

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

К решению проблем каспов и кривых вращения в гало тёмной материи в космологической стандартной модели

А.Г. Дорошкевич, В.Н. Лукаш, Е.В. Михеева

Обзор посвящён различным аспектам формирования внутренней структуры вириализованных гало тёмной материи (ТМ), возникающих в процессе эволюции начальных неоднородностей плотности в космологической стандартной модели. Основное внимание уделено двум связанным между собой задачам — проблеме центральных каспов/ядер и проблеме профилей кривых вращения в гало ТМ, отражающим противоречия между теорией, результатами численного моделирования и наблюдательными данными. Изложен разработанный авторами энтропийный метод описания равновесных систем ТМ, позволяющий исследовать эти сложные нелинейные структуры аналитически и связать профили распределения плотности внутри гало как с параметрами начального мелкомасштабного поля неоднородностей, так и с характеристиками нелинейной релаксации гравитационно-сжатого вещества. Показано, что космологические случайные движения вещества "подогревают" частицы ТМ в коллапсирующих протогало, что приводит к подавлению каспоподобных профилей плотности внутри формирующихся гало, способствует образованию ядер ТМ в галактиках и позволяет объяснить различие между наблюдаемыми и полученными в численном эксперименте кривыми вращения галактик. Сделанные в рамках данного подхода аналитические выводы должны быть подтверждены численными моделями N тел, что возможно при улучшении пространственного разрешения центральных областей гало.

PACS numbers: 95.35.+d, 98.62.Gq, 98.62.Js

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201201a.0003

Содержание

1. Введение (3).
2. Суть и история вопроса (3).
3. Гало тёмной материи (5).
4. Энтропия частиц в гало (6).
5. Изотермическая сфера (6).
6. Внутренняя структура гало (8).
7. Что нужно для того, чтобы образовались каспы (9).
8. Ансамбль протогало (10).
9. От профиля плотности к энтропии (11).
10. Начальные космологические возмущения (12).
11. Решение проблемы галактических каспов (14).
12. Кривые вращения галактик (15).
13. Влияние фоновой энтропии (16).
14. Заключение (17).
15. Приложения (17).

Приложение А. Корреляционные функции начальных возмущений. Приложение Б. Функция распределения условной вероятности.

Список литературы (18).

А.Г. Дорошкевич, В.Н. Лукаш, Е.В. Михеева. Астрокосмический центр Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: dorr@asc.rssi.ru, lukash@asc.rssi.ru, helen@asc.rssi.ru

Статья поступила 28 декабря 2010 г.

1. Введение

Данный обзор является завершающим в цикле из двух обзоров (см. [1]), посвящённых образованию крупномасштабной структуры Вселенной и проблемам вириализованных гало тёмной материи (ТМ). Не претендуя на изложение всех связанных с этим задач физической космологии, мы сосредоточимся в первую очередь на эволюции ТМ в рамках космологической стандартной модели (КСМ), опираясь на оригинальные работы авторов настоящего обзора и следуя главам книги [2]. Здесь мы даём более полное освещение обозначенных вопросов с привлечением новых данных наблюдений и сопоставлений с теорией, по возможности не вдаваясь в детальные аналитические расчёты (теоретические результаты вынесены в приложение, интересующийся читатель найдёт доказательства в книге [2]).

2. Суть и история вопроса

Одной из важнейших проблем космологии, обсуждаемой в настоящее время, является объяснение процессов формирования внутренней структуры вириализованных гало ТМ, изучаемых как с помощью прямых наблюдений, так и аналитическими и численными методами.

Несмотря на значительные усилия космологического сообщества, многие аспекты процесса образования гало до сих пор остаются неясными. В частности, неясен

статус универсального профиля плотности ([3–5], далее — профиль Наварро–Френка–Уайта (НФУ)), обнаруженного в широком классе численных моделей формирования гало ТМ для масс и размеров гало в значительном диапазоне значений. Как установлено, профиль НФУ хорошо соответствует наблюдаемому профилю плотности скоплений галактик [6], но в то же время отличается от наблюдаемых профилей плотности галактик по многим характеристикам (см. [7, 8]). Это означает недостаточный учёт при численном моделировании физических факторов, управляющих образованием галактик.

Численные расчёты при решении задачи N тел, которые широко применяются на протяжении многих лет, в наши дни являются востребованным и мощным инструментом исследования процессов формирования нелинейной структуры Вселенной. Однако возможности численных моделей не беспредельны, что стимулирует развитие аналитических и приближённых методов исследования, помогающих выявить и качественно охарактеризовать влияние основных физических процессов, ответственных за образование гало. Среди наиболее важных процессов, численное моделирование которых затруднительно, — релаксация сжатого вещества внутри протогало, при анализе которой надо учитывать космологическое *мелкомасштабное* поле скорости и плотности материи.

В рамках широко используемой модели сферического коллапса прямые связи между свойствами поля начальных возмущений плотности и вириализованных гало задаются соотношением Пресса–Шехтера либо его расширениями (см. [9–20]). В рамках этого подхода коллапс ТМ описывается как последовательное падение сферических оболочек вещества с их последующей релаксацией и перераспределением внутри гало. Каждый сферический слой характеризуется массой и радиусом остановки (момент "отщепления" от хаббловского расширения), которые можно связать со спектром начальных возмущений плотности с помощью, например, сглаживания поля возмущений фильтрами разных масштабов (см. [17]). Этот подход может быть обобщён включением в рассмотрение углового момента оболочек, внешних приливных сил, внешнего распределения плотности и т.д. [21–26]. Иное описание процесса формирования гало, основанное не на квазисферическом коллапсе, а на приближении Зельдовича, предложено в [27].

Как известно, формирование любого плотного объекта означает релаксацию сжатого вещества. Для модели сферического коллапса — это так называемый процесс *бурной релаксации*, который обеспечивает перераспределение энергии и массы сжатого вещества, вынос избыточной энергии из системы и поджигание гало. Простейшим примером бурной релаксации является коллапс однородного невращающегося облака ТМ конечного размера (см. [28–30]). Наличие у коллапсирующей материи углового момента не останавливает бурной релаксации [21–23], хотя и ослабляет её (см., например, [26, 31]).

В противовес столь методически прозрачным результатам численные расчёты показывают, что для описания процесса формирования гало недостаточно рассматривать падение только диффузного вещества (сферически симметричное или анизотропное). В численных моделях формирование гало сопровождается образованием слу-

чайных систем маломассивных субгало с высокой плотностью и их последовательным слиянием в главное протогало. Этот процесс *иерархического скучивания* обеспечивает перенос массы внутрь главного гало, в котором малые субгало "обдираются" приливным взаимодействием и динамическим трением с окружающим веществом (см. [32–35]). Оба процесса — падение диффузного вещества и слияние спутников-субгало — играют сопоставимые роли в формировании гало.

Результаты численных расчётов свидетельствуют о том, что слияние ранее образовавшихся субгало с высокой плотностью может стимулировать формирование и последующее возрастание центральной плотности в главном гало и процессы бурной релаксации здесь оказывают меньшее влияние. Например, даже одно событие слияния субгало с сопоставимыми массами может сильно изменить внутреннюю структуру общего гало [36]. Слившиеся субгало приносят в общее гало свои кинетические энергии и угловые моменты, вследствие чего важнейшими составляющими всего процесса релаксации оказываются разрушение и обдирание субгало внутри главного гало. Взаимодействия субгало с главным гало, другими субгало и диффузным веществом приводят к перераспределению энергии в главном гало и перестроению его внутренней структуры. Эффективность релаксации в численных расчётах сопоставима с оценками, полученными в простейших моделях сферического коллапса (см. [31, 37, 38]).

Релаксация необходима для того, чтобы обеспечить отвод энергии от главного гало, но в то же время она приводит к хаотизации распределения собранного вещества и во многом обуславливает унификацию профилей плотности релаксировавших гало. Тем не менее как в иерархической, так и в сферической моделях формирования гало слияние субгало (либо сферических оболочек) не является чисто хаотическим и управляется начальными распределениями плотности и скорости. Начальные условия в ходе релаксации размываются не полностью и частично сохраняются. Как будет показано в настоящем обзоре, и распределение гало по массам, и их внутренняя структура *зависят* от формы спектра начальных возмущений.

Хорошо известно, что влияние начальных условий на эволюцию динамических систем может носить кардинальный характер. Достаточно вспомнить различие между сценариями холодной и горячей тёмной материи. В контексте проблемы формирования гало возможное влияние тепловых скоростей и мелкомасштабных начальных возмущений обсуждалось в [26, 27, 39, 40]. Здесь мы существенно улучшаем описание этого влияния, используя статистические характеристики пространственных распределений плотности и скорости внутри сколлапсировавшего облака ТМ [41]. Этот подход позволяет оценить *фоновую энтропию* релаксировавшего вещества, связанную с начальными мелкомасштабными возмущениями скорости, и её зависимость от массы образующихся гало. Влияние таких факторов, как угловой момент коллапсирующего вещества и нелинейное разрушение субгало малых масс, здесь не рассматривается. Эти факторы вследствие своего случайного характера могут только повысить фоновую энтропию и её отклонения от средней величины. Наши расчёты дают минимальный уровень фоновой энтропии, способной, тем не менее, повлиять на внутреннюю структуру

возникающих гало и существенно подавить образование в них центрального каспа ТМ.

Использование энтропийного подхода при описании релаксировавших гало позволяет определить распределение *полной* (начальной и приобретённой в ходе нелинейной релаксации) энтропии частиц ТМ по гало. В отличие от кинетического подхода, наш метод не апеллирует к функции распределения частиц гало и не описывает историю самой релаксации. Однако он позволяет правильно воспроизвести любое распределение материи внутри релаксировавшего сферического гало и различить свойства этого распределения, связанные с начальными условиями, и свойства, связанные с характеристиками процесса релаксации. Возможность такого расчёта обусловлена свойством энтропии как самой стабильной характеристики вещества, изменяющейся только в ходе необратимых процессов.

Как для сферической, так и для иерархической моделей формирования гало возможна оценка возрастания энтропии в ходе релаксации вещества [42]. Для сферического коллапса эту оценку можно сделать аналитически (см. [28]). Процесс иерархической релаксации является более сложным и не описывается аналитически, поэтому для его оценки мы используем результаты численных расчётов.

В наблюдаемых гравитационно-связанных объектах пространственные распределения ТМ, барионов и светящегося вещества различны. В условиях Вселенной, в которой доминирует тёмная материя, разумно рассматривать проблему образования гало ТМ как первое приближение к более сложной задаче формирования гравитационно-связанных систем. Здесь мы рассматриваем только динамику ТМ в рамках КСМ, не учитывая влияния тёмных барионов и светящегося вещества. Тем не менее в ряде случаев, когда влияние барионной компоненты на внутреннюю структуру галактики может быть существенным (см., например, [43]), этот вопрос требует дальнейшего изучения.

3. Гало тёмной материи

Под тёмной материей мы подразумеваем нерелятивистские массивные частицы, взаимодействующие между собой и с другими частицами только гравитационным образом. Эту материю называют "тёмной", поскольку она невидима — имеет небарионную природу и не взаимодействует со светом¹. Однако ТМ можно изучать с помощью динамических методов, поскольку она является скученной и создаёт пространственные градиенты гравитационного потенциала, влияя на движение видимых тел (галактик, звёзд, газа), состояние барионов (горячий газ) и отклоняя лучи света (гравитационное линзирование).

Средняя плотность массы ТМ во Вселенной в пять раз превышает космологическую плотность барионов, поэтому именно нерелятивистские тёмные частицы управляют процессом гравитационного сгущивания и эволюцией неоднородной части гравитационного потенциала Вселенной. Контраст плотности слабонеоднородного начального пространственного распределения ТМ

возрастает со временем. Поскольку эта материя является холодной, то градиенты давления в ней малы, и они не могут служить препятствием развитию гравитационной неустойчивости.

