

## КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

## Эконофизика и эволюционная экономика

Научная сессия Отделения физических наук  
Российской академии наук, 2 ноября 2010 г.

PACS number: 01.10.Fv

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107e.0753

2 ноября 2010 г. в конференц-зале Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (РАН) состоялась научная сессия Отделения физических наук РАН "Эконофизика и эволюционная экономика".

Объявленная на web-сайте ОФН РАН [www.grad.ac.ru](http://www.grad.ac.ru) повестка заседания содержала следующие доклады:

1. **Маевский В.И.** (Институт экономики РАН, Москва). *Переход от простого воспроизводства к экономическому росту.*

2. **Юданов А.Ю.** (Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва). *Экспериментальные данные о развитии быстрорастущих инновативных фирм в России.*

3. **Поспелов И.Г.** (Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва). *Почему иногда удаётся моделировать экономику?*

4. **Чернавский Д.С.** (Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва). *О теоретической экономике.*

5. **Романовский М.Ю.** (Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва). *Неклассические случайные блуждания и феноменология флуктуаций доходности ценных бумаг на фондовом рынке.*

6. **Дубовиков М.М., Старченко Н.В.** (Управляющая компания ИНТРАСТ, Московский инженерно-физический институт, Москва). *Фрактальный анализ финансовых временных рядов и задачи прогноза.*

Статьи, написанные на основе докладов, публикуются ниже.

PACS numbers: 89.65.Gh, 89.75.-k  
DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107f.0753

## Переход от простого воспроизводства к экономическому росту

В.И. Маевский, С.Ю. Малков

### 1. Введение. Представление макроуровня экономики в виде популяции макроэкономических подсистем

Сегодня в экономической теории существует большое количество моделей достижения статического рыночного

равновесия (см., например, [1]), а также моделей, описывающих выход макросистемы на траекторию устойчивого, стационарного экономического роста [2], но нет моделей, показывающих, каким образом на макроуровне из равновесной ситуации возникает рост.

Представляется, что причина наличия этого белого пятна носит принципиальный, методологический характер: в силу сложившейся традиции макроуровень рассматривается как целостный агрегат, поведение каждой части которого идентично поведению любой другой его части. Поскольку любая экономика занимается одновременно и производством потребительских благ, и инвестициями в основной и оборотный капиталы, то в рамках традиции неявно допускается, что каждая часть макроэкономики способна одновременно осуществлять эти два вида деятельности (режим *совместного* производства). По нашему мнению, этот устоявшийся взгляд на макроуровень нельзя абсолютизировать, рассматривая его как единственно приемлемый. Возможен другой подход, связанный с так называемым режимом *переключающегося* производства. Для того чтобы понять суть этого подхода, рассмотрим некоторые особенности функционирования машиностроительного комплекса.

Допустим, что данный комплекс включает в себя полный набор отраслей машиностроения, способных создавать активную часть основного капитала (станки, машины, приборы, механизмы и т.д.) как для самого себя, так и для всей "остальной" экономики. Если следовать традиции совместного производства, то этот комплекс нужно воспринимать как агрегат, все элементы которого одновременно работают и на себя, и на "остальную" экономику. Однако можно рассуждать иначе.

Все отрасли машиностроительного комплекса укрупнены заводами, возраст основного капитала которых в году  $t$  различен. Если данное множество заводов сгруппировать в году  $t$  по возрастному признаку, то возникнет набор подсистем, среди которых самая старая должна заняться в данном году воспроизводством своего основного капитала, тогда как остальные подсистемы будут участвовать в обеспечении роста "остальной" экономики. В следующем,  $(t+1)$ -м, году "омолодившаяся" подсистема заводов машиностроительного комплекса переключится на обеспечение роста "остальной" экономики, а вместо неё самовоспроизводством основного капитала займётся другая, наиболее старая в году  $t+1$ , подсистема заводов. Таким образом, можно сказать, что внутри машиностроительного комплекса

**В.И. Маевский.** Институт экономики РАН, Москва, РФ.  
E-mail: [maev@orc.ru](mailto:maev@orc.ru)

**С.Ю. Малков.** Академия военных наук, Москва, РФ

действует популяция неоднородных (по возрасту основного капитала, а значит, и по эффективности) машиностроительных подсистем, каждой из которых присущ режим переключающегося производства.

Поскольку функционирование машиностроительного комплекса предопределяет развитие экономики в целом, мы сочли возможным распространить переключающийся режим производства на макроуровень экономики. Для нас макроуровень — это не традиционный моноагрегат, а популяция неидентичных по возрастному признаку (а также по уровню эффективности) макроэкономических подсистем, каждая из которых в году  $t$  занимается или самовоспроизводством основного капитала, или производством потребительских благ, но не делает и то и другое одновременно.

Такое представление макроуровня заслуживает внимания хотя бы потому, что позволяет уловить конкуренцию между старыми, менее эффективными, и молодыми, более эффективными, макроэкономическими подсистемами. Молодые подсистемы, подобно технологическим укладам С. Глазьева [3], могут вытеснять старые подсистемы из экономического пространства. В этом случае активизируются процессы слияния и поглощения капитала, растёт число банкротств. Но возможно и другое — старые подсистемы успевают модернизироваться сами, без "помощи" молодых подсистем. Тогда развитие будет протекать в более спокойном режиме.

Прежде чем моделировать процессы развития, необходимо рассмотреть, как ведёт себя популяция макроэкономических подсистем в равновесной ситуации, в которой эффективность основного капитала не растёт и имеет место режим простого воспроизводства.

## 2. Модель простого воспроизводства

Приступая к построению модели простого воспроизводства популяции макроэкономических подсистем, отметим, что первым экономистом, создавшим числовую макроэкономическую модель простого воспроизводства, был французский физиократ Ф. Кенэ [4]. Вслед за ним модель простого воспроизводства построил К. Маркс [5]. Однако ни Кенэ, ни Маркс, ни их многочисленные последователи не интересовались феноменом переключающегося производства и не рассматривали макроуровень как популяцию макроэкономических подсистем. Впервые простейшая модель такого рода была предложена нами [6] в 1980 г. Рассмотрим эту модель.

Допустим, что в экономике страны величина  $T_{\text{fixed cap}}$  — средний срок службы основного капитала — составляет всего три года ( $T_{\text{fixed cap}} = 3$ ), а  $T_{\text{perg}}$  — среднее время воспроизводства данного капитала, равное одному году ( $T_{\text{perg}} = 1$ ). Допустим также, что весь основной капитал экономики равномерно распределён по возрастному признаку. В этом случае в экономике можно выделить три специфические макроэкономические подсистемы, каждая из которых способна воспроизводить свой основной капитал (программа А) и производить предметы потребления (программа Б) в *переключающемся* режиме. Выполнение программ А и Б подсистемами макроуровня сопровождается накоплением и расходованием денежных средств — "амортизационных" денег. Подсистемы отличаются друг от друга только возрастом основного капитала на начало года  $t$ . Контрагентами подсистем являются домашние хозяйства (которые снабжают рабочей силой все три подсистемы

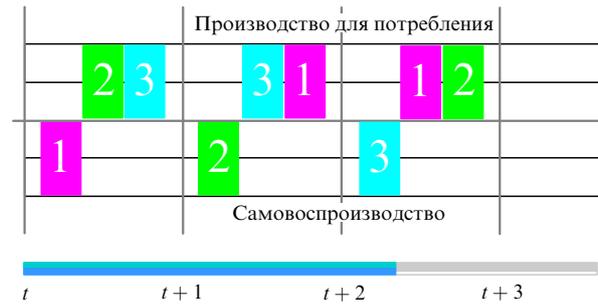


Рис. 1. Функционирование подсистем 1, 2, 3 в режиме переключения в годы  $t$ ,  $t + 1$ ,  $t + 2$ .

и являются потребителями произведённой ими продукции) и банк как посредник. Отметим, наконец, что все показатели макроэкономических подсистем измеряются в *текущих* ценах, так что производимый их совокупным действием валовой внутренний продукт (ВВП) является *номинальным* ВВП.

Первая подсистема — самая старая, в начале года  $t$  возраст её основного капитала — 2 года. К этому времени она накопила необходимые амортизационные сбережения и в течение года  $t$  будет воспроизводить свой основной капитал (программа А). Возраст основного капитала второй подсистемы в начале года  $t$  равен 1 году; она будет производить и продавать домашним хозяйствам предметы потребления и накапливать сбережения (программа Б). Третья подсистема — самая молодая: её возраст — 0 лет; в течение года  $t$  она будет вести себя так же, как и вторая подсистема (программа Б).

На следующий год подсистемы в процессе функционирования меняются местами: первая подсистема после обновления основного капитала становится самой молодой, третья оказывается на год старшей, вторая становится самой старой и начинает обновлять свой капитал и т.д. (рис. 1).

Последовательность событий по кварталам года  $t$  будет развёртываться следующим образом. В начале первого квартала года  $t$  подсистемы 1 и 2 имеют накопленные ранее амортизационные средства, которые хранятся в банке. Одна часть этих средств будет использована по кварталам года  $t$  подсистемой 1 для выплаты зарплаты своим работникам, обновляющим в течение этого года основной капитал подсистемы 1. Эти работники приносят заработанные деньги домой. Так они попадают в домашние хозяйства (семьи) 1, концентрирующиеся вокруг подсистемы 1. Другая часть хранящихся в банке амортизационных денег 1 и 2 будет использована в качестве кредитов для формирования оборотных средств подсистем 2 и 3. Считается, что к началу года  $t$  подсистемы 1 и 2 реализуют всю свою продукцию, произведённую в конце года  $t - 1$  (склады пусты): её раскупают домашние хозяйства 1, 2, 3, затрачивая на это заработанные в конце  $(t - 1)$ -го года денежные средства (рис. 2).

В течение первого квартала деньги из подсистем 1, 2, 3 перетекают в домохозяйства 1, 2, 3 в качестве зарплат, склады заполняются готовой продукцией, а домохозяйства потребляют сделанные ранее запасы. Получив зарплату, домохозяйства начинают покупать произведённые подсистемами 2 и 3 потребительские товары,

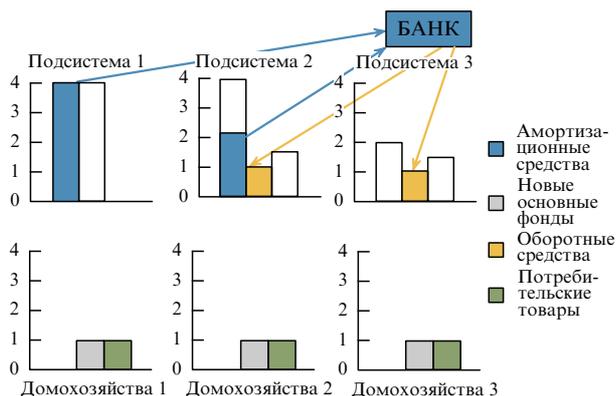


Рис. 2. Состояние экономической системы в начале первого квартала года  $t$ .

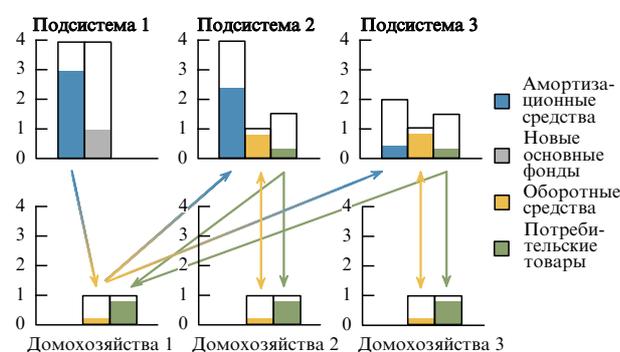


Рис. 3. Функционирование экономической системы в первом квартале года  $t$ .

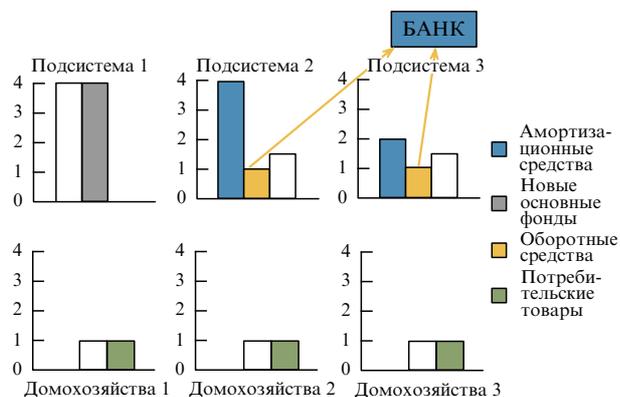


Рис. 4. Состояние экономической системы в конце года  $t$ .

склады предприятий пустеют, деньги возвращаются предприятиям подсистем 2 и 3, которые пополняют ими свои оборотные средства и частично откладывают в амортизационный фонд (соответствующие потоки товаров и денежных средств изображены на рис. 3).

Аналогичным образом циркуляция товаров и денежных оборотных средств происходит во втором, третьем и четвёртом кварталах года  $t$ . В итоге первая подсистема обновляет свой основной капитал, а её амортизационные средства "перекачиваются" в амортизационные фонды подсистем 2 и 3 (рис. 4).

В конце года  $t$  подсистемы 2 и 3 расплачиваются с банком за кредиты, взятые в начале года на обеспечение

текущей деятельности, и экономические системы возвращаются в исходное состояние (см. рис. 2), с тем лишь отличием, что подсистемы поменялись местами: место первой подсистемы заняла вторая, место второй — третья, а место третьей — первая с обновлённым основным капиталом (см. рис. 1).

При простом воспроизводстве подобного рода циклы будут повторяться сколь угодно долго и популяция макроэкономических подсистем будет находиться в динамическом равновесии. Любопытно, что при наличии банка-посредника "амортизационных" денег достаточно для обслуживания всех обменных операций в рассматриваемой экономике, а сами "амортизационные" деньги совершают кругооборот: в своём движении они превращаются в "потребительские" деньги, а "потребительские" деньги вновь превращаются в "амортизационные"<sup>1</sup>.

### 3. Переход к экономическому росту

Допустим, что макроэкономическая подсистема 1 при осуществлении в году  $t$  самовоспроизводства своего основного капитала внедрила новые технологии и создала более эффективный основной капитал. Тогда в году  $t + 1$  она способна произвести (в текущих ценах) больше потребительских благ, чем третья подсистема, также создающая потребительские блага в году  $t + 1$ . Соответственно, совокупное предложение потребительских благ в году  $t + 1$  возрастает. Достаточно ли этого условия для того, чтобы произошёл экономический рост? Вообще говоря, нет: дополнительная продукция не может быть куплена, если количество денег у домохозяйств не увеличится. Дополнительный выпуск продукции приведёт к экономическому росту, если одновременно повысится совокупный платёжеспособный спрос.

Возрастание совокупного платёжеспособного спроса возможно в случае роста денежного предложения и потребительских предпочтений домашних хозяйств. В свою очередь, рост денежного предложения зависит от монетарной политики денежных властей. При этом возможны три следующих варианта монетарной политики.

*Первый вариант.* Размер денежной эмиссии обеспечивает прирост совокупного спроса домашних хозяйств, равный приросту совокупного предложения потребительских благ: имеет место безинфляционный рост.

*Второй вариант.* Размер денежной эмиссии создаёт спрос в размере, большем прироста совокупного предложения потребительских благ: экономический рост сопровождается инфляцией.

*Третий вариант.* Денежной эмиссии нет: рост невозможен, наступает кризис перепроизводства потребительских благ. Поскольку первая подсистема добилась большей производительности и стала более конкурентоспособной, с течением времени она или вытеснит из экономики третью подсистему, или поглотит её капитал. Процесс вытеснения неизбежно будет способство-

<sup>1</sup> По нашей оценке, накопленный амортизационный фонд США на конец 2007 г. составлял примерно 17 трлн долларов. Эта величина почти в 2,5 раза больше американского денежного агрегата M2 (денежного объёма в обращении наличных денег, срочных депозитов, чеков, вкладов до востребования), составившего в 2007 г. 7,4 трлн долларов, и заметно превышает годовой ВВП — 13,8 трлн долларов.

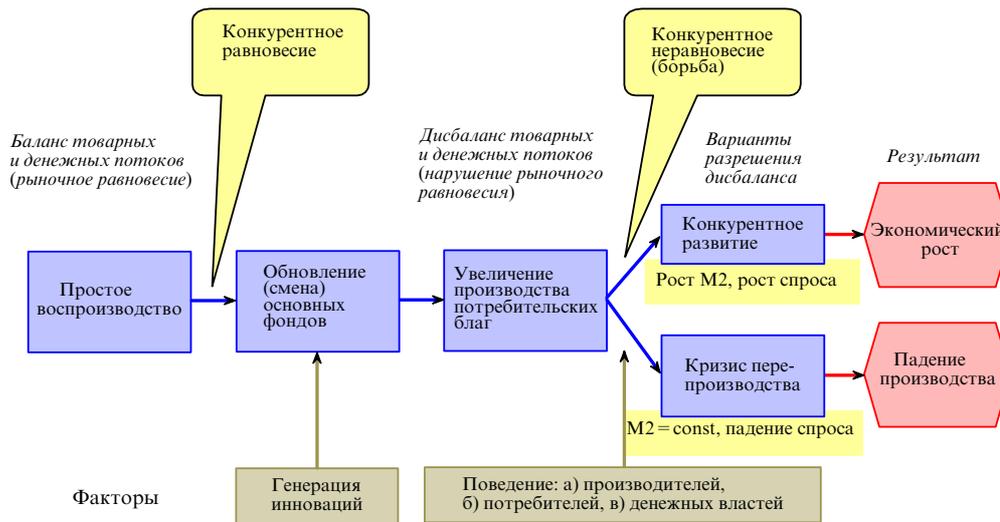


Рис. 5. Схема перехода от простого воспроизводства к экономическому росту.

вать росту безработицы и снижению совокупного потребительского спроса, что чревато экономическим спадом и ростом социальной напряжённости<sup>2</sup>.

Итак, инновации, введённые в году  $t$  в макроэкономическую подсистему 1, в следующем,  $(t+1)$ -м, году порождают *бифуркационное состояние*, выход из которого зависит от политики денежных властей и эволюции потребительских предпочтений. В этой ситуации экономика не может быть описана так, как это было сделано в модели простого воспроизводства. Основное отличие заключается в том, что вместо банка-посредника, который не занимается эмиссионной деятельностью, должен появиться банк-эмитент новых денег или, по выражению Шумпетера, банк, создающий новую покупательную силу [7]. На макроуровне такую функцию выполняет Центральный банк, а основным способом доставки новых денег, эмитируемых Центральным банком, в распоряжение домашних хозяйств, как правило (по крайней мере, в современных индустриально развитых странах), является механизм наращивания государственного долга и соответственно — бюджетный дефицит.

Общая схема, иллюстрирующая переход от простого воспроизводства к экономическому росту, приведена на рис. 5.

Переход от конкурентного равновесия (в условиях простого воспроизводства) к обострению конкурентной борьбы (в условиях разбалансировки экономической системы), способной привести и к экономическому росту, и к экономическому кризису (см. рис. 5), может быть проиллюстрирован моделью роста двух конкурирующих макроэкономических подсистем. Допустим, что динамику производства продукции каждой из этих подсистем отражает следующая логическая схема: *изменение*

*выпуска продукции равно приросту выпуска в условиях отсутствия ресурсных<sup>3</sup> ограничений минус поправка, учитывающая наличие ресурсных ограничений, минус поправка, учитывающая влияние подсистемы-конкурента.*

Математически эта логическая схема сводится к базовой модели конкуренции, широко используемой в исследованиях социальных систем [8, 9]:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_1x_1^2 - c_1x_1x_2, \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_2x_2^2 - c_2x_1x_2, \quad (2)$$

где  $x_i$  — выпуск  $i$ -й подсистемы ( $i = 1, 2$ ).

Первые два члена в правых частях уравнений (1) и (2) характеризуют процесс автономного развития подсистем при ресурсных ограничениях, но без учёта конкуренции. Третьи члены в правых частях уравнений (1) и (2) учитывают наличие конкуренции. Они входят в уравнения со знаком минус, отражая тот факт, что наличие конкурентов ухудшает экономическое положение рассматриваемой подсистемы и может угрожать самому её существованию. Угроза их существованию вынуждает конкурирующие подсистемы активизировать свою деятельность (в терминах модели — увеличивать  $a_i$ ), причём чем выше уровень угрозы со стороны конкурентов, тем активнее должны быть усилия по наращиванию собственных возможностей. С учётом этого можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1(1 + h_1x_2)x_1 - b_1x_1^2 - c_1x_1x_2 = \\ &= a_1x_1 - b_1x_1^2 + (h_1a_1 - c_1)x_1x_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= a_2(1 + h_2x_1)x_2 - b_2x_2^2 - c_2x_1x_2 = \\ &= a_2x_2 - b_2x_2^2 + (h_2a_2 - c_2)x_1x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>2</sup> Исторически третий вариант неоднократно проявлял себя в форме социальных взрывов (например, восстания луддитов в начале XIX в.). Позднее сформировалась практика переквалификации высвобождаемых работников (например, для деятельности в сфере услуг). Именно сфера услуг стала в XX в. той макроэкономической подсистемой, которая впитывала в себя высвобождающуюся в результате инноваций рабочую силу.

<sup>3</sup> Здесь "ресурсы" понимаются в широком смысле: к ним относятся сырье, рабочая сила, денежные ресурсы, платёжеспособный спрос на выпускаемую продукцию и т.п.

Видно, что уравнения (3) и (4), в отличие от (1) и (2), могут описывать как экономический спад (при  $h_1 a_1 - c_1 < 0$ ), так и экономический рост (при  $h_1 a_1 - c_1 > 0$ ). Величина  $h_1 a_1 - c_1$  является бифуркационным параметром, определяющим характер динамики системы. В свою очередь, величина  $h_1 a_1 - c_1$  зависит от параметра  $h_1$ , на значение которого влияет целый ряд факторов: доступность кредитных средств, дешёвых сырьевых ресурсов, квалифицированной рабочей силы, передовых технологий, наличие спроса на выпускаемую продукцию. При различных сочетаниях указанных факторов бифуркационный параметр будет принимать различные значения, от которых, в свою очередь, будет зависеть характер динамики экономической системы (рост, падение или стагнация).

