G} принадлежит к циркулярному унитарному ансамблю, для которого $\zeta = 2$ [121]. Промежуточный режим смешанного фазового пространства, в котором сосуществуют области регулярной и хаотической динамики лучей, соответствует некоторой комбинации статистик Пуассона и Вигнера – Дайсона. Найти удовлетворительное выражение для $P(s)$ в этом случае достаточно трудно [123, 124]. На практике чаще пользуются аппроксимацией статистики межуровневых расстояний на основе эвристического распределения Броди [88, 125]

$$\rho(s) = (\beta + 1)A_\beta s^\beta \exp(-A_\beta s^{\beta+1}), \quad (113)$$

где

$$A_\beta = \left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right) \right]^{\beta+1}, \quad (114)$$

$\Gamma(\dots)$ — гамма-функция Эйлера. При $\beta = 0$ формула (113) превращается в распределение Пуассона, при $\beta = 1$ — в распределение Вигнера (т.е. распределение Вигнера – Дайсона с $\zeta = 1$). По мере возрастания шага τ общая площадь областей устойчивости отображения (100) уменьшается, а площадь хаотических областей увеличивается. Различие между распределениями Вигнера – Дайсона при $\zeta = 1$ и $\zeta = 2$ достаточно незначительно. Принимая это во внимание, следует ожидать, что значение параметра Броди β , соответствующее наилучшей аппроксимации, должно изменяться с возрастанием τ от 0 до 1, отражая наступление хаоса.

Для того чтобы проверить это предположение, рассмотрим ПЗК с биэкспоненциальным профилем скоро-

сти звука (80) и возмущением

$$\delta c(r, z) = \varepsilon c_0 \frac{z}{z_{\text{th}}} \exp\left(-\frac{2z}{z_{\text{th}}}\right) \sin \gamma(r, z) \mu(r), \\ \gamma(r, z) = \pi \left(v \exp\left(-\frac{z}{z_{\text{th}}}\right) + \mu(r) \right). \quad (115)$$

Здесь $\varepsilon = 0,0014$, $z_{\text{th}} = 1$ км. Функция $\mu(r)$ представляет собой сумму 10000 гармоник со случайными фазами и волновыми числами k_r , распределёнными в интервале от $2\pi/100$ км $^{-1}$ до 2π км $^{-1}$ со спектральной плотностью, убывающей как k_r^{-2} . На функцию $\mu(r)$ наложено условие нормировки $\langle \mu^2 \rangle = 1$. Рисунок 11 демонстрирует примеры лучевых фазовых портретов отображения (100). При $v = 5$ осцилляции возмущения по глубине являются достаточно медленными и лучевой хаос развивается с возрастанием τ согласно сценарию, соответствующему перекрытию резонансов. Площадь области регулярного движения медленно уменьшается с возрастанием τ , так что небольшой остров устойчивости сохраняется даже на расстояниях порядка нескольких сотен километров от источника. В случае $v = 20$ вертикальные осцилляции возмущения являются сильными. Соответственно, хаос развивается по сценарию, изложенному в разделе 5.2. При этом все области устойчивости исчезают достаточно быстро — их нет уже при $\tau = 30$ км.

Зависимость параметра Броди от τ при частоте сигнала 200 Гц, изображённая на рис. 12, в целом соответствует нашим ожиданиям: β в среднем возрастает с увеличением τ , причём при $v = 20$ это возрастание происходит быстрее, чем при $v = 5$. Однако следует отметить, что лучевое отображение (100) всё же предполагает гораздо более высокий темп возрастания β : глобальный лучевой хаос наступает уже при значениях τ порядка 20–30 км, в то время как β приближается к единице лишь при $\tau \simeq 500$ км. Столь сильное замедление возрастания β можно связать с тем, что волновые поправки к приближению геометрической оптики обычно существенно ослабляют проявления лучевого хаоса в волновой картине, подобно тому как мы это видели в разделе 5.2.3.

Казалось бы, при более высокой частоте 600 Гц мы вправе ожидать более резкого перехода от пуассонской статистики к вигнеровской ввиду ослабления волновых свойств. Однако здесь нас поджидает сюрприз. Резкое возрастание параметра β с увеличением τ прекращается при $\tau \simeq 120$ км и начинается медленное убывание β , связанное с появлением всё большего и большего количества вырожденных собственных состояний оператора \hat{G} . Природа этого явления становится понятной, если принять во внимание, что возникновение лучевого хаоса при наличии быстрых вертикальных осцилляций возмущения сопряжено с бифуркациями периодических орбит (см. рис. 9). Вблизи точек бифуркации, как показано в [126, 127], происходят сильные флуктуации спектральной плотности, причём амплитуда этих флуктуаций возрастает с увеличением частоты сигнала, т.е. по мере приближения к лучевому пределу.

Таким образом, статистика спектра оператора \hat{G} при наличии сильных вертикальных осцилляций возмущения противоречит представлениям теории случайных матриц. При частоте 200 Гц этот эффект является малозначительным и не оказывает большого влияния на зависимость параметра Броди β от τ , поскольку с увеличением длины волны влияние бифуркаций ослабевает.

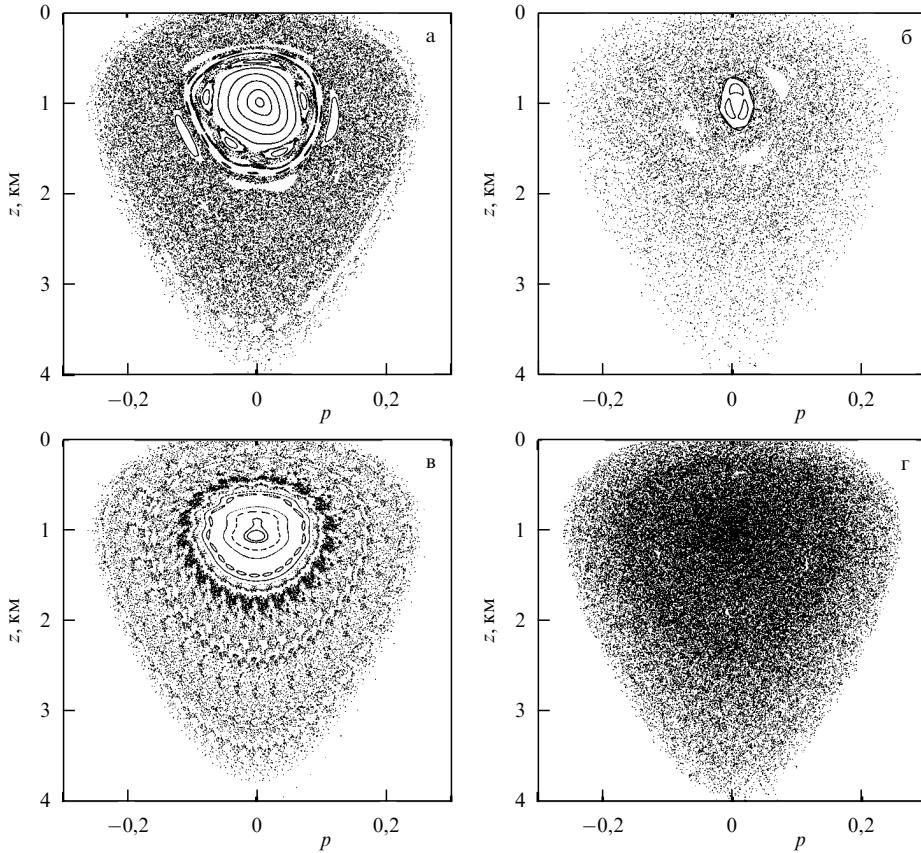


Рис. 11. Примеры фазовых портретов, построенных с помощью отображения (100) для подводного звукового канала с биэкспоненциальным профилем скорости звука и возмущением (115). Значения параметров: (а) $v = 5$, $\tau = 100$ км, (б) $v = 5$, $\tau = 500$ км, (в) $v = 20$, $\tau = 10$ км, (г) $v = 20$, $\tau = 30$ км.

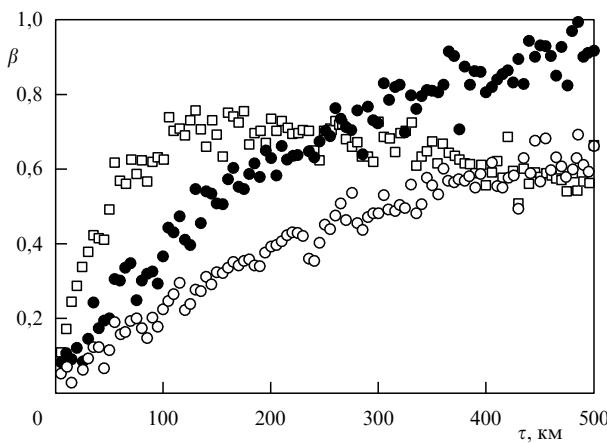


Рис. 12. Параметр Броди β как функция τ . Светлые кружки соответствуют $f = 200$ Гц и $v = 5$, тёмные кружки — $f = 200$ Гц и $v = 20$, квадраты — $f = 600$ Гц и $v = 20$.

6. Волноводы со случайными неоднородностями скорости звука

6.1. Статистическое описание лучевого хаоса

Возможность введения статистического описания лучевой структуры поля основана на фундаментальном свойстве хаотического поведения траекторий, которое называется перемешиванием [26, 27].