В областях повышенной плотности темп фридмановского расширения материи замедляется, и в какой-то момент разбегание ТМ останавливается и переходит в коллапс. В ходе динамического сжатия и последующих осцилляций потоков вещества развиваются процессы бесстолкновительной гравитационной бурной релаксации: частицы оказываются в переменном, локализованном в пространстве гравитационном потенциале, в результате чего часть частиц ($\sim 10\%$) выбрасывается из системы и уносит избыток положительной энергии. Оставшаяся энергия сгустка перераспределяется внутри системы, и образуется гравитационно-связанный объект ТМ, называемый гало.

Наблюдаемые гало (галактики, их группы и скопления) представляют собой релаксировавшие системы частиц, гравитационно-связанные по всем трём пространственным направлениям. Гало ограничены сверху по размерам и массам соответственно величинами до нескольких Мпк и $10^{15}M_{\odot}$. Напомним, что масса материи во Вселенной в шаре радиусом $R = 10$ Мпк составляет $M_{10} \simeq 1,6 \times 10^{14}M_{\odot}$ (см. раздел 8, формула (21)). Здесь и далее в численных оценках приняты следующие значения стандартных параметров КСМ:

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} = 1 - \Omega_E \simeq 0,3, \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 10^{-29} \text{ г см}^{-3},$$

$$H_0 \simeq 70 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}, \quad (1)$$

где ρ_m — космологическая плотность ТМ, ρ_c — критическое значение плотности Вселенной, Ω_E — космологическая плотность тёмной энергии, выраженная в единицах критической плотности, H_0 — постоянная Хаббла, G — гравитационная постоянная.

Рассмотрим простейшие условия равновесия самогравитирующих систем ТМ. Функция распределения нерелятивистских частиц в сферически симметричном стационарном гало зависит от радиального расстояния от центра гало r и модулей радиальной и поперечной компонент импульсов частиц. В сферических координатах тензор энергии-импульса материи имеет диагональный вид:

$$T_{\mu}^{\nu} = \rho \text{ diag}(1, -\sigma_r^2, -\sigma_t^2, -\sigma_t^2), \quad (2)$$

где $\rho = \rho(r)$ — профиль плотности гало, $\sigma_r(r)$ и $\sigma_t(r)$ — радиальная и поперечная (трансверсальная) дисперсии скорости частиц. В ньютоновском пределе из тождества $T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$ получаем уравнение гидростатического равновесия для бесстолкновительных частиц

$$-\frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} (\rho r^2 \sigma_r^2) + \frac{2}{r} \sigma_t^2 = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (3)$$

где гравитационный потенциал Φ , определённый с точностью до аддитивной постоянной, и масса системы M , которые зависят от r , связаны с плотностью следующим образом:

$$\Delta\Phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (4)$$

¹ Материя может быть слабовидимой, если её частицы слабо взаимодействуют со светом, например аннигилируют с испусканием фотонов в областях высоких концентраций ТМ в ядрах галактик.

Внутри гало частицы ТМ движутся по различным орбитам — от радиальных до круговых. Каждая орбита характеризуется энергией и вектором углового момента, которые являются интегралами движения в статическом сферически симметричном поле. Распределение плотности вблизи центра гало удобно характеризовать степенной функцией:

$$\rho \propto r^{-\alpha} \quad (5)$$

с показателем (индексом наклона) $\alpha = \text{const} \in (0, 2,5)$. При этом функция распределения частиц зависит от эволюционной истории гало. Численный эксперимент и наблюдения показывают, что для большинства сферических гало распределение частиц по скоростям близко к изотропному, хотя отклонения от изотропии иногда могут быть значительными и достигать 20–30 % (см., например, [44]).

Гало больших масс ещё не успели сформироваться во Вселенной. Так, типичными нелинейными элементами крупномасштабной структуры Вселенной являются сколлапсировавшие в одном или двух направлениях системы, называемые соответственно *стенками* и *филаментами*. В среднем по Вселенной в масштабах более нескольких десятков Мпк контраст плотности остаётся меньшим единицы ($|\delta\rho/\rho| < 1$) и можно говорить лишь об областях с повышенной и пониженной (по сравнению со средней космологической) плотностью материи.

4. Энтропия частиц в гало

Рассмотрим более подробно изотропную функцию распределения частиц ТМ с $\sigma_r = \sigma_t = \sigma$. Равновесие гало определяется балансом градиента эффективного давления нерелятивистской материи

$$p = nT = \rho\sigma^2 \quad (6)$$

и силы гравитации полной массы $M = M(r)$ (см. (3))

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}, \quad (7)$$

где функции от радиуса $n = \rho/m$ и T соответствуют плотности и эффективной температуре частиц с массой $m = \text{const}$. В силу принципа эквивалентности m нельзя определить из уравнений гравитации, поскольку частицы движутся по геодезическим вне зависимости от массы. Измеряемыми переменными являются плотность ρ и дисперсия скорости частиц σ .

Уравнение гидростатического равновесия позволяет найти профиль плотности вещества в гало по известному распределению дисперсии скорости $\sigma(r)$ и, наоборот, по заданному распределению плотности реконструировать дисперсию скорости. При адиабатическом изменении плотности $\sigma \propto n^{1/3}$ и коэффициент пропорциональности зависит от распределения энтропии. По аналогии со случаем идеального газа введём *функцию энтропии* $E = E(r)$ вириализованного гало следующим образом [2, 41]:

$$E = \sigma^2 \left(\frac{m_p}{\rho} \right)^{2/3} \propto \frac{T}{n^{2/3}} = \frac{p}{n^{5/3}}, \quad (8)$$

где m_p — масса протона, на которую нормирована масса частиц гало m .

Функция $E(r)$ является мерой совокупной энтропии частиц гало, накопленной за всю историю его образования². Главные её составляющие — это *фоновая* энтропия, заданная начальными мелкомасштабными течениями и неоднородностями материи в протогало, и *приобретённая* энтропия, генерируемая в ходе бесстолкновительной и иерархической релаксации материи на нелинейной стадии формирования гало.

5. Изотермическая сфера

При моделировании внутренней структуры наблюдаемых гало часто используется приближение *изотермической сферы*, когда дисперсию скорости можно считать постоянной, независящей от радиуса:

$$\sigma(r) = \sigma_0 = \text{const}, \quad \kappa_0 \equiv \frac{4\pi G}{\sigma_0^2} = \frac{4\pi Gm}{T} = \text{const}. \quad (9)$$

Это приближение хорошо согласуется с наблюдательными данными в ограниченном диапазоне масштабов (рис. 1).

Умножая обе части (7) на r^2 и дифференцируя по r , получаем уравнение для профиля плотности изотермической сферы

$$\frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 d\rho}{\rho dr} \right) = -\kappa_0. \quad (10)$$

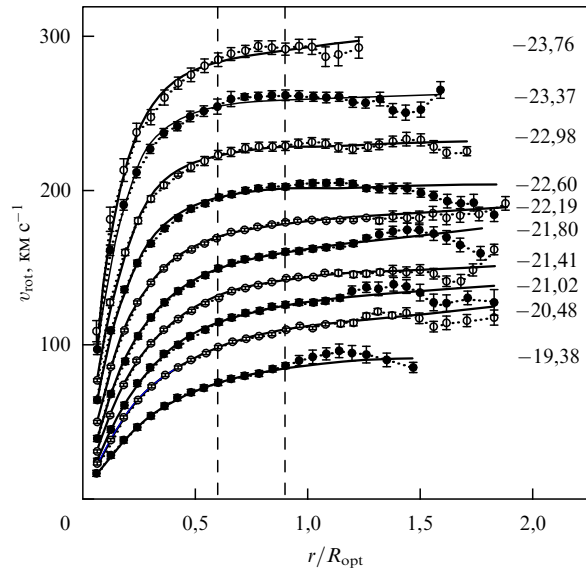


Рис. 1. Кривые вращения для 2155 галактик (по данным [45]). Кривые, которые разбиты на несколько групп по светимости галактик, характеризуются средней абсолютной звёздной величиной в I-фильтре (указана в правой части рисунка). R_{opt} — "оптический" радиус галактик, определённый как радиус, внутри которого сосредоточено 83 % интегрального потока излучения от галактики.

² Подчеркнём, что E — это функция энтропии, а не сама энтропия. Здесь мы не рассматриваем общие вопросы применимости понятия энтропии к бесстолкновительным частицам, определяя функцию $E(r)$ лишь для стационарных равновесных систем с изотропной функцией распределения частиц по скоростям. Напомним, что в определении (8) $\sigma^2 = \bar{v}^2$, где v — *одномерная* пекулярная скорость частиц тёмной материи в точке r (надчёркивание означает усреднение по пространству скоростей).

Это нелинейное уравнение содержит аттрактор — частное решение, которое является затягивающей сепаратрисой для динамических траекторий (10). Общее решение имеет вид

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{1 + r^2/(2r_0^2)}, & r < r_0 \equiv \sqrt{\frac{3}{\kappa_0\rho_0}}, \\ \frac{2}{\kappa_0 r^2}, & r > r_0 \text{ (аттрактор)}, \end{cases} \quad (11)$$

где параметр ρ_0 задаёт центральную плотность ядра гало, r_0 — характерный размер ядра. Вне зависимости от величины ρ_0 профиль плотности и масса гало при $r > r_0$ определяются только дисперсией скорости частиц:

$$M = \frac{8\pi r}{\kappa_0} \simeq 7 \times 10^{12} \left(\frac{\sigma}{300 \text{ км с}^{-1}} \right)^2 \left(\frac{r}{200 \text{ кпк}} \right) M_\odot. \quad (12)$$

Для характерных значений σ и r мы получили *типичную* массу нелинейных гало тёмной материи в наблюдаемой Вселенной — массу групп галактик. Напомним, что полная масса Местной группы, в которую входят Млечный Путь и Туманность Андромеды, составляет $2 \times 10^{12} M_\odot$.

Мы вывели уравнения (3) и (7) для ТМ в предположении её доминирования, однако эти же уравнения можно использовать для описания гидростатического равновесия *любого* компонента вещества (ТМ, звёзд, газа) в гравитационном поле *полной* массы $M(r)$. Для этого в левые части уравнений (3) и (7) вместо p и ρ надо подставить давление и плотность соответствующего компонента среды. Так, мы можем переписать массу гало в терминах эффективной температуры газа T_{gas} в состоянии равновесия:

$$M = \frac{2T_{\text{gas}} r}{G\mu_{\text{gas}}} \simeq 7 \times 10^{12} \left(\frac{T_{\text{gas}}}{1 \text{ кэВ}} \right) \left(\frac{r}{200 \text{ кпк}} \right) M_\odot, \quad (13)$$

где $\mu_{\text{gas}} \simeq m_p = 1 \text{ ГэВ}$ — молекулярный вес газа. Такой горячий газ, находящийся в скоплениях галактик в течение нескольких миллиардов лет, наблюдается с помощью рентгеновских телескопов, что позволяет восстанавливать распределение гравитационного потенциала и полную массу скоплений (см., например, [46]).

Вернёмся вновь к решению (11). Плотность ядра $\rho \simeq \rho_0$ никак не связана с гравитацией материи — она зависит только от начальных космологических условий, определивших историю образования гало. Размер ядра определяется произведением скорости частиц на динамическое время центрального уплотнения:

$$r_0 \simeq \frac{\sigma_0}{2\sqrt{G\rho_0}},$$

r_0 — это радиус, на котором начинает сказываться влияние самогравитации материи. При $r > r_0$ гравитация тёмной материи перестраивает внутреннюю структуру гало таким образом, что скорости вращения частиц перестают зависеть от радиуса:

$$v_{\text{rot}}(r > r_0) = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{2} \sigma_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Такие распределения реализуются во многих гравитационно-связанных космологических объектах. Так, в

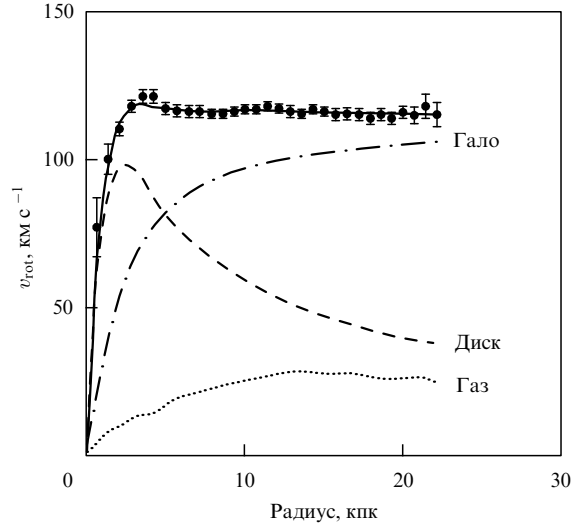


Рис. 2. Кривая вращения галактики NGC 6503 по данным [47]. Вклад гало тёмной материи показан штрихпунктирной кривой.