Необходимо иметь в виду, что в действительности параметры  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $h_i$  системы (3), (4) являются не постоянными величинами, а изменяются во времени. Во-первых, на их величину влияет внешняя конъюнктура, например, изменение стоимости ресурсов на рынках труда, сырья, капиталов. Во-вторых, они зависят от институциональных особенностей рассматриваемой экономической системы, от предыстории протекающих в ней процессов. В-третьих, конкурирующие подсистемы в какой-то степени могут влиять на значение данных параметров (например, наращивая инновационную активность или усиливая давление на конкурента). Поэтому ситуация является изменчивой, каждое разбалансирование экономической системы может порождать целый "веер" возможных исходов.

Важно, что динамические модели конкуренции типа (3), (4) позволяют учесть это многообразие и могут стать основой математического описания неравновесных ситуаций, возникающих в результате наличия переключающихся режимов в экономике.

#### 4. Заключение

В математических моделях *мэйнстрима*, как правило, исследуются либо "точечные" состояния рыночного равновесия, либо результирующие тренды устойчивого экономического роста. Эти модели *не решают* поставленную нами задачу перехода от простого воспроизводства к росту. Их сложно использовать как инструмент поддержки принятия экономических решений. Одна из причин подобного положения дел, на наш взгляд, заключается в том, что экономисты-теоретики до сих пор воспринимают макроэкономику исключительно как систему, которая осуществляет в режиме *совместного* производства воспроизводство самой себя и производство потребительских благ. Другой подход к макроэкономике как популяции макроэкономических подсистем, выполняющих те же самые функции, но в режиме *переключающегося* производства, экономисты-теоретики не рассматривают.

Однако именно этот подход, по нашему мнению, открывает серьёзные перспективы для создания принципиально новых экономических моделей, описывающих:

- конкурентные отношения на макроуровне;
- макроэкономические бифуркационные состояния;
- состояния динамического неравновесия денежных и товарных потоков при внедрении инноваций и последующем изменении поведения производителей, потребителей и денежных властей.



Рис. 6. Моделирование экономического роста через последовательность бифуркаций.

Особенность предлагаемого подхода состоит в том, что он не настроен на поиск тренда устойчивого роста. Напротив, он показывает, каким образом в результате систематических переходов от одних бифуркационных состояний к другим экономика то выходит на траекторию экономического роста, то впадает в рецессию, то стагнирует, то вновь возвращается к росту (рис. 6).

При таком понимании макроэкономики центр тяжести научных исследований в области экономической теории смещается в сторону анализа конфликта интересов, каждый раз обостряющегося при внедрении радикальных инноваций. Что касается исследований в области математического моделирования, то в данном случае актуальными являются следующие направления развития математических методов:

- моделирование нестационарных и несинхронных режимов функционирования экономических систем;
- моделирование взаимодействия товарных и денежных потоков в нестационарных условиях;
- моделирование влияния обратных положительных связей (эффектов положительной отдачи) в экономических системах;
- моделирование бифуркаций в экономических системах и определение критических значений экономических параметров, определяющих переход от одного режима функционирования к другому.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 09-02-00747а).

#### Список литературы

1. Lancaster K *Mathematical Economics* (New York: Macmillan, 1968) [Ланкастер К *Математическая экономика* (М.: Советское радио, 1972)]
2. Шараев Ю В *Теория экономического роста* (М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006)
3. Глазьев С Ю *Теория долгосрочного технико-экономического развития* (М.: Владар, 1993)
4. Quesnay F *Physiocratie* (Leyde et Paris: Chez Merlin, 1768) [Кенэ Ф *Физиократы. Избранные экономические произведения* (М.: Эксмо, 2008) с. 279]
5. Маркс К, Энгельс Ф *Избранные произведения* Т. 8 (М.: Политиздат, 1987)
6. Маевский В И *Изв. АН СССР. Сер. экономическая* (6) 71 (1980)
7. Schumpeter J *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung* (Leipzig: Duncker & Humblot, 1912) [*The Theory of Economic Development* (New Brunswick, NJ: Transaction Books, 1983); Шумпетер Й *Теория экономического развития* (М.: Прогресс, 1982)]
8. Чернавский Д С *Синергетика и информация: динамическая теория информации* (М.: УРСС, 2004)
9. Малков С Ю *Социальная самоорганизация и исторический процесс: Возможности математического моделирования* (М.: ЛИБРОКОМ, 2009)

PACS numbers: 02.50.-r, 89.65.Gh  
DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107g.0758

## Быстрорастущие фирмы в России: экспериментальные данные и перспективы экономфизического моделирования модернизации экономики

А.Ю. Юданов

### 1. Введение

Понятие "быстрорастущая фирма" или "фирма-газель" (high-growth firm, gazelle) введено в 1980-е годы Дэвидом Бёрчем. Было установлено [1, 2], что большинство как крупных, так и мелких компаний растёт медленно и вносит минимальный вклад в увеличение занятости и рост валового внутреннего продукта (ВВП). Существует, однако, небольшая группа фирм, которая сочетает высокую динамичность и устойчивость роста. Д. Бёрч присвоил им название "газелей", подчеркнув сходство этих фирм с животным, которое способно не только развить высокую скорость, но и долго поддерживать её. По оценкам Д. Бёрча, в 1988–1992 гг. "газели", составляя лишь 4 % общего числа фирм, создали примерно 70 % (!) всех новых рабочих мест в США.

Выявление типа фирм, имеющих исключительное значение для развития экономики, не могло не привлечь к себе пристального внимания. Несмотря на критику (см., например, [3]), выводы Д. Бёрча получили репрезентативное подтверждение [4–8]. Современные оценки влияния "газелей" на экономику не оставляют сомнений в значимости этого феномена. Согласно обзору исследовательской группы Европейского союза (ЕС), "наиболее цитируемые работы демонстрируют, что в каждой новой когорте фирм от 3 до 10 % компаний дают 50–80 % общего экономического воздействия, производимого данной когортой за время существования" [7, с. 6].

Поразительно большая роль горстки "газелей" указывает, что механизм роста зрелой рыночной экономики подчиняется так называемому принципу Парето–Ципфа. Согласно этому принципу ключевую роль в поведении нелинейных многофакторных систем обычно играют не все, а лишь небольшое число высокопроизводительных факторов. В данном случае неравномерно распределена "энергия роста" экономики. Она не "размазана" среди всех хозяйствующих субъектов, а сконцентрирована в небольшом числе "газелей".

Существуют ли "газели" в России и играют ли они здесь заметную роль (более общие проблемы предпринимательства см. в [9])? Изучение "газелей" в России началось в 2003 г. в Финансовом университете при Правительстве РФ (Финуниверситет) [10–13]<sup>1</sup>. Независимо исследования проводил журнал *Эксперт*<sup>2</sup> [14]. С 2007 г. обе группы объединили усилия. Исследовались

<sup>1</sup> Основными участниками проекта, кроме автора настоящей статьи, являются Н.Н. Думная, Г.В. Колодняя, В.В. Разумов, О.Е. Пыркина, В.А. Успенский, Е.В. Медина.

<sup>2</sup> Ю.А. Полунин, Т.И. Гурова, А.В. Виньков, О.Л. Рубан.

А.Ю. Юданов. Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, РФ. E-mail: Yudanov@yandex.ru

три официальные, хотя и не полностью сопоставимые базы данных за 1999–2007 гг. (и частично за 2008 г.) обо всех российских предприятиях с выручкой свыше 300 млн руб. Сведения о каждой фирме включали в себя данные о выручке, основных средствах, внеоборотных активах, дебиторской и кредиторской задолженности, расходах на научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы и прибыль. Фактически в сферу исследования попал почти весь крупный и средний бизнес страны, а исследуемый период (1999–2007 гг.) полностью охватил время первого экономического подъёма в России.

В соответствии со стандартными методиками, в качестве аппроксимации генеральной совокупности фирм страны рассматривались перманентные фирмы (permanent firms), т.е. компании, которые существовали на протяжении всего исследуемого периода (6,5 тыс. фирм для 1999–2007 гг. и около 10 тыс. фирм для более коротких пятилетних отрезков времени). Отнесение фирм к "газелям" проводилось по алгоритму Бёрча, требующему от фирмы *роста выручки не менее чем на 20 % в каждом году на протяжении не менее пяти лет подряд*. Уточнение алгоритма применительно к России состояло в использовании данных, очищенных от инфляции. Содержательная интерпретация статистических данных опиралась на досье наиболее примечательных "газелей" (около 500 досье), анкетирование и глубинные интервью.

### 2. Описание российской популяции "газелей"

Согласно прямым подсчётам (табл. 1), "газели" составляют 7–8 % от числа перманентных фирм, т.е. встречаются примерно вдвое чаще, чем на Западе. При этом особенности российского учёта (подробнее см. [15]) заставляют полагать, что даже эти высокие цифры резко занижают численность "газелей" и корректная оценка должна составлять 12–13 % популяции фирм. Вопреки распространённой шутке России следует называть не "родиной слонов", а скорее "страной газелей", открывающей возможности стремительного и устойчивого роста для поразительно большой доли фирм.

Таблица 1. Численность "газелей" в России

Период, годы	Число перманентных фирм	Число "газелей"*	Доля "газелей" среди перманентных фирм, %
1999–2003	6524	484	7,4
2000–2004	7348	527	7,2
2001–2005	8244	587	7,1
2002–2006	9381	744	7,9
2003–2007	10174	830	8,2

\* Включая дочерние фирмы крупных корпораций. Источник: база данных предприятий среднего бизнеса "Медиахолдинг *Эксперт*–Финуниверситет".

Темпы роста русских "газелей" были впечатляющими (табл. 2). Они ежегодно увеличивали выручку в среднем на 78 %, в то время как средний темп роста всех перманентных фирм не превышал 18 %.

Оценка вклада "газелей" в общенациональный рост менее однозначна. Если учесть очень малый стартовый размер "газелей", то этот вклад может быть признан большим. Действительно, в 2003 г. "газели" давали лишь около 2 % общей выручки перманентных фирм. Это не помешало им обеспечить почти четверть (23,1 %)

Таблица 2. Динамика выручки по группам фирм (постоянные цены)

Группы компаний	Выручка, млрд руб.		Средне-годовой рост, %	Прирост выручки, млрд руб.	Прирост выручки в % к итогу
	2003 г.	2007 г.			
"Газели"	285	2900	78	2615	23,1
Топ-10* (Росстат)	1969	2985	11	1016	9,0
Топ-10* ("Эксперт-400")	2413	4560	18	2147	19,0
Перманентные фирмы	12393	23707	18	11314	100

\* "Газпром", "Лукойл", "Сургутнефтегаз", "Норильский никель", "Транснефть", "Татнефть", "Северсталь", Магнитогорский металлургический комбинат, Новоліпечский металлургический комбинат, "АвтоВАЗ". В версии Росстата учитываются лишь материнские общества, в версии "Эксперт-400" консолидированы также показатели дочерних обществ. Источник: база данных предприятий среднего бизнеса "Медиахолдинг Эксперт – Финансовый университет".

прироста этого показателя за период 2003–2007 гг. В то же время вклад российских "газелей" оказался намного ниже уровня, типичного для Запада (50–80 % прироста ВВП).

Можно ли рационально объяснить странное сочетание свойств популяции российских "газелей": большую численность и меньшее воздействие на экономику? На наш взгляд, и то и другое равно вытекает из широких возможностей быстрого роста в молодой экономике. Действительно, такая обстановка увеличивает численность "газелей": в России много свободных перспективных ниш, открывающих возможности для длительного и динамичного развития. Но по той же причине молодости экономики быстро растут и российские "негазели". Другими словами: западные "газели" концентрируют в себе почти всю энергию роста экономики своих стран. Однако российские "газели" имеют *относительно* меньшее значение не потому, что они пассивнее или слабее зарубежных аналогов, а потому, что они являются хотя и *важными*, но не *единственными* моторами роста экономики.

Вместе с тем нельзя и преуменьшать роль "газелей" в экономике России. В таблице 2 приводятся сведения о приросте выручки десяти крупнейших корпораций (топ-10) России. Общественное мнение однозначно связывает подъём 1999–2007 гг. именно с их обогащением на волне роста мировых цен на сырьё. Однако прирост выручки "газелей" выше прироста выручки топ-10-корпораций России, даже если в последнюю включить выручку дочерних обществ.

Конечно, прямое сопоставление выручки "газелей" и сырьевых корпораций не вполне корректно. Фирмы работают в разных отраслях, создают разную добавленную стоимость и т.п. Уместен и вопрос об истоках роста "газелей": весьма сомнительно, что он имел бы наблюдаемый размах без подпитки экономики сырьевыми доходами. И всё же примечателен сам факт того, что большой прирост выручки — несмотря на беспрецедентную конъюнктуру мировых цен — дали не сырьевые гиганты, а "газели", среди которых почти нет сырьевых компаний.

Естественно видеть в "газелях" реальных носителей процесса преобразования нефтяных доходов в общеэкономический рост, т.е. именно тех агентов диверсифика-

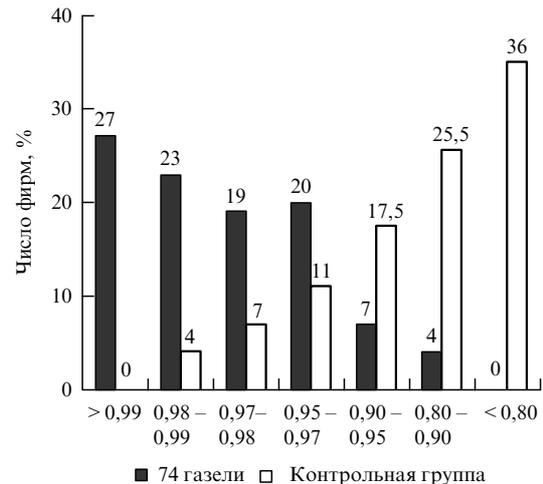


Рис. 1. Степень соответствия динамики выручки полной совокупности выявленных "газелей", каждый год на протяжении 1999–2006 гг. имевших годовой темп роста выручки более 20 % в постоянных ценах, и "негазелей" (равновеликая (74 фирмы) случайная выборка из числа перманентных фирм 1999–2006 гг.) экспоненциальному закону (процент фирм с соответствующим значением коэффициента детерминации  $R^2$ ). (Источник: база данных предприятий среднего бизнеса "Медиахолдинг Эксперт – Финансовый университет".)

ции экономики, о которых постоянно мечтают наши политики. Возможно, выросшие и возмужавшие "газели" в будущем превратятся в новый несырьевой двигатель российской экономики.

### 3. Экспоненциальный рост и предпринимательская природа "газелей"

Неожиданным, не описанным в литературе феноменом, выявленным при изучении российских "газелей", явился экспоненциальный характер роста многих из них. Сначала он воспринимался как случайность, поскольку обычно объёмы выручки фирмы подвержены сильным флуктуациям, вызванным колебаниями спроса на её продукцию. Но оказалось, что для "газелей" экспоненциальный рост типичен.

На рисунке 1 показана степень соответствия динамики выручки экспоненциальному закону для "газелей" и для "негазелей". В качестве представителей "газелей" мы выбрали "газелей-должителей", а именно были рассмотрены все 74 фирмы (из 484 "газелей" поколения 1999–2003 гг. (см. табл. 1)), которые сумели сохранить высокий темп роста в течение периода вплоть до 2006 г. Роль контрольной группы играла равновеликая случайная выборка из числа перманентных фирм.

Практически идеальное ( $R^2 > 0,98$ ) соответствие динамики роста экспоненциальному закону продемонстрировало 50 % "газелей"-должителей, в то время как у обычных фирм оно наблюдалось лишь как исключение (4 % фирм<sup>3</sup>). Удовлетворительно ( $R^2 > 0,95$ ) экспонентой описывается рост почти всех (89 %) "газелей"-должителей.

Очевидна странная способность многих "газелей" расти из года в год на постоянный процент как бы независимо от внешней обстановки. Невольно возникает вопрос: почему факторы, постоянно возмущающие

<sup>3</sup> При проверке эти фирмы тоже оказались "газелями", но не столь долгоживущими.

развитие других фирм, не заставляют "газель" отклоняться от экспоненты?

В природе типовым случаем появления экспоненциальной динамики является развитие репродуктивных процессов в условиях отсутствия ограничений по ресурсам. Например, популяция завезённых в Австралию кроликов росла именно по экспоненте, до тех пор пока не заполонила зелёные долины континента.

Не в таком ли отсутствии ограничений (в данном случае — спросовых) кроется природа устойчиво быстрого роста "газели"? Ведь большинство факторов, делающих динамику развития обычной фирмы неустойчивой, сводится к колебаниям спроса на её продукцию. Логично связать прорыв "газелями" спросовых ограничений с их предпринимательской или новаторской (по Шумпетеру) природой. Новатор выносит на рынок настолько востребованную продукцию, что всё, произведённое его фирмой, будет заведомо куплено. Темп роста в таких условиях лимитируется не спросом, а способностью наращивать предложение продукта, а значит, темпом расширения внутренних специфических активов: подготовленного к решению задач фирмы трудового коллектива, управленческих кадров, особого оборудования.

Между тем рост последних, как известно, тяготеет к экспоненциальному. Предприниматель, способный подготовить за год двух инициативных руководителей, которые потом вырастят себе по два заместителя, которые ... и т.д., — в смысле динамики процесса ничем не отличается от размножающейся крольчихи. Если в 2000 г. в банке "Русский стандарт" работал 221 человек, а в 2006 г. — уже 36617, то ясно, что темп роста этой "газели" лимитировался именно скоростью подготовки достойных менеджеров. В противном случае крошечная фирма, рекрутировавшая в свои ряды более 36 тыс. новобранцев, просто потеряла бы управляемость.

Приведённые рассуждения, как показали наши опросы, не являются голыми спекуляциями. Руководители "газелей" (рис. 2) понимают ситуацию в своих фирмах именно как ситуацию квазиограниченного спроса. Лишь 10–14% "газелей"<sup>4</sup> назвали недостаток спроса фактором, мешавшим их фирме расти быстрее! В то же время ресурсные ограничения — нехватка денег, трудности с набором персонала и управленческих кадров — кажутся "газелям" серьёзными факторами сдерживания роста (их назвали 38–40%, 33–45% и 38–45% "газелей" соответственно).

Сказанное вовсе не означает, что "газелям" безразличен объём спроса. Как раз наоборот: войти в круг "газелей", видимо, можно лишь, если проблема спроса уже успешно решена, если барьер ограниченного спроса хотя бы на какое-то время прорван. Почти дословно эту мысль высказал М. Керштейн (компания "Рамфуд", мясные продукты): "Сколько можем делать продукта устраивающего нас качества и в нужном рынке ассортименте, столько и делаем. Есть ощущение, что если бы мы имели возможность в течение 2–3 месяцев удвоить объёмы, то рынок это проглотил бы".

Еретическая идея о том, что спрос не является ограничителем темпа роста фирмы, теоретически развита Э. Пенроуз ещё в 1950-е годы [16, 17]: "До тех

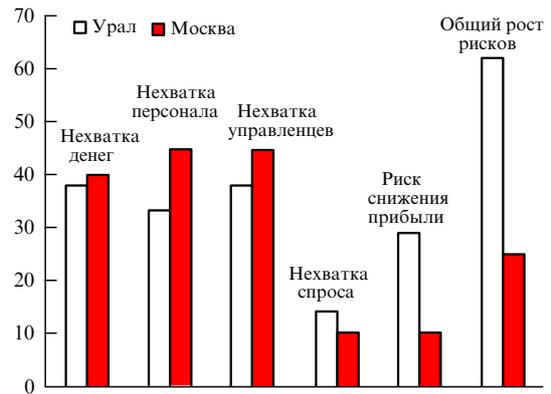


Рис. 2. Ответы топ-менеджеров российских "газелей" на вопрос о факторах, ограничивавших темпы роста их фирм (в процентах от числа опрошенных). (По опросу 20 "газелей" в Москве (ноябрь 2008 г.) и 22 "газелей" в Уральском регионе (март 2009 г.).)

пор пока существуют возможности прибыльного производства где бы то ни было в экономике, фирма может использовать их, если её ресурсная база достаточно подвижна и, в частности, если её менеджмент является творческим, гибким и честолюбивым". Надо лишь верно подстроиться под *всегда где-то имеющийся* спрос: "Неспособность к росту часто некорректно связывают с состоянием спроса, хотя на самом деле она отражает лишь ограниченность предпринимательских ресурсов [фирмы]" [16, с. 540].

Как известно, концепция Э. Пенроуз так и не стала общепринятой. Изучение российских "газелей" привело нас к пониманию причин провала привлекательной идеи. Они видятся в том, что применять подобную логику корректно не ко всем компаниям (как делала Пенроуз), а только к предпринимательским фирмам-новаторам. Только такие фирмы, и среди них "газели", обладают достаточными предпринимательскими ресурсами для того, чтобы прорывать спросовые ограничения и выходить на сверхбыстрый экспоненциальный тренд роста. То, что виделось Пенроуз как общее правило, на самом деле абсолютно не свойственно большинству фирм, медленно развивающихся в консервативной среде устоявшегося рынка. Однако, как позволяет утверждать изучение "газелей", именно спросоноограниченный экспоненциальный рост этой небольшой части популяции фирм является центральным механизмом осуществления *быстрых* изменений в рыночной экономике (модель, делящую фирмы на консерваторов и новаторов, см. в [18]).

## 5. "Газели" и другой взгляд на проблему модернизации России

После десятилетий забвения проблема модернизации экономики переместилась сейчас в центр общественного внимания и политических инициатив. Основной акцент делается на стимулирование развития высокотехнологических фирм (создание центра в Сколково и т.п.). Это, бесспорно, нужное дело, поскольку в России новаторам трудно самостоятельно преодолеть барьеры на пути создания инновационной фирмы.

Профессионалам, однако, известно, что проблема отнюдь не сводится к созданию фирмы. Главная беда состоит в том, что, достигнув определённого размера,

<sup>4</sup> Речь идёт о докризисных временах.