Рассмотрим пучок траекторий, выходящих из малой области \mathcal{R} фазовой плоскости. На расстоянии $r \gg v^{-1}$

точки, изображающие данные траектории, будут рассеяны внутри области \mathcal{R}' гораздо большего размера. Перемешивание, в частности, означает, что доля траекторий, попадающих внутрь некоторой подобласти $\Delta\mathcal{R}'$, которую мы обозначим $\Delta\mathcal{R}'$, слабо зависит от формы и размера области \mathcal{R} . Относительное число траекторий, приходящих в $\Delta\mathcal{R}'$ (среди всех, вышедших из \mathcal{R}), можно трактовать как вероятность попадания траектории в данную подобласть. Такое определение вероятности становится более строгим при $r \rightarrow \infty$ с одновременным устремлением размера \mathcal{R} к нулю. Однако в наших задачах конечность r принципиальна. Поэтому мы не можем рассматривать слишком малые области начальных условий \mathcal{R} и говорить о вероятности попадания луча в очень малые области $\Delta\mathcal{R}'$.

Для расчёта статистических характеристик траектории с начальными условиями $p(0) = p_0$ и $z(0) = z_0$ в качестве статистического ансамбля будем рассматривать совокупность траекторий, выходящих из малой области \mathcal{R} , содержащей точку (p_0, z_0) . Плотность вероятности попадания луча в точку (p, z) на дистанции r определим соотношением

$$P_{pz|p_0z_0}(p, z, r | p_0, z_0) = \frac{1}{S_{\mathcal{R}}} \times \\ \times \iint_{\mathcal{R}} dp'_0 dz'_0 \delta(z - z(r, p'_0, z'_0, r)) \delta(p - p(r, p'_0, z'_0, r)), \quad (116)$$

где $S_{\mathcal{R}}$ — площадь \mathcal{R} . Вероятность попадания луча в область $\Delta\mathcal{R}'$ даётся интегралом

$$P_{\Delta\mathcal{R}'} = \int_{\Delta\mathcal{R}'} dp dz P_{pz|p_0z_0}(p, z, r|p_0, z_0). \quad (117)$$

Как уже говорилось, из-за конечности r данное определение имеет практический смысл лишь для достаточно больших $\Delta\mathcal{R}'$, кроме того, область начальных условий \mathcal{R} нельзя брать очень малой. Поэтому введённую плотность вероятности можно использовать при расчёте средних лишь от достаточно плавных функций p и z .

Аналогичным образом определим плотность вероятности $P_{I\theta|I_0\theta_0}(I, \theta, r|I_0, \theta_0)$ в переменных действие–угол: $P_{I\theta|I_0\theta_0}(I, \theta, r|I_0, \theta_0)$ даёт вероятность попадания луча, вышедшего из точки (I_0, θ_0) , в окрестность точки наблюдения (I, θ) . Рассматривая каноническое преобразование (22) как нелинейную замену переменных, связывающую две пары случайных величин, и учитывая, что по теореме Лиувилля (25) его якобиан равен единице, находим связь двух введённых плотностей вероятности:

$$\begin{aligned} P_{I\theta|I_0\theta_0}(I, \theta, r|I_0, \theta_0) &= \\ &= P_{pz|p_0z_0}(p(I, \theta), z(I, \theta), r|p(I_0, \theta_0), z(I_0, \theta_0)). \end{aligned} \quad (118)$$

Использование переменных действие–угол часто позволяет кардинально упростить статистическое описание хаоса. Дело в том, что угловая переменная θ обычно быстро "забывает" своё начальное значение и уже на относительно коротких дистанциях её можно считать равномерно распределённой в интервале $(0, 2\pi)$. При этом

$$P_{I\theta|I_0\theta_0}(I, \theta, r|I_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} P_{I|I_0}(I, r|I_0). \quad (119)$$

Функция $P_{I|I_0}(I, r|I_0)$ описывает медленную диффузию лучей по переменной действия. Аналогичное приближение широко используется при анализе хаотической динамики в системах с периодическим возмущением [26, 27].

В случае, когда возмущение представляет собой реализацию случайной среды, статистически однородной вдоль оси r , плотность вероятности, определённая соотношением (116), может слабо зависеть от конкретной реализации случайного волновода [37, 128–130]. Это предположение, которое подтверждается результатами численного моделирования, основано на том, что в условиях хаоса изначально близкие траектории относительно быстро расходятся на расстояния, превышающие масштабы корреляции неоднородностей. На длинных трассах лучи пересекают практически независимые неоднородности и ведут себя так, как если бы они распространялись в разных реализациях случайной среды. Поэтому естественно ожидать, что усреднение по начальным условиям может дать результаты, близкие к тем, которые были бы получены при усреднении по статистическому ансамблю реализаций.

6.2. Распределения параметров хаотических лучей

6.2.1. Модель случайно-неоднородного ПЗК. В численном моделировании, результаты которого приведены далее, использована модель волновода с невозмущённым профилем скорости звука $\bar{c}(z)$ (заимствованным из работы [131]), показанным на рис. 13а. Этот профиль выражается

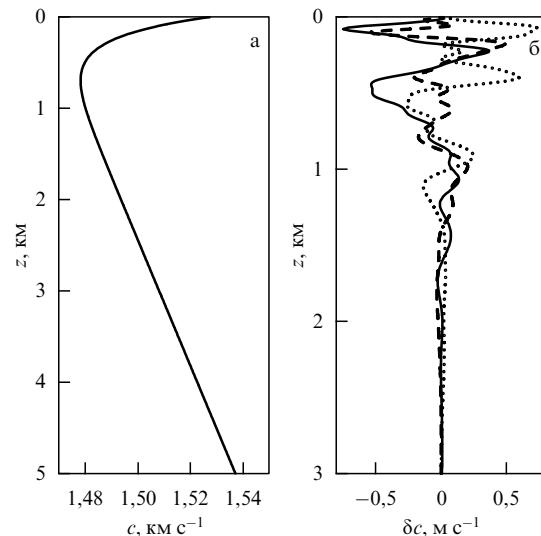


Рис. 13. Невозмущённый профиль скорости звука (а) и вертикальные сечения возмущения δc на трёх разных дистанциях (б).

формулой (14) с параметрами $c_0 = 1,48 \text{ км с}^{-1}$, $\varepsilon = 0,00238$, $z_{\text{th}} = 0,485 \text{ км}$ и $z_a = 0,7 \text{ км}$.

Предполагается, что слабое возмущение $\delta c(r, z)$ вызвано случайными внутренними волнами со статистикой, заданной широко известным эмпирическим спектром Гаррета–Манка [1]. Флуктуации скорости звука $\delta c(r, z)$ статистически однородны и изотропны в горизонтальной плоскости. Их характерные масштабы в этой плоскости варьируются от нескольких километров до нескольких десятков километров. Интенсивность флуктуаций уменьшается с увеличением глубины, а их характерные масштабы в вертикальной плоскости составляют от нескольких десятков до нескольких сотен метров. Для генерации отдельных реализаций случайного поля $\delta c(r, z)$ мы использовали метод, предложенный в работе [50]. Реализации $\delta c(r, z)$ генерировались по формуле (19) из работы [50]. Спектр зависимости возмущения от горизонтальной координаты r сосредоточен в интервале пространственных частот от $2\pi/100 \text{ км}^{-1}$ до $2\pi/4 \text{ км}^{-1}$, а среднеквадратичная амплитуда δc вблизи поверхности равняется $0,5 \text{ м с}^{-1}$ и спадает с увеличением глубины по закону $\exp(-z/L)$, где $L = 0,66 \text{ км}$. На рисунке 13б изображены вертикальные сечения поля $\delta c(r, z)$ на трёх разных дистанциях.

6.2.2. Приближение винеровского процесса. Метод приближённого расчёта функции $P_{I|I_0}(I, r|I_0)$, изложенный в работах [35–37, 43], основывается на том факте, что вследствие слабости возмущения переменная I мало изменяется на характерном продольном масштабе неоднородностей среды r_1 (от нескольких километров до нескольких десятков километров). Поэтому правую часть уравнения Гамильтона для действия (26) формально можно считать дельта-коррелированной случайной функцией. Тогда зависимость переменной действия луча I от дистанции r моделируется марковским случайным процессом, плотность вероятности которого подчиняется уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial P_{I|I_0}}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} B(I) \frac{\partial P_{I|I_0}}{\partial I}. \quad (120)$$

Коэффициент диффузии $B(I)$ легко находится на основе численного расчёта лучевых траекторий в конкретных реализациях случайной среды с помощью стандартной лучевой программы [35–37, 43]. В нашей модели волновода величина B слабо зависит от I и она может быть аппроксимирована константой $B = 1,4 \times 10^{-7}$ км. Тот же порядок величины имеют коэффициенты диффузии в других моделях глубоководного ПЗК [37, 61, 128, 129, 132].

При постоянном B зависимость переменной действия луча от расстояния можно представить в виде $I(r) = I_0 + x(r)$, где $I_0 = I(0)$, $x(r)$ — так называемый винеровский случайный процесс [133, 134], удовлетворяющий стохастическому уравнению Ланжевена

$$\frac{dx}{dr} = \xi(r), \quad (121)$$

где $\xi(r)$ — белый шум с нулевым средним и функцией корреляции $\langle \xi(r) \xi(r') \rangle = B\delta(r - r')$.

Обратим внимание на следующий важный момент. Случайная функция $x(r)$, заданная уравнением (121), может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако переменная действия I по определению неотрицательна. Это обстоятельство легко учитывается введением отражающей границы для траекторий $x(r)$ при $x = -I_0$ [37, 43, 129]. Возможность введения границы является дополнительным предположением, справедливость которого подтверждается результатами численного моделирования.