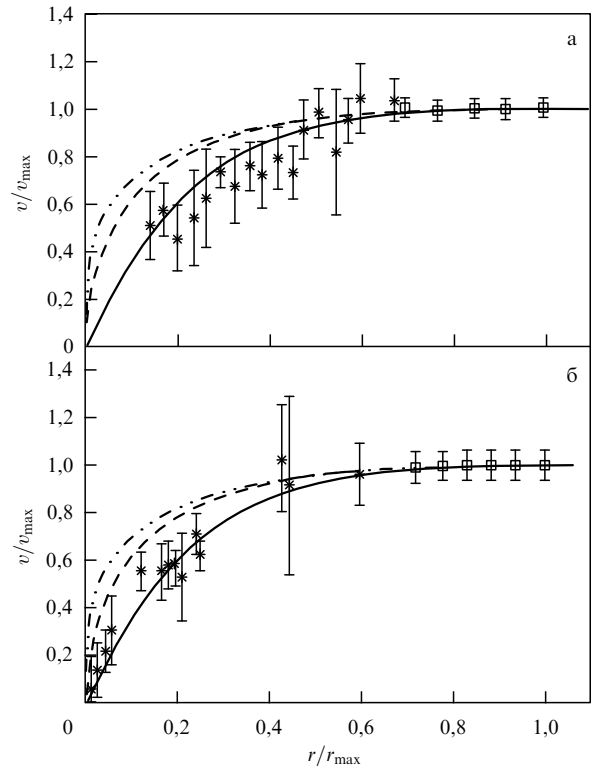


Рис. 3. Зависимость циркулярной скорости от радиуса в галактиках с низкой поверхностной яркостью (а) LSB F571-8 и (б) LSB F583-1. Сплошная кривая — аппроксимация Бюркerta, штриховая кривая — аппроксимация НФУ, штрихпунктирная кривая — профиль Мура. (По данным [48].)

спиральных галактиках наблюдаются *плоские* кривые вращения (рис. 2): круговые скорости вращения звёзд и газа сначала возрастают с увеличением радиуса, а потом выходят на константу или изменяются очень медленно. Вклад массы ТМ возрастает с увеличением расстояния, поддерживая плоский участок кривой вращения на протяжении около десяти динамических масштабов.

Другим примером являются карликовые галактики с низкой поверхностной яркостью (рис. 3). В них ТМ

доминирует начиная уже с малых радиусов, и при увеличении радиуса наблюдается *линейное* возрастание круговой скорости, что говорит о медленном изменении плотности ТМ в центральном ядре (см. (18)). Мы видим, что начальный подъём кривых вращения также соответствует изотермической сфере (11):

$$v_{\text{rot}}(r < r_0) = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{\sigma_0 r}{r_0}. \quad (15)$$

Тот факт, что внутренние циркулярные скорости оказываются меньше скоростей частиц гало ($v_{\text{rot}} < \sigma_0$), свидетельствует о том, что частицы гало свободно по инерции пролетают область $r \sim r_0$ с постоянной скоростью, не чувствуя гравитации.

В пределах точности наблюдений распределение (11) изотермической сферы может быть аппроксимировано простой формулой:

$$\rho \simeq \frac{\rho_0}{1+x^2}, \quad x = \frac{r}{r_0}. \quad (16)$$

Наблюдаемый плоский участок круговой скорости, который соответствует линейному возрастанию массы $M \propto r$ (см. (14)), занимает конечный динамический диапазон. Распределение плотности в такой системе удобно описывать следующим профилем:

$$\rho \simeq \frac{\rho_0}{(1+x^2)(r+r_s)}, \quad (17)$$

где $r_s = \text{const}$ — характеристический параметр обрезания. В центральной части при $r < r_s$ профиль близок к профилю изотермической сферы (16), однако при больших радиусах плотность уменьшается $\propto r^{-3}$ и циркулярные скорости медленно затухают. Циркулярная скорость достигает максимума в области с локальным индексом наклона плотности $\alpha \simeq 2$.

6. Внутренняя структура гало

Зависимость круговой скорости от радиуса связана с распределением плотности в гало. Рисунок 3 демонстрирует кривые вращения карликовых галактик, которые хорошо аппроксимируются феноменологическим профилем (17) с $r_s = r_0$, называемым аппроксимацией Бюркerta [49]:

$$\rho \propto \frac{1}{(1+x^2)(r+r_0)}. \quad (18)$$

Подобные примеры галактических ядер с медленно изменяющейся наблюдаемой плотностью типичны для небольших галактик. Они пока не воспроизводятся в численных моделях образования структуры.

Нелинейная релаксация сжимающегося облака приводит к расходящейся плотности в центре образующегося гало. В аналитических моделях коллапса [28, 29] рассматривается гравитационное сжатие покоящегося сферического облака со сглаженной плотностью. После релаксации получается сингулярный профиль плотности гало с индексом наклона $\alpha \approx 1,6-2,0$. Этот результат, который подтверждается также численно [50–52], тесно связан с выбором начального состояния сжимающейся массы, а именно с отсутствием случайных мелкомасштабных скоростей и почти сферическим распределением

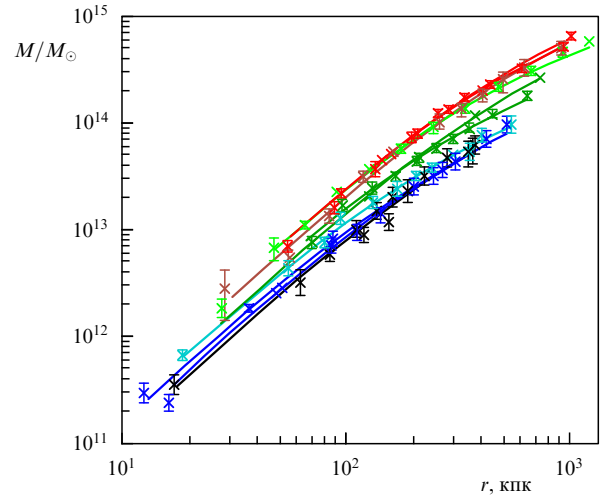


Рис. 4. Распределение массы тёмной материи внутри скопления галактик по данным [6].

плотности. Данный пример как нельзя лучше иллюстрирует переход кинетической энергии сжатия облака в тепловую энергию гало в процессе бурной релаксации.

Более реалистичные модели коллапса с последующей релаксацией ТМ появляются при численном моделировании эволюции системы многих тел ($N \sim 10^{10}$), взаимодействующих между собой гравитационным образом. Здесь можно учесть как случайные скорости частиц и анизотропное сжатие, так и последовательное слияние главного гало и его спутников. Средний профиль плотности образующихся в этих расчётах гало описывается аппроксимацией НФУ [3–5], которая зависит от единственного параметра r_s и имеет вид

$$\rho \propto \frac{1}{r(r+r_s)^2}. \quad (19)$$

При $r < r_s$ зависимость среднего профиля плотности от r асимптотически приближается к каспоподобному степенному закону с показателем $\alpha = 1$.

Профиль НФУ, полученный в численных моделях N тел, хорошо описывает наблюдаемое распределение плотности в скоплениях галактик (рис. 4, 5). Следует, однако, помнить, что этот профиль получен при усреднении распределений плотности многих гало и отклонения индивидуальных профилей от среднего могут достигать более 20 % (рис. 6). Также заметим, что технические возможности ограничивают динамический диапазон моделируемых масштабов и свойства гало с малыми или умеренными массами не воспроизводятся адекватно в расчётах. Эти возможности ограничивают также и размеры центральной области, разрешаемой в численных моделях.

В численных моделях плотность гало ТМ в центре стремится к бесконечности, но при этом масса остаётся конечной и приливные силы незначительны. Такая внутренняя структура получила название *центрального каспа* гало. Таким образом, в численных моделях образуются сингулярные каспы, однако во Вселенной такие образования не наблюдаются.

Рисунок 7 демонстрирует быстрое нарастание плотности в центре гало ТМ, формирующихся в численных моделях. Сравнение с наблюдаемыми галактическими

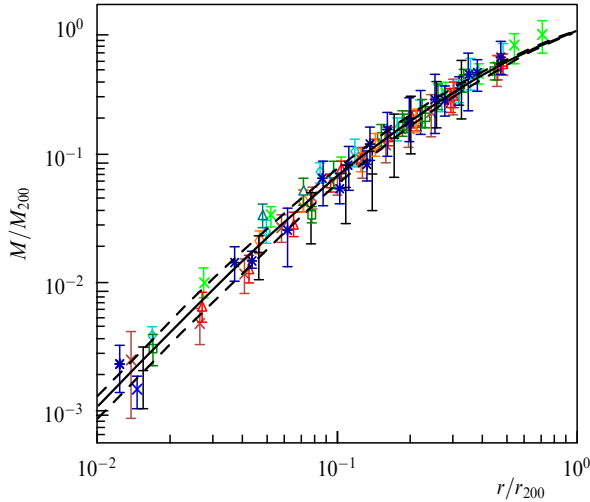


Рис. 5. Кривые, приведённые на рис. 4, в переменных, нормированных на массу и радиус сферы, внутри которой средняя плотность в 200 раз превышает плотность материи во Вселенной. Сплошная кривая — приближение НФУ.

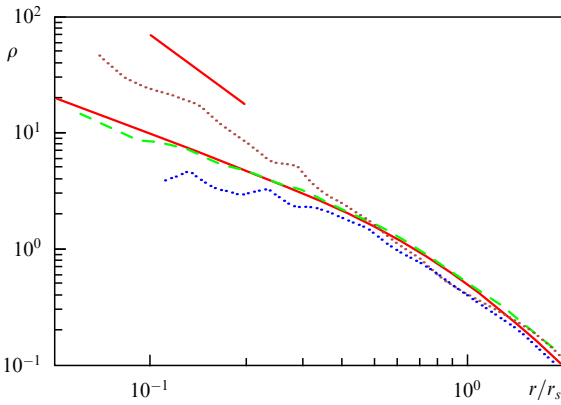


Рис. 6. Профили трёх гало с массами $10^{12} - 10^{13}$, полученные в численных моделях [53]. Сплошная кривая в центре — профиль НФУ, короткая линия в верхней части рисунка соответствует наклону $\alpha = 2$.

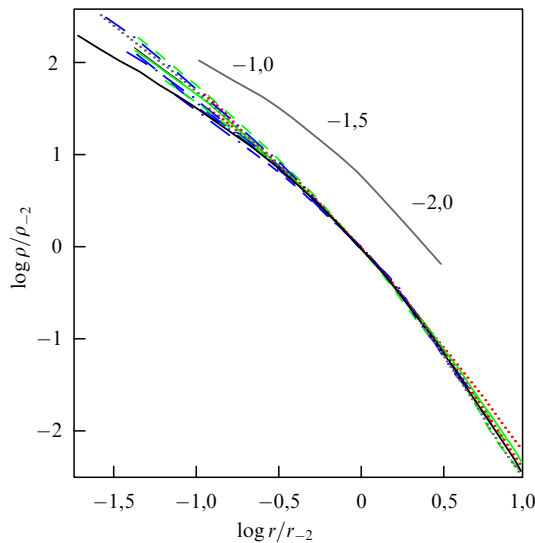


Рис. 7. (см. в цвете на www.ufn.ru). Средние профили плотности в численных моделях гало по данным [54]. Красная кривая — карликовые галактики, зелёная — галактики средней массы, синяя — скопления галактик, числа указывают степенные индексы наклона $d \ln \rho / d \ln r$, нормировка соответствует точке наклона $-2,0$.