Таблица 3. Отраслевая структура популяции "газелей"\*

Отрасль	"Газели", %	Все перманентные фирмы, %	Число "газелей" на 100 перманентных фирм
Все отрасли	100	100	7,9
Оптовая и розничная торговля	42,3	39,3	5,5
Строительство и стройматериалы	20,7	13,0	8,1
Машиностроение	7,8	7,6	5,2
Пищевая промышленность	5,2	7,1	3,7
Инжиниринг (включая нефтесервис)	4,1	1,2	17,6
Химия, фармацевтика, парфюмерия	3,6	2,8	6,5
Транспорт, логистика и связь	3,3	4,1	4,1
Потребительские товары	2,5	1,4	9,2
Информационные технологии и Интернет	2,3	0,6	19,7
Бизнес-услуги	1,9	0,5	19,6
Агропромышленный комплекс	1,7	1,7	5,2
Гостиницы, туризм, развлечения, общественное питание	1,4	1,0	7,4
Прочие	3,2	19,7	0,8

\* Источник: база данных предприятий среднего бизнеса "Медиахолдинг Эксперт – Финуниверситет".

российские инновационные предприятия перестают расти, так и не превратившись в игроков мирового уровня. Фирмам просто не хватает спроса. В упростившейся и сместившей акценты в сторону сырьевых продуктов российской экономике сложные высокотехнологичные изделия остаются невостребованными даже при объективно выдающихся характеристиках.

"Российские инновационные компании в своём развитии пытаются перескочить через несколько институциональных барьеров. На ранней стадии им нужен свободный доступ к капиталу, позднее — помощь в освоении рынков" [19, с. 24]. И на этом, более позднем, этапе государственное стимулирование непосредственно инноваторов уже почти бессильно: какой толк в росте их числа, если на инновативную продукцию нет спроса.

Именно здесь на первый план и могут выйти российские "газели". С точки зрения отраслевой структуры, сами они, как и их аналоги в других странах, обычно не являются высокотехнологичными (хай-тек) фирмами (табл. 3). Напротив, основная часть из них сосредоточена в консервативных (торговля, строительство, пищевая промышленность) или среднетехнологичных (машиностроение, химия) отраслях.

Известно, однако, что сильный хай-тек возникает не там, где он работает сам для себя, т.е. для удовлетворения внутрисекторных потребностей, а там, где его продукция востребована всей экономикой, включая насыщение передовой техникой и низкотехнологичных производств [20, 21]. "Газели" как мастера выявления и создания конечного спроса на свою продукцию являются естественными потребителями/внедрителями новых технологий. И то, что "газели" умеют создать потребительский ажиотаж в любых (в том числе, старых) отраслях, лишь расширяет сферу использования инноваций. Благодаря "газелям" высокотехнологичные фирмы получают потенциальный доступ к массовому сбыту своей продукции.

Реальные примеры заимствования, адаптации, внедрения технологических достижений зафиксированы нами в досье ряда "газелей". Вместе с тем в России это явление пока не стало массовым, поскольку фирмы отечественного хай-тека не знают, какие именно инновации востребованы "газелями", а "газели" не знают, что им может предложить наш хай-тек. Очевидно, что преобладающая ныне политика по стимулированию создания высокотехнологичных фирм требует дополнения в форме облегчения их контактов с носителями спроса на инновации, в частности с "газелями".

## 6. Заключение:

### перспективы эконофизического моделирования

Феномен российских "газелей" находится на ранней стадии изучения. Но уже первые результаты свидетельствуют о его большой значимости. "Газели" оказались яркими представителями здорового, неолигархического российского бизнеса, который оказывает заметное количественное (увеличение ВВП и занятости) и качественное (трансляция чужих инноваций и инициация собственных) влияние на экономику страны.

В исследовательском плане перспективным представляется моделирование влияния "газелей" на развитие высоких технологий в России в духе эконофизической аналогии с явлением преодоления частицей потенциального барьера<sup>5</sup>. В рамках этой аналогии новаторская активность высокотехнологичной фирмы рассматривается как собственная энергия частицы, которая может быть достаточной, но чаще является недостаточной для совершения необходимой "работы выхода на рынок".

Для успешного развития необходимо преодолеть два "потенциальных барьера" с разной степенью прозрачно-

<sup>5</sup> Идея аналогии принадлежит О.Е. Пыркиной (Финансовый университет), которая в настоящее время ведёт разработку модели.

сти. На первом этапе развития фирмы, т.е. при опробовании рынком инновационного продукта (выручка до 10 млн долларов в год — первый условный "потенциальный барьер"), существенную роль играет государственная поддержка фирм-новаторов как таковых, что вводится в модель как фактор повышения собственной энергии частицы.

На втором этапе, когда фирма достигает оборота около 100 млн долларов в год, главным фактором успеха становится наличие массового рынка сбыта высокотехнологичной продукции. Преодоление этого второго условного "потенциального барьера" моделируется с помощью туннельного эффекта. Причём величина "коэффициента прозрачности" барьера определяется степенью развитости популяции "газелей", т.е. носителей внешнего, не ограниченного рамками хай-тека спроса на инновационные решения.

Далее, на основе известных уравнений квантовой механики для туннельного эффекта рассматривается возможность массового появления хай-тековских фирм в отдельных областях экономики (прохождение через потенциальный барьер и последующая кластеризация). В квазиклассическом приближении могут быть оценены условия, необходимые для возникновения и развития такого процесса.

## Список литературы

1. Birch D L *Job Creation in America. How Our Smallest Companies Put the Most People to Work* (New York: Free Press, 1987)
2. Birch D, Medoff J, in *Labor Markets, Employment Policy, and Job Creation* (Eds L Solomon, A Levenson) (Boulder, Co.: Westview, 1994) p. 159
3. Davis S J et al. *Small Business Economics* 8 (4) 297 (1996)
4. Kirchoff B A *Entrepreneurship and Dynamic Capitalism* (Westport, Conn: Praeger, 1994)
5. Audretsch D B *Small Business Economics* 18 (1–3) 13 (2002)
6. Delmar F, Davidsson P, Gartner W B *J. Business Venturing* 18 (2) 189 (2003)
7. Europe INNOVA (2008): Europe INNOVA Gazelles Innovation Panel. Summary and Conclusions from Panel Discussions, <http://www.europe-innova.org>
8. Henrekson M, Johansson D *Small Business Economics* 35 227 (2010)
9. Чепуренко А Ю *Мир России* (2) 22 (2008)
10. Юданов А Ю *Опыт конкуренции в России. Причины успехов и неудач* (М.: Изд-во ИНТРАС–КНОРУС, 2007)
11. Юданов А Ю *Вопросы экономики* (2) 85 (2007)
12. Думная Н Н *Новая рыночная экономика* (М.: МАКС-Пресс, 2009)
13. Колодня Г В *Сквозь призму практики: неинституциональная теория фирмы* (М.: Финансы и кредит, 2007)
14. Виньков А А, Гурова Т И, Полунин Ю А, Юданов А Ю *Эксперт* (10 (599)) 36 (2008)
15. Юданов А Ю *Журн. новой экономической ассоциации* (5) 91 (2010)
16. Penrose E *Am. Econ. Rev.* 45 531 (1955)
17. Penrose E *The Theory of the Growth of the Firm* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1995)
18. Маевский В И *Вопросы экономики* (11) 58 (2001)
19. Медовников Д, Имамугдинов И "Пройти пубертатный период" *Эксперт* (2 (641)) 24 (2009)
20. Hirsch-Kreinsen H, Jacobson D (Eds) *Innovation in Low-Tech Firms and Industries* (Cheltenham: Edward Elgar, 2008)
21. Полтерович В М *Вопросы экономики* (6) 4 (2009)

PACS numbers: 89.65.Gh, 89.75.–k  
DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107h.0762

## Равновесные модели экономики в период мирового финансового кризиса

И.Г. Поспелов

### 1. Экономика — пример сложной творческой системы

Экономика — это подсистема общества, управляющая производством, распределением и потреблением благ: ресурсов, товаров и услуг. Задача современной экономики чрезвычайно сложна. Речь идёт о производстве нескольких миллиардов видов благ и их распределении между несколькими миллиардами физических и юридических лиц. По этой причине экономика как управляющая система всегда достаточно децентрализована. Напомним, что Госплан СССР оперировал всего примерно 2000 наименований продукции, тогда как их реальная номенклатура превышала сто миллионов. Вопиющее несоответствие средств управления и возрастающей сложности экономических связей стало, по нашему мнению, главной причиной провала идеи централизованного планирования.

Моделируя экономику, мы имеем дело *со сложной системой*. Сложные системы отличаются не просто большим числом элементов, а прежде всего своей *уникальностью* и, самое главное, *способностью к качественным изменениям*. Поэтому, изучая сложную систему, мы фактически наблюдаем единственную траекторию, которая не воспроизводит себя статистически достоверно и не показывает всех потенциальных возможностей системы. Исследование сложных систем выводит нас за пределы эмпирического метода, которой обеспечил триумф естественных наук в последние 300 лет. Если модели физических систем должны объяснять результаты сделанных экспериментов и предсказывать результаты планируемых, то модели сложных систем призваны, по сути, заменить собой эксперимент. В результате для сложной системы получается много моделей, которые не могут быть выведены как частный случай из универсальной "супермодели". Частные модели описывают разные ракурсы исследуемой системы. Они оперируют разными наборами понятий и пренебрегают отнюдь не малыми отклонениями от учтённых в них закономерностей [1].

Опыт, однако, показывает, что с помощью моделей можно достаточно много сказать о сложной системе. Хорошая модель не только описывает поведение системы при сложившейся структуре отношений, но и содержит описание границ собственной применимости и границ стабильности описываемой структуры. Надо примириться только с тем, что:

- из разных моделей сложной системы нельзя сложить полную адекватную модель, подобную компьютерным имитаторам технических систем;
- маловероятно, что когда-нибудь мы сможем предсказать, какая структура возникнет в сложной системе после того, как предыдущая потеряет стабильность. Модель может выявить реальную угрозу существую-

И.Г. Поспелов. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, РФ. E-mail: [pospeli@ccas.ru](mailto:pospeli@ccas.ru)

щему порядку вещей, но она не сможет прогнозировать, как кризис разрешится.

Примером резкого слома тенденций служит нефтяной кризис 1975 г. И история, и физика говорили, что производство не может расти быстрее потребления энергии. Однако с тех пор на Западе уровень жизни вырос в 1,5–2 раза, а потребление энергии на душу населения не выросло вообще!

Ещё одним примером служит текущий глобальный экономический кризис: все ожидали кризиса возможностей (исчерпания ресурсов), а случился кризис потребностей (исчерпание стимулов к росту). Экономика "золотого миллиарда" физически расти может, но не хочет! При этом виртуальная экономика оказалась устойчивей реальной — продовольствие, топливо, металлы, золото оказались избыточными и потеряли в цене гораздо больше, чем услуги и информация. Даже в финансовой области рухнуло то, что испокон веков считалось самым надёжным вложением — ипотека, т.е. кредит реальному лицу под реальный залог, а, например, кредиты на раскрутку сайтов с рекламой пока что выплачиваются. Чем дальше в технологической цепочке от базовых отраслей находится производство, тем меньше оно страдает от кризиса.

Причина этого та же, по которой двух- и трёхкратное изменение цен на энергию и металлы почти не сказывается на цене автомобилей. В себестоимости современного автомобиля расходы на конструирование, контроль качества и рекламу составляют гораздо большую долю, чем материальные затраты. Тот новый продукт, за который люди готовы платить деньги (добавленная стоимость) создаётся сейчас не столько на поле или фабрике, сколько в конструкторском бюро, отделе технического контроля и магазине [2]. Сейчас трудно сказать, чем всё это может закончиться, особенно если учесть важное наблюдение С.П. Капицы, что сегодняшний кризис совпадает с беспрецедентным в истории человечества явлением: рост населения Земли замедляется без голодовок и эпидемий! Я не исключаю, что человечество переходит к нулевому росту и чисто "духовной" жизни. Конечно, не к таким, какими их представляли себе экологи и моралисты. Просто совокупное материальное потребление стабилизируется, и человечество теряет интерес к внешнему миру, сосредоточиваясь на неисчерпаемых проблемах межличностных отношений<sup>1</sup>.

Впрочем, до этого ещё далеко, хотя бы потому, что сложившаяся система экономических механизмов работоспособна только при наличии перспективы экономического роста. Так что в обозримом будущем либо рост все-таки восстановится, либо последует череда неудачных попыток его восстановить. И пока не возникли и не проявились новые механизмы, адаптированные к нулевому росту, можно всерьёз моделировать только процессы спада и восстановления роста.

## 2. Системный анализ развивающейся экономики

Существует не просто множество моделей экономики, но и множество методических подходов к её моделирова-

нию. С 1990-х годов наиболее популярными стали *вычислимые модели общего равновесия* (*Computable General Equilibrium, CGE*) (см., например, [4]), поскольку выяснилось, что учёта одних технологических ограничений (*балансовые модели* [5]), экстраполяции предыдущих тенденций (*эконометрические модели* [6]) и прямолинейного наложения внешних ограничений (*модели глобальной динамики* [7]) недостаточно для адекватного описания современной экономики. Здесь следует заметить, что в современной науке термин *равновесие* используется в трёх исходно различных смыслах, а именно как:

- *динамическое равновесие* — баланс сил, действующих на систему;
- *статистическое равновесие* — баланс вероятностей переходов между состояниями системы;
- *экономическое равновесие* — баланс интересов субъектов конфликта.

Что-то общее между этими понятиями есть, но смешение их является недопустимой вульгаризацией. Ниже мы увидим, что экономическое равновесие не подразумевает ни статичности, ни простоты динамики.

В 1975 г. в Вычислительном центре АН СССР (потом РАН) возникло новое направление исследований: *системный анализ развивающейся экономики* (САРЭ), в котором методология математического моделирования сложных систем, развитая в естественных науках, была синтезирована с достижениями современной экономической теории [8]. Модели САРЭ по смыслу близки к CGE-моделям, но больше обращают внимания на специфику сложившихся экономических отношений. Отметим, что наши исследования начались лет на 15 раньше появления первых CGE-моделей.

Исследования начались с моделей рыночной экономики, и в 1988 г. была построена модель, которая воспроизводила основные качественные особенности эволюции плановой экономики. Поэтому к моменту начала экономических преобразований в СССР, а затем в России уже был разработан подход к анализу происходивших в экономике изменений. В частности, за два года до реформы 1992 г. были правильно предсказаны её краткосрочные последствия. Каждая из последующих моделей: модель периода высокой инфляции 1992–1995 гг.; модель периода "финансовой стабилизации" 1995–1998 гг., предсказавшая кризис 1998 г.; модель оценки перспектив развития экономики после кризиса 1998 г. — была основана на системе гипотез относительно характера тех экономических отношений, которые складывались в соответствующий период в России. Можно сказать, получилась целая "летопись" российских экономических реформ, выраженная языком математических моделей. Эти модели детально описаны в [9], а подробный обзор дан в [10].

С помощью моделей удалось понять внутреннюю логику развития экономических процессов. Опыт применения моделей показал, что они служат надёжным инструментом анализа макроэкономических закономерностей, а также прогноза последствий макроэкономических решений *при условии сохранения сложившихся отношений*.

## 3. Модель межвременного равновесия экономики России

В 2004 г. мы отошли от методологии CGE и обратились к теоретически более последовательной, но технически и

<sup>1</sup> Как отмечалось ещё в [3], переход цивилизаций в "интравертную фазу" мог бы объяснить феномен "молчания Космоса", всё более странный в свете последних открытий, показывающих, по-видимому, широкое распространение в Космосе условий, подходящих для жизни.

концептуально гораздо более сложной конструкции *межвременного равновесия с управлением капиталом* (МРК). Модель МРК строится не последовательным добавлением описания отдельных экономических процессов, а специализацией общей схемы функционирования идеальной рыночной экономики. Эта схема представляется самым крупным открытием математической экономики за все 150 лет её существования. Оказывается, что если формально поставить задачу планирования экономики в интересах потребителей при технологических ограничениях отдельных производственных единиц и ограничениях материальных балансов по всей экономике, то эту задачу *централизованного планирования* с помощью теоремы о седловой точке можно представить как задачу *о равновесии в игре независимых макроагентов*, каждый из которых преследует свои интересы (равновесие совершенной конкуренции). При этом появляются не только первые пять агентов из списка, приведённого ниже, но также *деньги и цены* [10]. Каждый из макроагентов модели МРК решает задачу оптимального управления<sup>2</sup> материальными и финансовыми потоками, находящимися в его распоряжении, в предположении знания макроагентом *правильного прогноза конъюнктуры*, а эти прогнозы определяются условиями согласования планов агентов в рамках полной системы материальных и финансовых балансов. В этом состоит странный, но хорошо работающий на практике *принцип рациональных ожиданий*<sup>3</sup> (Rational Expectations [11]). Возможные причины применимости этого принципа обсуждаются в разделе 4.

Прикладная модель МРК получается из этой идеальной конструкции агрегированием материальных благ, дифференциацией денег, введением "внешних" для экономики агентов (четырёх последних из списка, приведённого ниже) и, главное, наложением дополнительных ограничений на действия агентов, отражающих наблюдаемые "правила игры" в экономике.

В текущей версии модели экономики России описываются реальный сектор, производящий внутренний и экспортный продукты и потребляющий внутренний и импортный продукты, и финансовый сектор. Сопровождающие производство, распределение и потребление продуктов финансовые потоки описываются как оборот шести финансовых инструментов: *наличных денег, остатков расчётных счетов, остатков корреспондентских счетов в Центральном банке (ЦБ), банковских ссуд, банковских депозитов, депозитов/кредитов банков в ЦБ, иностранной валюты*. Продукты, труд и финансовые инструменты образуют набор аддитивных величин, для которых в модели строится полная система балансов, причём потоки финансовых инструментов разделяются на легальные и теневые. Движение аддитивных величин

описывается как результат деятельности девяти макроагентов:

- 1) *производителя*, представляющего нефинансовые коммерческие организации;
- 2) *банка*, представляющего финансовые коммерческие организации;
- 3) *населения*, представляющего физических лиц — потребителей и наёмных работников;
- 4) *собственника*, представляющего физических и юридических лиц, управляющих движением капитала между секторами национальной экономики и за пределы страны;
- 5) *торговца* — как чистого посредника между потребителями, производителем, экспортёром и импортёром;
- 6) *государства*, деятельность которого представлена в модели явно агрегированным описанием деятельности Министерства финансов и неявно — установлением различных параметров экономической политики (ставок налогов, государственных расходов, норм резервов и др.);
- 7) *Центрального банка*, представленного в модели своими функциями эмитента национальной валюты, держателя валютных резервов, расчётного центра и кредитора коммерческих банков;
- 8) *экспортёра*;
- 9) *импортёра*.

Исходное структурированное представление модели состоит из 162 динамических и конечных нелинейных уравнений, для которых ставится *краевая задача*. В качестве экзогенных переменных выступают *индексы экспортных и импортных цен, численность занятых*, а также государственная экономическая политика, описываемая переменными: *государственное потребление, субсидии населению, валютный курс, учётная ставка ЦБ*. Система уравнений модели содержит 50 постоянных параметров, 30 из которых идентифицируются независимо от модели (ставки налогов, параметры производственных функций и др.), а остальные 20 служат для подгонки. Модель идентифицируется по официальной *несглаженной квартальной статистике*.

Некоторые результаты расчётов приведены на рис. 1–12. Светлой линией показаны ряды статистических данных, а тёмной — результаты расчёта от первого квартала 2004 г. до четвёртого квартала 2010 г. Подчеркнём, что вся эта совокупность траекторий представляет *одно экономическое равновесие*.

Видно, что модель вполне удовлетворительно воспроизводит статистику, включая фазы колебаний, спад в результате кризиса и различие в темпах инфляции разных продуктов. Модель *описывает феномен, который отличает российский кризис от кризиса во всех остальных странах*: везде спад производства сопровождается дефляцией, а у нас — инфляцией!

#### 4. Экономика и физика: почему сходные подходы дают различные результаты

При моделировании экономики можно с успехом использовать подходы, давно апробированные в теоретической физике: вариационные принципы, принципы симметрии, как точной, так и нарушенной, разделение величин на интенсивные и экстенсивные и др. Наш опыт, однако, показывает, что из общности подходов отнюдь не следует качественное подобие поведения моделей физических и экономических систем.

<sup>2</sup> И опыт экономической теории, и множество эмпирических данных говорят о том, что рациональность характерна для поведения крупных групп субъектов, играющих сходные роли в экономике, а поведение отдельных индивидов, включая государство, хаотично и труднопредсказуемо.

<sup>3</sup> Любая альтернатива этому принципу означает требование моделировать раздельно то, как экономика развивается на самом деле, и то, что об этом думают отдельные субъекты. Такая позиция представляется не только малореализуемой, но и слишком самоуверенной. Принцип рациональных ожиданий уравнивает в правах исследующего и исследуемых субъектов: модельные агенты используют для своих прогнозов ту же самую модель, которую мы строим!

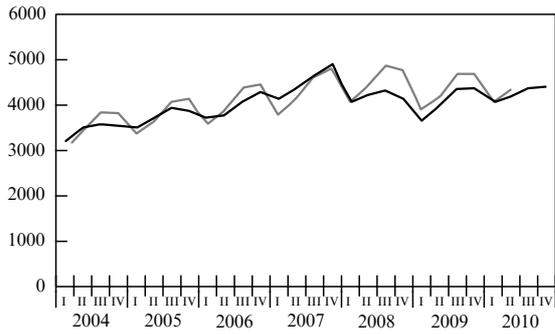


Рис. 1. Реальный ВВП, млрд руб. в ценах 2004 г., в квартал.