При наличии границы решение уравнения Фоккера–Планка (120) с начальным условием $P_{I|I_0}(I, r|I_0) = \delta(I - I_0)$, описывающее диффузное расплывание (по I) пучка лучей с одинаковым начальным действием I_0 , имеет вид

$$P_{I|I_0}(I, r|I_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Br}} \times \\ \times \left[\exp\left(-\frac{(I - I_0)^2}{2Br}\right) + \exp\left(-\frac{(I + I_0)^2}{2Br}\right) \right]. \quad (122)$$

При выполнении условия

$$Br \ll I_0 \quad (123)$$

переменная действия луча на пути до дистанции наблюдения r не успевает приблизиться к значению $I = 0$ и введения отражающей границы не требуется. Это условие выполняется для лучей с достаточно большими начальными углами скольжения χ_0 (I_0 монотонно возрастает с увеличением $|\chi_0|$). Поэтому лучи, удовлетворяющие условию (123), далее будем называть крутыми. При их описании вторым слагаемым в правой части (122) можно пренебречь. Среднеквадратичный разброс переменной действия крутого луча возрастает с увеличением дистанции по диффузионному закону

$$\sigma_I \equiv \langle (I - I_0)^2 \rangle^{1/2} = Br. \quad (124)$$

Численное моделирование показывает, что для оценок условие (123) можно ослабить, заменив в нём знак \ll знаком $<$. В нашей модели волновода на дистанции $r = 3000$ км такое условие выполняется для лучей с углами скольжения на оси волновода $\chi > 5^\circ$.

Уравнение Гамильтона (27) для переменной θ также может быть приближённо заменено очень простым

стохастическим уравнением Ланжевена. Пренебрежём вторым слагаемым в правой части (27) и заменим $\omega(I)$ функцией $\omega(I_0) + \omega'(I_0)x$ [35–37]. Представляя угловую переменную в виде $\theta(r) = \theta_0 + \omega(I_0)r + y(r)$, где $\theta_0 = \theta(0)$, а $\theta_0 + \omega(I_0)r$ — угловая переменная луча на дистанции r в невозмущённом волноводе, получаем стохастическое уравнение

$$\frac{dy}{dr} = \omega'(I_0)x. \quad (125)$$

Отсюда следует, что для крутых лучей

$$\sigma_\theta \equiv \langle (\theta - \theta_0)^2 \rangle^{1/2} = |\omega'(I_0)| \left(\frac{B}{3} \right)^{1/2} r^{3/2}. \quad (126)$$

На коротких расстояниях, где переменные действия лучей ещё мало отличаются от своих начальных значений, возмущение лучевой траектории определяется в основном возмущением угловой переменной, т.е. функцией $y(r)$. Величина последней, согласно (125), пропорциональна $\omega'(I_0)$. Это означает, что чувствительность лучевой траектории к влиянию флюктуаций скорости звука в значительной мере определяется производной $\omega'(I_0)$, которая в свою очередь определяется только невозмущённым профилем скорости звука $\bar{c}(z)$. Это вполне согласуется с результатами работ [61, 73, 74, 87, 135], в которых доказывается, что чувствительность лучевых траекторий к возмущению $\delta c(r, z)$ определяется параметром стабильности α , заданным соотношением (50). Результаты численного моделирования, представленные в указанных работах, подтверждают, что нестабильность траекторий действительно возрастает с увеличением α .

Замену уравнений Гамильтона (26) и (27) стохастическими уравнениями (121) и (125) мы называем *приближением винеровского процесса*. Численное моделирование показывает, что данное приближение неплохо описывает статистические характеристики лучей на тысячекилометровых трассах. Продемонстрируем это на конкретном примере. Нашей целью станет проверка применимости соотношений (119) и (122).

Формулы (119) и (122) описывают распределение переменных действия лучей с начальными условиями внутри малой области \mathcal{R} фазовой плоскости. На рисунке 14 приведены результаты численного расчёта траекторий, выходящих из областей \mathcal{R} , показанных на рис. 14а, в, д небольшими чёрными прямоугольниками. На рисунке 14а, б представлены лучи, выходящие с глубин z , близких к оси волновода z_a , с начальными углами скольжения около 3° . Траектории 10000 лучей, начальные параметры которых (p_0, z_0) равномерно заполняют чёрный прямоугольник на рис. 14а, с помощью лучевой программы были рассчитаны до дистанции $r = 3000$ км. Точки на рис. 14, разбросанные случайнным образом, показывают распределение этих лучей на фазовой плоскости (p, z) для конкретной реализации случайного возмущения $\delta c(r, z)$. Распределение переменных действия этих лучей представлено одной из ступенчатых линий на рис. 14б, которая изображает нормированную гистограмму. Вторая ступенчатая линия — гистограмма аналогичного распределения, рассчитанного для другой реализации возмущения $\delta c(r, z)$. Нормированные гистограммы сопоставляются с плотностью вероятности переменной действия I , предсказанной фор-

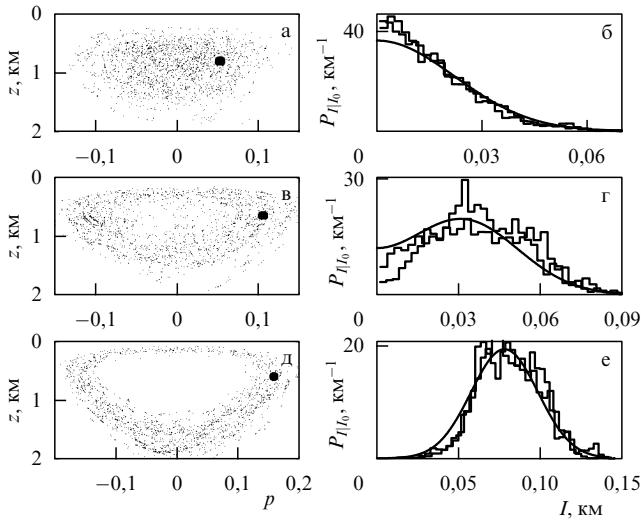


Рис. 14. Распределение лучей, вышедших из малой области \mathcal{R} в фазовой плоскости. Три выбранных области \mathcal{R} на рисунках а, в и д изображены малыми чёрными прямоугольниками. Разбросанные случайным образом точки показывают координаты лучей (вышедших из соответствующих прямоугольников) на дистанции 3000 км. На рисунках б, г и е представлены распределения переменных действия лучей I на данной дистанции. Ступенчатые линии — нормированные гистограммы, полученные численным расчётом лучевых траекторий для двух реализаций возмущения $\delta s(r, z)$. Плавные кривые — плотности вероятности, предсказанные формулой (122). Начальные глубины лучей для всех прямоугольников близки к оси ПЗК. Начальные углы скольжения лучей близки к 3° (рис. а, б), 6° (рис. в, г) и 9° (рис. д, е).

мудой (122) (плавная кривая). Аналогичные результаты для лучей с углами выхода, близкими к 6° и 9° , показаны на рис. 14в, г и д, е соответственно. Это (и другие) сравнение результатов теории и численного моделирования подтверждает не только применимость формулы (122), но и наше предположение о том, что на длинных трассах статистика лучей слабо зависит от конкретной реализации случайных неоднородностей среды.

6.2.3. Поле точечного источника. В случае точечного источника начальные координаты лучей в фазовой плоскости $p-z$ лежат на прямой $z = z_s$, где z_s — глубина источника. Покажем, каким образом формула (122) может быть применена для описания статистики данных лучей.

Предположим, что начальные импульсы сосредоточены в интервале $-p_{\max} < p_0 < p_{\max}$. Формально будем считать, что плотность вероятности p_0 равна $(2p_{\max})^{-1}$ на данном интервале, а вне его обращается в нуль. Такой выбор плотности вероятности фактически связан с предположением об изотропности диаграммы направленности рассматриваемого источника внутри углового интервала, заданного выбором p_{\max} .

На дистанциях порядка 1000 км, где применима формула (119), плотность вероятности переменной действия

$$P_I(I, r) = \frac{1}{2p_{\max}} \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 P_{I|I_0}(I, r | I(p_0, z_0)). \quad (127)$$

Функция $I(p_0, z_0)$ в подынтегральном выражении задаётся каноническим преобразованием (22). С учётом (118) совместная плотность вероятности импульса и коорди-

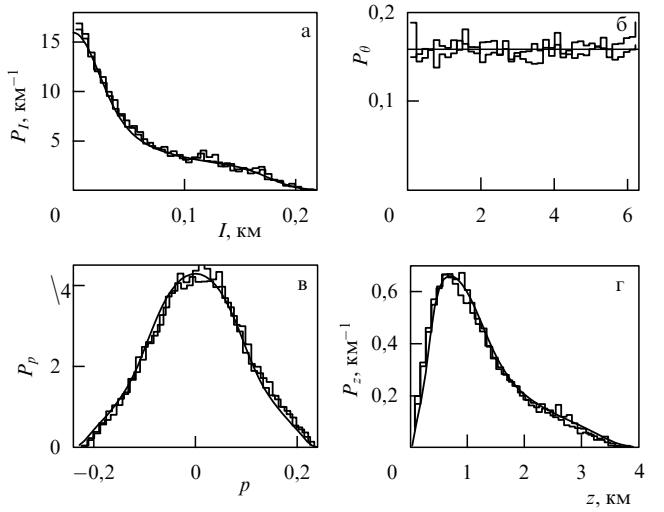


Рис. 15. Распределения параметров лучей на дистанции $r = 3000$ км. Плавные кривые изображают плотности вероятности I (а), θ (б), p (в) и z (г), найденные в приближении винеровского процесса для лучей, исходящих из точечного источника на глубине $z_s = 0,7$ км. Ступенчатые линии представляют собой нормированные гистограммы, построенные на основе численного расчёта лучевых траекторий для двух реализаций возмущения $\delta s(r, z)$.