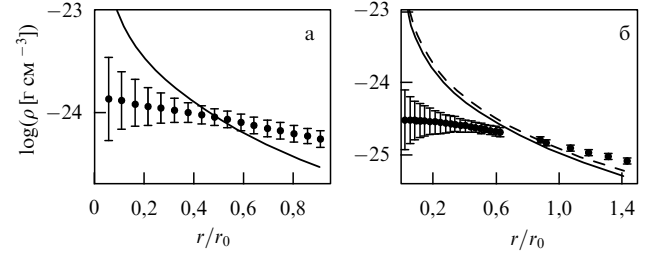


Рис. 8. Демонстрация проблемы каспов галактических гало ТМ по данным [55]. Символы — наблюдаемые профили плотности в галактиках (а) DDO 47 и (б) ESO 287-G13, кривые — средние профили плотности, полученные с помощью численного моделирования.

профилями представлено на рис. 8. Вопрос о том, существуют ли каспы ТМ в природе, важен не только для понимания процессов образования галактик — он может быть связан с физикой частиц тёмной материи. Например, один из методов поиска продуктов возможной аннигиляции частиц ТМ опирается на гипотезу о существовании центральных каспов в галактиках.

Итак, сравнение наблюдаемых галактик с численными моделями приводит к следующим выводам.

1. В численных моделях воспроизводится образование массивных объектов, и профиль плотности скоплений галактик хорошо согласуется с результатами расчётов.

2. Профиль Бюркерт (18) наблюдается главным образом в галактиках с малыми и умеренными массами, в которых доминирует ТМ. Образование таких галактик связано с начальными возмущениями сравнительно умеренных масштабов. В центральных областях более массивных спиральных галактик плотности ТМ и барионов сравнимы и возникает сложная проблема разделения вклада этих компонент.

3. С этими проблемами тесно связан подсчёт количества спутников Галактики. До недавнего времени число наблюдаемых спутников было примерно в два раза меньше предсказываемого численными моделями [44]. Однако в последнее время было обнаружено много очень слабых спутников, и их количество даже превосходит предсказания численных моделей (см. [56–60]). Это показывает, что свойства маломассивных объектов нуждаются в дальнейших исследованиях.

7. Что нужно для того, чтобы образовались каспы

Образуются ли в природе сингулярные каспы, на которые указывает численный эксперимент? Для ответа на этот вопрос необходимо понять, как устроены каспы и каковы должны быть условия для их формирования.

Как мы видели на примере изотермической сферы, частицы ТМ свободно пересекают область ядра $r < r_0$, не задерживаясь в нём. Этот вывод справедлив и для более широкого круга гало с малой центральной массой ($\alpha < 1$), поскольку в таких образованиях гравитационная сила стремится к нулю при малых радиусах:

$$\frac{GM(r)}{r^2} \propto r^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (20)$$

Напротив, более массивные каспы ($\alpha > 1$) воздействуют гравитационно на частицы ТМ и удерживают их внутри

себя. Очевидно, что скорости удерживаемых частиц должны быть достаточно малыми для того, чтобы они оставались в области каспа.

Следовательно, чтобы образовать касп, нужно накопить много холодных частиц в его центре. Возникают, как минимум, два вопроса.

- Где найти холодные частицы в поле возмущений?
- Как перенести холодные частицы в центральную часть гало, не подогревая их?

Поскольку доля энергии, сброшенной при формировании гало, не превышает 10–15 %, а степень сжатия вещества при релаксации конечна, то оба эти вопроса должны быть адресованы в первую очередь численным программам N тел: где находится "холодильник" частиц ТМ и почему в расчётах не учитывается их "подогрев" мелкомасштабными космологическими движениями материи?

Нам известно, что при отсутствии мелкомасштабных возмущений каспы образуются в моделях квазисферического коллапса (см. раздел 6). В этих аналитических расчётах все частицы изначально сфокусированы в центр (в силу выбранных условий) и значительная их доля, проходя через центр, охлаждается в результате процесса бурной релаксации и остаётся внутри каспа. Однако в реальных космологических условиях из-за наличия мелкомасштабных возмущений частицы ТМ "расфокусируются" и они проходят мимо центра. Кроме того, падение сгустков ТМ и процессы их слияний и рассеяний "разбалтывают" центральную область и мешают эффективному охлаждению частиц.

Бесспорно, количественные характеристики этих взаимно противоположных процессов должны быть рассчитаны и проверены численными методами, однако современное моделирование пока является несовершенным и оставляет желать лучшего.

Прежде всего требуется контроль движений ТМ в широком диапазоне масштабов, от больших космологических, на которых задаются начальные распределения частиц, до самых малых, позволяющих разрешить внутренние области формирующихся гало. В современных численных моделях разрешение по массе, как правило, не превышает $10^3 M_\odot$, что недостаточно для описания структуры ядер в распределениях ТМ. Вследствие ограниченного разрешения численных моделей в начальном распределении частиц отсутствуют мелкомасштабные возмущения, что означает эффективное обрезание спектра возмущений со стороны коротких длин волн. Последовательное разрешение выделенных объёмов добавлением в них "новых точек" на поздних этапах эволюции (так называемый адаптивный метод) также не помогает, поскольку при такой процедуре не добавляется необходимая информация о начальном мелкомасштабном поле космологических неоднородностей.

Иногда используется более сложный метод, предполагающий поэтапный пересчёт модели с введением дополнительных частиц в областях будущих образований плотных гало. Это позволяет включить в расчёт мелкомасштабные возмущения в ограниченных объёмах, однако такой пересчёт усложняет задачу и ведёт к очень сильному увеличению вычислительного времени.

Проблема каспов ещё ждёт окончательного решения. Возможно, на этом примере мы сталкиваемся с ограниченностью КСМ, в которой частицы ТМ рассматриваются как холодные. В таком случае, оставаясь в

рамках КСМ, мы не сможем разрешить противоречие между данными наблюдений и результатами численных экспериментов. Дело в том, что каспы возникают при релаксации изначально *холодного* вещества, крупномасштабные потоки частиц которого, самопересекаясь, образуют каустики, из которых в дальнейшем формируется касп. Между тем реальная ТМ может быть изначально *тёплой* с небольшими случайными скоростями частиц. При таком начальном состоянии вещества каустики размываются и вместо каспов в центрах гало образуются ядра с более гладкими распределениями плотности материи.

Тёплую ТМ можно рассмотреть как дополнительный параметр космологической модели. Требуемая для решения проблемы масса частиц тёплой ТМ должна быть невелика (~ 10 кэВ), что позволяет частицам сохранить остаточные тепловые скорости, связанные с горячей фазой эволюции в ранней Вселенной. Другой возможностью начального "подогрева" частиц ТМ может оказаться наличие избыточной мощности в спектре возмущений на малых длинах волн. Напомним в связи с этим, что спектр достаточно хорошо определён в масштабах, больших нескольких Мпк, по наблюдениям реликтового излучения и крупномасштабного распределения галактик. В то же время на малых масштабах спектр начальных возмущений может отличаться от степенного, что в свою очередь может влиять на структуру небольших галактик.

Эти предложения, однако, выводят нас за рамки стандартной модели. Наш подход иной. Мы считаем, что пока нет веских оснований для усложнения фундаментальной модели и рассматриваемая проблема может иметь и более простое решение, не требующее серьёзной модификации КСМ. Вопрос о влиянии мелкомасштабных возмущений скорости и плотности материи на внутреннюю структуру гало поддаётся аналитическому исследованию с помощью энтропийной функции (8). Использование энтропии вместо плотности мотивировано тем, что для большинства частиц энтропия возрастает в процессе формирования и релаксации гало и является интегральной характеристикой всей истории его образования. Испарение частиц в процессе релаксации уменьшает энтропию, но влияние этого процесса невелико.

По определению, частицы ТМ изначально холодны, т.е. их энтропия равна нулю. С другой стороны, имеются мелкомасштабные случайные потоки и сгустки вещества, которые при сближениях внутри коллапсирующих протогало разрушаются приливным образом и рассеиваются, образуя складки и пересечения, тем самым "подогревая" частицы ТМ и приводя в их скорость хаотическую составляющую ещё до наступления бурной релаксации. Таким образом, в ходе первого сжатия мелкомасштабные возмущения скорости в протогало трансформируются в хаотические движения частиц ТМ. Этот процесс можно описать в терминах грубой энтропии по аналогии с описанием идеального газа [41].

8. Ансамбль протогало

Для введения энтропийной характеристики частиц в протогало требуется понятие ансамбля — им является подвыборка поля линейных возмущений, объединяющая все пространственно ограниченные области, которые

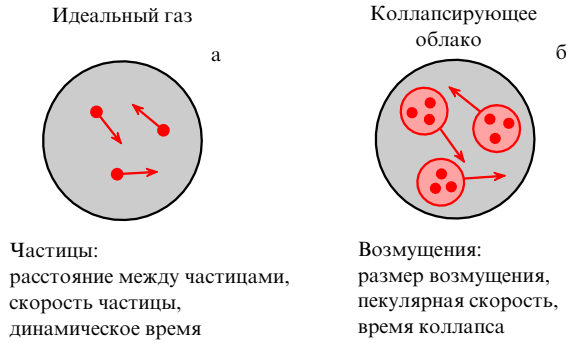


Рис. 9. Движение частиц в идеальном газе (а) и протогало ТМ (б) [2]. Энтропия частиц в области размером r определена на динамическом масштабе времени, совпадающем с временем коллапса: $r/v \simeq H^{-1}$.

сколлапсируют к моменту времени, соответствующему текущему красному смещению z . Схематичное сравнение с идеальным газом дано на рис. 9.

Протогало характеризуется массой M_R , коллапсирующей первый раз при красном смещении z , которое называют *моментом образования гало*. Массе M_R соответствует линейный сопутствующий размер R :

$$M_R = \frac{4\pi}{3} \rho_m R^3. \quad (21)$$

В сфере радиусом $R = 10$ Мпк содержится масса типичного скопления галактик $M_{10} \simeq 1,6 \times 10^{14} M_\odot$ (см. раздел 3).

Для выделения протогало из общего поля плотности необходимо, чтобы протогало имело начальный *пороговый* избыток массы в сфере радиусом R , обеспечивающий отрицательную полную энергию связи этой области и её коллапс к заданному моменту времени (см. приложение А):

$$v_R \equiv \frac{\delta_R}{\sigma_R} \geq v \equiv \frac{\delta_c(z)}{\sigma_R}. \quad (22)$$

Функция $\delta_c(z)$, которая может быть рассчитана аналитически, контролируется численными методами. Для КСМ $\delta_c = \bar{g}(z) \delta_c(z) = \text{const} \simeq 1,67$, где $\bar{g}(z)$ — фактор роста линейных возмущений плотности ($\bar{g}(0) = 1$). Интересующий нас начальный ансамбль протогало с разными массами,

$$M_h \geq M_R, \quad (23)$$

включает в себя только те точки пространства $\mathbf{x}$, для которых средняя плотность материи в шаре радиусом R вокруг данной точки превышает пороговое значение (22), где $\delta(\mathbf{x}) \equiv \rho(\mathbf{x})/\rho_m - 1$ — линейный контраст плотности по отношению к её среднему значению во Вселенной ρ_m ; δ_R — сглаженный контраст плотности δ_R с фильтром радиусом R :

$$\delta_R = \delta_R(\mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{x}') W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}', \quad (24)$$

$W_R(r)$ — функция "окна",

$$W_R(r) = \frac{3}{4\pi R^3} \begin{cases} 1, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}.$$

Очевидно, что в функции (24) отсутствует информация о возмущениях в масштабах, меньших R .