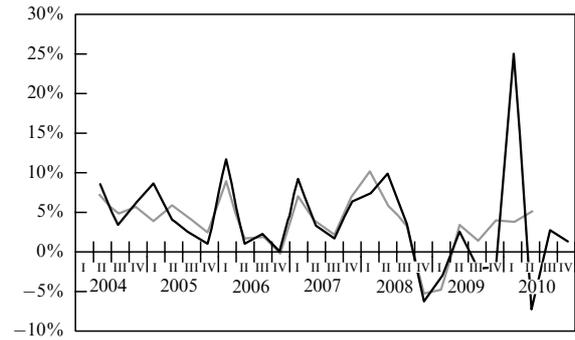


Рис. 2. Темп инфляции по ВВП в квартал.

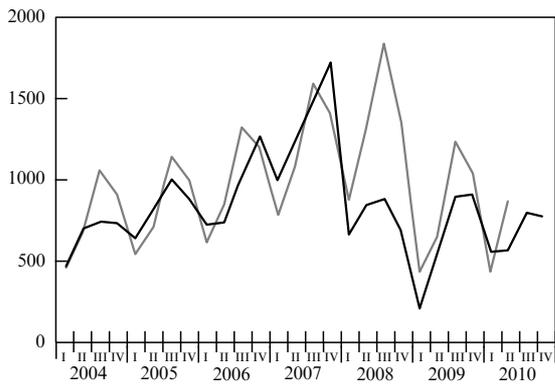


Рис. 3. Реальные инвестиции, млрд руб. в ценах 2004 г.

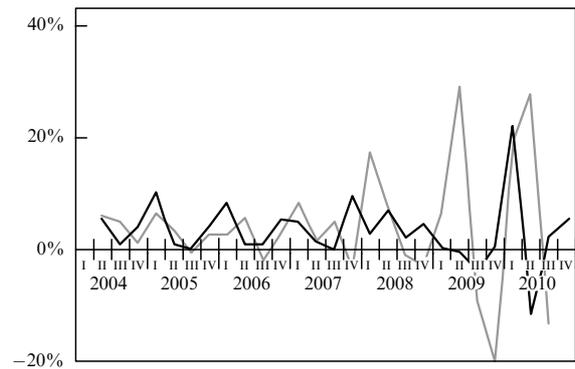


Рис. 4. Темп инфляции по капитальным вложениям в квартал.

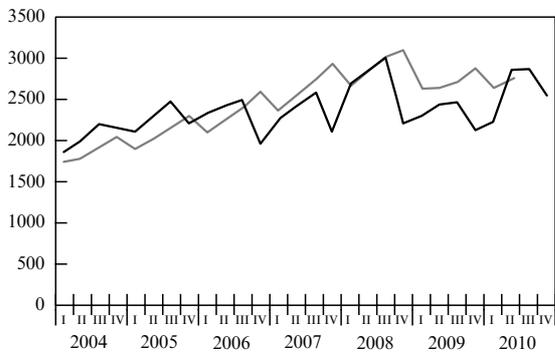


Рис. 5. Реальное потребление, млрд руб. в ценах 2004 г., в квартал.

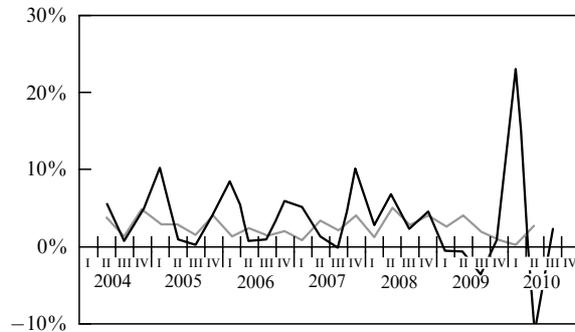


Рис. 6. Темп инфляции по потреблению в квартал.

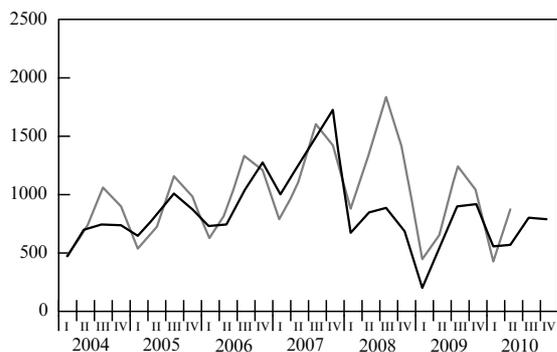


Рис. 7. Реальный экспорт, млрд руб. в ценах 2004 г., в квартал.

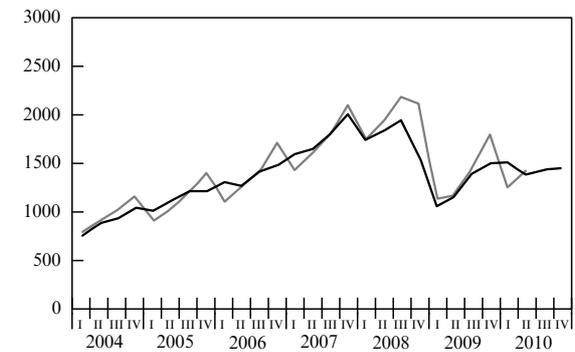


Рис. 8. Реальный импорт, млрд руб. в ценах 2004 г., в квартал.

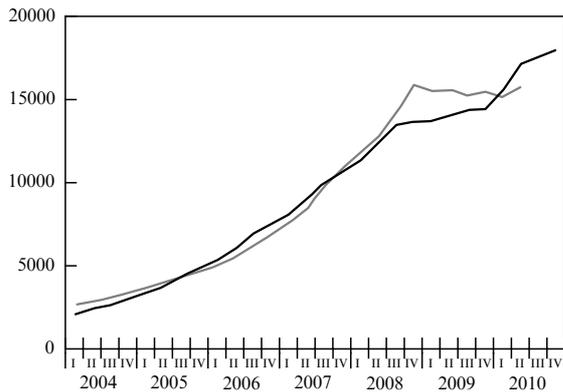


Рис. 9. Кредиты юридическим лицам, млрд руб.

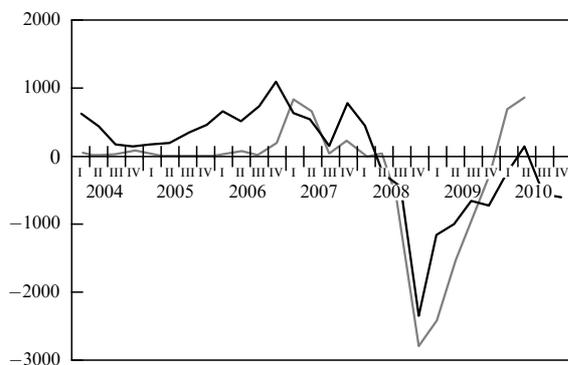


Рис. 11. Чистые депозиты банков в ЦБ, млрд руб.

В *физике*, как известно, экстенсивными (аддитивными) величинами являются *массы* различных веществ, всевозможные типы *зарядов*, все виды *энергии*, *энтропия*, *импульс*, *момент импульса* и т.д. Их изменение описывается уравнениями переноса или уравнениями реакции – диффузии.

В *экономике* экстенсивными величинами являются *запасы* материальных благ и финансовых инструментов. Их движение описывается балансовыми уравнениями, но происходит оно не в пространстве, а на множестве экономических агентов.

В *физике* наиболее важны *сохраняющиеся* экстенсивные величины. Для современных *финансовых* систем формально сохраняется алгебраическая сумма запасов любого финансового инструмента. Совокупный рост оборотов инструмента происходит исключительно за счёт так называемой *кредитной эмиссии* — одновременного роста активов (положительных запасов) и пассивов (отрицательных запасов). Вследствие этого формальные *законы сохранения финансовых инструментов* оказываются менее полезными, чем физические законы сохранения. Например, наивно ожидать, что при крахе одного рынка деньги оттуда уйдут на другой. При крахе пассивы взаимно уничтожаются с активами и обороты падают на всех рынках.

Для физических систем характерны трансляционные и вращательные симметрии, а для экономики — масштабные. Лучшим доказательством этому служит тот факт, что *изменения в физическом мире* мы обычно характеризуем *скоростями*, а *изменения экономических показателей* — *темпами* (логарифмическими производ-

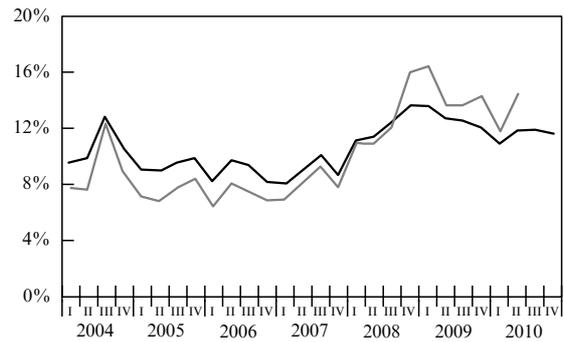


Рис. 10. Процент по кредитам в год.

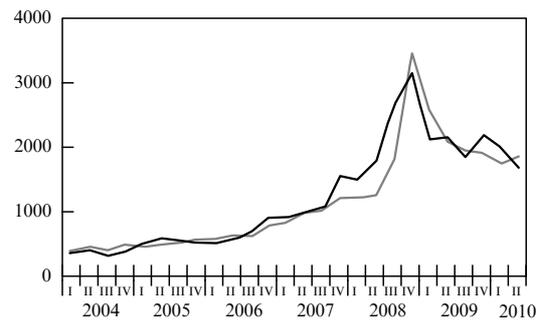


Рис. 12. Ликвидные активы банков, млрд руб.

ными по времени). Это означает, что в первом случае абсолютные масштабы величин существенны, а во втором — нет. В результате в *физике* "любимыми" (т.е. наиболее показательными) решениями служат равномерные движения *с постоянными скоростями*, а в *экономике* — автомодельные решения, в которых экстенсивные величины возрастают по экспоненте, т.е. *с постоянными темпами*. Подавляющее большинство выводов экономической теории получено сравнительным анализом автомодельных решений простых моделей<sup>4</sup>.

*Вариационный принцип в физике* "руководит" *всей системой*, а в модели экономики у *каждого агента есть свой вариационный принцип*. Ещё важнее существенное различие в топологической структуре этих принципов. Применение вариационного принципа всегда приводит к гамильтоновой системе уравнений движения, и это движение происходит по поверхностям постоянства функции Гамильтона.

В физике функция Гамильтона, грубо говоря, выпукла вниз. Поэтому её устойчивые *критические точки* имеют характер *центра* вокруг минимумов энергии, а типичные движения сводятся к вращениям, колебаниям и намоткам на торы. Эти движения демонстрируют в общем нейтральную устойчивость — сдвигаются в целом на величину порядка изменения начальных условий.

<sup>4</sup> Любопытно, что в историческом плане "экономическая экспонента" индустриального общества до сих пор прорывалась сквозь, казалось бы, вполне объективные внешние ограничения, а прогнозы всех моделей, пытавшихся учесть конкретные пределы роста, — от прогнозов Т. Мальтуса до прогнозов Д. Медоуза включительно — проваливались.

При характерных для экономики целях максимизации капитализации, полезности, прибыли и т.п. функция Гамильтона получается выпуклой вниз по "импульсам" и выпуклой вверх по "координатам", а все её критические точки имеют характер седла. В результате экономически осмысленные движения системы оказываются близкими к устойчивым сепаратрисам седел. Эти решения неустойчивы по начальным значениям импульсов (которые, кроме того, ненаблюдаемы), но слабо зависят от начальных условий по координатам и возмущений в отдалённом будущем. Для гамильтоновой системы надо решать не задачу Коши, а *краевую задачу*. Вытекающие из этого результаты известны под названием *теорем о магистралах*. Они дают надежду на то, что модели типа моделей межвременного равновесия будут верны в среднесрочной перспективе независимо от точности предсказания далёкого будущего.

Нашим главным результатом, полученным за последние годы, стало обнаружение сильного магистрального свойства: *хотя в модели мы разрешаем агентам знать будущее, это знание оказывается им ненужным при выработке оптимального поведения*. Поскольку это свойство выполняется, оно снимает все возражения против применения принципа рациональных ожиданий — модель сводится к традиционной динамической системе. Но это свойство само нуждается в объяснении.

Ключом здесь служит то, что сильный магистральный эффект проявляется в модели не вообще, на уровне формул, а только при правильно идентифицированных значениях параметров [12]. Здесь надо вспомнить, что экономика как управляющая система должна не просто координировать действия миллиардов людей, но делать это так, чтобы люди в большинстве случаев могли осуществить разумный выбор без сложных расчётов. Поэтому даже известные всем экономические механизмы могут не работать из-за своей сложности и риска. Можно предположить, что в каждый момент в экономике отбирается и действует такой комплекс механизмов, который не требует детальных расчётов для разумных решений. Поэтому, описывая в модели механизмы "по жизни", а не по учебникам, мы получаем модель с сильным магистральным свойством.

Всё это несколько напоминает известный в физике *антропный принцип*: Вселенная представляется наблюдателю гармоничной и "приспособленной" к нему потому, что во Вселенной с иным устройством наблюдатель не возникнет.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-13534-офи\_ц), программ фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 и РАН № 14 и Finance Market Fund, Norway (проект "Stochastic Dynamics of Financial Markets").

## Список литературы

1. Полтерович В М "Кризис экономической теории" *Экономическая наука современной России* (1) 46 (1998)
2. Поспелов И Г *Экология и жизнь* (3) 18 (2003)
3. Шкловский И С *Вселенная. Жизнь. Разум* (М.: Наука, 1980)
4. Макаров В Л, Препринт № WP/99/069/ (М.: ЦЭМИ РАН, 1999)
5. Леонтьев В В *Экономические эссе* (М.: Полит. литература, 1990)
6. Greene W H *Econometric Analysis* (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003)
7. Meadows D H *The Limits to Growth* (New York: Universe Books, 1972)

8. Краснощеклов П С, Петров А А *Принципы построения моделей* (М.: Фазис, 2000)
9. Петров А А, Поспелов И Г, Шананин А А *Опыт математического моделирования экономики* (М.: Энергоатомиздат, 1996)
10. Андреев М Ю и др. *Технология моделирования экономики и модель современной экономики России* (М.: МИФИ, 2007)
11. Hildenbrand W, Sonnenschein H (Eds) *Handbook of Mathematical Economics* Vol. 4 (Amsterdam: North-Holland, 1991)
12. Андреев М Ю, Пильник Н П, Поспелов И Г *Журн. новой экономической ассоциации* (3–4) 72 (2009)

PACS numbers: 89.65.Gh, **89.75.**–k  
DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107i.0767

## Об экономофизике и её месте в современной теоретической экономике

Д.С. Чернавский, Н.И. Старков,  
С.Ю. Малков, Ю.В. Косе, А.В. Щербаков

### 1. Введение

Задачи теоретической экономики — те же, что и других теоретических дисциплин.

1. Описание объекта (системы) на языке математических методов.

2. Описание откликов системы на внешние воздействия.

3. Прогноз поведения системы при неизменных внешних условиях.

Традиционно экономика считается наукой гуманитарной, но в теоретической экономике используются математические и физические понятия и методы. Таким образом, теоретическая экономика является междисциплинарным направлением. Как правило, междисциплинарные направления (такие, как биофизика, физическая химия и др.) не отрываются от своих прародителей и других естественных наук. Однако из этого правила имеются исключения

В настоящее время в теоретической экономике сложилась критическая ситуация [1]. Существует несколько различных направлений (по крайней мере, два), в которых используются разные основные положения (аксиомы) и разные математические методы и которые дают разные ответы на поставленные выше вопросы.

Тем не менее в современной (кризисной) ситуации от ответа на эти вопросы зависят судьбы людей, стран и, возможно, мира. В этом и заключается критичность ситуации.

Обсудим эти направления.

I. Наиболее представлен (особенно за рубежом) так называемый неоклассический подход, который считается "главным течением" (мейнстримом [2]). Основные положения мейнстрима следующие:

1) элементарным объектом общества является индивидуум. Он производит продукты с целью получения наибольшей прибыли. Индивидуум потребляет продукты с целью получить максимальную пользу для

Д.С. Чернавский, Н.И. Старков. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, РФ. E-mail: chernav@lpi.ru  
С.Ю. Малков, Ю.В. Косе. Академия военных наук, Москва, РФ  
А.В. Щербаков. Корпорация "Курс", Москва, РФ

себя. Основной функцией классической экономики является функция полезности. Предполагается, что индивидуум "рационален" и сам определяет наиболее полезную совокупность благ (в первую очередь, материальных). Различия обычаев ("менталитетов") в разных странах и социумах при этом не учитываются;

2) самоорганизация индивидуумов в обществе сводится к тому, что возникает стационарное (равновесное) состояние, в котором спрос (на товары, труд, деньги и т.п.) уравнивается предложением. Считается, что общество (государство) образуется как результат объединения индивидуумов и новые качества, не выводимые из свойств индивидуумов, при этом не возникают.

Создаётся впечатление, что цель мейнстрима — построить (хотя бы умозрительно) идеальное стабильное общество, в котором интересы всех были бы максимально удовлетворены, и это общество существовало бы вечно (наподобие утопического "Города Солнца").

В рамках мейнстрима часто используются догмы, например:

1) государство не должно вмешиваться в экономику. Это положение не доказано (поэтому и "догма") и не может быть доказано, поскольку полное невмешательство (так же, как и полное вмешательство) невозможно. Важна мера вмешательства, которая зависит от ситуации;

2) стационарное и равновесное состояние рыночной экономики единственно. Это положение тоже является недоказанной догмой и в последнее время подвергается сомнению. Тем не менее в рамках мейнстрима исследование динамики переходов между состояниями практически отсутствует.

Сильная сторона мейнстрима заключается в том, что в нём работают большие коллективы профессионалов высокого уровня. Заслугой мейнстрима является исследование оптимального стационарного состояния рыночной экономики.

Слабая сторона мейнстрима состоит в том, что он обособлен от других естественных наук и, по существу, превратился в "игру в бисер". Критерием качества решения задачи здесь считается внутренняя непротиворечивость и соответствие с аксиомами. Условие соответствия результата действительности обычно не обсуждается. Перечисленные выше актуальные задачи в рамках мейнстрима не решаются и не ставятся.

II. Сравнительно недавно возникло новое направление теоретической экономики — эконофизика (или физическая экономика). В неё входят разные задачи.

1. Эволюционная экономика возникла в начале прошлого века благодаря работам И. Шумпетера [3]. Далее она развивалась во многих работах (см. [4, 5] и приведённые там ссылки). Фактически именно Шумпетер обратил внимание на то, что экономика — не статическая, а развивающаяся система. Некоторое время это направление развивалось без использования математического аппарата. В настоящее время такой аппарат имеется — он тот же, что и в других развивающихся системах (и в синергетике).

2. Математическое моделирование (на основе теории динамических систем) как макроэкономических, так и микроэкономических процессов (это направление часто называют экономической синергетикой (Занг [6])).

3. Анализ биржевых рядов и исследование их свойств.

Последние три направления объединяет система основных положений, характер решаемых задач и методы их решения. Во всех трёх направлениях экономика рассматривается как развивающаяся система, и при их описании используется соответствующий аппарат — теория динамических диссипативных систем. Иными словами, теоретическая экономика здесь является не обособленной дисциплиной, а, напротив, входит в семью естественных наук. Вместе с тем в этой семье эконофизика представляет собой вполне оформившееся направление.

Особую роль при этом играет проблема дуализма развития: с одной стороны, общество должно сохранять накопленную информацию, с другой — создавать новую. Эти задачи комплементарны (в смысле комплементарности по Н. Бору). В физике они во многих случаях решены, в экономике их ещё предстоит решить.

Таким образом, ничего особенно нового (по сравнению с другими естественными науками) в эконофизике нет. Физика здесь выступает как наука, которая имеет дело как с природой, так и с современной математикой и поэтому обладает дисциплиной мысли и критичностью по отношению к догмам. В частности, возможность появления (и исчезновения) нескольких стационарных состояний здесь не только допускается, но и широко используется [7, 8].

С этой точки зрения, экономика — очень интересная и важная область приложения физики.

В действительности граница между неоклассической экономикой и эконофизикой несколько размыта. Многие экономисты в разных работах используют как тот, так и другой подходы.

Цель настоящего сообщения — обсудить примеры математических моделей в экономике и их результаты.

## 2. Основные понятия и модели. Функция спроса

В экономике важную роль играет спрос. Спрос зависит от потребностей человека, но не меньшую роль играет поведение окружающих (в том числе, средств массовой информации). Иными словами, спрос является коллективной поведенческой реакцией человеческого общества. Спрос описывается функцией спроса. Есть несколько вариантов этой функции.

1. Функция спроса на данный товар (или группу сходных товаров) представляет собой зависимость количества товара  $Q$ , потребляемого в единицу времени, от наличия у потребителя денег  $U$  или доходов  $D$  и цены товара  $p$ . В силу условности того и другого функция спроса зависит от отношения  $U/p$  (или  $D/p$ ). Величина  $Q$  может выражаться в естественных единицах (штуках, килограммах), но чаще используют величину  $Qp$ , которая выражается в денежных единицах. В качестве примера на рис. 1 приведём эмпирическую функцию спроса [9], которая построена на основе данных статистического бюро разных стран. Важным свойством этой функции является немонотонность (наличие так называемого клюва). Ниже мы увидим, что клюв играет важную роль.

2. В макроэкономике используется единый агрегат, включающий в себя товары первой необходимости (пища, одежда, жилище), товары долговременного пользования (машины, телевизоры и т.д.) и элитные товары. В этом случае удобнее пользоваться функцией спроса  $Q(U/p)$ .

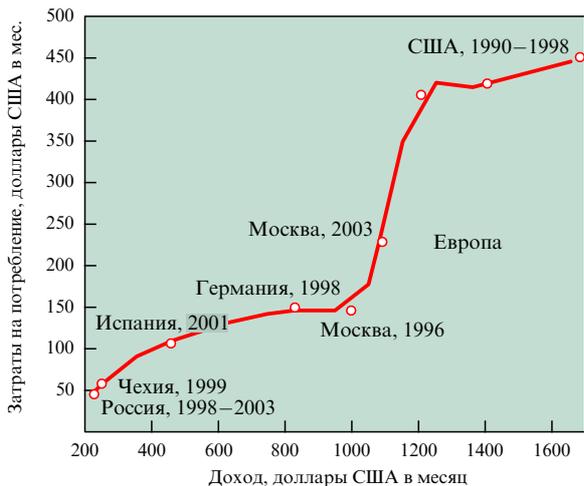


Рис. 1. Вид функции спроса (эмпирические данные) [9].