наты на дистанции r выражается соотношением

$$P_{pz}(p, z, r) = \frac{1}{2\pi} P_I(I(p, z), r). \quad (128)$$

Интегрируя (128) по p и z , находим плотности вероятности для z и p соответственно. В частности, для z получаем

$$P_z(z, r) = \frac{1}{4\pi p_{\max}} \times \\ \times \int dp \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 P_{I|I_0}(I(p, z), r | I(p_0, z_0)). \quad (129)$$

Плавные кривые на рис. 15 показывают плотности вероятности I , θ , p и z на трассе 3000 км, рассчитанные в приближении винеровского процесса, т.е. на основе формул (122), (127) и (128) (для угловой переменной θ , взятой по модулю 2π , ожидается равномерное распределение). Предполагается, что $\eta(p_0) = 1/(2p_{\max})$, т.е. диаграмма направленности источника приблизительно изотропна. Эти кривые сравниваются с оценками плотностей вероятности (нормированными гистограммами), полученными на основе численного расчёта 48000 лучей. Вычисления выполнены для точечного источника, находящегося на глубине 0,7 км, начальные углы выхода лучей лежат в диапазоне $\pm 12^\circ$. Как видим, предсказания, сделанные в приближении винеровского процесса, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

6.3. Сглаженная интенсивность волнового поля

В этом разделе мы покажем, каким образом знание статистических характеристик лучей может быть использовано при расчёте интенсивности звукового поля. Речь пойдёт об оценке пространственного распределения интенсивности, сглаженной по вертикальной координате.

На тысячекилометровых трассах поле в точке наблюдения обычно формируется огромным количеством хаотических лучей. Сглаженное распределение интенсив-

ности поля, определённой соотношением

$$J(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_z} \int dz' |u(r, z')|^2 \exp \left[-\frac{(z - z')^2}{2\Delta_z^2} \right], \quad (130)$$

где Δ_z — масштаб сглаживания, можно оценить посредством некогерентного суммирования их вкладов [3]. Согласно (18) сумму интенсивностей собственных лучей в точке наблюдения можно представить в виде

$$\begin{aligned} |u(r, z)|^2 &= \sum_j \frac{k}{2\pi |\partial z / \partial p_0|} \Big|_{p_0=p_{0,j}} = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 \delta(z - z(r, p_0, z_s)), \end{aligned} \quad (131)$$

где индекс j нумерует лучи, попадающие в точку (r, z) . Разобъём интервал значений начального импульса $(-p_{\max}, p_{\max})$ на много небольших подинтервалов с граничными точками p_n , $n = 1, \dots, N$. Представим последнее выражение в (131) в виде

$$|u(r, z)|^2 = \frac{k}{2\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{p_{n-1}}^{p_n} dp_0 \delta(z - z(r, p_0, z_s)), \quad (132)$$

где каждый из интегралов имеет вид, совпадающий с видом правой части (116) в случае, когда область \mathcal{R} вырождается в отрезок оси p . Согласно (116) и (118)

$$\begin{aligned} \int_{p_n}^{p_{n+1}} dp_0 \delta(z - z(r, p_0, z_s)) &= (p_{n+1} - p_n) \times \\ &\times \int dp P_{p|p_0 z_0}(p, z | p_j, z_s) = \\ &= \frac{p_{n+1} - p_n}{2\pi} \int dp P_{I|I_0}(I(p, z), r | I(p_j, z_s)), \end{aligned} \quad (133)$$

где интегрирование ведётся по всем возможным значениям p . Подставляя (133) в (132) и делая замену $p_{n+1} - p_n \rightarrow dp_0$, получаем

$$|u(r, z)|^2 = \frac{k}{(2\pi)^2} \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 \int dp P_{I|I_0}(I(p, z), r | I(p_j, z_s)). \quad (134)$$

Это соотношение можно переписать как

$$|u(r, z)|^2 = \frac{p_{\max} k}{\pi} P_z(z, r), \quad (135)$$

где $P_z(z, r)$ — плотность вероятности координаты (129). Подстановка (135) в (130) даёт [133]

$$J(r, z) = \frac{2kp_{\max}}{(2\pi)^{3/2} \Delta_z} \int dz' \exp \left(-\frac{(z - z')^2}{2\Delta_z^2} \right) P_z(z', r). \quad (136)$$

На рисунке 16 предсказание формулы (136) (штриховая кривая) сопоставляется с результатами, полученными при расчёте сглаженной интенсивности посредством численного решения параболического уравнения на несущей частоте 75 Гц для четырёх реализаций случайного возмущения. Масштаб сглаживания Δ_z принят равным 0,4 км. Как видим, формула (136) даёт хотя и грубую, но правильную по порядку величины оценку сглаженной интенсивности.

6.4. Времена прихода хаотических лучей

6.4.1. Эффект кластеризации времён прихода. Как говорилось в разделе 4, к настоящему времени накоплен

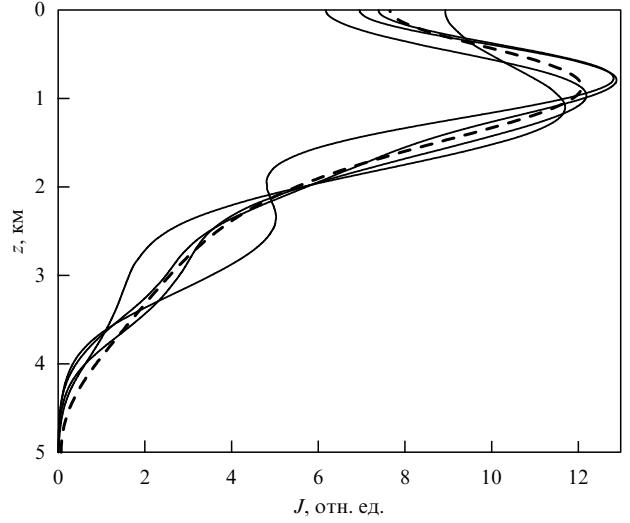


Рис. 16. Зависимость сглаженной интенсивности поля J на дистанции 3000 км от глубины z . Несущая частота $f = 75$ Гц. Штриховая кривая — предсказание формулы (136). Сплошные кривые — результаты численного решения параболического уравнения для четырёх реализаций случайного возмущения.

обширный экспериментальный материал по распространению звука на дистанции порядка 1000 км (см., например, [1, 136]). Замечательным свойством полей в глубоководных акустических волноводах, которое было известно уже в 1970-е годы, является неожиданно хорошая стабильность начальной части принятого сигнала, формируемой крутыми лучами. Звуковые импульсы, распространяющиеся вдоль лучей с относительно большими углами скольжения, не только сравнительно легко разрешаются и идентифицируются, но времена их прихода с хорошей точностью могут быть рассчитаны в рамках простейшей модели среды, не учитывающей флуктуации δc , вызванные внутренними волнами [55]. Поэтому в схемах акустического мониторинга температурных полей океана времена прихода лучей рассматриваются как основные входные параметры при решении обратных задач [55, 137, 138].

На первый взгляд кажется удивительным то обстоятельство, что по крайней мере часть импульсного сигнала остаётся стабильной при наличии неоднородностей δc , вызывающих лучевой хаос. Невозмущённая модель волновода позволяет правильно предсказывать положения пиков в начальных частях импульсных сигналов, регистрируемых на трассах длиной до 3–5 тыс. км, где лучевой хаос уже хорошо развит [16, 28, 63]. Объяснение этого эффекта (хотя и неисчерпывающее) было получено во второй половине 1990-х годов, когда выяснилось, что времена прихода хаотических лучей в точку наблюдения образуют устойчивые *кластеры* [13, 15, 19]. При их описании на первый план выходит характеристика луча, которая называется его *идентификатором* и обозначается $\pm M$. Определение идентификатора дано в разделе 2.3.

Численные расчёты показывают, что каждый кластер формируется лучами с одинаковым идентификатором, т.е. с одинаковой топологией. Центр кластера близок к времени прихода невозмущённого (регулярного) луча с тем же идентификатором, что и у формирующих кластер хаотических лучей. Те устойчивые пики принимаемого сигнала, которые разрешаются и в натуральных, и в численных экспериментах и ассоциируются с приходами крутых невозмущённых лучей, на самом деле форми-

рутся группами лучевых импульсов, приходящих в точку приёма вдоль хаотических траекторий с одинаковой топологией. На длинных трассах лучи с одинаковыми идентификаторами в промежуточных точках дистанции могут довольно существенно расходиться в пространстве [19].

Для иллюстрации сказанного рассмотрим $t-z$ -диаграммы, т.е. распределения приходов лучей в плоскости времени–глубина (см. раздел 2.3), на дистанции 3000 км в невозмущённом ($\delta c = 0$) и возмущённом волноводах, представленные на рис. 17а и б соответственно. Для их построения путём численного решения уравнений Гамильтона в возмущённом и невозмущённом волноводах были рассчитаны траектории 50000 лучей, выходящих из точечного источника на глубине $z_s = 0,7$ км с начальными углами скольжения в интервале $\pm 12^\circ$. Каждая точка на диаграмме соответствует приходу одного луча. На рисунке 17а (невозмущённый волновод) точки образуют непрерывные кусочно-ломаные линии. Зависимость между временем прихода луча и его вертикальной координатой в возмущённом волноводе (рис. 17б) также выражается непрерывной функцией. Однако в условиях хаоса эта линия на длинной трассе становится настолько сложной, что наш веер лучей оказывается недостаточно плотным для визуализации её непрерывности. Случайный разброс точек на $t-z$ -диаграмме служит индикатором лучевого хаоса. При регистрации сигнала на глубине z_0 времена прихода лучей определяются пересечениями $t-z$ -диаграммы с горизонтальной прямой $z = z_0$. В невозмущённом волноводе пересечение с каждым сегментом диаграммы (отрезком ломаной) задаёт один луч.