Дисперсия линейного контраста сглаженной плотности σ_R , аппроксимированная по линейному закону эволюции к современному моменту, $z = 0$, связана со спектром мощности неоднородностей $P(k)$ следующим интегральным соотношением (см. приложение А):

$$\sigma_R^2 \equiv \langle \delta_R^2 \rangle = \int_0^\infty P(k) W^2(kR) k^2 dk, \quad (25)$$

где $W(y) = 3y^{-3}(\sin y - y \cos y)$ — фурье-образ функции окна ($y = kR$). Из наблюдений известно, что $\sigma_{11} \simeq 0,8$ для радиуса $R = 11$ Мпк, охватывающего массу скопления галактик $M_{11} \simeq 2 \times 10^{14} M_\odot$. В астрономии это эквивалентно исторически сложившейся нормировке "на сигма-восемь", где индекс "восемь" соответствует физическому радиусу $R = 8/0,7 \text{ Мпк} \simeq 11 \text{ Мпк}$.

Мы будем использовать полученные ансамбли для описания средних "термодинамических" характеристик ТМ в протогало. Полная энтропия вириализованного гало интегрирует совокупное воздействие всех неравновесных процессов, протекавших за время его формирования, включая в себя как фоновую энтропию частиц, связанную с начальными космологическими возмущениями, так и приобретённую энтропию, генерируемую в ходе бурной релаксации и иерархического сгущивания материи. Космологическую часть можно рассчитать аналитически, а для оценки нелинейной составляющей мы воспользуемся численными результатами.

9. От профиля плотности к энтропии

Прежде всего следует разобраться, каким образом распределена энтропия внутри равновесного гало. Для упрощения вычислений ограничимся степенной аппроксимацией центрального профиля плотности гало (5):

$$\rho(r) \propto r^{-\alpha}, \quad (26)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(x) x^2 dx \propto r^{3-\alpha},$$

где индекс наклона $\alpha \in (0, 2,5)$. При численном моделировании формирования гало возникают профили с $\alpha \gtrsim 1$, тогда как в наблюдениях, как правило, $\alpha < 1$ (рис. 10). В первом случае мы имеем дело с каспом ($1 \leq \alpha < 2,5$), а во втором — с ядром ($0 \leq \alpha < 1$).

Физическое различие между каспом и ядром следует из поведения эффективного давления, которое можно

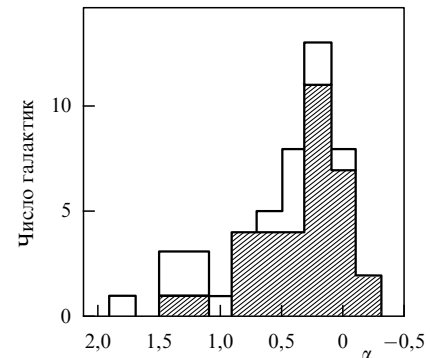


Рис. 10. Распределение степенного индекса плотности α в центральных областях галактик с низкой поверхностной яркостью (см. [61]).

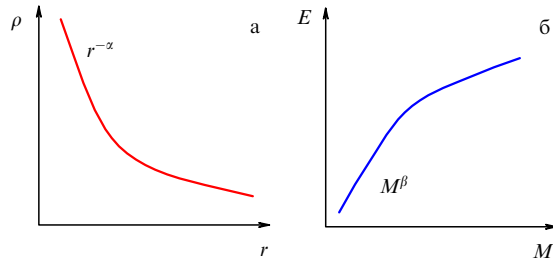


Рис. 11. Профили плотности (а) и энтропии (б) в гало ТМ [2].

определить из уравнения (7):

$$p(r) = c_1 + c_2 r^{2(1-\alpha)}, \quad (27)$$

где c_1 и c_2 — константы интегрирования. Критической величиной является значение $\alpha = 1$: в ядре давление конечно, тогда как в центре каспа оно расходится.

Из (8) получаем энтропийную функцию масс

$$E(M) \propto c_1 M^{\beta_1} + c_2 M^{\beta_2} \propto M^{\beta}, \quad (28)$$

$$\beta_1 = \frac{5\alpha}{3(3-\alpha)}, \quad \beta_2 = \frac{6-\alpha}{3(3-\alpha)},$$

где параметр $\beta = d(\ln E)/d(\ln M)$ лежит в интервале между β_1 и β_2 и его локальное значение зависит от текущей массы гало. При $\alpha = \alpha_c \equiv 1$ интервал возможных значений β стягивается в точку:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_c \equiv \frac{5}{6}.$$

Мы перешли от радиуса r к сопутствующей массе M в шаре радиусом r , поскольку она сохраняется и при линейных возмущениях, и в ходе релаксации гало.

Как подчёркивалось, энтропийная функция масс аккумулирует воздействие необратимых процессов в ходе эволюции ТМ и задаёт профиль равновесного гало. В рассматриваемом интервале значений α мы имеем $\beta_{1,2} > 0$, так что $E(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow 0$ (рис. 11). Однако в центре каспа энтропия частиц очень мала,

$$\beta > \frac{5}{6}: \quad M^{-5/6} E(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow 0,$$

тогда как в центре ядра она существенно выше, что и делает невозможным возникновение каспа,

$$\beta < \frac{5}{6}: \quad M^{-5/6} E(M) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad M \rightarrow 0.$$

Для критического значения $\beta = 5/6$ из (8) и (28) получаем

$$M \propto \sigma^4. \quad (29)$$

Эта формула воспроизводит известные эмпирические соотношения Фабера–Джексона [62] и Талли–Фишера [63], связывающие наблюдаемую дисперсию скоростей звёзд или газа с массой (светимостью) соответственно в эллиптических галактиках или сферических подсистемах спиральных галактик.

Рисунок 12 иллюстрирует различие между каспом и ядром равновесного гало с точки зрения распределения энтропии. Как видно, вопрос о формировании центрального каспа или ядра зависит от полной энтропии материи, приобретённой до образования гало, в процессе его образования и после.

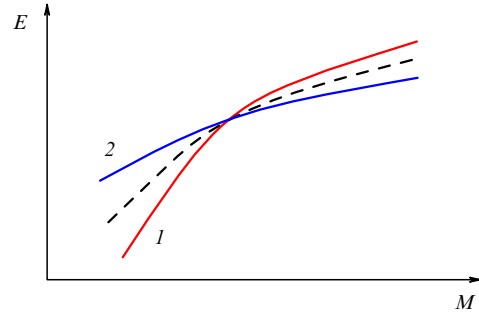


Рис. 12. Энтропийная функция масс равновесного гало. Кривая 1 — касп, кривая 2 — ядро, штриховая кривая соответствует значению $\beta_c = 5/6$.

Теперь мы можем количественно ответить на вопрос о том, как приобретают отличную от нуля температуру изначально холодные частицы КСМ.

Процесс образования гало можно разбить на несколько последовательных этапов.

- Начальные движения ТМ потенциальны и сфазированы, относительные скорости близких частиц малы, имеется гладкое поле скоростей ТМ. Случайные отклонения от средней скорости, задаваемые спектром начальных возмущений, увеличиваются с возрастанием масштаба, достигая насыщения на относительно больших масштабах (~ 40 Мпк) (см. рис. 14 в разделе 10).

- При сжатии протогало происходит сближение и перемешивание частиц в малых масштабах, теряется начальная фаза мелкомасштабной части случайной скорости: частицы ТМ "подогреваются" (возникает фоновая энтропийная функция масс E_b)³.

- Хаотизация скорости *регулярного* сжатия и превращение кинетической энергии сжатия в тепловую энергию происходят несколько позднее в ходе бурной релаксации и слияния сгустков (генерируется энтропия E_g).

- Результирующий профиль равновесных гало получается объединением начальной энтропии E_b и приобретённой энтропии E_g .

В разделах 10, 11 мы получим начальный *средний* энтропийный профиль $\langle E_b \rangle$ по соответствующей дисперсии линейных возмущений скорости (см. раздел 11, формула (49)). Такое представление предполагает почти адиабатическое сжатие материи и является оценкой снизу средней функции $E_b(M)$ при малых M .

10. Начальные космологические возмущения

Поле скалярных космологических неоднородностей характеризуется тремя калибровочно-инвариантными переменными: пространственным вектором смещения материальной точки из невозмущённого положения

³ Грубую энтропию можно определить как долю объёма фазового пространства, приходящегося на одну частицу:

$$E_b \propto \left(\frac{\Delta N}{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v}} \right)^{-2/3} \simeq \frac{\sigma_{\Delta \mathbf{v}}^2}{n^{2/3}},$$

где ΔN — число частиц в объёме $\Delta \mathbf{x} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, включающем встречные потоки частиц, Δv_i — относительная скорость потоков частиц в масштабе Δx_i ($\Delta \mathbf{v} = \Delta v_1 \Delta v_2 \Delta v_3$), $\sigma_{\Delta \mathbf{v}}$ — дисперсия относительных скоростей потоков частиц в объёме $\Delta \mathbf{x}$. Грубая энтропия не уменьшается в ходе релаксации потоков частиц и переходит в настоящую энтропийную функцию массы вирialized системы.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{x}), \quad (30)$$

полной скоростью материи

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(z, \mathbf{x}) \quad (31)$$

и сопутствующим возмущением плотности:

$$\delta_m \equiv \frac{\rho(z, \mathbf{x})}{\rho(z)} - 1 = \bar{g}(z) \delta(\mathbf{x}). \quad (32)$$

Зависимость средней плотности от красного смещения имеет вид $\rho(z) = \rho_m(1+z)^3$, где плотность ТМ задаётся выражением (см. раздел 3)

$$\rho_m = \frac{3\Omega_m H_0^2}{8\pi G} \simeq 3 \times 10^{-30} \text{ г см}^{-3}.$$

Среднее смещение частиц во Вселенной равно нулю, а его дисперсия определяется интегралом от спектра мощности возмущений плотности:

$$\sigma_S \equiv \sqrt{\langle S^2 \rangle} = \left(\int_0^\infty P(k) dk \right)^{1/2} \simeq 14 \text{ Мпк}. \quad (33)$$

Сфера радиусом $R = \sigma_S$ охватывает массу богатого скопления галактик

$$M_S = \frac{4\pi}{3} \rho_m \sigma_S^3 \simeq 4 \times 10^{14} M_\odot.$$

Соотношения между переменными определяются линейной теорией возмущений (см. подробнее [1]):

$$\tau(z, \mathbf{x}) = (1+z)^{-1}(\mathbf{x} + \bar{g}\mathbf{S}), \quad (34)$$

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\tau} = H(\tau - \bar{g}'\mathbf{S}), \quad \delta(\mathbf{x}) = -\text{div } \mathbf{S}, \quad (35)$$

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{V} - H\tau = -H\bar{g}'\mathbf{S}, \quad (36)$$

$$\sigma_v \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} \simeq 200 \sqrt{\frac{10}{1+z}} \text{ км с}^{-1},$$

где $\tau(z, \mathbf{x})$ и $\mathbf{x}$ — соответственно эйлеровы и лагранжевы координаты среды, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{\text{pec}}$ и σ_v — пекулярная скорость и её дисперсия, $\bar{g}'_z$ — производная по красному смещению z . Фактор роста $\bar{g} = \bar{g}(z)$ нормирован на единицу при нулевом красном смещении ($\bar{g}(0) = 1$), а при $z > 1$

$$\bar{g} \simeq \frac{1,3}{1+z}.$$

Функция Хаббла и соотношение между красным смещением и пекулярной скоростью материи при $z > 1$ имеют вид

$$H \simeq 0,5(1+z)^{3/2} H_0, \quad (37)$$

$$\mathbf{v} \simeq 0,5 H_0 \sqrt{1+z} \bar{g} \mathbf{S} \simeq \frac{45}{\sqrt{1+z}} \left(\frac{\mathbf{S}}{\text{Мпк}} \right) \text{ км с}^{-1}.$$

Перейдём к характеристике мелкомасштабных движений материи в протоголо. Для этого введём вектор относительного смещения точек среды, находящихся на расстоянии r друг от друга (см. (30)):

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\sqrt{2} \sigma_S}. \quad (38)$$

Вектор $\mathbf{s}$ описывает поле нормированной пекулярной скорости материи с текущим радиусом-вектором $\mathbf{r}$, отсчитываемым от точки $\mathbf{x}$. Нас интересует средняя относительная скорость и её вариация при усреднении

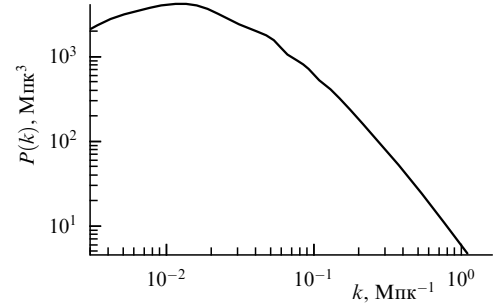


Рис. 13. Спектр мощности $P(k)$ в КСМ, $\sigma_{10} = 1$.