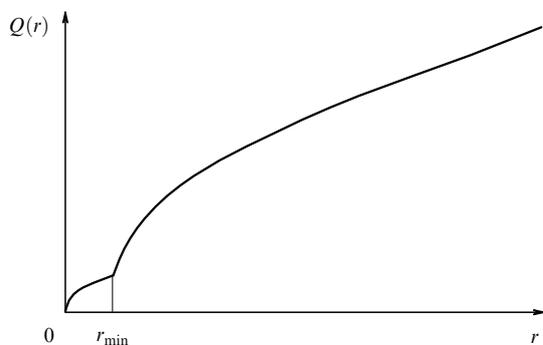


Рис. 2. Аналитическое представление функции спроса.

Функция спроса  $Q(U/p)$  (рис. 2) может быть представлена в аналитическом виде [10]:

$$Q(r) = Q_1 \frac{r}{r + r_1} + \Theta(r - r_{\min}) \left[ Q_2 \frac{r - r_{\min}}{r - r_{\min} + r_2} + \varepsilon(r - r_{\min}) \right], \quad (1)$$

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Смысл параметров  $Q_1, Q_2, r_1, r_2, r_{\min}$  и  $\varepsilon$  заключается в следующем.

Параметр  $Q_1$  соответствует полному удовлетворению жизненно необходимых потребностей,  $r_1$  — значение покупательной способности, при которой эти потребности удовлетворяются наполовину.

Величина  $r_{\min}$  — критическое значение покупательной способности: при покупательной способности, меньшей, чем  $r_{\min}$ , потребитель не приобретает товаров долговременного пользования. Величина  $r_{\min}$  зависит от психологии потребителя. Так, большая величина  $r_{\min}$  означает, что человек склонен полнее удовлетворить потребности первой необходимости, т.е. жить проще. Малое  $r_{\min}$  означает, что потребитель склонен жить "по-современному", даже в ущерб питанию.

Параметр  $Q_2$  соответствует полному удовлетворению товарами долговременного пользования, т.е. приобретению всего "джентльменского набора" товаров: комплекта бытовой техники, автомобиля, дачи и т.д.

Параметр  $r_2$  характеризует стремление человека выглядеть достойным звания джентльмена. При малом значении  $r_2$  человек, едва накопивший средства в количестве  $U \approx r_{\min}/p$ , стремится тут же их потратить на приобретение "джентльменского набора". При большом значении  $r_2$ , напротив, человек ведёт себя скромно и бережливо даже при накоплениях  $U > r_{\min} p$ .

Параметр  $\varepsilon$  отражает наличие "всевозрастающих потребностей человека", т.е. неспособность многих остановиться в своих тратах на приобретение предметов роскоши при наличии соответствующих средств.

Таким образом, параметры функции спроса отражают человеческий фактор, т.е. психологию потребителя.

В модели важно поведение коллектива потребителей, и в этом смысле параметры функции спроса имеют социально-психологический характер, т.е. учитывают обычаи и правила поведения, сложившиеся в данном обществе.

В разных странах эти параметры, вообще говоря, различны и функции спроса могут заметно различаться. Сигмоидальный характер функции спроса играет в модели очень важную роль. Его эффект зависит от параметров  $r_{\min}$  и  $r_2$ : при малых  $r_{\min}$  и больших  $r_2$  функция спроса практически становится плавной и всюду выпуклой. Сигмоидность (т.е. "клев" на рис. 2) исчезает. Параметры функции спроса могут изменяться со временем, но медленно, например при смене поколений (роль этих изменений мы обсудим позднее).

### 3. Производственная функция

Производственная функция  $F(r)$  представляет собой количество произведённого продукта (в единицу времени) в зависимости от вложенных (оборотных) средств. Последние удобно выражать не в деньгах, а в отношении денег к средневзвешенной цене продукта  $p$ :  $r = U/p$ . При этом исключается роль инфляции. В оборотные средства входят: переменные издержки (пропорциональные объёму производства) и постоянные издержки (затраты на поддержание производства и модернизацию его, т.е. на проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ). В производственной функции можно выделить три участка:

- 1) участок с постоянной отдачей — вложенные средства пропорциональны выручке;
- 2) участок с падающей отдачей — излишек произведённой продукции не востребован обществом;
- 3) участок с возрастающей отдачей — потребность в продукте (как правило, инновационном) возрастает и предприятие получает сверхприбыль.

На рисунке 3 представлена производственная функция и её участки.

### 4. Базовые модели

В каждой науке модели строятся в два этапа [11]: сначала формулируются так называемые базовые (простейшие) модели. Они содержат небольшое число переменных и уравнений, но при этом описывают суть явления (автоматизация, кризисы и т.д.). Применительно к конкретным условиям базовые модели усложняются, дополняются, комбинируются и превращаются в имитационные модели. В физической экономике имеется набор базовых моделей. Обсудим их кратко.

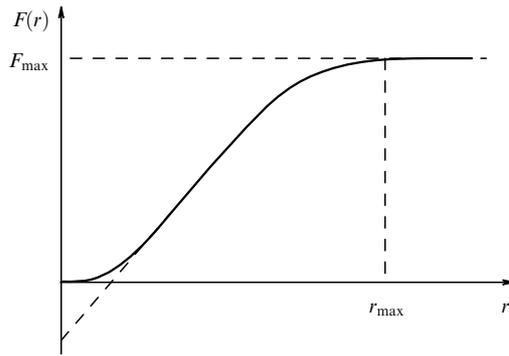


Рис. 3. Производственная функция.

1. Логистическая модель, которая содержит одно уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = a(x - x^2). \quad (2)$$

Эта модель используется для описания развития фирмы, развития вида (в биологии), демографических процессов и т.д. В ней имеется две стадии: первая — экспоненциальная (или ещё более сильный рост с обострением [12]) и вторая — стадия выхода на стационарный режим в связи с внешними ограничениями.

2. Базовая модель борьбы условных информаций, которая содержит два (или больше) уравнения вида [13, 14]:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\tau_i} u_i - \sum_{j \neq i}^n b_{i,j} u_j u_i - a_i u_i^2 + D_i \Delta u_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь  $u_i$  — число носителей  $i$ -й информации, первый член в правой части — воспроизведение  $i$ -й информации, второй — взаимодействие носителей разных информаций, третий — внешние ограничения, последний член — миграция носителей в пространстве.

Принято, что взаимодействие антагонистично, т.е. каждый носитель стремится сохранить свою информацию, навязать её другому и создать новую (свою) информацию.

Модель (3) использовалась для описания возникновения единого генетического кода в биологии [13, 14]. В экономике она применялась для описания конкуренции фирм (в частности, новаторов и консерваторов) [15], роли рекламы [16], взаимодействия ведущих валют на внешнем торговом рынке [17]. Кроме того, эта же модель использовалась для описания исторических процессов (образования крупных государств) [18]: было продемонстрировано, что идеологические (информационные) факторы играют не меньшую роль, чем экономические.

3. Модель скрытого банкротства, которая имеет вид [19, 20]

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M}{\tau} + p_m Q_0 \frac{P}{P_0 + P} - \frac{P}{\tau_p} P - \kappa,$$

$$\frac{dP}{dt} = -p Q_0 \frac{P}{P_0 + P} + \frac{M}{\rho \tau}.$$

Здесь  $M$  — оборотные средства,  $P$  — количество товара на складе. Параметры:  $Q_0$  — максимальная потребность в продукте,  $p_m$  — рыночная цена,  $p$  — себестоимость,  $\tau$  —

время производственного цикла,  $\tau_p$  — время хранения товара,  $\kappa$  — постоянные издержки.

Модель описывает как стабильное состояние фирмы, так и бифуркацию — переход в состояние банкротства. При этом банкротство вначале развивается медленно, но затем быстро переходит в критическую фазу. Эта модель использовалась при обсуждении эколого-экономических проблем в глобальном мире. Особенно важен тот момент, в который ресурсы близки к исчерпанию, а затраты на их регенерацию из отходов возрастают [20].

4. Базовая модель перехода из высокопроизводительного состояния (ВП) в низкопроизводительное (НП), т.е. фактически модель кризиса, которая сродни модели фазовых переходов. В экономифизике эта модель стала возможной благодаря отказу от догмы об единственности рыночного состояния. На её основе была создана имитационная макроэкономическая модель современной России, которую мы более подробно обсудим в разделе 5.

## 5. Макроэкономическая модель современной России

Цель модели — описать, что произошло в результате либерализации цен и каковы возможные варианты дальнейшего развития.

Модель была построена в 1990-е годы и опубликована в УФН [7]. Кризис 1990-х годов в ней интерпретировался как фазовый переход из ВП-состояния в НП-состояние в результате либерализации цен.

В течение последних лет модель совершенствовалась и дополнялась [10]. При этом выяснилось, что результаты существенно зависят от внешней ситуации и от решений Правительства России. В настоящее время модель не преследует цели дать долговременный прогноз. Более того, с нашей точки зрения таковой и невозможен, поскольку экономика России (и всего мира) находится вблизи неустойчивого состояния. В связи с этим решения, принимаемые правительствами (всех стран), оказывают существенное влияние, но какое именно — не ясно ни тем, кто принимает решения, ни тем, кто пытается их выполнять.

Цель предлагаемой модели — служить инструментом поддержки принятия решений. Для этого модель должна давать ответы на вопросы: что будет если..?

Помимо этого модель должна давать кратковременные прогнозы (типа "что будет, если ничего не делать").

Мы не будем приводить модель полностью (поскольку она опубликована) и ограничимся только некоторыми последними результатами.

1. Наглядное представление о состоянии экономики даёт балансовая диаграмма (рис. 4). По оси ординат отложены функция спроса  $Q(g)$  и  $F(r)\mu$ , где  $g$  — доля средств, выделяемая собственниками на собственные нужды,  $F(r)$  — производственная функция,  $\mu$  — уровень издержек [7]. Их пересечения — стационарные состояния. Их три: ВП, НП и коллапс производства. При изменении этих функций (их параметров) возможны переходы (типа фазовых).

Здесь уместно сделать следующие замечания:

— в действительности ситуация в России достаточно пёстрая. Производственные функции в разных регионах и разных фирмах различны, так что на диаграмме можно представить веер функций. Он охватывает как фирмы в ВП-состоянии (так называемые газели [21]), так и фирмы, близкие к банкротству;

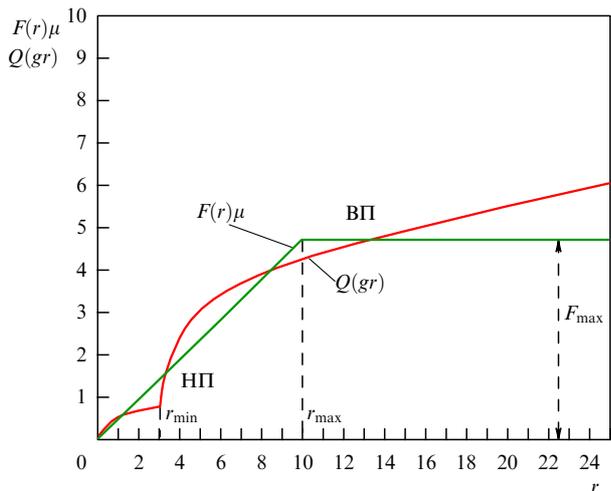


Рис. 4. Балансовая диаграмма (см. текст).

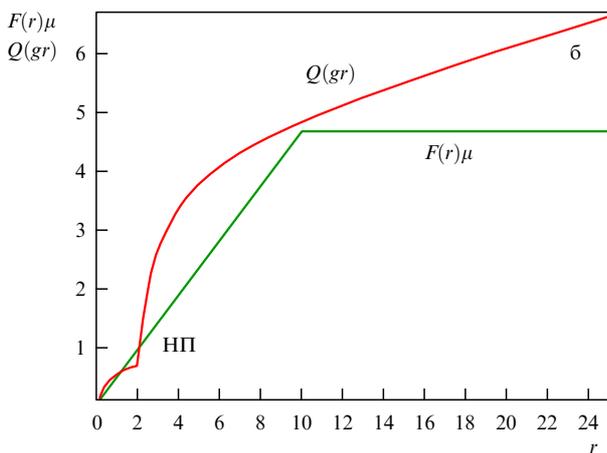
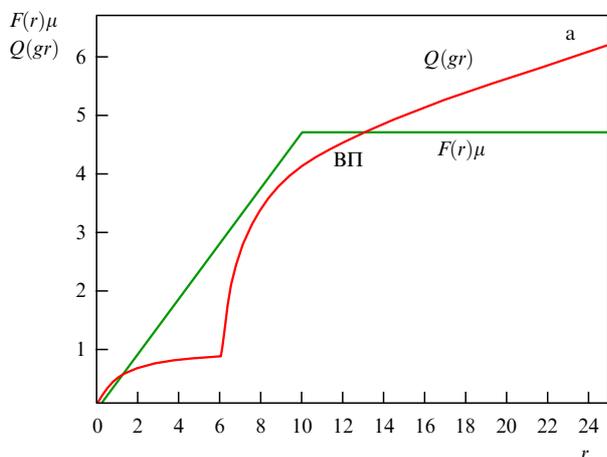


Рис. 5. "Фазовый переход" при изменении функции спроса в случае бережливого поколения (а) и поколения, выросшего в достатке (б).

— функция спроса, как правило, меняется со сменой поколений.

На рисунке 5а представлена функция спроса, соответствующая "бережливому" поколению, которое тратит деньги на товары долговременного спроса при их наличии. Видно, что при этом реализуется только ВП-состояние. Функция спроса на рис. 5б относится к поколению, выросшему в достатке, которое хочет иметь

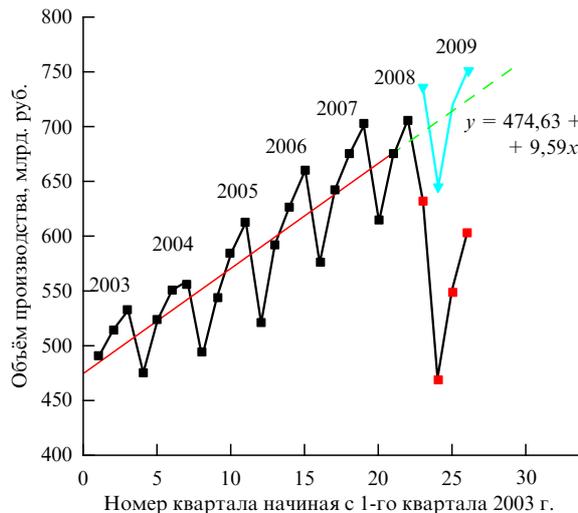


Рис. 6. Динамика ВВП в период 2003–2009 гг.: ■, ● — статистические данные, ▼ — тренд на 2008 г. (IV квартал) и 2009 г. (I–III кварталы), прямая линия — тренд без учёта сезонных изменений.

всё и сразу. Видно, что при этом экономика переходит в НП-состояние.

Долговременные (порядка 10–20 лет) периодические изменения в экономике получили название циклов Кондратьева. Возможно, что изложенное выше является одной из причин этих циклов. Правда, сам Кондратьев связывал циклы с инновационной активностью людей (не касаясь их психологии и функции спроса, хотя эти вещи связаны.)

**6. Кризис 2008 года**

Кризис произошёл во всём мире, но в США и в России он имел разные причины.

В России начиная с 2004 г. росли цены на сырьё и товары естественных монополий (ЕМ). Цены на товары отечественной обрабатывающей промышленности росли медленнее (в меру инфляции). Рентабельность падала и приближалась к критическому значению ("клову"). При этом в уравнении для цены устойчивость уменьшалась и возникала бифуркация типа Андронова–Хопфа (т.е. колебательный режим). При продолжении этой тенденции промышленный кризис в России был бы неизбежен (о чём неоднократно говорилось на конференциях [21] и писалось).

В США кризис имел финансовый характер (падение акций и кризис коммерческих банков). От этого пострадали, в первую очередь, российские финансисты: американские банки потребовали от них вернуть кредиты и не дали новых для погашения долгов. Российское руководство поддержало российских финансистов, но за счёт средств, изъятых из реального сектора. В результате российские промышленники в течение полугода (вторая половина 2008 г.) были лишены оборотных средств. В условиях низкой рентабельности это привело к промышленному кризису [22]. На рисунке б приведены официальные данные с 2003 по 2009 г. (поквартально в рублях).

Видно, что общий тренд валового внутреннего продукта (ВВП) до августа 2008 г. был положительным (на фоне сезонных колебаний). Это не противоречит утверждению о том, что рентабельность обрабатывающей промышленности за эти годы снижалась. Дело в том,

что в общий ВВП входят также услуги и добыча сырья (цены которого росли), что и обеспечивало общий положительный тренд (как видно из рис. 6). Штриховой линией показаны расчётные данные без учёта изъятия оборотных средств в 2009 г. Видно, что кризиса в России в этом случае не было бы (но он случился бы несколько позднее). В результате в конце 2008 г. "неожиданно" возник кризис и общий ВВП уменьшился почти вдвое. Затем ВВП увеличился, но не достиг прежнего уровня.

### 7. Посткризисные меры

После кризиса были предложены антикризисные меры (как правительством, так и другими организациями). Обсудим антикризисные меры в рамках нашей модели.

1. Частичное государственное регулирование цен сырья, товаров и услуг ЕМ. В нашу модель этот фактор входит как параметр рентабельности, зависящий от инфляции, мировых цен и государственной стабилизации цен на часть продукции. На рисунке 7 представлены результаты расчётов ВВП обрабатывающей промышленности при различных долях государственного регулирования цен. Параметр  $a$  означает долю продукции ЕМ, цены которой фиксированы на данном (текущем) уровне и не растут. Нижняя кривая соответствует отсутствию регулирования, верхняя кривая — полной фиксации цен. Начальная точка — август 2008 г.

Реально ВВП снизился примерно на 30 % и до сих пор сохраняется на этом уровне. В модели этому соответствует фиксация цен на уровне 75 %. Реально здесь сыграло роль и снижение мировых цен, так что фиксация цен могла быть и меньше.

На рисунке 8 представлены результаты модельных расчётов и статистические данные в посткризисное время. Видно, что страна не вышла из кризиса (находится в депрессии) и процесс носит колебательный характер, о чём упоминалось выше.

2. Сейчас снова встал вопрос об изменении системы налогообложения (снижение налогов на добавленную стоимость (НДС) и на прибыль). В нашу модель они входят как параметр  $\kappa$ , определяющий рентабельность. На рисунке 9 приведены результаты модельных расчётов роста ВВП при снижении налогов.

Из рисунка видно, что снижения налогов на 3–4 % уже достаточно для выхода из кризиса. Разветвление — время изменения налоговой системы.

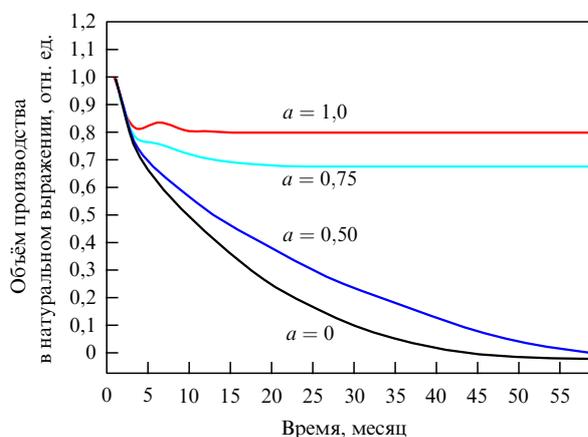


Рис. 7. Динамика ВВП при разной степени регулирования базовых цен  $a$ .

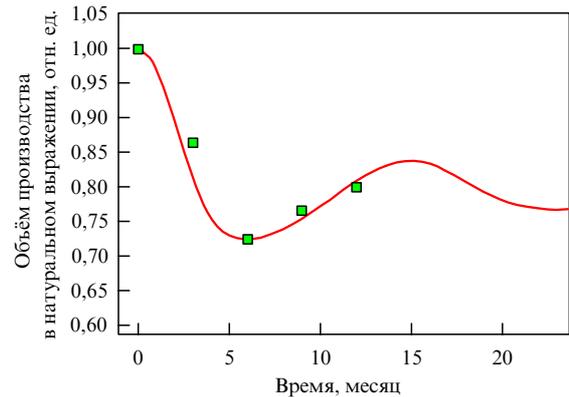


Рис. 8. Динамика ВВП (без учёта тренда): ■ — эмпирические данные, кривая — модельный расчёт с учётом регулирования цен при  $a = 0,45$ .

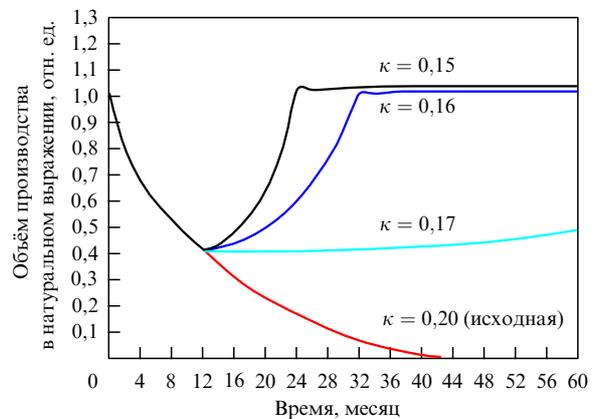


Рис. 9. Динамика ВВП в условиях развития кризиса при изменении налогов.

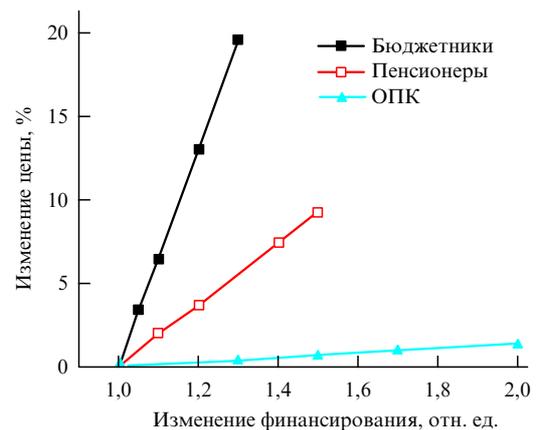


Рис. 10. Изменение ценовой инфляции при дополнительном финансировании: ■ — бюджетников, □ — пенсионеров, ▲ — предприятий ОПК.