Каждый сегмент $t-z$ -диаграммы в невозмущённом волноводе формируется лучами с *одинаковым* идентификатором. На аналогичной диаграмме в возмущённом волноводе приходы лучей с фиксированным идентификатором образуют компактно расположенные группы точек, которые мы называем *размытыми* сегментами. Сечение размытого сегмента прямой $z = z_r$ определяет кластер времён прихода лучей, попадающих в точечный приёмник, находящийся на глубине z_r . Из рисунка 17

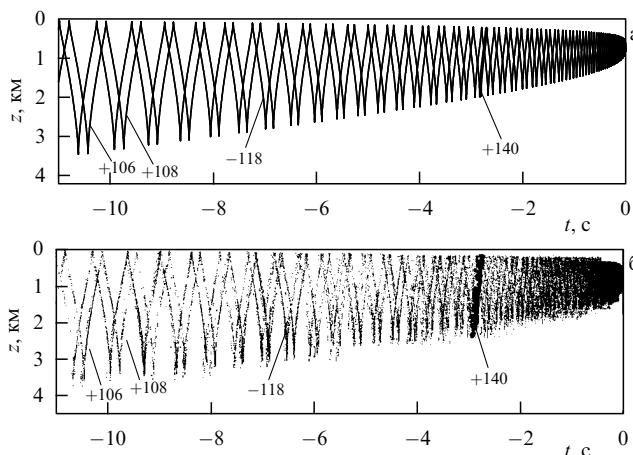


Рис. 17. Временные фронты ($t-z$ -диаграммы) в невозмущённом (а) и возмущённом (б) волноводах: распределения приходов лучей в плоскости времени–глубина на дистанции 3000 км для точечного источника, находящегося на глубине $z_s = 0,7$ км. Около некоторых сегментов указаны отвечающие им значения идентификаторов. На рисунке а приходы лучей с идентификатором +140 изображены жирной линией, на рис. б приходы лучей с тем же идентификатором (размытый сегмент) показаны жирными точками.

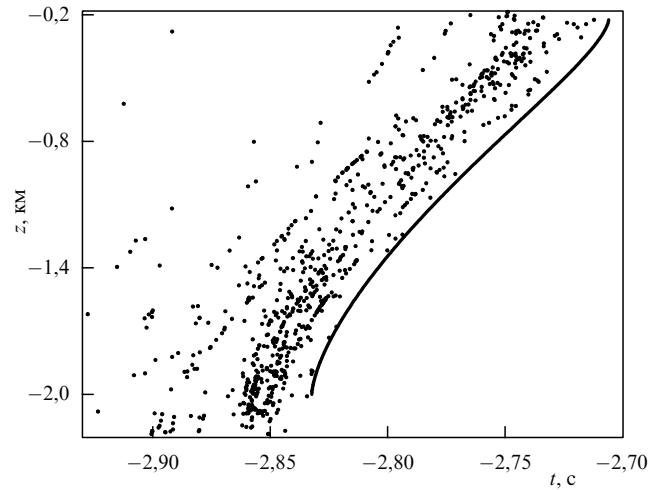


Рис. 18. Приходы лучей с идентификатором +140 на дистанции 3000 км в плоскости времени–глубина в возмущённом (точки) и невозмущённом (сплошная кривая) волноводах.

видно, что формируемые крутыми лучами сегменты на начальных участках $t-z$ -диаграмм в возмущённом и невозмущённом волноводах не слишком сильно различаются между собой. Этот факт как раз и отражает устойчивость начальной части принимаемого сигнала, о которой говорилось выше.

На рисунке 17 также выборочно приведены значения идентификаторов лучей, формирующих некоторые сегменты диаграммы.

Глядя на рис. 18, на котором показаны приходы лучей с идентификатором +140, выделенные на рис. 17, мы видим, что возмущение δc приводит не только к размытию сегментов $t-z$ -диаграммы, но и к их *смещению* влево — в сторону малых времён.

Несмотря на схожесть начальных участков $t-z$ -диаграмм, зависимости времён прихода лучей от углов выхода из источника в невозмущённом и возмущённом волноводах кардинально различаются. Если мы выберем некоторый невозмущённый луч и начнём монотонно изменять угол его выхода χ_s , то соответствующая точка на $t-z$ -диаграмме будет монотонно двигаться по кусочно-ломаной линии, переходя от одного сегмента к другому. Действуя аналогичным образом в возмущённом волноводе, мы увидим, что точка, изображающая луч на $t-z$ -диаграмме, хаотически "скакает" в плоскости времени–глубина. В этом хаосе, однако, есть нетривиальная закономерность: в начальной части $t-z$ -диаграммы точка, двигаясь случайным образом, всегда остаётся вблизи сегментов невозмущённой диаграммы, "перебегая" от одного невозмущённого сегмента к другому (необязательно даже к соседнему) и обратно.

6.4.2. Оценки разброса времён прихода хаотических лучей. Описание кластера основывается на приближённой формуле для разности времён прихода возмущённого и невозмущённого лучей, соединяющих точечные источник и приёмник и имеющих одинаковые идентификаторы [35, 37, 74, 139, 140]. Эта формула имеет вид

$$\delta t = \delta t_V + \delta t_I, \quad (137)$$

где

$$\delta t_V = -\frac{1}{c_r^2} \int dr \delta c(r, z(r)), \quad (138)$$

$$\delta t_I = \frac{\omega'(\bar{I})}{2c_r} \int_0^r dr' (I(r') - \bar{I})^2, \quad (139)$$

\bar{I} — переменная действия невозмущённого луча, $I(r)$ — зависимость переменной действия возмущённого луча от дистанции. На относительно коротких трассах (несколько сотен километров) слабое возмущение ещё не успевает привести к заметным искажениям формы лучевой траектории и совпадение идентификаторов возмущённого и невозмущённого лучей фактически означает совпадение их траекторий. При этом основной вклад в δt определяется флюктуациями скорости звука δc вдоль невозмущённой траектории $z(r)$. Слагаемым δt_I в правой части (137) на коротких трассах можно пренебречь, и мы получаем хорошо известный результат $\delta t = \delta t_V$ [1, 55]. Ширина кластера, которую можно оценить как $\langle(\delta t_V)^2\rangle^{1/2}$, возрастает с увеличением дистанции пропорционально $r^{1/2}$. На расстояниях порядка нескольких сотен километров величина δt_V обычно составляет несколько миллисекунд.

На трассах порядка нескольких тысяч километров доминирует другой механизм, связанный с сильными изменениями формы траектории под влиянием возмущения δc . При этом правую часть (137) определяет слагаемое δt_I . Для анализа его статистических характеристик можно применить подход, обсуждавшийся в разделах 6.1, 6.2, и показать, что среднее смещение кластера выражается формулой [35, 37, 139, 140]

$$\langle\delta t_I\rangle = \frac{\omega'(\bar{I})}{12c_r} Br^2, \quad (140)$$

а его ширина $\langle(\delta t_I - \langle\delta t_I\rangle)^2\rangle^{1/2}$ примерно равна $|\langle\delta t_I\rangle|$. Согласно (139) и (140) направление смещения кластера определяется знаком производной $\omega'(I)$. В типичных глубоководных волноводах длина цикла луча увеличивается с возрастанием угла скольжения на оси волновода. Это означает, что $\omega'(I)$ обычно отрицательна, а кластер смещается в сторону малых времён, как мы это видели на рис. 18. Согласно полученным оценкам ширина кластера на длинных трассах возрастает с увеличением дистанции пропорционально r^2 и на расстоянии 3000 км составляет величину порядка 0,01 с для крутых лучей и 0,1 с для пологих.

Следует отметить, что связь между временами прихода и амплитудами лучей пока остаётся неизученной. Между тем данный вопрос очень важен, поскольку лучи, образующие кластер, имеют, вообще говоря, существенно разные амплитуды и соответственно дают существенно разные вклады в пик сигнала, ассоциированный с данным кластером.

В работе [19] рассмотрен численный пример, показывающий, что несмотря на огромное количество лучей, входящих в кластер, отвечающий ему пик реально формируется импульсами, приходящими по нескольким лучам с максимальными амплитудами. Разброс времён прихода данных лучей относительно мал, и ширина пика может быть в 5–10 раз меньше полной ширины кластера.

Говоря о кластере, мы сравнивали времена прихода лучей, попадающих в одну и ту же точку пространства и имеющих одинаковые идентификаторы. Теперь обратимся к оценке разброса времён прихода пучка лучей с углами выхода, близкими к некоторому фиксированному значению χ_0 . При этом начальные значения переменной I для всех лучей близки $I_0 \equiv I(\chi_0)$. На расстояниях порядка 1000 км, где хаос уже хорошо развит, лучи из данного пучка имеют не только разные глубины, но и,

вообще говоря, разные идентификаторы. Приближённая формула для разности времён прихода лучей с идентификаторами $\pm(M + \Delta M)$ и $\pm M$ имеет вид [35, 37, 139, 140]

$$\delta t = \frac{4\pi\Delta MI_0}{c_r}. \quad (141)$$

При $\Delta M \neq 0$ эта величина обычно существенно превосходит (по модулю) δt_V и δt_I . Оценивая ΔM как $\langle(\theta - \theta_0)^2\rangle^{1/2}/\pi$ и пользуясь формулой (126), получаем

$$\langle\delta t^2\rangle^{1/2} = |\omega'(I_0)| \frac{r^{3/2}}{c_r} \left(\frac{B}{3}\right)^{1/2}. \quad (142)$$

Отсюда следует, что разброс времён прихода возрастает пропорционально $r^{3/2}$. Такая зависимость от дистанции согласуется с результатами других авторов [74]. На дистанции 3000 км оценка (142) даёт величину порядка 1 с, что на один-два порядка превышает ширину кластера. Этот результат ещё раз показывает, насколько сильно время прихода луча зависит от топологии его траектории.