по разным ансамблям (или точкам $\mathbf{x}$) в разных областях Вселенной.

Модуль радиуса-вектора $r = |\mathbf{r}|$ будем фиксировать в интервале линейных масштабов, соответствующих внутренним областям гравитационно-связанного гало размером R :

$$r < R. \quad (39)$$

При $R < \sigma_S$ эти масштабы относятся к коротковолновой части спектра $P(k)$ (справа от его максимума на рис. 13),

$$k\sigma_S \gg 1 : \quad P(k) \propto k^{-3} \ln^2(k\sigma_S).$$

Отсюда получаем следующую оценку для σ_r (см. (25)):

$$\sigma_r^2 = \int_0^\infty P(k) W^2(kr) k^2 dk \propto \ln^3 \left(\frac{2\sigma_S}{r} \right). \quad (40)$$

Учитывая нормировку спектра мощности, согласно которой $\sigma_{10} \simeq 1$, приближённо можно считать:

$$1 \lesssim \sigma_R \sim \ln^{3/2} \left(\frac{2\sigma_S}{R} \right) \quad \text{при} \quad R \lesssim 10 \text{ Мпк}.$$

При $R > 10$ Мпк необходимо воспользоваться более точной оценкой для $\sigma_R < 1$, принимая во внимание изменение наклона спектра $P(k)$ в области богатых скоплений галактик.

Усредняя по всей Вселенной, получаем выражения для средней относительной скорости и её вариации:

$$\langle \mathbf{s} \rangle = 0, \quad (41)$$

$$\sigma_s^2 \equiv \langle s^2 \rangle = \sigma_S^{-2} \int_0^\infty P(k) \left(1 - \frac{\sin kr}{kr} \right) dk. \quad (42)$$

Случайная часть скорости $\sigma_s = \sigma_s(r)$ монотонно возрастает с увеличением масштаба (рис. 14). При $r < \sigma_S$ её рост имеет квазистепенной характер с плавным уменьшением индекса наклона, начиная от единицы:

$$\sigma_s \simeq \frac{r\sigma_r}{\sqrt{6}\sigma_S}.$$

При $r \gtrsim \sigma_S$ возрастание функции σ_s замедляется, а при $r \gg \sigma_S$ она достигает насыщения: $\sigma_s \rightarrow 1$. При $r = \sigma_S$ величина $\sigma_s \simeq 1/2$.

Корреляционный радиус функции (42), при котором $\sigma_s^2(r_s) = 1/2$, составляет $r_s \sim 36$ Мпк. Заметим, что это *средний* корреляционный радиус относительной скорости материи. Вариация вектора (38) анизотропна (различна для продольных и поперечных компонент), и она зависит от положения частиц относительно центра

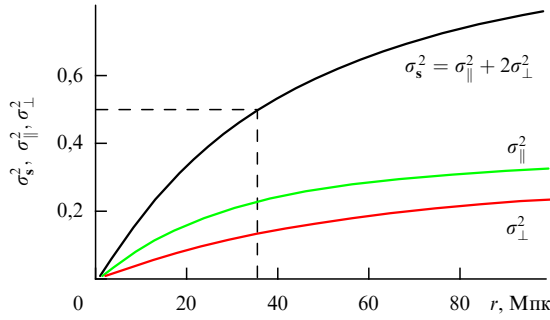


Рис. 14. Вариация относительной скорости $\sigma_s^2(r)$ и её продольной $\sigma_{\parallel}^2$ и поперечной $\sigma_{\perp}^2$ компонент (см. [2]).

гало $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$:

$$c_{ij} \equiv \langle s_i s_j \rangle = \sigma_{\parallel}^2 e_i e_j + \sigma_{\perp}^2 p_{ij}, \quad (43)$$

$$\sigma_s^2 = c_{ii} = \sigma_{\parallel}^2 + 2\sigma_{\perp}^2, \quad (44)$$

где $p_{ij} = \delta_{ij} - e_i e_j$ — проекционный тензор на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{e}$,

$$\sigma_{\parallel}^2 = \sigma_s^{-2} \int_0^{\infty} P(k) \left[\frac{1 + 2W(kr)}{3} - \frac{\sin kr}{kr} \right] dk,$$

$$\sigma_{\perp}^2 = \frac{1}{3} \sigma_s^{-2} \int_0^{\infty} P(k) [1 - W(kr)] dk.$$

У продольной вариации корреляционный радиус составляет 20 Мпк ($\sigma_{\parallel}^2 \simeq 1/6$), тогда как у поперечной — 49 Мпк ($\sigma_{\perp}^2 \simeq 1/6$).

Усредняя по ансамблю протогало (см. приложение Б) со средним контрастом плотности v_R (см. (22)), получаем условные ожидания мелкомасштабных скоростей материи в протогало:

$$\langle \mathbf{s} | v_R \rangle = \mathbf{c} v_R, \quad (45)$$

$$\sigma_{\mathbf{s}|v}^2 \equiv \langle \mathbf{s}^2 | v_R \rangle - \langle \mathbf{s} | v_R \rangle^2 = \sigma_s^2 - \mathbf{c}^2, \quad (46)$$

где коэффициент кросскорреляции имеет вид (см. (39))

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \equiv \langle \mathbf{s} v_R \rangle &= -\frac{\mathbf{r}}{3\sqrt{2}\sigma_S\sigma_R} \int_0^{\infty} P(k) W(kR) W(kr) k^2 dk \simeq \\ &\simeq -\frac{\mathbf{r}\sigma_R}{3\sqrt{2}\sigma_S}. \end{aligned}$$

Функция (45) определяет универсальный профиль скорости коллапсирующего протогало массой M_R . Условная вариация (46) описывает дисперсии случайных отклонений скорости от средней внутри протогало:

$$\sigma_{\mathbf{s}|v}^2(r) = \sigma_s^2 - \frac{1}{18} \left(\frac{r\sigma_R}{\sigma_S} \right)^2. \quad (47)$$

11. Решение проблемы галактических каспов

Фактор подавления пекулярных движений ТМ в протогало по сравнению с относительными движениями материи в целом во Вселенной,

$$f(r|R) \equiv \frac{\sigma_{\mathbf{s}|v}^2}{\sigma_s^2} \simeq 1 - \frac{1}{18} \left(\frac{r\sigma_R}{\sigma_S\sigma_s} \right)^2,$$

представлен на рис. 15 для галактической массы $1,3 \times 10^{12} M_{\odot}$ ($R = 2$ Мпк). Для галактик и групп галак-

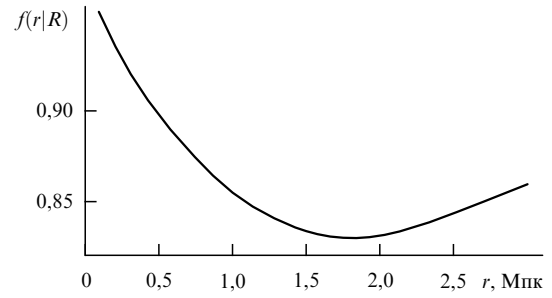


Рис. 15. Фактор подавления $f(r|R)$ пекулярных скоростей внутри гало массой $M = 1,3 \times 10^{12} M_{\odot}$ (линейный размер $R = 2$ Мпк) (см. [2]).

тик кросскорреляция внутри протогало несущественна:

$$\sigma_{\mathbf{s}|v}^2(r) \simeq \frac{r^2}{6\sigma_S^2} \left(\sigma_r^2 - \frac{1}{3} \sigma_R^2 \right) \simeq \sigma_s^2, \quad (48)$$

и дисперсия мелкомасштабных скоростей ТМ имеет *универсальный* вид, не зависящий от массы протогало (см. (36), (37)),

$$\sigma_v \equiv \sigma_v \sigma_{\mathbf{s}|v} \simeq \sigma_v \sigma_s,$$

однако величина дисперсии зависит от момента образования гало z .

Предполагая, что грубая энтропия $E(M)$ не изменяется при сжатии протогало (см. сноску 3 в разделе 9), получаем средний профиль фоновой энтропийной функции масс (8) в параметрическом представлении [2, 41]:

$$\langle E_b \rangle = \frac{\sigma_v^2}{3} \left(\frac{m_p}{\rho(z)} \right)^{2/3} \propto \sigma_s^2(r), \quad M = M_r \propto r^3. \quad (49)$$

Отсюда вычисляем степенной индекс наклона β_b , зависящий от показателя n центральной массы гало $M \equiv 10^n M_{\odot} < M_R < M_S \simeq 4 \times 10^{14} M_{\odot}$:

$$\beta_b = \frac{d(\ln \langle E_b \rangle)}{d(\ln M)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{\ln(2\sigma_S/r)} \simeq \frac{2}{3} - \frac{1,3}{16-n}. \quad (50)$$

В таблице приведены численные значения β_b для разных n . Мы видим, что в гало галактик и групп галактик фоновая энтропия препятствует образованию центрального каспа, поскольку

$$\beta_b < 0,6 < \frac{5}{6}. \quad (51)$$

При увеличении R в области $R > \sigma_S$ и пропорциональном увеличении внутреннего радиуса $r < R$ (т.е. для больших гало, $M_R \geq 4 \times 10^{14} M_{\odot}$)⁴ кросскорреляций $\langle \mathbf{s} v_R \rangle$ прене-

Таблица. Степенной индекс фоновой энтропийной функции β_b для центральных масс гало $M \equiv 10^n M_{\odot} < M_R < 4 \times 10^{14} M_{\odot}$

n	12	10	8	6	4
β_b	0,34	0,45	0,50	0,53	0,56

⁴ Заметим, что радиус r влияния тёмной материи нельзя считать малым, принимая во внимание "холодные" барионные потоки и массивные cD-галактики в центрах скоплений. По сходной причине нет смысла рассматривать центральные массы ТМ, меньшие массы чёрных дыр в центрах галактик. Напомним в связи с этим, что характерные масштабы распределений ТМ много больше размеров центральных барионных образований.

бречь уже нельзя (см. (47)) и мелкомасштабные движения ТМ в протогало подавляются. По этой причине влияние фоновой энтропии ТМ внутри богатых скоплений галактик ослаблено.

Таким образом, в центральной области гало галактик и групп формируются ядра ТМ, которые, следуя астрономической традиции, уместно назвать сферической подсистемой или "балджем" ТМ (по аналогии с барионным балджем). Если предположить, что в области максимальной светимости $\alpha \sim 1$ (см. (29)), то для балджей должно выполняться соотношение Фабер–Джексона, что и наблюдается в эллиптических галактиках. В дисковых и спиральных галактиках балдж занимает относительно небольшую область гало, хотя его светимость в линии H_α может быть значительной, что, по видимому, объясняет соотношение Талли–Фишера.

В больших спиральных галактиках балдж ТМ деформирован из-за притока туда барионов⁵, однако его размер всё же достаточно велик. Так, в Галактике балдж занимает несколько килопарсек. При увеличении r он трансформируется в распределение ТМ $\rho \propto r^{-2}$ с почти плоской кривой вращения, которая в свою очередь простирается до 10 кпк и, возможно, далее, выходя за край диска, и о дальнейшем распределении ТМ можно судить по движениям карликовых галактик-спутников.

Что касается гравитационно-связанных групп галактик, то, согласно результатам расчётов, центральный балдж ТМ успел образоваться только в *компактных* группах. Существует обширный класс *рассеянных* групп галактик, прошедших лишь частичную релаксацию. К числу последних относится Местная группа, масса которой ($\sim 2 \times 10^{12} M_\odot$) складывается из масс двух больших спиральных галактик (Млечный Путь и Туманность Андромеды), а также включает в себя небольшую добавку, состоящую из масс нескольких десятков карликовых галактик.