3. Каковы последствия увеличения затрат на оборонно-промышленный комплекс (ОПК)? Большая часть продукции ОПК на внутренний рынок не поступает, и поэтому она не приносит прибыли. Тем не менее эти затраты необходимы по соображениям не экономическим. Вопрос заключается в том, какой урон они нанесут экономике и какую инфляцию вызовут. На рисунке 10 приведены результаты расчётов инфляции в зависимости

от вложений в ОПК, увеличения пенсий и зарплат бюджетников.

Из рисунка 10 видно, что инфляция, вызванная затратами на ОПК, заметно меньше, чем можно было бы ожидать. Причина состоит в том, что не все вложения поступают на денежный рынок (в форме зарплаты), часть из них направляется в промышленный сектор как плата за комплектующие. Кроме того, объём затрат на ОПК составляет малую долю бюджета, по сравнению с долей, идущей на выплаты пенсий и зарплат бюджетников.

## 8. Заключение

Представленные в настоящей статье исследования лежат в рамках широкого направления, которое имеет несколько названий: "самоорганизация" (И.Р. Пригожин), "синергетика" (Г. Хакен) и "сложность". Базовые модели, упомянутые выше, в действительности исследованы и разработаны более подробно, чем это представлено в настоящей статье. Однако не все они доведены до состояния имитационных моделей, в которых решаются реальные актуальные задачи с учётом конкретных условий.

Тем не менее надобность в этом уже назрела и работа в этом направлении активно ведётся. Так, в работах [23, 24] представлены модели мировой динамики. Модель "борьбы валют" развивается и детализируется с учётом трёх и более участников. Это особенно актуально для планирования введения единой торговой валюты для взаимных расчётов между странами БРИК (Бразилия, Россия, Индия и Китай).

Из базовой модели следует, что ситуация здесь не проста и требует модельных расчётов.

Базовая модель скрытого банкротства имеет прямое отношение к ситуации в мире в целом. Дело в том, что в настоящий момент мы живем не за счёт производимого продукта, а используем природные запасы "на складе". Иными словами, мы уже находимся в состоянии скрытого банкротства, но пока не замечаем этого. Из базовой модели следует, что переход к открытому банкротству может быть "неожиданным" и очень резким. Предвидеть его необходимо заранее — для этого и нужна математическая модель.

Приведённые примеры отнюдь не исчерпывают всех проблем современной экономики. Однако упомянутые базовые модели (и их комбинации) создают основу для моделирования практически всех актуальных задач.

Модель макроэкономики современной России приведена здесь уже не как базовая, а как имитационная. Следовательно, она претендует на описание и прогноз реальных событий. Насколько удачно — судить читателю.

Важно, что модель описывает не столько прогноз, сколько отклик системы на те или иные внешние воздействия (события, которые ещё не произошли, но могут произойти). Иными словами, модель может служить инструментом поддержки принятия решений руководством экономикой страны.

Кроме того, модель является достаточно полной, т.е. даёт информацию о распределении населения по доходам и накоплениям (и то и другое в современной России очень поляризовано), о спросе на товары разных категорий и т.п. Иными словами, она позволяет представить экономический портрет современной России. Разумеется, модель ежегодно модернизируется (с учётом изменяющихся параметров). При этом особое внимание уделяется вопросу: насколько близко (или далеко) страна находится от точки бифуркации?

В статье приведены ответы не на все возможные вопросы: что будет, если...? Тем не менее математическая основа для ответа на любой из подобных вопросов в экономфизике имеется.

Мы не касались здесь вопросов поведения цен акций на биржах. Этому посвящены статьи [25, 26], публикуемые в данном номере УФН.

Работа выполнена при поддержке программы гранта РФФИ 08-06-00319.

## Список литературы

1. Полтерович В М *Экономическая наука современной России* (1) 46 (1998)
2. Hodgson G M *Evol. Inst. Econ. Rev.* 4 (1) 7 (2007) [Пер. на русск. яз.: Ходжсон Дж *Экономический вестник Ростовского государственного университета* 6 (2) 8 (2008)]
3. Schumpeter J *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung* (Leipzig: Duncker & Humblot, 1912) [*The Theory of Economic Development* (New Brunswick, NJ: Transaction Books, 1983); Шумпетер Й *Теория экономического развития* (М.: Прогресс, 1982)]
4. Маевский В И, в сб. 5-й *Междунар. симп. по эволюционной экономике* (М.: Институт экономики РАН, 2004) с. 91
5. Маевский В И *Введение в эволюционную макроэкономику* (М.: Япония сегодня, 1997)
6. Zhang W-B *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics* (Berlin: Springer-Verlag, 1991) [Занг В-В *Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории* (М.: Мир, 1999)]
7. Чернавский Д С, Старков Н И, Щербаков А В *УФН* 172 1045 (2002) [Chernavskii D S, Starkov N I, Shcherbakov A V *Phys. Usp.* 45 977 (2002)]
8. Robinson J *The Economics of Imperfect Competition* (London: Macmillan and Co., 1948) [Робинсон Дж *Экономическая теория несовершенной конкуренции* (М.: Прогресс, 1986) с. 101]
9. Качалов И, <http://www.foodmarket.spb.ru/current.php?article=781>
10. Чернавский Д С и др. *Стратегическая стабильность* (1) 37 (2004)
11. Чернавский Д С, Чернавская Н М *Биофизика* 54 139 (2009) [Chernavskii D S, Chernavskaya N M *Biophysica* 54 103 (2009)]
12. Капица С П, Курдюмов С П, Малинецкий Г Г *Синергетика и прогнозы будущего* (М.: Наука, 1997)
13. Chernavskii D S, Chernavskaya N M *J. Theor. Biol.* 50 13 (1975)
14. Чернавский Д С *Синергетика и информация* (М.: УРСС, 2004)
15. Чернавский Д С, Щербаков А В, Зильпукаров М-Г М "Модель конкуренции", Препринт № 64 (М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2006)
16. Зильпукаров М -Г М, в сб. *Труды 7-го Междунар. симп. по эволюционной экономике* (Под ред. В И Маевского) (М.: Изд-во Института экономики РАН, 2009)
17. Чернавский Д С, Старков Н И, в сб. *Труды 9-го Междунар. симп. по эволюционной экономике* (Под ред. В И Маевского) (М.: Изд-во Института экономики РАН, 2010)
18. Чернавский Д С и др., в сб. *История и синергетика: Математические модели социальной, экономической и культурной динамики* (Отв. ред. С Ю Малков, А В Коротаев) 2-е изд. (М.: УРСС, 2010) с. 142
19. Чернавская Н М, Щепетов Д С, Васильева Л Ю, в сб. *Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических проблем* Вып. 7 (Под ред. Л А Уваровой) (М.: Янус-К, 2004) с. 263
20. Чернавская Н М и др. *Эколого-экономическая деятельность предприятий при техногенезе и чрезвычайных ситуациях* (М.: Янус-К, 2010)
21. Юданов А Ю *Опыт конкуренции в России. Причины успехов и неудач* (М.: Изд-во ИНТРАС – КНОРУС, 2007)
22. Щербаков А В *Кабели и провода* (5) 6 (2008)
23. Акаев А А *Докл. РАН* 434 749 (2010) [Akaev A A *Dokl. Math.* 82 824 (2010)]
24. Акаев А А, Садовничий В А *Докл. РАН* 435 320 (2010) [Akaev A A, Sadovnichii V A *Dokl. Math.* 82 978 (2010)]
25. Видов П В, Романовский М Ю *УФН* 181 774 (2011) [Vidov P V, Romanovskii M Yu *Phys. Usp.* 54 (7) (2011)]
26. Дубовиков М М, Старченко Н В *УФН* 181 779 (2011) [Dubovikov M M, Starchenko N V *Phys. Usp.* 54 (7) (2011)]

PACS numbers: 02.50.-r, 89.65.Gh  
DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107j.0774

## Неклассические случайные блуждания и феноменология флуктуаций доходности ценных бумаг на фондовом рынке

П.В. Видов, М.Ю. Романовский

### 1. Введение. Экспериментальные факты, наблюдаемые при флуктуациях доходности ценных бумаг

Логарифмические доходности акций и фондовых индексов  $S(\Delta t)$ , измеренные на интервале времени  $\Delta t$ :

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}, \quad (1)$$

систематически исследуются ещё со времён Л. Башелье [1] ( $Y(t)$  — цена акции или значение индекса в момент  $t$ ). Экспериментальные исследования доходности на международных финансовых рынках позволили установить несколько фактов.

Во-первых, кумулятивная функция распределения вероятности возникновения флуктуации большей, чем  $x$ , так же как и меньшей, чем  $-x$ , для акций крупнейших компаний США на временном интервале с 1994 г. по 1995 г. хорошо описывается степенной функцией вида [2]

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} x^{-3}, & S(\Delta t) > x, \\ -x^{-3}, & S(\Delta t) < -x. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогичные результаты получены и для акций немецких [3], норвежских [4], французских, японских, швейцарских и английских [5] компаний, а также фондовых индексов [6].

Российские акции ("голубые фишки") демонстрируют аналогичное поведение (2). На рисунке 1 изображено кумулятивное распределение доходностей для положительных (тёмные символы) и отрицательных (светлые символы) флуктуаций акций Сбербанка. Прямой линией на рис. 1 обозначен закон  $x^{-3}$ . По оси ординат отложена кумулятивная функция распределения, по оси абсцисс — доходность, нормированная на соответствующую экспериментально вычисленную среднеквадратичную доходность. Аналогичные зависимости мы получили и для акций других российских компаний. На рисунке 2 представлена функция распределения флуктуаций российского индекса РТС. Хорошо видно, что все графики кумулятивных распределений похожи друг на друга. В то же время кривые для доходностей с большими  $\Delta t$  располагаются несколько выше графиков для доходностей с меньшими  $\Delta t$  (см. также [5]).

Во-вторых, распределение количества акций  $Q(x)$ , торгуемых в одной биржевой сделке (одном тике), определённно попадает в диапазон Леви, т.е. асимптотическая ("хвостовая") часть распределения хорошо описывается законом вида  $x^{-\zeta}$ , где  $0 < \zeta < 2$ , если рассматривать кумулятивную функцию распределения (см. [7] и обсуждение [8, 9]). Параметры  $1,45 < \zeta < 1,63$  были

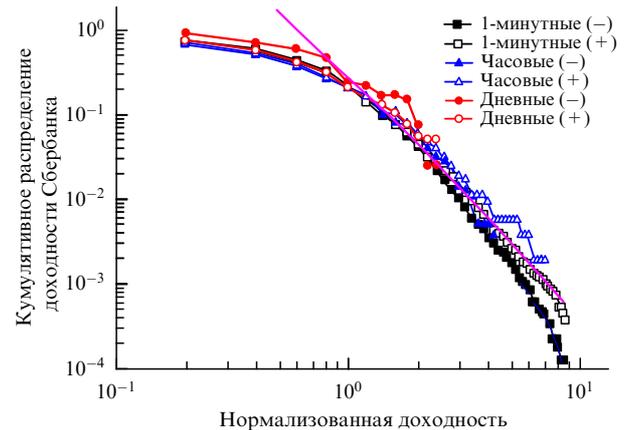


Рис. 1. Кумулятивные распределения нормированных доходностей (см. текст) обыкновенных акций Сбербанка для различных  $\Delta t$ . 1-минутные положительные флуктуации — светлые квадраты, 1-минутные отрицательные флуктуации — тёмные квадраты; часовые положительные флуктуации — светлые треугольники, часовые отрицательные флуктуации — тёмные треугольники; дневные положительные флуктуации — светлые кружки, дневные отрицательные флуктуации — тёмные кружки. Прямой жирной линией показана зависимость  $x^{-3}$ . 1-минутные, часовые и дневные данные получены по результатам торгов соответственно 10.01–10.02.2009 гг., 01.09.2008 – 30.09.2009 гг., 23.01.2006 – 30.09.2009 гг. на ММВБ.

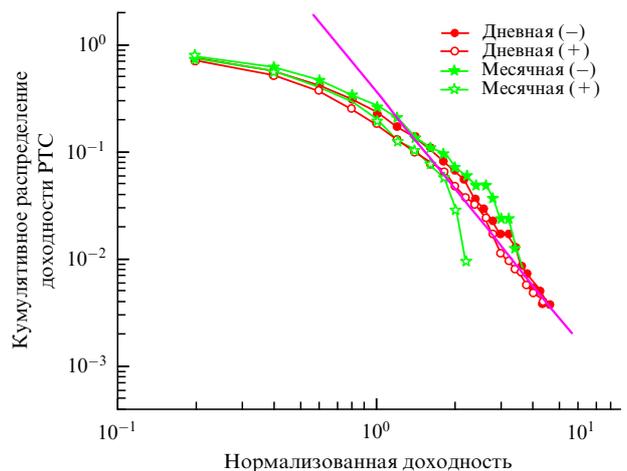


Рис. 2. Кумулятивные распределения нормированных доходностей (см. текст) индекса РТС для различных  $\Delta t$ : дневные положительные флуктуации — светлые кружки, дневные отрицательные флуктуации — тёмные кружки; месячные положительные флуктуации — светлые звёздочки, месячные отрицательные флуктуации — тёмные звёздочки. Прямой жирной линией показана зависимость  $x^{-3}$ . Дневные данные получены по результатам торгов 09.01.1995–27.06.2007 гг. на бирже РТС, месячные данные — по результатам торгов 09.01.1995–20.10.2010 гг.

получены с помощью различных статистических методов для одной и той же выборки акций крупнейших американских компаний (см. также [10]),  $\zeta \approx 1,58$  для акций 85 крупнейших компаний, торгуемых на Лондонской фондовой бирже (LSE) в 2001–2002 гг., и  $\zeta \approx 1,53$  для акций 13 компаний, входящих в индекс Парижской биржи CAC 40.

Для российских "голубых фишек" мы получили показатели в диапазоне  $1,6 < \zeta < 1,7$  в зависимости от рассматриваемой ценной бумаги. На рисунке 3 показано кумулятивное распределение объёма торгов в одном тике для акций Сбербанка 21.11.2007 г.

П.В. Видов. Управляющая компания ИНТРАСТ, Москва, РФ  
М.Ю. Романовский. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, РФ. E-mail: myrom@gpad.ac.ru, slon@kapella.gpi.ru

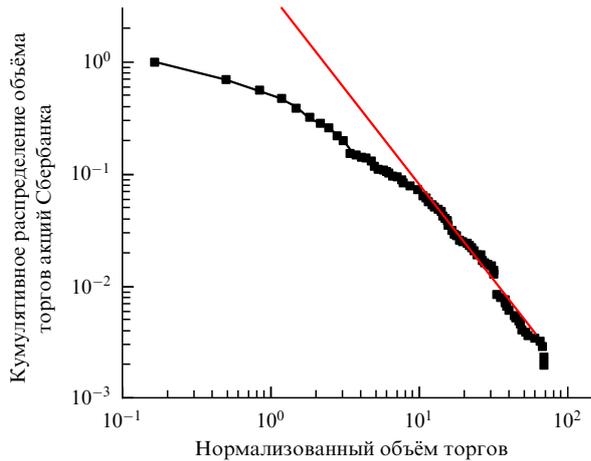


Рис. 3. Кумулятивное распределение объёма торгов в одном тике для акций Сбербанка 21.11.2007 г. Прямой линией обозначена "хвостовая" зависимость  $x^{-\zeta}$ , где  $\zeta = 1,7$ .

Естественно, данные зависимости справедливы только для акций. Ситуация с доходностями индексов несколько сложнее. Очевидно, что доходности индекса могут зависеть от объёма торгов акциями, входящими в индекс. Однако это предположение довольно сложно проверить экспериментально.

Наконец, известно, что процесс  $S(t)$  является дельта-коррелированным во времени:

$$B(\Delta t) = \langle S(t) S(t + \Delta t) \rangle \sim \delta(\Delta t), \tag{3}$$

для всех акций [11]. Это утверждение проверялось для российских "голубых фишек" для различных  $\Delta t$ , включая самый малый из доступных нам интервалов — 1 мин. Во всех случаях был получен следующий результат: значение корреляционной функции (3) стремится к нулю на первой ненулевой измеренной точке  $\Delta t$ . Аналогичная корреляционная функция для индексов имеет вид  $\sim \exp(-t/\tau_{\text{corr}})$  [6], где время корреляции для индекса S&P500 (одного из самых популярных индексов фондового рынка США) составляет порядка 4 мин [6], а для российского индекса РТС — 0,85 мин [12]. Таким образом, доходность акций и индексов напоминает случайный процесс с независимыми приращениями.

**2. Броуновское движение и гауссовы случайные блуждания**

Случайные блуждания являются привлекательной наглядной моделью случайного процесса с независимыми приращениями. Формально задача о случайных блужданиях ставится следующим образом. Следует найти плотность вероятности того, что частица, испытывав  $N$  прыжков от места старта (в качестве которого без ограничения общности можно взять начало координат) в пространстве с некоторой размерностью  $G$ , окажется в интервале от  $\mathbf{R}$  до  $\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$ . Каждый  $i$ -й прыжок может быть произведён в интервале длин (в модельном  $G$ -мерном пространстве) от  $\mathbf{r}_i$  до  $\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i$  с вероятностью  $\tau(\mathbf{r}_i)$ . Все прыжки являются независимыми случайными величинами.

Схема решения этой задачи известна (схема Чандрасекара [13]). Пусть

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i. \tag{4}$$

При наличии всех моментов у функции плотности вероятностей  $\tau(\mathbf{r}_i)$  имеем

$$W_1(R) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N \langle r^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{R^2}{2N \langle r^2 \rangle}\right). \tag{5}$$

Положив теперь  $N \langle r^2 \rangle = Dt$  ( $D$  — коэффициент диффузии), получим обычное решение для классической одномерной диффузии броуновской частицы, при котором средний квадрат её смещения (дисперсия) из точки старта пропорционален  $t^{1/2}$ .

Важнейшим требованием в схеме Чандрасекара [13] является наличие всех моментов закона прыжков, хотя в (5) входит только второй. По-видимому, наиболее "слабо" спадающим на бесконечности законом прыжка, имеющим все конечные моменты, является распределение Субботина [14]:  $p(x) \sim \exp(-x^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$  (на самом деле лишь немного больше).

**3. Блуждания Леви**

Изучим одномерные случайные блуждания с законом элементарного прыжка  $\tau(\mathbf{r}_i)$ , не дающего всех конечных моментов, но обладающего нормировкой. Наипростейшей аппроксимацией является степенной закон, в котором для малых прыжков (в нуле) предполагается ограниченность и гладкость:

$$\tau(\mathbf{r}_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta}. \tag{6}$$

Здесь  $C_1$  — константа, определяемая требованием нормировки,  $C_1 = 2\Gamma(\beta)z^{2\beta-1}/\pi^{1/2}\Gamma(\beta-1/2)$ , где  $\Gamma(\beta)$  — гамма-функция Эйлера,  $\beta > 1/2$ ,  $z$  — константа, имеющая смысл некоторой характерной длины прыжка. Таким образом, закон (6) является безмасштабным только для больших прыжков,  $r \gg z$ , тогда он сводится к закону типа Парето [15]:  $\tau(r_i) \sim C_1/r_i^{2\beta}$ . Функция распределения с законом прыжка (6) сводится к функции Леви:

$$W_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(KR) \times \exp\left[-N(Kz)^{2\beta-1} \frac{\Gamma(3/2-\beta)}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+1/2)}\right] dK. \tag{7}$$

Требование одинаковости закона (6) для всех прыжков в принципе не нужно — величины  $z$  могут быть все различны ( $z_i$ ), в этом случае величина  $Nz^{2\beta-1}$  в (7) должна быть заменена выражением  $\sum_i z_i^{2\beta-1}$ .

Закон распределения блужданий Леви характеризуется медленно спадающей асимптотикой, т.е. значительным количеством больших флуктуаций. Действительно, асимптотикой (7) является

$$W_1(R \rightarrow \infty) \approx \frac{\Gamma(2\beta) \sin[(\pi/2)(2\beta-1)]}{\pi \rho^{2\beta}}, \quad \rho = \frac{R}{R_0}, \tag{8}$$

$$R_0 = \frac{z}{2} \left[ N \frac{\Gamma(3/2-\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \right]^{1/(2\beta-1)},$$

т.е. асимптотика распределения Леви укладывается в диапазон от  $1/\rho$  до  $1/\rho^3$ . Распределение Леви обладает одним интересным свойством. Если поделить асимптотику (8) на асимптотику закона прыжка (6), то получим:

$$\frac{W_1(R \rightarrow \infty)}{\tau(r \rightarrow \infty)} = \frac{Nr^2}{R^2}. \tag{9}$$

Это выражение означает, что большие флуктуации могут возникать в результате одного прыжка ( $R = r$  при  $N = 1$ ).

#### 4. Усечённые блуждания Леви

Главным отличием усечённых блужданий Леви [16, 17] от гауссовых случайных блужданий является наличие толстых хвостов, т.е. большого количества сильных флуктуаций  $R$ . Закон прыжка для усечённого распределения Леви — тот же закон (6), в котором теперь  $\beta > 3/2$  (по-прежнему рассматриваем одномерные блуждания). При данных условиях этот закон имеет, как минимум, второй момент. При небольших флуктуациях, до  $R \sim 10z$ , эти распределения хорошо аппроксимируются соответствующей гауссовой функцией:

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi Nz^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{Nz^2} R^2\right). \quad (10)$$

Этот факт является выражением центральной предельной теоремы (ЦПТ) для таких случайных процессов [18]: гауссова функция описывает флуктуации вплоть до величин  $(N \ln N)^{1/2}$ , больших характерной средней величины  $z$  [19]. Иногда этот результат называют теоремой Чебышева, он справедлив для любых  $\beta \geq 2$  [20].