6.5. Сглаженное распределение звуковой энергии между нормальными модами волновода

В разделе 2.6 приведены простые аналитические соотношения, позволяющие выразить амплитуды нормальных мод через параметры лучевых траекторий. С их помощью стохастическую лучевую теорию, основанную на приближении винеровского процесса, можно применить для анализа модовой структуры поля. Покажем это на примере расчёта перераспределения звуковой энергии между модами в результате рассеяния на флюктуациях скорости звука $\delta c(r, z)$. Величины $|a_m(r)|^2$ для краткости будем называть интенсивностями нормальных мод. Нашей целью будет оценка сглаженных интенсивностей мод

$$J_m(r) = \sum_{m'} |a_{m'}(r)|^2 \exp\left[-\frac{(m-m')^2}{2\mu^2}\right] \times \left\{ \sum_{m'} \exp\left[-\frac{(m-m')^2}{2\mu^2}\right] \right\}^{-1}, \quad (143)$$

где μ — масштаб сглаживания. Как и в разделе 6.3, где рассмотрена аналогичная задача о расчёте сглаженной интенсивности звукового поля (130), мы воспользуемся некогерентным суммированием лучей. Однако если в разделе 6.3 речь шла о суммировании собственных лучей, формирующих поле в заданной точке волновода, то здесь мы должны суммировать вклады модовых лучей, формирующих поле моды. В условиях лучевого хаоса количество модовых лучей становится очень большим, они практически независимы и естественно ожидать, что грубая оценка J_m может быть получена суммированием их интенсивностей. Результаты численного моделирования, представленные в работах [49, 141], подтверждают это предположение.

Рассмотрим ситуацию, в которой начальное поле задано формулой (33), т.е. при $r = 0$ возбуждена всего одна мода с номером m_0 . В данном случае аналог формулы (131) для интенсивности моды, согласно (35) и (36), имеет вид

$$|a_m(r)|^2 = \frac{1}{2\pi k} \sum_j \frac{1}{|\partial I(r, I_{m_0}, \theta_0)/\partial\theta_0|_{\theta_0=\theta_{0,j}}} = \\ = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \delta(I_m - I(r, I_{m_0}, \theta_0)), \quad (144)$$

где индекс j нумерует модовые лучи. Интеграл в последнем выражении может быть преобразован в точности так же, как интеграл в правой части (131). Разбивая интервал интегрирования по θ_0 на малые подинтервалы, отметим, что интеграл по каждому из них снова аналогичен интегралу в (116). Для подинтервала $(\theta_0, \theta_0 + \delta\theta)$ имеем

$$\frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \delta\theta} d\theta_0 \delta(I_m - I(r, I_{m_0}, \theta_0)) = P_I(I_m, r | I_{m_0}). \quad (145)$$

Поскольку правая часть не зависит от θ_0 , получаем

$$|a_m(r)|^2 = \frac{1}{k} P_I(r, I_m | I_{m_0}). \quad (146)$$

Полагая $m \gg \mu$, пределы интегрирования по m' формально можно считать бесконечными. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \exp \left[-\frac{(m - m')^2}{2\mu^2} \right] &\simeq \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} dm' \exp \left[-\frac{(m - m')^2}{2\mu^2} \right] = \sqrt{2\pi}\mu. \end{aligned} \quad (147)$$

Приближённо заменим суммирование по m в (143) интегрированием, как это сделано в (147). Затем, формально заменив m величиной $kI + 1/2$ (на основании правила квантования (29)), перейдём от интегрирования по m к интегрированию по I :

$$J_m(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu} \int dI' P_I(r, I' | I_{m_0}) \exp \left[-\frac{k^2(I_m - I')^2}{2\mu^2} \right]. \quad (148)$$

Воспользуемся соотношением (122), представляющим собой явное выражение для функции $P_I(r, I | I_0)$. Для мод с высокими номерами, которые формируются крутыми лучами, удовлетворяющими условию (123), вторым слагаемым в правой части (122) можно пренебречь и пределы интегрирования по I' формально считать бесконечными. При этом

$$J_m(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mu^2 + k^2 Br)}} \exp \left[-\frac{(m - m_0)^2}{2(\mu^2 + k^2 Br)} \right]. \quad (149)$$

На частоте 75 Гц формула (149) применима лишь для мод с номерами $m > 7$. Для описания мод с меньшими номерами следует учитывать оба слагаемых в правой части (122) и конечность нижнего предела интегрирования. Отметим, что согласно (149) на очень длинных трассах число эффективно возбуждённых мод возрастает с увеличением дистанции пропорционально $r^{1/2}$. В работе [142] эта зависимость была установлена при анализе результатов численного моделирования.

Для проверки применимости оценки (149) мы численно решили параболическое уравнение (7) на несущей частоте 75 Гц с начальным условием $u(0, z) = \varphi_{24}(z)$. Интенсивности мод на дистанции $r = 3000$ км для двух реализаций случайного возмущения показаны на рис. 19а. На рисунке 19б представлены результаты расчётов сглаженной интенсивности с масштабом сглаживания $\mu = 4$. Сплошные кривые показывают интенсивности J_m , рассчитанные на основе прямого численного решения параболического уравнения для четырёх реализаций возмущения (значения $|a_m|^2$ для двух из этих реализаций показаны на рис. 19а). Штриховая кривая изображает предсказание формулы (149). Как видим, сглаженная интенсивность не очень сильно зависит от конкретной реализации возмущения и наша аналитическая оценка удовлетворительно согласуется с результатами численного моделирования. В [37] показано, что в случае точечного источника сглаженные интенсивности мод могут быть рассчитаны совершенно аналогичным образом.

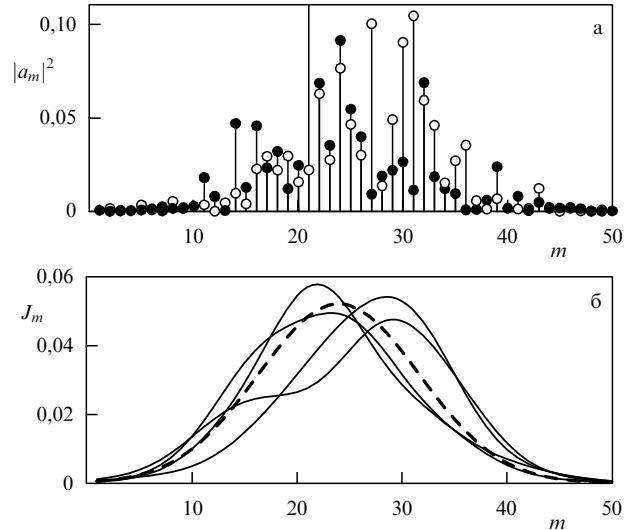


Рис. 19. Интенсивности мод на дистанции 3000 км в ситуации, когда при $r = 0$ возбуждена только одна мода с номером 24 ($u(0, z) = \varphi_{24}(z)$) на несущей частоте 75 Гц. (а) Интенсивности мод для двух реализаций возмущения (светлые и тёмные кружки). (б) Сглаженные интенсивности мод, рассчитанные для четырёх реализаций возмущения (сплошные кривые), и предсказания формулы (149) (штриховая кривая). Масштаб сглаживания $\mu = 4$.

Использование соотношений, выражающих амплитуды мод через параметры лучевых траекторий, позволяет исследовать модовую структуру поля, возбуждённого не только монохроматическим, но и импульсным источником. Исследование звуковых импульсов, переносимых отдельными модами, выходит за рамки данного обзора. Этот вопрос подробно обсуждается в [43, 130].

7. Заключение

В данном обзоре на конкретных примерах мы постарались рассказать об основных задачах, связанных с изучением явлений лучевого и волнового хаоса в подводных акустических волноводах. Рассмотрены две модели волновода: с периодическими неоднородностями скорости звука и с неоднородностями, представленными реализацией случайного поля. На первый взгляд кажется, что свойства лучевого и волнового хаоса в этих моделях кардинально различаются. В отличие от структуры фазового пространства периодического волновода, которое разбивается на области с совершенно разными свойствами (хаотическое море и острова стабильности), структура фазового пространства в модели со случайными неоднородностями кажется более однородной. Однако, в сущности, это не так. Из-за значительного разброса показателей Ляпунова [19] на любой конечной дистанции имеются пучки слабо расходящихся лучей, которые образуют аналоги островов стабильности. Хотя доля таких лучей на длинных трассах невелика, их вклады в суммарное волновое поле могут иметь определяющее значение [19].

Несмотря на кажущуюся искусственность периодических моделей, именно с них начались исследования хаоса в подводной акустике. В первую очередь это было связано с возможностью прямого использования мощных методов теории динамического и квантового хаоса, таких как метод отображения Пуанкаре или метод квазистационарных состояний (состояний Флоке) [23]. Изучение таких моделей помогает понять общие свойства хаотической динамики лучей и может подсказать

новые направления исследований при анализе волноводов с неоднородностями другого типа. Мы считаем, что "потенциал" периодических моделей ещё не исчерпан и полученные с их помощью результаты могут иметь аналоги в реальных подводных звуковых каналах.