При сопоставлении предсказаний теории с наблюдательными данными следует иметь в виду *широкий разброс* в распределении фоновой энтропии (и соответствующих внутренних профилей плотности) релаксировавших гало, который реально наблюдается в галактиках (см. рис. 10) и на который прямо указывает теория КСМ.

Действительно, для гауссовых начальных возмущений скорости функция распределения вероятности фоновой энтропии имеет вид

$$dp(f_b) = \frac{\exp(-f_b/2)}{\sqrt{2\pi f_b}} df_b, \quad (52)$$

⁵ Следует отметить, что при медленном накоплении барионов касп ТМ (если он существует) не разрушался бы, а только усиливался. В этом смысле он *адиабатически* устойчив. Остаётся вопрос: какой плотности ТМ достигает в центре гало? От этого, в частности, зависят ожидания экспериментаторов по обнаружению продуктов аннигиляции ТМ (гамма-фотонов, позитронов, антипротонов и других частиц). Для ответа на этот вопрос необходимы дополнительные исследования. Идеальным объектом для изучения центральных распределений ТМ являются карликовые галактики с низкой поверхностной яркостью (см. рис. 3), в которых процесс звездообразования подавлен, а газ, поддерживаемый во вращательном равновесии, не падает в центр гало. Исследования спиральных галактик также пока не указывают на существование центральных каспов. Всё более значимую роль в восстановлении поверхностной плотности ТМ играют методы слабого гравитационного линзирования.

где

$$f_b \equiv \frac{E_b}{\langle E_b \rangle} \simeq \frac{s^2}{\sigma_s^2}.$$

Мы видим, что фоновая энтропия гало имеет широкое распределение вероятности и её вариации вокруг средней величины (49) велики:

$$\langle f_b \rangle = 1, \quad \langle f_b^2 \rangle = 3 \langle f_b \rangle = 3.$$

Эти большие величины,

$$\text{var } E_b > \langle E_b \rangle^2,$$

подразумевают *значительные* отклонения от средних значений степенных индексов наклона центральных профилей плотности в гало разных галактик, что подтверждается наблюдениями.

С внутренней структурой равновесных гало тесно связана проблема кривых вращения, которую мы обсудим в разделе 12.

12. Кривые вращения галактик

В разделе 5 мы рассмотрели наблюдаемые во многих галактиках плоские кривые вращения звёздных и газовых дисков, свидетельствующие об изотермическом распределении ТМ внутри гало в диапазоне радиусов или масс $\lesssim 10$. Соответствующие степенные индексы профилей плотности и энтропии в таких системах ($r > r_0$, см. (11), (24)):

$$\alpha \simeq 2, \quad \beta \simeq \frac{4}{3}.$$

Как отмечалось в разделе 6, похожие распределения генерируются в аналитических моделях сферически симметричного или квазисферического коллапса пылевой гравитирующей материи с гладким начальным распределением плотности, в котором фоновые мелкомасштабные неоднородности заведомо отсутствуют. В ходе нелинейного сжатия такого облака в его центральной области возникают каустики (самопересечения) и многопоточковые движения материи, индуцирующие процессы бурной бесстолкновительной релаксации. В результате гравитационного перераспределения энергии между сферическими оболочками материи в центральной части гало формируются степенные профили плотности и энтропии с соответствующими интервалами индексов:

$$1,6 < \alpha_g < 2, \quad 1 < \beta_g < 1,3. \quad (53)$$

Как видно из (53), бурная релаксация приводит к распределению энтропии, которое подразумевает формирование каспа. Однако указанные индексы относятся к сравнительно большим радиусам. В центральной части гало генерируемая энтропия (53) не может конкурировать с фоновой и оказывается по сравнению с ней пренебрежимо малой (см. таблицу). Следовательно, действие фоновой энтропии ограничивает центральную плотность и тормозит образование каспоподобных профилей гало.

Тот же вывод справедлив и для численного эксперимента, моделирующего наиболее сложные этапы формирования гало, которые не поддаются аналитическому расчёту. Бурная релаксация, основанная на доминирова-

нии радиальных траекторий, — это далеко не единственный и, возможно, не главный процесс релаксации бесстолкновительных систем, выделившихся из фридмановского потока в ходе космологического расширения. Важная роль здесь принадлежит анизотропному коллапсу и эффектам слияния сгустков разных масс, которые образуются до возникновения центрального массивного образования и параллельно с ним. Все эти процессы, которые реально наблюдаются в нелинейных релаксирующих гравитационно-связанных системах при больших красных смещениях, носят название иерархического сгустивания — это приливные парные (а также тройные и пр.) взаимодействия сгустков материи, захваченных общим гравитационным полем, их рассеяние и слияние в более массивные образования с последующим повторением цикла.

С развитием методов численного моделирования для большого числа гравитационно взаимодействующих между собой тел-частиц появилось понятие *универсального* профиля плотности гало НФУ, возникающего при усреднении приведённых профилей плотности нескольких сотен сгустков разных масс и размеров, образующихся в ходе слияний. Начальные распределения частиц в задаче N тел приближены к космологическим условиям, однако из-за конечности числа N динамический диапазон моделируемых масштабов ограничен. Как отмечалось в разделе 6, профиль плотности НФУ асимптотически приближается к каспиподобному степенному закону с индексами

$$\alpha_g = 1, \quad \beta_g = \frac{5}{6}.$$

По-видимому, при численном моделировании задачи N тел происходит недооценка фоновой энтропии мелко-масштабных возмущений вследствие ограниченности пространственного разрешения метода. Можно надеяться, что с увеличением мощности численных методов эффекты фоновой энтропии смогут быть адекватно замечены и учтены.

Уже сейчас появляются некоторые указания на то, что с увеличением числа N индекс α убывает и становится меньшим единицы, однако это пока единичные примеры, и ни о какой статистике говорить не приходится. Вследствие мелкомасштабного обрезания модельного спектра мощности эффект начальной энтропии подавляется по сравнению с таковым, определяемым аналитическими оценками, приведёнными в таблице.

Бесспорно, влияние фоновой энтропии на внутреннюю структуру гало и формирование центрального ядра с конечными давлением и плотностью ТМ должны быть подтверждены численным экспериментом. Тем не менее мы уже сегодня можем проверять предсказания КСМ, измеряя скорости газа и звёзд в галактиках и скоплениях.

Рисунок 3 демонстрирует кривые вращения галактик, которые не описываются формулой (19), но хорошо аппроксимируются более мягким профилем (18). Подобные примеры типичны для галактик (см., например, [64]). В центральной области при $r < r_s$ аппроксимация, построенная по наблюдательным точкам, напоминает приближение изотермической сферы (см. (16), (17)), однако при больших радиусах плотность убывает обратно пропорционально r^3 и циркулярные скорости медленно затухают. Максимум циркулярная скорость

достигает в точке локального профиля плотности с индексом $\alpha = 2$.

Численные профили НФУ сталкиваются и с другой проблемой: они не воспроизводят плоские кривые вращения галактик в наблюдаемом диапазоне масштабов. Тем не менее численные профили являются хорошей аппроксимацией распределения массы в скоплениях галактик (см. рис. 4, 5).

13. Влияние фоновой энтропии

Для того чтобы понять физический смысл и многообразие наблюдаемых кривых вращения, следует принять во внимание начальную фоновую энтропию ТМ в нелинейных гало. Форма полных профилей распределений плотности и энтропии в равновесных гало определяется суммарным действием фоновой и генерируемой энтропий частиц ТМ.

Для пояснения физики этого воздействия рассмотрим простейшую модель объединённой энтропийной функции масс в следующем виде:

$$E(M) = \sqrt{E_b^2 + E_g^2}, \quad f_b = \frac{E_b}{E}, \quad (54)$$

где параметр $f_b \in (0, 1)$ задаёт относительный вклад фоновой энтропии на фиксированном внутреннем радиусе гало, соответствующем максимальной циркулярной скорости или локальному индексу наклона плотности $\alpha = 2$. Функции $E_{b,g}(M)$ имеют степенной вид с соответствующими индексами наклонов в следующих интервалах:

$$\beta_b \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \beta_g \in \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right). \quad (55)$$

Теперь мы можем аналитически рассчитать кривые вращения частиц в равновесных гало ТМ и сравнить их с данными наблюдений и численного моделирования.

Результаты представлены на рис. 16. Скорости вращений $v_{\text{rot}} = v(r)$ как функции внутреннего радиуса r получены для моделей иерархической ($\beta_g = 5/6$, рис. 16а) и бурной ($\beta_g = 4/3$, рис. 16б) релаксаций для двух предельных значений f_b : $f_b \ll 1$ и $f_b \sim 1$, и трёх значений индексов фоновой энтропии. Скорости и радиусы нормированы на соответствующие значения максимальной скорости и радиуса r_{-2} , на котором она достигается: $v_{\text{max}} \equiv v(r_{-2}) \geq v(r)$. Как видно из рисунка, для гало с $\beta_b < 0,5$ и любых параметров β_g и f_b из отведённых им интервалов изменений индуцированные кривые вращения полностью перекрывают область между аппроксимациями НФУ и Бюркerta. При $f_b \ll 1$ кривые сдвигаются в область профилей НФУ, а при увеличении f_b — в сторону наблюдаемых профилей Бюркerta.

Таким образом, наблюдаемые кривые вращения успешно воспроизводятся простыми моделями (54) с соответствующим подбором параметров f_b и β_b . Разброс распределений фоновой (52) и генерированной (55) энтропий в гало позволяет объяснить требуемое разнообразие форм наблюдаемых кривых вращений. При увеличении индекса β_b кривые вращения концентрируются ближе к профилям НФУ.

Рассмотренные примеры доказывают следующее.

- Фоновая энтропия препятствует образованию центральных каспов ТМ в гало с массами в интервале

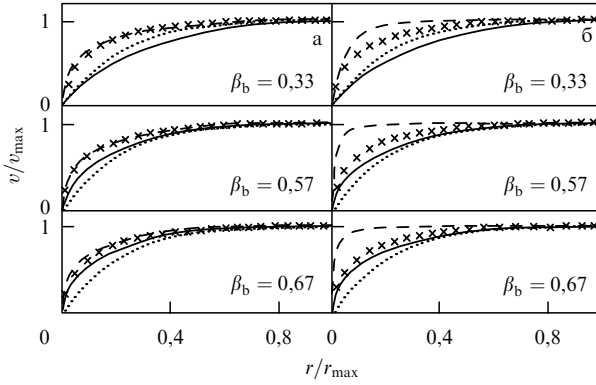


Рис. 16. Нормированные кривые вращений $v(r)$ для моделей (а) иерархической ($\beta_g = 5/6$) и (б) бурной ($\beta_g = 4/3$) релаксации при $f_b \ll 1$ (пунктирная кривая) и $f_b \simeq 1$ (сплошная кривая) (см. [41]). Аппроксимации НФУ и Бюркerta обозначены соответственно крестиками и пунктирной кривой.

$(10^8 - 10^{14}) M_\odot$. Для меньших и больших гало влияние фоновой энтропии ослаблено.

- Учёт влияния фоновой энтропии на распределение плотности внутри гало позволяет воспроизвести наблюдаемые кривые вращения в широком диапазоне масштабов и, вероятно, может решить проблему каспов в рамках КСМ.

В заключение заметим, что рассмотренные нами модели основаны на простых предположениях о распределении частиц ТМ в гало в пренебрежении барионным компонентом вещества. Полная задача об эволюции галактических профилей плотности, включающая в себя ТМ и барионы и учитывающая влияние различных диссипативных процессов на перенос углового момента из центральной части галактик, безусловно, очень сложна, и она требует дальнейших исследований, в том числе с помощью численного моделирования.