Для определения поведения усечённых распределений Леви в области больших флуктуаций,  $R \geq (N \ln N)^{1/2} z$ , следует найти ранее точно не известную асимптотику функции распределения. Можно показать точно, что асимптотическое поведение плотности распределения усечённых блужданий Леви может быть описано для любого  $\beta$  законом (рис. 4)

$$W_1(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2^\beta z^{2\beta-1} N}{\pi(2\beta-3)R^{2\beta}}. \quad (11)$$

Кроме того, (11) описывает не только бесконечно делимый [21], но и устойчивый процесс. Для усечённых распределений большие флуктуации  $R$  вследствие одного прыжка (9) возможны только при  $\beta = 2$ , в отличие от флуктуаций в случае функции Леви, которые возможны для любого  $1/2 < \beta < 3/2$ .

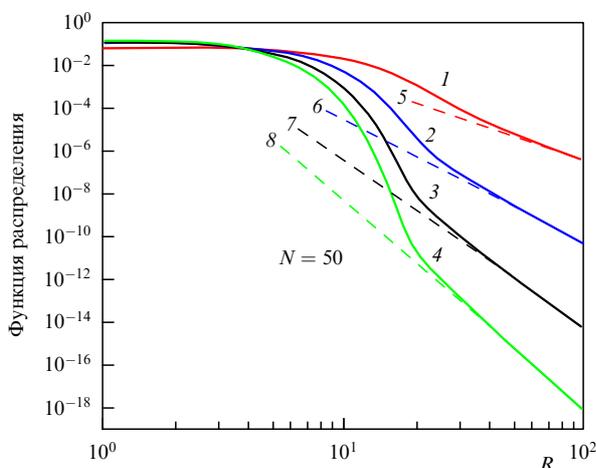


Рис. 4. Точные нормированные функции распределения при  $\beta = 2$  (кривая 1),  $\beta = 3$  (кривая 2),  $\beta = 4$  (кривая 3),  $\beta = 5$  (кривая 4) в зависимости от длины прыжков  $R$ , нормированной на  $z$ . Штриховые линии 5–8 — соответствующие асимптоты при больших  $R$ .

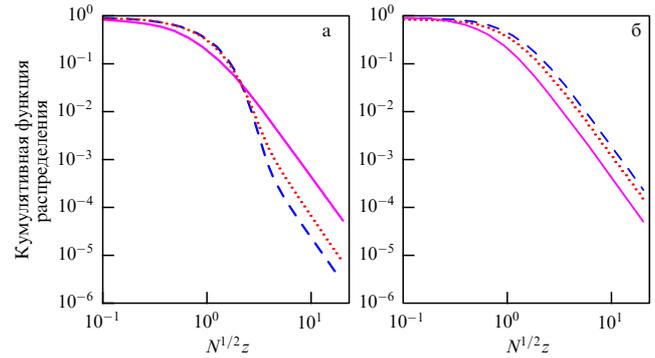


Рис. 5. (а) Кумулятивная функция распределения усечённых блужданий Леви при  $\beta = 2$ , нормированная на  $R = N^{1/2}z$ . Сплошная кривая —  $N = 1$ , штриховая кривая —  $N = 60$ , пунктирная кривая —  $N = 450$ . Количество прыжков соответствует отношению между 10-минутными, часовыми и дневными доходностями. (б) Кумулятивная функция распределения при  $\beta = 2$ , нормированная на  $R$  с  $\delta = 2,7$ . Сплошная кривая —  $N = 1$ , штриховая кривая —  $N = 60$ , пунктирная кривая —  $N = 450$ . Количество прыжков соответствует отношению между 10-минутными, часовыми и дневными доходностями.

Проследим теперь зависимость среднеквадратичного отклонения от времени. Получим:

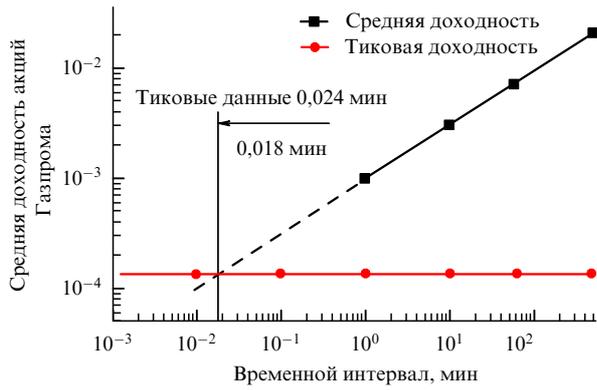
$$\langle R^2 \rangle = \frac{Nz^2}{2\beta - 3}. \quad (12)$$

Закон усечённых блужданий Леви (асимптотики (10, 11)) может быть нормирован на средний квадрат  $R$  (12). В этом случае все гауссовы асимптоты (для малых  $R$ ) при любом  $\beta$  становятся одинаковыми. В то же время асимптоты (11) становятся  $\sim N^{-1/2}$ . На рисунке 5 показана кумулятивная функция распределения усечённых блужданий Леви при  $\beta = 2$ . Хорошо видна разница между кривыми для разных значений  $N$ . Кумулятивные распределения при любых  $\beta$  ведут себя аналогичным образом.

#### 5. Сравнение с экспериментальными данными

Таким образом, форма распределения усечённого блуждания Леви, получающегося в результате реализации схемы с законом единичного прыжка (6), при  $\beta = 2$  соответствует выражению (1), однако в этом случае имеются различия для разных значений  $N$ , чего не наблюдается в действительности (см. введение). Для устранения этого несоответствия следует скорректировать. Сначала рассмотрим вопрос о том, что в эксперименте соответствует единичной сделке — так называемому тикю. Нам необходимо ответить на вопрос: является ли тик единичным прыжком в схеме случайных блужданий?

Дисперсия при  $\beta = 2$  просто равна  $N^{1/2}z$ . Так как экспериментально  $N \sim t$ , где  $t$  — частота фиксации значений доходности, должно существовать минимальное время  $t$ , которое соответствует минимально возможному интервалу фиксации доходности, т.е. времени между двумя последовательными тиками. С одной стороны, этот интервал является случайной величиной. Экспериментально можно легко определить её среднее значение. С другой стороны, это среднее значение должно соответствовать средней тиковой доходности, т.е. значению  $z$ , с точки зрения модели (см. раздел 4). Можно построить зависимость средних доходностей для различных временных интервалов  $t$ . Теоретически эта зависи-



**Рис. 6.** Средняя доходность акций Газпрома для нескольких  $t$  (квадраты, соединённые сплошной линией). По оси абсцисс отложены временные интервалы фиксации значений доходности. Штриховая линия — экстраполяция зависимости до малых значений. Горизонтальная сплошная линия определяет значение среднеквадратичной тиковой доходности. Пересечение графиков даёт значение  $t = 0,018$  мин, среднее время между двумя последовательными тиками  $0,024$  мин, разница составляет 33 %. Тиковые данные получены по результатам торгов 15.01.2008 г. на бирже ММВБ; 1-минутные, 10-минутные, часовые и дневные данные получены по результатам торгов 10.01–10.02.2009 г., 07.01–30.09.2009 г., 01.09.2008–30.09.2009 гг. и 23.01.2006–30.09.2009 гг. соответственно.

мость должна иметь вид  $\sim t^{1/2}$  в силу (12). График этой зависимости определён должен начинаться с уровня тиковой доходности. Экспериментально можно сравнить теоретический минимальный временной интервал, определяемый точкой пересечения графика среднеквадратичной доходностей и уровня среднеквадратичной тиковой доходности (рис. 6) со средним временным интервалом между двумя последовательными тиками. Разница между теоретически определённым минимальным временным интервалом и экспериментально измеренным средним временем между двумя тиками для акций Газпрома велика, по сравнению с разницей для акций других компаний на российском рынке, — 33 %. Минимальное различие данных величин наблюдается для акций Сбербанка и составляет всего 3 %.

По всей видимости, тик является единичным прыжком в схеме случайных блужданий. Первая возможность модификации модели — это попытка применения схемы случайных блужданий с непрерывным временем (Continuous Time Random Walk, CTRW) [22]. В самом деле, временные интервалы между двумя последовательными тиками могут варьироваться в широком диапазоне. Распределение этих временных интервалов для американского рынка известно [23], его функция спадает с уменьшением  $\Delta t$  как  $(\Delta t)^{4,4}$ . По-видимому, учёт времени между транзакциями не позволяет получить новые результаты в силу наличия математического ожидания величины временного интервала между тиками.

Другой возможностью для модификации схемы усечённых случайных блужданий Леви является использование связи стандартного отклонения  $z$  и среднего объёма сделки в виде степенного закона. Наша модификация ограничивается предположением о том, что каждое стандартное отклонение  $z$  в схеме (см. закон прыжка (6)) является случайной величиной  $z_i$ , пропорциональной объёму сделки в  $i$ -й транзакции ( $i$ -м тике). Мы возвращаемся ко второму экспериментально выявленному свойству, описанному во введении. Практически мы используем широко распространённое биржевое правило: "объём торгов двигает цену" [24, 25].

Данная модификация означает, что мы вводим зависимость функции распределения вероятности единичных флуктуаций  $\tau_i(r_i)$  от другой случайной величины,  $z_i$ . В данном случае схема снова напоминает модель CTRW. Проблема прямого применения CTRW состоит в том, что конечная функция распределения для  $R$  будет зависеть от набора случайных величин  $\{z_i\}$ . Например, функция распределения усечённых случайных блужданий Леви для  $\beta = 2$  получается в виде

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK \exp(iKR) \prod_{i=1}^N \exp(-Kz_i)(1 + Kz_i). \quad (13)$$

Так как все величины  $\{z_i\}$  имеют функцию распределения  $\sim x^{-\delta}$  при больших  $z_i$ , где  $\delta \sim 2,5-2,7$  ( $\delta = \zeta - 1$ ), то возможно усреднение (13) по каждой  $z_i$ . Тем не менее этот результат будет неверным, поскольку конечный вид усреднённой таким образом функции (13) не будет соответствовать экспериментально наблюдаемым данным, а именно не будет пропорционален  $R^{-4}$  при больших  $R$ .

По-видимому, применение простой схемы CTRW возможно, по крайней мере для асимптотических значений (13), так как при больших  $R$  имеем

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{4 \sum z_i^3}{\pi R^4}, \quad (14)$$

и набор случайных величин  $\{z_i\}$  даёт только одну случайную величину:  $\sum z_i^3$ . К сожалению, функция распределения плотности вероятностей данной величины на хвостах имеет вид  $\sim x^{-2/3-\delta/3}$ . Эта функция не имеет математического ожидания, которое необходимо для применения схемы CTRW [22]. На самом деле величины  $\{z_i\}$  входят в явном виде в выражение (13) в различных комбинациях:  $\sum z_i^2$ ,  $\sum z_i^3$  и т.д. Каждая из таких комбинаций сама является случайной величиной. Так как асимптотическая функция распределения зависит от суммы кубов  $z_i$ , можно сделать вывод о том, что сумма сходится к распределению Леви (см. [13]). Только это условие обеспечивает устойчивость величины  $\sum z_i^3$  при добавлении новых членов в сумму.

Поэтому метод CTRW необходимо обобщить для случая отсутствия условного среднего (случайной величины  $\sum z_i^3$  в (14)) (см. [26]). Как и в случае распределения Леви (7), выражение (13) может быть исследовано на наличие зависимости от  $N$ , т.е. перенормировки. Если перенормировать величину  $R$  в (13) или соответствующее асимптотическое кумулятивное распределение

$$\Phi_{\beta=2, z_i}(R) \simeq \frac{4 \sum z_i^3}{3\pi R^3} \quad (15)$$

на стандартное отклонение  $(\sum z_i^2)^{1/2}$ , что мы делаем во всех экспериментах, то возникает скейлинговая зависимость выражения (15) в виде  $N^{-1/2}$  в случае  $\sum z_i^3 \sim N$  (см. (11) и рис. 5а). В то же время зависимость  $\sum z_i^3$  от  $N$  имеет другой вид, так как функция распределения случайной величины  $\sum z_i^3$  сходится к распределению Леви (см. выше). Конечный результат для функции распределения Леви  $\sum z_i^3 \sim N^{3/(\delta-1)}$  и конечная наблюдаемая зависимость (15) от  $N$  после перенормировки реальной доходности  $R$  на экспериментально полученное стандартное отклонение имеет вид

$$\Phi_{\beta=2, z_i}^{\text{renorm}} \left( \frac{R}{\sqrt{\sum z_i^2}} \right) \sim N^{3/(\delta-1)-3/2}. \quad (16)$$

При  $\delta \sim 2,5-2,7$  получаем зависимости (16) в диапазоне от  $N^{0,5}$  до  $N^{0,27}$  (рис. 5б). Видно, что стандартная

экспериментальная перенормировка обеспечивает слабую зависимость всех функций распределения доходности от количества прыжков (тиков)  $N$ . Отметим, что такие зависимости (16) от  $N$  аналогичны экспериментальным результатам [6] и нашим результатам, полученным для российского рынка, на котором имеются слабые зависимости от  $N$ : доходности растут при увеличении  $N$ , в отличие от того, что наблюдается на рис. 5а для простой схемы усечённых случайных блужданий Леви.

Отметим, что установленная зависимость от  $N$  имеет место только в случае доходности акций. Возможная зависимость доходностей индекса от объёма торгов акциями, входящими в индекс, может иметь другой вид (по сравнению с законом  $x^{-\zeta}$ ). Если этот закон не попадает в диапазон Леви  $0 < \zeta < 2$  и  $\zeta$  больше (ненамного) 2, то кумулятивное распределение доходностей индекса на больших временных интервалах (16 дней, как в [6]), положительные месячные доходности индекса РТС на рис. 2: последние две точки) может сходиться к гауссову (см. (16) при  $\delta \sim 3-4$ ). Эти распределения будут выглядеть аналогично показанным на рис. 5а при больших  $N$ , а не так, как эти же кривые на рис. 5б.

## 6. Заключение

Введение закона прыжка типа (6) позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные, так и усечённые блуждания Леви. Усечённые блуждания Леви асимптотически проявили те же свойства устойчивости и масштабируемости, что и обычные. Для усечённых блужданий получены аналитические асимптоты и выяснены законы масштабирования. Оказалось, что асимптотические усечённые блуждания Леви имеют типично безмасштабное распределение  $\sim R^{-2\beta}$ , которое характерно и для асимптот "чистых" блужданий Леви, но, в отличие от последних, спадают с ростом  $R$  быстрее. Таким образом, усечённые блуждания Леви вместе с "чистыми" перекрывают весь класс распределений Парето [15].

Можно предположить, что закон  $\sim 1/x^3$  для кумулятивной функции распределения флуктуаций акций и индексов является универсальным. Такое распределение может быть получено с помощью схемы случайных блужданий (прыжков) с законом единичного прыжка (6) только при  $\beta = 2$ . Это означает, что закон прыжка при таком значении  $\beta$ ,

$$\tau_i(r) = \frac{4z_i^3}{\pi(z_i^2 + r^2)^2}, \quad (17)$$

также является универсальным. Здесь значение  $z_i$  представляет собой некоторую характерную доходность, используемую для нормировки. Этот результат можно считать доказательством существования микроскопического закона флуктуаций доходностей на фондовом рынке. Таким образом, цены всех акций (индексы представляют собой, по сути, корзины акций и их поведение аналогично) совершают "прыжки" на различные "дистанции" с постоянными вероятностями. Микроскопический закон (17) объясняет феноменологию закона  $\sim 1/x^3$  [2].

По всей видимости, существование строгих законов единичного прыжка (16) возможно по двум причинам. Во-первых, распределения вероятности флуктуаций доходности должны обладать вторым моментом, т.е. дисперсией. Это требование обусловлено в конечном счёте ограниченностью количества денег. Во-вторых, функция распределения должна иметь ту же асимпто-

тику, что и закон прыжка, т.е. должна существовать вероятность возникновения больших флуктуаций в результате одного прыжка. Все функции Леви удовлетворяют второму требованию, но не первому. Только функция распределения (12) при  $\beta = 2$  удовлетворяет обоим условиям.

Простое определение величины  $z_i$  как некоторой характерной величины прыжка не позволяет дать точного объяснения зависимости нормированных функций распределения и кумулятивных распределений от  $N$ . Модификация схемы случайных блужданий обеспечивается за счёт введения зависимости  $\{z_i\}$  от количества акций, торгуемых в одной сделке (тике), так как факт соответствия одного тика одному прыжку проверен экспериментально (см. также [12]). В этом случае функция распределения величины  $\sum z_i^3$  сходится к функции Леви с индексом Леви  $(\beta - 1)/3$ . Конечная зависимость кумулятивных функций распределения от количества тиков (прыжков) попадает в диапазон от  $N^{0.5}$  до  $N^{0.27}$ . Российские акции демонстрируют более слабые зависимости по сравнению с акциями из США и акциями, торгуемыми на LSE и на Парижской бирже. Таким образом, конечная схема случайных блужданий выглядит как схема STRW при отсутствии условного среднего (для величины  $\sum z_i^3$ ).

Работа частично поддержана (М.Ю.Р.) грантом РФФИ 10-07-00202.

## Список литературы

- Bachelier L, Thèses Fac. Sci. Paris Le Grade de Docteur Sci. Math. (Paris: Gauthier-Villars, 1900); *Ann. Sci. École Normale Supérieure* 3 (17) 21 (1900); *Theory of Speculation* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2006)
- Gopikrishnan P et al. *Eur. Phys. J. B* 3 139 (1998)
- Lux T *Appl. Financ. Econ.* 6 463 (1996)
- Skjeltorp J A *Physica A* 283 486 (2000)
- Loretan M, Phillips P C B *J. Empirical Finance* 1 211 (1994)
- Gopikrishnan P et al. *Phys. Rev. E* 60 5305 (1999)
- Plerou V, Stanley H E *Phys. Rev. E* 76 046109 (2007)
- Rácz É, Eisler Z, Kertész J *Phys. Rev. E* 79 068101 (2009)
- Plerou V, Stanley H E *Phys. Rev. E* 79 068102 (2009)
- Gopikrishnan P et al. *Phys. Rev. E* 62 R4493 (2000)
- Mantegna R N, Stanley H E *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance* (New York: Cambridge Univ. Press, 2000)
- Романовский М Ю, Видов П В, Пыркин В А *Компьют. исслед. и моделирование* 2 219 (2010)
- Chandrasekhar S *Rev. Mod. Phys.* 15 1 (1943)
- Subbotin M T *Матем. сб.* 31 (2) 296 (1923)
- Pareto V *Cours d'Economie Politique* (Lausanne: F. Rouge, 1896, 1897)
- Koponen I *Phys. Rev. E* 52 1197 (1995)
- Mantegna R N, Stanley H E *Phys. Rev. Lett.* 73 2946 (1994)
- Feller W *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (New York: Wiley, 1970, 1971) [Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* (М.: Мир, 1984)]
- Bouchaud J-P, Potters M *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: from Statistical Physics to Risk Management* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
- Vidov P V, Romanovsky M Yu *Phys. Wave Phenomena* 17 218 (2009)
- Khinchine A *Матем. сб.* 2(44) (1) 79 (1937)
- Scher H, Montroll E W *Phys. Rev. B* 12 2455 (1975)
- Gopikrishnan P et al. *Physica A* 287 362 (2000)
- Karpoff J M *J. Finance* 41 1069 (1986)
- Brailsford T J *Accounting Finance* 36 89 (1996)
- Sokolov I M *Phys. Rev. E* 63 011104 (2000)

PACS numbers: 05.40. – a, 05.45.Df, 89.65.Gh  
DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779

## Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов\*

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко

### 1. Введение

Термин *эконофизика* был введён Юджином Стенли в 1995 г. для общего названия исследовательских работ, в которых методы статистической физики использовались для анализа поведения финансовых рынков. Появление подобных работ было связано, в первую очередь, с тем, что благодаря революции в компьютерных технологиях, к этому времени стали общедоступными огромные массивы финансовых данных, которые аккуратно накапливались начиная с середины 1980-х годов. В дальнейшем этот термин стал употребляться в более широком контексте, обозначая работы в области экономики и других социальных наук, написанные физиками. Начиная с 2002 г. такие работы стали регулярно публиковаться во всех главных общезначимых журналах, таких как *Reviews of Modern Physics*, *Physical Review E*, *Physical Review Letters* и др. В настоящее время курс эконофизики читается на Западе в самых престижных университетах, а соответствующая секция стала неотъемлемой частью основных ежегодных международных и национальных конференций по социальным наукам (например, ESHIA (Economic Science with Heterogeneous Interacting Agents), AKSOE (Arbeitskreis Physik Sozio-Ökonomischer Systeme) и др.). В июне 2009 г. в Москве прошёл Первый всероссийский конгресс по эконофизике.

Первой эконофизической работой, получившей известность, далеко выходящую за рамки отдельной дисциплины, стала публикация в журнале *Nature* [1]. По существу, эта работа развивала достаточно старую идею Мандельброта, связанную с *полётом Леви* [2], в направлении её согласования с новыми эмпирическими данными.

Настоящая статья посвящена развитию в том же направлении другой основополагающей идеи Мандельброта, которая также впервые была высказана в статье [2] при исследовании финансовых временных рядов. В дальнейшем эта идея успешно применялась в самых различных областях физики [3].

Начиная ещё с 1950-х годов среди специалистов хорошо был известен тезис о том, что "*движения цен большинства финансовых инструментов на разных масштабах времени и цены внешне похожи. По внешнему виду графика наблюдатель не может сказать, относятся ли данные к недельным, дневным или часовым изменениям*" [3]. Указанное самоподобие на современном языке означает, что финансовые временные ряды являются *фракталами* [4]. Основной характеристикой таких структур, как известно, является фрактальная размерность  $D$ . В случае хаотических временных рядов этот показатель определяет индекс Хёрста  $H$  ( $D = 2 - H$ ), который является показателем персистентности (способности

сохранять определённую тенденцию) временного ряда. Однако для надёжного вычисления  $D$  (так же, как и  $H$ ) требуется слишком большой репрезентативный масштаб, что исключает возможность использования  $D$  в качестве показателя, определяющего локальную динамику временного ряда.