Одна из целей изучения лучевого хаоса состоит в выяснении тех ограничений, которые это явление накладывает на возможности решения обратных задач, связанных с реконструкцией крупномасштабных деталей температурных полей океана. С этой точки зрения весьма важным представляется отыскание характеристик звукового поля, устойчивых по отношению к флуктуациям показателя преломления, вызванным внутренними волнами. Примером таких характеристик являются кластеры времён прихода лучей, обсуждавшиеся в разделе 6.4. Благодаря эффекту кластеризации даже на трассах порядка нескольких тысяч километров в вариациях временной структуры принятого сигнала (в условиях развитого лучевого хаоса) можно различать вклады крупномасштабных неоднородностей температурного поля. Заметим, кстати, что важную роль в понимании эффекта кластеризации сыграли исследования времён прихода лучей в периодической модели волновода, выполненные в работе [15].

В завершение отметим, что исследования проблемы волнового хаоса в значительной мере сдерживаются недостаточной изученностью вопроса о границах применимости метода геометрической оптики. О том, что некоторые из предсказаний этого метода остаются в силе на тысячекилометровых трассах, мы, по сути, знаем лишь из результатов численного моделирования, а также из сравнения теоретических результатов с данными натурных экспериментов. Аналогичные трудности имеют место и в теории квантового хаоса. Перспективным, на наш взгляд, является исследование вопроса об использовании лучевого подхода для расчёта характеристик поля, слаженных по временным, угловым и пространственным масштабам. Численное моделирование показывает, что выбором достаточно больших масштабов слаживания часто удается компенсировать погрешности лучевого приближения. Однако масштабы слаживания пока приходится подбирать эмпирически.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-05-98520, 09-05-98608, 10-02-00228), Программ РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики" и "Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред", гранта Президента РФ (МК-4324.2009.5), гранта "Ведущие научные школы" НШ-3700.2010.2 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (контракт 02.740.11.0565), гранта фонда "Династия".

Авторы благодарны М.Ю. Улейскому, Е.В. Конончику, А.Ю. Казаровой и Л.Я. Любавину за помощь в подготовке материала.

Список литературы

1. Flatté S M et al. *Sound Transmission Through a Fluctuating Ocean* (Ed. S M Flatté) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979)
2. Бреховских Л М, Лысанов Ю П *Теоретические основы акустики океана* (М.: Наука, 2007) [Brekhovskikh L M, Lysanov Yu P *Fundamentals of Ocean Acoustics* (New York: Springer, 2003)]
3. Jensen F B et al. *Computational Ocean Acoustics* (New York: AIP Press, 1994)
4. Munk W H et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **96** 2330 (1994)
5. Абдуллаев С С, Заславский Г М *ЖЭТФ* **80** 524 (1981) [Abdullaev S S, Zaslavskii G M Sov. Phys. JETP **53** 265 (1981)]
6. Абдуллаев С С, Заславский Г М *ЖЭТФ* **85** 1573 (1983) [Abdullaev S S, Zaslavskii G M Sov. Phys. JETP **58** 915 (1983)]
7. Абдуллаев С С, Заславский Г М *ЖЭТФ* **87** 763 (1984) [Abdullaev S S, Zaslavskii G M Sov. Phys. JETP **60** 435 (1984)]
8. Абдуллаев С С, Заславский Г М *Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана* **23** 724 (1987)
9. Абдуллаев С С, Заславский Г М *Акуст. журн.* **34** 578 (1988) [Abdullaev S S, Zaslavskii G M Sov. Phys. Acoust. **34** 334 (1988)]
10. Абдуллаев С С, Заславский Г М *УФН* **161** (8) 1 (1991) [Abdullaev S S, Zaslavsky G M Sov. Phys. Usp. **34** 645 (1991)]
11. Abdullaev S *Chaos and Dynamics of Rays in Waveguide Media* (Langhorne, Pa.: Gordon and Breach, 1993)
12. Palmer D R et al. *Geophys. Res. Lett.* **15** 569 (1988)
13. Palmer D R, Georges T M, Jones R M *Comput. Phys. Commun.* **65** 219 (1991)
14. Smith K B, Brown M G, Tappert F D *J. Acoust. Soc. Am.* **91** 1939 (1992)
15. Tappert F D, Tang X *J. Acoust. Soc. Am.* **99** 185 (1996)
16. Simmen J, Flatté S M, Wang G-Y *J. Acoust. Soc. Am.* **102** 239 (1997)
17. Wolfson M A, Tappert F D *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 154 (2000)
18. Wolfson M A, Tomsovic S *J. Acoust. Soc. Am.* **109** 2693 (2001)
19. Beron-Vera F J et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **114** 1226 (2003)
20. Worcester P F, Spindel R C *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1499 (2005)
21. Заславский Г М *Стохастичность динамических систем* (М.: Наука, 1984)
22. Gutzwiller M C *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer-Verlag, 1990)
23. Reichl L E *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (New York: Springer-Verlag, 1992) [Райхл Л Е *Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах* (М.-Ижевск: РХД, 2008)]
24. Кошель К В, Пранц С В *УФН* **176** 1177 (2006) [Koshel K V, Prants S V Phys. Usp. **49** 1151 (2006)]
25. Кошель К В, Пранц С В *Хаотическая адvection в океане* (М.-Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2008)
26. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988); Zaslavsky G M, Sagdeev R Z *Nonlinear Physics: from the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)
27. Lichtenberg A J, Lieberman M A *Regular and Stochastic Motion* (New York: Springer-Verlag, 1983) [Лихтенберг А, Либерман М *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)]
28. Brown M G, Viechnicki J J. *J. Acoust. Soc. Am.* **104** 2090 (1998)
29. Brown M G et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 2533 (2003)
30. Smirnov I P, Virovlyansky A L, Zaslavsky G M *Phys. Rev. E* **64** 036221 (2001)
31. Makarov D V, Uleysky M Yu, Prants S V *Chaos* **14** 79 (2004)
32. Smirnov I P, Virovlyansky A L, Zaslavsky G M *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1595 (2005)
33. Flatté S M (Ed.) *Sound Transmission Through a Fluctuating Ocean* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979) [Флэтте С (Ред.) *Распространение звука во флуктуирующем океане* (М.: Мир, 1982)]
34. Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику Ч. II Случайные поля* (М.: Наука, 1978)
35. Virovlyansky A L, nlin/0012015
36. Вироўлянскі А Л *Акуст. журн.* **51** 90 (2005) [Virovlyansky A L *Acoust. Phys.* **51** 71 (2005)]
37. Вироўлянскі А Л *Лучевая теория дальнего распространения звука в океане* (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2006)
38. Леонович М Изв. АН СССР. Сер. физ. **8** 16 (1944)
39. Леонович М, Фок В ЖЭТФ **16** 557 (1946); Leontovich M, Fock V J. Phys. USSR **10** 13 (1946)
40. Tappert F D *Lecture Notes Phys.* **70** 224 (1977)
41. Кравцов Ю А, Орлов Ю И *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980) [Kravtsov Yu A, Orlov Yu I *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media* (Berlin: Springer-Verlag, 1990)]
42. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1965) [Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)]
43. Makarov D, Prants S, Virovlyansky A, Zaslavsky G *Ray and Wave Chaos in Ocean Acoustics* (Singapore: World Scientific, 2010)
44. Бреховских Л М, Годин О А *Акустика слоистых сред* (М.: Наука, 1989) [Brekhovskikh L M, Godin O A *Acoustics of Layered Media I, II* (Berlin: Springer-Verlag, 1990, 1992)]
45. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М: Наука, 1974) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
46. Berman G P, Zaslavsky G M *Physica A* **97** 367 (1979)
47. Virovlyansky A L, Zaslavsky G M *Phys. Rev. E* **59** 1656 (1999)
48. Virovlyansky A L, Kazarova A Yu, Lyubavin L Ya *Wave Motion* **42** 317 (2005)
49. Virovlyansky A L *J. Acoust. Soc. Am.* **108** 84 (2000)
50. Colosi J A, Brown M G *J. Acoust. Soc. Am.* **103** 2232 (1998)
51. Garrett C, Munk W *Geophys. Fluid Dyn.* **3** 225 (1972)
52. Van Uffelen L J et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **125** 3569 (2009)
53. Katsnelson B G et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **126** EL41 (2009)
54. Badiey M et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **129** EL141 (2011)