14. Заключение

Рассмотренный энтропийный метод описания вириализованных систем ТМ позволяет аналитически исследовать эти сложные нелинейные структуры и связать внутренние профили плотности ТМ с характеристиками как начального *мелкомасштабного* поля неоднородностей плотности, так и нелинейной *крупномасштабной* релаксации гравитационно-сжатого вещества. Сделан вывод о том, что космологические случайные движения вещества "подогревают" частицы ТМ в коллапсирующей протогало. Показано, что учёт этого эффекта:

- приводит к подавлению каспоподобных профилей распределения плотности внутри формирующихся гало и образованию ядер ТМ в галактиках;
- позволяет объяснить различие в кривых вращения галактик, полученных с помощью наблюдений и в численном эксперименте;
- способствует решению проблемы внутренней структуры равновесных гало ТМ в рамках КСМ.

Полученные аналитические результаты должны быть подтверждены в численных моделях N тел, что достижимо в будущем при лучшем пространственном разрешении центральных частей гало.

Авторы благодарят С.В. Пилипенко за плодотворные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-02-12168-офи-м-2011, 11-02-00244) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (госконтракты П1336 и 16.740.11.0460).

15. Приложения

Приложение А.

Корреляционные функции начальных возмущений

Фурье-гармоники линейного поля возмущений плотности δ -коррелированы:

$$\delta(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \delta_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k},$$

$$\langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* \rangle = 2\pi^2 P(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

где усреднение $\langle \dots \rangle$ проводится по всем реализациям случайного гауссова поля, $\delta^{(3)}(\mathbf{k})$ — трёхмерная δ -функция Дирака, $P = P(k)$ — спектр мощности.

Используя это разложение, можно построить любые корреляторы поля космологических возмущений, например:

$$\langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \delta(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty P(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk,$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \delta(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{\mathbf{r}}{3} \int_0^\infty P(k) W(kr) k^2 dk,$$

$$\begin{aligned} \langle S_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) S_k(\mathbf{x}) \rangle &= e_j e_k \int_0^\infty P(k) \left[\frac{\sin kr}{kr} - \frac{2}{3} W(kr) \right] dk + \\ &+ \frac{1}{3} p_{jk} \int_0^\infty P(k) W(kr) dk, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e} = e_j = r_j/r$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$, p_{jk} — проекционный тензор (см. (43)), $\delta = -\text{div } \mathbf{S}$, $\mathbf{S}$ — вектор смещения элементов материи (см. (30)–(37)),

$$\mathbf{S} = S_j = i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{k_j}{k^2} \delta_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k}.$$

Таким же образом можно представить сглаженные поля, например:

$$\delta_R = (2\pi)^{-3/2} \int \delta_{\mathbf{k}} W(kR) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k},$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \delta_R(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{\mathbf{r}}{3} \int_0^\infty P(k) W(kR) W(kr) k^2 dk$$

и т.д.

Приложение Б.

Функция распределения условной вероятности

Для получения условной вероятности $p(\mathbf{s}|\nu_R)$ нахождения $\mathbf{s}$ при заданной величине ν_R рассмотрим гауссову функцию распределения двух переменных $x_A = (\mathbf{s}, \nu_R)$ с индексом A , пробегающим значения i, R :

$$p(\mathbf{s}, \nu_R) = \frac{\exp(-\kappa^2/2)}{(2\pi)^2 \sqrt{C}}, \quad \kappa^2 = c^{AB} x_A x_B,$$

где c^{AB} — матрица, обратная к матрице (см. (43), (45))

$$c_{AB} = \langle x_A x_B \rangle = \begin{pmatrix} c_{ij} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c} & 1 \end{pmatrix},$$

$$C \equiv \det(c_{AB}) = \bar{\sigma}_\parallel^2 \sigma_\perp^4, \quad \bar{\sigma}_\parallel^2 = \sigma_\parallel^2 - \mathbf{c}^2.$$

После несложных преобразований получаем

$$\kappa^2 = \bar{\kappa}^2 + v_R^2, \quad \bar{\kappa}^2 = \bar{c}^{ij} \bar{s}_i \bar{s}_j, \quad \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \mathbf{c} v_R,$$

где $\bar{c}^{ij}$ — матрица, обратная к

$$\bar{c}_{ij} \equiv \langle \bar{s}_i \bar{s}_j | v_R \rangle = \bar{\sigma}_{\parallel}^2 e_i e_j + \sigma_{\perp}^2 p_{ij},$$

откуда находим условную функцию вероятности распределения вектора $\mathbf{s}$ и дисперсию скоростей внутри прототало с контрастом плотности v_R :

$$p(\mathbf{s} | v_R) = \frac{p(\mathbf{s}, v_R)}{p(v_R)} = \frac{\exp(-\bar{\kappa}^2/2)}{(2\pi)^{3/2} \bar{\sigma}_{\parallel} \sigma_{\perp}^2},$$

$$\sigma_{\mathbf{s}|v}^2 \equiv \langle \bar{\mathbf{s}}^2 | v_R \rangle = \sigma_{\mathbf{s}}^2 - \mathbf{c}^2.$$

Список литературы

1. Лукаш В Н, Михеева Е В, Малиновский А М *УФН* **181** 1017 (2011) [Lukash V N, Mikheeva E V, Malinovsky A M *Phys. Usp.* **54** (10) (2011)]
2. Лукаш В Н, Михеева Е В *Физическая космология* (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010)
3. Navarro J F, Frenk C S, White S D M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** 720 (1995)
4. Navarro J F, Frenk C S, White S D M *Astrophys. J.* **462** 563 (1996)
5. Navarro J F, Frenk C S, White S D M *Astrophys. J.* **490** 493 (1997)
6. Pointecouteau E, Arnaud M, Pratt G W *Astron. Astrophys.* **435** 1 (2005)
7. Tasitsiomi A et al. *Astrophys. J.* **607** 125 (2004)
8. Hayashi E et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **355** 794 (2004)
9. Peebles P J E *Astrophys. J.* **147** 859 (1967)
10. Peebles P J E *The Large-Scale Structure of the Universe* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1980)
11. Press W H, Schechter P *Astrophys. J.* **187** 425 (1974)
12. Peacock J A, Heavens A F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **243** 133 (1990)
13. Bower R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **248** 332 (1991)
14. Bond J R et al. *Astrophys. J.* **379** 440 (1991)
15. Manrique A, Salvador-Sole E *Astrophys. J.* **453** 6 (1995)
16. Manrique A, Salvador-Sole E *Astrophys. J.* **467** 504 (1996)
17. Bond J R, Myers S T *Astrophys. J. Suppl.* **103** 63 (1996); *Astrophys. J. Suppl.* **103** 1 (1996)
18. Sheth R K, Tormen G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308** 119 (1999)
19. Raig A, González-Casado G, Salvador-Solé E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327** 939 (2001)
20. Manrique A et al. *Astrophys. J.* **593** 26 (2003)
21. White S D M, Zaritsky D *Astrophys. J.* **394** 1 (1992)
22. Sikivie P, Tkachev I I, Wang Y *Phys. Rev. D* **56** 1863 (1997)
23. Nusser A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **325** 1397 (2001)
24. Arkhipova N A et al. *Grav. Cosmology Suppl.* **8** 66 (2002)
25. Архипова Н А и др. *Астрон. журн.* **84** 874 (2007) [Arkhipova N A et al. *Astron. Rep.* **51** 787 (2007)]
26. Williams L L R, Babul A, Dalcanton J J *Astrophys. J.* **604** 18 (2004)
27. Demiański M, Doroshkevich A G *Astron. Astrophys.* **422** 423 (2004)
28. Fillmore J A, Goldreich P *Astrophys. J.* **281** 1 (1984)
29. Гуревич А В, Зубин К П *ЖЭТФ* **94** 3 (1988) [Gurevich A V, Zybin K P *Sov. Phys. JETP* **67** 1 (1988)]
30. Гуревич А В, Зубин К П *УФН* **165** 723 (1995) [Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Usp.* **38** 687 (1995)]
31. Avila-Reese V, Firmani C, Hernández X *Astrophys. J.* **505** 37 (1998)
32. Tormen G, Bouchet F R, White S D M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **286** 865 (1997)
33. Syer D, White S D M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **293** 337 (1998)
34. Nusser A, Sheth R K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **303** 685 (1999)
35. Dekel A et al. *Astrophys. J.* **588** 680 (2003)
36. Gao L et al. *Astrophys. J.* **614** 17 (2004)
37. Voglis N, Hiotelis N, Harsoula M *Astrophys. Space Sci.* **266** 213 (1995)
38. Zaroubi S, Naim A, Hoffman Y *Astrophys. J.* **457** 50 (1996)
39. Avila-Reese V et al. *Astrophys. J.* **559** 516 (2001)
40. Demiański M, Doroshkevich A G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **306** 779 (1999)
41. Mikheeva E, Doroshkevich A, Lukash V *Nuovo Cimento B* **122** 1393 (2007)
42. Taylor J E, Navarro J F *Astrophys. J.* **563** 483 (2001)
43. Ostriker J P, Bode P, Babul A *Astrophys. J.* **634** 964 (2001); astro-ph/0504334
44. Kravtsov A, arXiv:0906.3295
45. Catinella B, Giovanelli R, Haynes M P *Astrophys. J.* **640** 751 (2006)
46. Vikhlinin A et al. *Astrophys. J.* **692** 1060 (2009)
47. Freese K, arXiv:0812.4005
48. Marchesini D et al. *Astrophys. J.* **575** 801 (2002)
49. Burkert A *Astrophys. J.* **447** L25 (1995)
50. Moore B *Nature* **370** 629 (1994)
51. Moore B et al. *Astrophys. J.* **499** L5 (1998)
52. Diemand J, Moore B, Stadel J *Nature* **433** 389 (2005)
53. Пилипенко С В, Дорошкевич А Г, Готтлобер С *Астрон. журн.* **86** 1050 (2009) [Pilipenko S V, Doroshkevich A G, Gottlöber S *Astron. Rep.* **53** 976 (2009)]
54. Navarro J F, astro-ph/0311361
55. Gentile G, Tonini C, Salucci P *Astron. Astrophys.* **467** 925 (2007); astro-ph/0701550
56. Karachentsev I D et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **393** 1265 (2009)
57. Dalcanton J et al. *Astrophys. J. Suppl.* **183** 67 (2009)
58. Springel V et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **391** 1685 (2008)
59. Koposov S et al. *Astrophys. J.* **686** 279 (2008)
60. Macciò A V et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **402** 1995 (2010)
61. de Blok W J G et al. *Astrophys. J.* **552** L23 (2001)
62. Faber S M, Jackson R E *Astrophys. J.* **204** 668 (1976)
63. Tully R B, Fisher J R *Astron. Astrophys.* **54** 661 (1977)
64. Evans N W, An J, Walker M G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **393** L50 (2009)

A solution of the problems of cusps and rotation curves in dark matter halos in the cosmological standard model

A.G. Doroshkevich, V.N. Lukash, E.V. Mikheeva

Astro Space Centre, P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,

Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

E-mail: dorr@asc.rssi.ru, lukash@asc.rssi.ru, helen@asc.rssi.ru

This review discusses various aspects of inner structure formation in virialized dark matter (DM) halos that form as primordial density inhomogeneities evolve in the cosmological standard model. The main focus is on the study of central cusps/cores and of the profiles of DM halo rotation curves, the problems that reveal disagreement between theory, numerical simulations and observations. A method that was developed by the authors to describe equilibrium DM systems is presented, which makes it possible to investigate these complex nonlinear structures analytically and to relate density distribution profiles within a halo both to the parameters of the initial small-scale inhomogeneity field and to the nonlinear relaxation characteristics of gravitationally-compressed matter. It is shown that cosmological random motions of matter "heat up" DM particles in collapsing halos, suppressing cusplike density profiles within developing halos, facilitating the formation of DM cores in galaxies and providing an explanation for the difference between observed and simulated galactic rotation curves. The analytical conclusions obtained within this approach can be confirmed by *N*-body model simulation provided improved spatial resolution is achieved for central halo regions.

PACS numbers: **95.35.+d**, 98.62.Gq, 98.62.Js

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201201a.0003

Bibliography — 64 references

Received 28 December 2010

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (1) 3–18 (2012)

Physics—Uspekhi **55** (1) (2012)