55. Munk W, Wunsch C *Deep Sea Res. A* **26** 123 (1979)
56. Munk W, Worcester P, Wunsch C *Ocean Acoustic Tomography* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
57. Cornuelle B et al. *J. Phys. Oceanogr.* **15** 133 (1985)
58. Munk W, Wunsch C *Rev. Geophys. Space Phys.* **21** 777 (1983)
59. Shang E C *J. Acoust. Soc. Am.* **85** 1531 (1989)
60. Jones R M, Shang E C, Georges T M *J. Acoust. Soc. Am.* **94** 2296 (1993)
61. Udvodchenkov I A, Brown M G J. *Acoust. Soc. Am.* **123** 41 (2008)
62. Wage K E et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1565 (2005)
63. Worcester P F et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **105** 3185 (1999)
64. Colosi J A et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **105** 3202 (1999)
65. Colosi J A, Tappert F, Dzieciuch M *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 163 (2001)
66. Worcester P F et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **95** 3118 (1994)
67. Colosi J A, Flatté S M, Bracher C J. *Acoust. Soc. Am.* **96** 452 (1994)
68. Акуличев В А и др. *Докл. РАН* **417** 693 (2007) [Akulichhev V A et al. *Dokl. Earth Sci.* **417** 1432 (2007)]
69. Безответных В В и др. *Акуст. журн.* **55** 374 (2009) [Bezotvetnykh V V et al. *Acoust. Phys.* **55** 376 (2009)]
70. Spindel C et al. *IEEE J. Ocean. Eng.* **28** 297 (2003)
71. Baggeroer A B et al. (ATOCS Consortium) *Science* **281** 1327 (1998)
72. Chirikov B V *Phys. Rep.* **52** 263 (1979)
73. Beron-Vera F J, Brown M G J. *Acoust. Soc. Am.* **114** 123 (2003)
74. Beron-Vera F J, Brown M G J. *Acoust. Soc. Am.* **115** 1068 (2004)
75. Морозов А Д *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах* (Ижевск: РХД, 2005)
76. Budynsky M V, Uleysky M Yu, Prants S V *Phys. Rev. E* **79** 056215 (2009)
77. Uleysky M Yu, Budynsky M V, Prants S V *Phys. Rev. E* **81** 017202 (2010)
78. Улейский М Ю, Будянский М В, Пранц С В *ЖЭТФ* **138** 1175 (2010) [Uleysky M Yu, Budynsky M V, Prants S V *JETP* **111** 1039 (2010)]
79. Rypina I I et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 104102 (2007)
80. Бреховских Л М и др. *Акуст. журн.* **36** 824 (1990) [Brekhovskikh L M et al. *Sov. Phys. Acoust.* **36** 461 (1990)]
81. Гончаров В В, Куртепов В М *Акуст. журн.* **40** 773 (1994) [Goncharov V V, Kurterov V M *Acoust. Phys.* **40** 685 (1994)]
82. Смирнов И П, Карузерс Дж В, Хилько А И *Изв. вузов. Радиофиз.* **42** 982 (1999) [Smirnov I P, Caruthers J V, Khil'ko A I *Radiophys. Quantum Electron.* **42** 864 (1999)]
83. Petukhov Yu V *Acoust. Phys.* **55** 785 (2009)
84. Kudo K, Monteiro T S *Phys. Rev. E* **77** 055203(R) (2008)
85. Чупров С Д, в сб. *Акустика океана. Современное состояние* (Отв. ред. Л М Бреховских, И Б Андреева) (М.: Наука, 1982) с. 71
86. Грачев Г А *Акуст. журн.* **39** 67 (1993) [Grachev G A *Acoust. Phys.* **39** 33 (1993)]
87. Brown M G et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1607 (2005)
88. Stöckmann H-J *Quantum Chaos: An Introduction* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000) [Штокман Х-Ю *Квантовый хаос: Введение* (М.: Физматлит, 2004)]
89. Smirnov I P et al. *Phys. Rev. E* **72** 026206 (2005)
90. Берман Г П, Коловский А Р *УФН* **162** (4) 95 (1992) [Berman G P, Kolovskii A R *Phys. Usp.* **35** 303 (1992)]
91. Татарский В И *УФН* **139** 587 (1983) [Tatarskii V I *Sov. Phys. Usp.* **26** 311 (1983)]
92. Virovlyansky A L, Zaslavsky G M *Chaos* **15** 023301 (2005)
93. Bäcker A, Ketzmerick R, Monastra A G *Phys. Rev. Lett.* **94** 054102 (2005)
94. Heller E *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515 (1984)
95. Itin A P, Neishtadt A I, Vasiliev A A *Physica D* **141** 281 (2000)
96. Нейштадт А И *Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова* **250** 198 (2005) [Neishtadt A I *Proc. Steklov Inst. Math.* **250** 183 (2005)]
97. Neishtadt A, Vasiliev A *Nonlinearity* **18** 1393 (2005)
98. Vainchtein D L, Neishtadt A I, Mezic I *Chaos* **16** 043123(2006)
99. Leoncini X, Neishtadt A, Vasiliev A *Phys. Rev. E* **79** 026213 (2009)
100. Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: Физматлит, 1958)
- [Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1961)]
101. Makarov D V, Uleysky M Yu *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **13** 400 (2008)
102. Макаров Д В, Улейский М Ю *Акуст. журн.* **53** 565 (2007) [Makarov D V, Uleyskiy M Yu *Acoust. Phys.* **53** 495 (2007)]
103. Макаров Д В, Коньков Л Е, Улейский М Ю *Акуст. журн.* **54** 439 (2008) [Makarov D V, Kon'kov L E, Uleysky M Yu *Acoust. Phys.* **54** 382 (2008)]
104. Neishtadt A, Vasiliev A *Chaos* **17** 043104 (2007)
105. Makarov D V, Sosedko E V, Uleysky M Yu *Eur. Phys. J. B* **73** 571 (2010)
106. Uleysky M Yu, Budynsky M V, Prants S V *J. Phys. A Math. Theor.* **41** 215102 (2008)
107. Grigorieva N S, Fridman G M, Palmer D R *J. Comput. Acoust.* **12** 355 (2004)
108. Hegewisch K C, Cerruti N R, Tomsovic S *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1582 (2005)
109. Kon'kov L E et al. *Phys. Rev. E* **76** 056212 (2007)
110. Leboeuf P, Voros A *J. Phys. A Math. Gen.* **23** 1765 (1990)
111. Макаров Д В, Коньков Л Е *Нелинейная динамика* **3** 157 (2007)
112. Makarov D V, Kon'kov L E, Uleysky M Yu *Журн. Сиб. ф-та ум-ма. Сер. Мам. и физ.* **3** 336 (2010)
113. Keating J P, Prado S D *Proc. R. Soc. Lond. A* **457** 1855 (2001)
114. Kulkarny V A, White B S *Phys. Fluids* **25** 1770 (1982)
115. Клячкин В И, Гуарий Д УФН **169** 171 (1999) [Klyatskin V I, Gurarie D *Phys. Usp.* **42** 165 (1999)]
116. Froyland G et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 224503 (2007)
117. Bödai T, Fenwick A J, Wiercigroch M *J. Sound Vibr.* **324** 850 (2009)
118. Makarov D, Uleysky M *J. Phys. A Math. Gen.* **39** 489 (2006)
119. Makarov D V et al. *Phys. Rev. E* **73** 066210 (2006)
120. Gan C, Wang Q, Perc M *J. Phys. A Math. Theor.* **43** 125102 (2010)
121. Kolovsky A R *Phys. Rev. E* **56** 2261 (1997)
122. Заславский Г М УФН **129** 211 (1979) [Zaslavskii G M *Sov. Phys. Usp.* **22** 788 (1979)]
123. Berry M V, Robnik M *J. Phys. A Math. Gen.* **17** 2413 (1984)
124. Izrailev F M *Phys. Rep.* **196** 299 (1990)
125. Brody T A *Lett. Nuovo Cimento* **7** 482 (1973)
126. Berry M V, Keating J P, Prado S D J *Phys. A Math. Gen.* **31** L245 (1998)
127. Berry M V, Keating J P, Schomerus H *Proc. R. Soc. Lond. A* **456** 1659 (2000)
128. Вирошлианский А Л, Заславский Г М *Акуст. журн.* **53** 329 (2007) [Virovlyansky A L, Zaslavskii G M *Acoust. Phys.* **53** 282 (2007)]
129. Virovlyansky A L, Kazarova A Yu, Lyubavin L Ya *J. Acoust. Soc. Am.* **121** 2542 (2007)
130. Virovlyansky A L, Kazarova A Yu, Lyubavin L Ya *J. Acoust. Soc. Am.* **125** 1362 (2009)
131. Colosi J A, Flatté S M *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 3607 (1996)
132. Вирошлианский А Л *Изв. вузов. Радиофиз.* **46** 555 (2003) [Virovlyansky A L *Radiophys. Quantum Electron.* **46** 502 (2005)]
133. Тихонов В И, Миронов М А *Марковские процессы* (М.: Советское радио, 1977)
134. Gardiner C W *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* (Berlin: Springer-Verlag, 1985) [Гардинер К В *Стochastic methods в естественных науках* (М.: Мир, 1986)]
135. Rypina I I, Brown M G J. *Acoust. Soc. Am.* **122** 1440 (2007)
136. Вадов Р А *Акуст. журн.* **52** 448 (2006) [Vadov R A *Acoust. Phys.* **52** 377 (2006)]
137. Dushaw B D *IEEE J. Ocean. Eng.* **24** 215 (1999)
138. Spiesberger J L, Metzger K J *Geophys. Res.* **96** (C3) 4869 (1991)
139. Virovlyansky A L *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 2523 (2003)
140. Вирошлианский А Л *Акуст. журн.* **51** 330 (2005) [Virovlyansky A L *Acoust. Phys.* **51** 271 (2005)]
141. Virovlyansky A L, Zaslavsky G M *Chaos* **10** 211 (2000)
142. Морозов А К, Колоси Д А *Акуст. журн.* **51** 386 (2005) [Morozov A K, Colosi J A *Acoust. Phys.* **53** 335 (2007)]

Ray and wave chaos in underwater acoustic waveguides

A.L. Virovlyansky

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation

D.V. Makarov, S.V. Prants

*Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
ul. Baltiiskaya 43, 690041 Vladivostok, Russian Federation. E-mail: prants@poi.dvo.ru*

In 1990s the study of the behavior of ray trajectories in inhomogeneous waveguides emerged as a new field in ocean acoustics. It turned out that at ranges of the order of or larger than 1000 km ray chaos is well developed and should be taken into account when describing long range sound propagation in the ocean. Theoretical analysis of ray chaos and of its finite wavelength manifestation, wave chaos, is to a large extent based on well known methods and ideas from the theory of dynamical and quantum chaos. Concrete examples are used to review the results obtained in this field over the last two decades.

PACS numbers: **05.45.-a**, 43.30.Bp, 43.30.Cq, 43.30. Dr

Bibliography — 142 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (1) 19–48 (2012)

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201201b.0019

Received 15 March 2011, revised 29 April 2011

Physics – Uspekhi **55** (1) (2012)