В предлагаемой статье вводятся новые фрактальные показатели: *размерность минимального покрытия* и связанный с ней *индекс фрактальности*. Строго доказано, что в главном порядке по  $\delta$  (здесь  $\delta$  — минимальный масштаб разбиения временного ряда) при  $\delta \rightarrow 0$  размерность минимального покрытия совпадает с  $D$ . На примере финансовых временных рядов показано, что минимальный масштаб, необходимый для определения введённых показателей с приемлемой точностью, содержит на два порядка меньше данных, чем соответствующий масштаб для определения показателя Хёрста  $H$ . Это даёт возможность рассматривать индекс фрактальности в качестве локального показателя стабильности временного ряда. На основе индекса фрактальности представлено эмпирическое обоснование концепции *равновесия* на финансовом рынке. Выявлен эффект увеличения крупномасштабных колебаний при подавлении мелкомасштабных, на основе которого построен индикатор сильных колебаний на глобальном финансовом рынке.

### 2. Фрактальные структуры

1. В конце XIX в. в математике впервые были обнаружены объекты (такие, как множество Кантора, функция Вейерштрасса, кривая Пеано и др.), для которых методы *классического* анализа оказались абсолютно непригодными. Все они строились по очень простым правилам с помощью итерационной процедуры, и все обладали масштабным самоподобием (состояли из частей, подобных целому). К началу XX в. таких объектов накопилось уже достаточно много, и для их анализа в 1919 г. Хаусдорф предложил своё определение размерности компактного множества в произвольном метрическом пространстве [5]. Хаусдорф заметил, что если указанные множества покрывать шарами радиусом  $\delta$ , то минимальное число таких шаров  $N(\delta)$  с уменьшением  $\delta$  будет возрастать по степенному закону

$$N(\delta) \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)^D. \quad (1)$$

Причём степенной показатель  $D$  обычно вычислялся точно. Этот показатель Хаусдорф и назвал размерностью<sup>1</sup>. Если теперь прологарифмировать обе части этого выражения и переписать в виде равенства для  $D$ , то мы получим точное определение хаусдорфовой размерности:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \right]. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Данную величину иногда называют предельной ёмкостью (см., например, [6]), понимая при этом под хаусдорфовой размерностью  $d_H$  критическое значение аргумента функции

$$m(p) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\{A_i^\varepsilon\}} \sum (\text{diam } A_i^\varepsilon)^p,$$

обладающее тем свойством, что при  $p < d_H$   $m(p) = \infty$ , а при  $p > d_H$   $m(p) = 0$ . Здесь  $A_i^\varepsilon$  — покрытие исходного множества семейством множеств  $A_i^\varepsilon$  с диаметром, меньшим  $\varepsilon$ . Такая размерность имеет более позднее происхождение и распространяется на неограниченное множество. Как правило  $d_H = D$ , но есть контрпримеры. В общем случае можно лишь утверждать, что  $d_H \leq D$ .

\* Посвящается памяти Бенуа Мандельброта (20.11.1924 – 14.10.2010).

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко. Управляющая компания "ИНТРАСТ", Московский инженерно-физический институт, Москва, РФ. E-mail: Dubovikov@intrast.ru

Для привычных в классическом анализе множеств (например, гладких кривых или поверхностей) показатель  $D$  совпадает с топологической размерностью  $D_T$ , равной минимальному числу координат, необходимых для описания таких множеств (например, для описания линии достаточно одной координаты, для описания поверхности — двух, для описания тела — трёх координат<sup>2</sup>). Для указанных выше неклассических множеств оказалось, что размерность Хаусдорфа, являющаяся, как правило, дробным числом, всегда больше топологической размерности  $D_T$ . Последнее свойство позднее использовал Мандельброт для одного из возможных определений фрактала, согласно которому "фракталом называется множество, для которого  $D > D_T$ " [3].

Следует заметить, что если исходное множество погружено в евклидово пространство, то вместо покрытий этого множества шарами можно использовать другие его аппроксимации простыми фигурами (например, клетками) размером  $\delta$ . При этом наряду с исходной сферической размерностью  $D$  появляются новые фрактальные размерности (клеточная, внутренняя и т.д.), которые как предельные значения при  $\delta \rightarrow 0$  обычно совпадают. Однако скорости сходимости к этому пределу для таких размерностей могут заметно различаться.

Рассмотрим, например, ковёр Серпинского, который строится так. Берётся единичный квадрат, который на первом шаге делится на девять равных квадратов, из которых отбрасывается средний (рис. 1а). На следующем шаге эта процедура повторяется со всеми оставшимися квадратами и т.д. Множество, которое получается в пределе такой итерационной процедуры, называется ковром Серпинского (можно показать, что для этого объекта  $D_T = 1$ ). Заметим, что на  $n$ -м итерационном шаге при построении модельных фракталов обычно возникает множество, состоящее из  $N(\delta)$  простейших симплексов с линейным размером  $\delta$ . Такое множество Мандельброт назвал предфракталом  $n$ -го поколения. Для ковра Серпинского указанное множество состоит из  $N(\delta) = 8^n$  клеток со стороной  $\delta = (1/3)^n$ . Если теперь в определении (2) использовать предфракталы вместо покрытий шарами, то размерность  $D$  можно вычислить непосредственно. Действительно, переходя в нашем случае к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , из формулы (2) получаем

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \ln 8}{n \ln 3} \right) = \frac{\ln 8}{\ln 3} (\approx 1,89).$$

Результат не изменится при использовании шаров вместо клеток. Однако характеристики алгоритмов прямого вычисления этих двух размерностей весьма различаются. Для того чтобы показать это, построим для каждой из размерностей график функции  $N(\delta)$  при  $\delta = (1/3)^n$  в двойном логарифмическом масштабе (рис. 1б). В таком масштабе все степенные функции являются линейными и показатель  $D$  определяется как тангенс угла наклона соответствующей графику линии регрессии. Для клеточ-

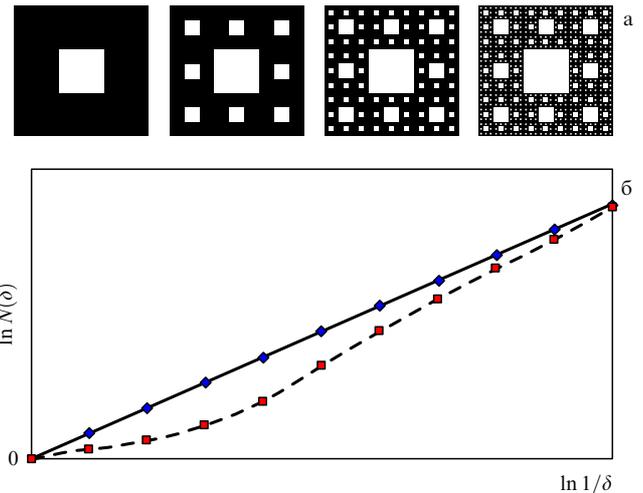


Рис. 1. Предфракталы четырёх поколений ковра Серпинского (а) и функция  $N(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе (б) для клеточной (сплошная кривая) и хаусдорфовой (штриховая кривая) размерностей.

ных покрытий (предфракталов) все точки графика функции  $N(\delta)$  будут находиться на одной прямой. Это означает, что функция  $N(\delta)$  имеет *быстрый выход на степенной асимптотический режим* (1), что позволяет нам получить значение  $D$  уже на первом шаге итерации. Если для вычисления  $D$  вместо клеток использовать шары, то соответствующий график приближается к степенному закону (1) лишь асимптотически при  $\delta \rightarrow 0$ . Более глубокий анализ показывает, что указанное выше свойство функции  $N(\delta)$  для предфракталов ковра Серпинского обусловлено тем, что клеточное покрытие является в определённом смысле минимальным покрытием на каждом шаге итерации. Таким образом, именно минимальность покрытий является причиной быстрого выхода на степенной асимптотический режим соответствующей функции, определяемой покрытиями, которая используется для вычисления размерности  $D$ . Как будет показано в разделе 3, этот принцип допускает прямое обобщение для случая хаотических временных рядов.

2. Долгое время объекты с нетривиальной хаусдорфовой размерностью рассматривались исключительно как плод изопрённого математического интеллекта. Теперь, во многом благодаря усилиям Мандельброта, мы знаем, что фракталы окружают нас повсюду. Некоторые из фракталов непрерывно изменяются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно береговым линиям, деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретённую в процессе эволюции. При этом реальный диапазон масштабов, в котором наблюдается фрактальная структура, простирается от расстояний между молекулами в полимерах до расстояний между скоплениями галактик во Вселенной.

Следует отметить основные особенности естественных фракталов, отличающие их от модельных. *Во-первых*, естественные фракталы не бывают строго симметричными. Свойство самоподобия для них выполняется лишь в среднем. *Во-вторых*, при вычислении размерности естественных фракталов всегда исключаются масштабы, меньшие некоторого минимального масштаба структуры  $\delta_0$ . Это означает, что степенной закон (1) проявляет себя как "промежуточная асимптотика" (при  $\delta \rightarrow 0$  рассматривается масштаб, который много меньше

<sup>2</sup> Этот подход допускает обобщение (например, для произвольного компакта) по крайней мере двумя способами [7]. Первый основан на том, что любые два замкнутых непересекающихся подмножества исходного множества, имеющего размерность  $n + 1$ , можно разделить перегородкой размерностью  $n$ . Здесь размерность вводится по индукции. Второй способ основан на том, что минимальная кратность покрытия множества размерностью  $n$  замкнутыми множествами со сколь угодно малым диаметром равна  $n + 1$ . Под кратностью здесь понимается максимальное число элементов покрытия, имеющих непустое пересечение.

некоторого характерного масштаба, но больше минимального масштаба  $\delta_0$ ). В-третьих, для естественных фракталов отсутствует система предфракталов. Поэтому система аппроксимаций симплексами, необходимая для построения функции  $N(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ , является в общем случае достаточно произвольной. Это приводит к тому, что вычисление размерности  $D$  как тангенса угла наклона линии регрессии  $N(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе требует большого количества данных, поскольку функция  $N(\delta)$  обычно приближается к степенному закону (1) очень медленно.

В разделе 3 мы покажем, что для вычисления размерности фрактальных временных рядов, тем не менее, можно построить последовательность минимальных покрытий, сходную с последовательностью предфракталов ковра Серпинского.

### 3. Размерность минимального покрытия.

#### Индекс фрактальности

1. Важнейшим классом естественных фракталов являются *хаотические временные ряды*. Такие ряды, имеющие крайне нерегулярный характер поведения, возникают при наблюдении различных природных, социальных и технологических процессов. Среди них есть как традиционные (геофизические, экономические, медицинские), так и те, которые стали известными относительно недавно (ежедневные вариации уровня преступности или дорожно-транспортных происшествий в регионе, колебания количества просмотров определённых сайтов в Интернете и т.д.). Указанные ряды обычно порождаются сложными нелинейными системами самой различной природы. Однако все они имеют неизменный характер поведения на определённом интервале масштабов. Простейший способ исследования фрактальной структуры таких рядов основан на вычислении клеточной размерности  $D_c$ . Для нахождения  $D_c$  плоскость, на которой определён график временного ряда, разбивается на клетки размером  $\delta$ . Затем при различных  $\delta$  строится функция  $N(\delta)$ , равная числу клеток размером  $\delta$ , в которых содержится хотя бы одна точка графика. Размерность  $D_c$  определяется по углу наклона линии регрессии  $N(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе. Легко показать, что  $D_c = D$ . Особая важность фрактальной размерности для хаотических рядов обусловлена тем, что этот показатель оказывается тесно связанным с показателем Хёрста  $H$ , который обычно вычисляется методом нормированного размаха и, как известно, является показателем *персистентности* (способности к сохранению тенденции) временного ряда. При этом если  $H > 0,5$ , то ряд является персистентным (движение ряда в определённую сторону на некотором интервале, скорее всего, вызовет движение в ту же сторону на следующем интервале). Если  $H < 0,5$ , то ряд является *антиперсистентным* (движение ряда в определённую сторону на некотором интервале, скорее всего, вызовет движение в противоположную сторону на следующем интервале). Наконец, если  $H \approx 0,5$ , то ряд имеет *нулевую персистентность* (движение ряда на любом интервале не зависит от его движения на предшествующем интервале).

Вследствие важности этого показателя в дальнейшем было разработано более десяти различных алгоритмов для его вычисления [8–11]. Видимо, самый простой метод расчёта показателя  $H$  основан на использовании соотношения

$$|f(t + \delta) - f(t)| \sim \delta^H \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (3)$$

где угловые скобки означают усреднение по временному интервалу,  $f(t)$  — значение временного ряда в момент  $t$ . Показатель  $H$  определяется по соответствующей линии регрессии. Для гауссовых случайных процессов легко показать, что  $H = 2 - D$ . Однако мало кто сомневается, что это соотношение имеет более широкую область применимости, поскольку для всех наблюдаемых хаотических временных рядов в тех случаях, когда оба показателя определяются вполне точно, это соотношение подтверждается. При этом все трудности, связанные с вычислением размерности  $D$ , переносятся на алгоритмы для вычисления показателя  $H$ . В частности, для надёжного определения  $H$  требуется репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных. При таком масштабе временной ряд, как правило, меняет характер своего поведения много раз, что значительно обесценивает анализ временных рядов с помощью показателя Хёрста  $H$ . Как и в случае с размерностью  $D$ , указанная трудность связана с тем, что приближение соответствующей функции к степенному закону (3) при  $\delta \rightarrow 0$  происходит крайне медленно. Для преодоления этой трудности, по аналогии с тем, как это делается в случае ковра Серпинского, можно определить последовательность аппроксимаций ряда, состоящую при любом фиксированном  $\delta$  из минимальных покрытий. Действительно, если умножить обе части (1) на  $\delta^2$ , то определение размерности можно переписать в виде степенного закона для площади аппроксимаций  $S(\delta)$ :

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (4)$$

Заметим, что такая форма, в отличие от (1), не требует, чтобы симплексы, из которых состоит каждая отдельная аппроксимация, были одинаковыми. Достаточно того, чтобы они имели один и тот же геометрический фактор  $\delta$ . Именно это обстоятельство и позволяет нам использовать аппроксимации, которые являются минимальными покрытиями.

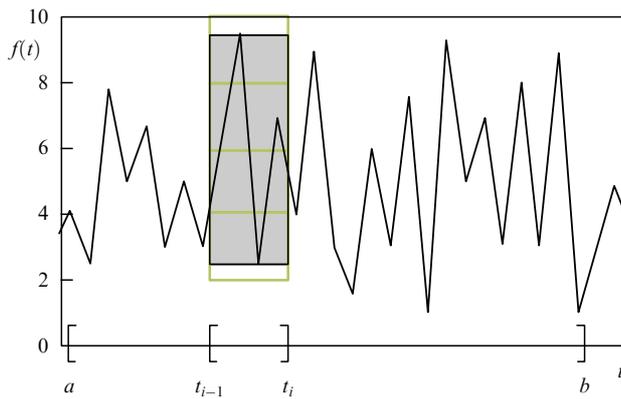
2. Действительно, пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $y = f(t)$ , имеющая не более конечного числа точек разрыва первого рода: именно такие функции естественно рассматривать в качестве модельных, например, для финансовых временных рядов. Введём равномерное разбиение отрезка  $\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b]$ , где  $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a)/m$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Покроем график этой функции прямоугольниками таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади в классе покрытий прямоугольниками с основанием  $\delta$  (рис. 2). Тогда высота прямоугольника на отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$  будет равна амплитуде  $A_i(\delta)$ , которая является разностью между максимальным и минимальным значениями функции  $f(t)$  на этом отрезке. Введём величину

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (5)$$

Тогда полную площадь минимального покрытия  $S_\mu(\delta)$  можно записать в виде  $S_\mu(\delta) = V_f(\delta) \delta$ . Поэтому из (4) следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (6)$$

где  $\mu = D_\mu - 1$ . Назовём размерность  $D_\mu$  *размерностью минимального покрытия*. Чтобы соотнести  $D_\mu$  с другими размерностями, в частности с клеточной размерностью  $D_c$ , построим клеточное разбиение плоскости графика функции  $f(t)$ , как показано на рис. 2. Пусть  $N_i(\delta)$  — число клеток, покрывающих график  $f(t)$  на отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$ . Из



**Рис. 2.** Минимальное (тёмный прямоугольник) и клеточное (светлый прямоугольник) покрытия функции  $f(t)$  на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$  длиной  $\delta$ .

рисунка видно, что

$$0 < N_i(\delta) \delta^2 - A_i(\delta) \delta < 2\delta^2. \quad (7)$$

Разделим это соотношение на  $\delta$  и просуммируем по  $i$  с учётом (5). В результате получим

$$0 < N(\delta) \delta - V_f(\delta) < 2(b - a), \quad (8)$$

где  $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$  — полное число клеток размером  $\delta$ , покрывающих график функции  $f(t)$  на отрезке  $[a, b]$ . Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , с учётом (6) получаем

$$N(\delta) \delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_\mu}. \quad (9)$$

С другой стороны, согласно (4)

$$N(\delta) \delta = S_c(\delta) \delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c}. \quad (10)$$

Следовательно,  $D_c = D_\mu$ . Заметим, однако, что, несмотря на это равенство, для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать различные приближения величины  $S(\delta)$  к асимптотическому режиму (4), причём это различие может быть весьма значительным. Далее, поскольку  $D_c = D_\mu = D$ ,  $\mu = D_\mu - 1$  и для одномерной функции  $D_T = 1$ , то  $\mu = D - D_T$ . Поэтому в данном случае индекс  $\mu$  естественно назвать *индексом фрактальности*. Далее при анализе финансовых временных рядов мы будем рассматривать его как основной фрактальный показатель.

#### 4. Финансовые временные ряды.

##### Задачи идентификации и прогноза

1. Наиболее популярными представителями фрактальных временных функций являются финансовые временные ряды (в первую очередь, ряды цен акций и курсов валют). Существует надёжное численное подтверждение фрактальной структуры таких рядов [12, 13]. Теоретически фрактальность обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нём должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале [14, 15].

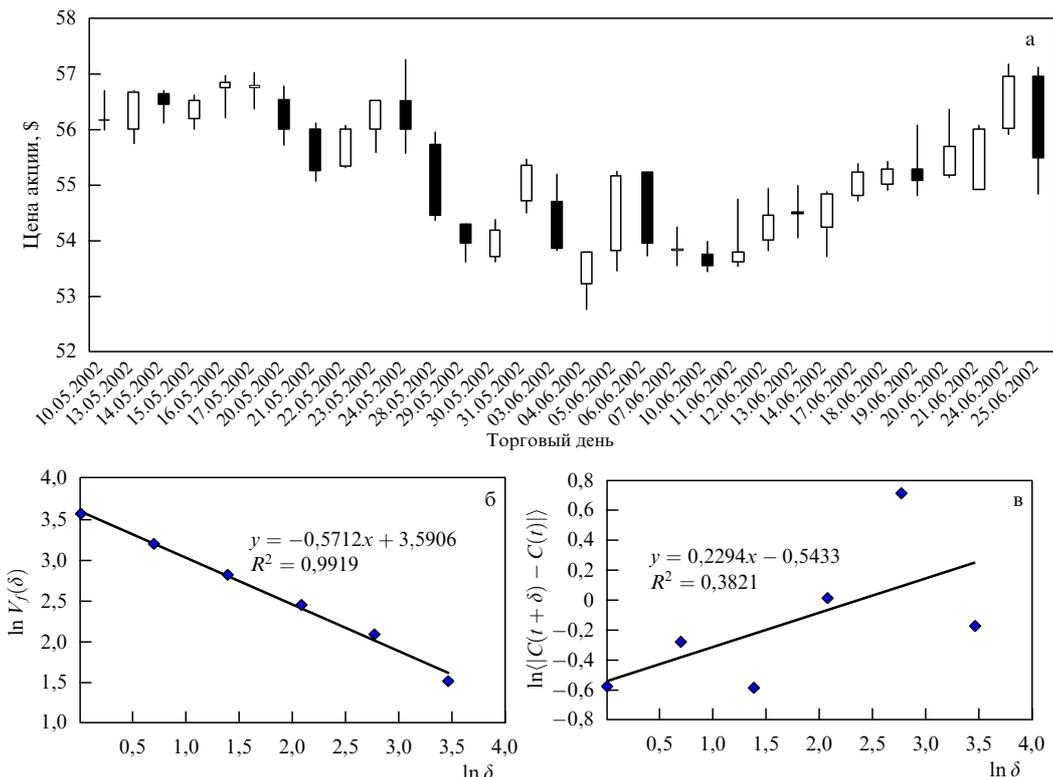
В качестве примера исследовалась база данных, которая включала в себя ценовые ряды акций тридцати

компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index, DJII) с 1970 г. по 2002 г. Каждый ряд содержал около восьми тысяч записей. Каждая запись соответствовала одному торговому дню, включая в себя четыре значения: информацию о минимальной и максимальной ценах, а также о ценах открытия и закрытия. В литературе финансовые ряды обычно изображают с использованием *японских свечей*. Фрагмент такого ряда для компании "Coca-Cola" представлен на рис. 3а. Для простоты анализа рассматривались только последние  $2^{12} = 4096$  записей для каждой компании. При вычислении индекса  $\mu$  использовалась последовательность  $m$  вложенных разбиений  $\omega_m$  для  $m = 2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ ). Каждое разбиение состояло из  $2^n$  интервалов, содержащих  $2^{12-n}$  торговых дней. Для каждого разбиения  $\omega_m$  вычислялось значение  $V_f(\delta)$  (6). Здесь  $A_i(\delta)$  равна разности между максимальной и минимальной ценами на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$  (в частности, если  $\delta = \delta_0$ , то  $A_i(\delta)$  равна разности максимальной и минимальной цен за день). Типичный пример поведения  $V_f(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе для компании "Microsoft" представлен на рис. 4. Видно, что данные с удивительной точностью ложатся на прямую линию, кроме двух последних точек, в которых линейный режим имеет излом. Для нахождения значения  $\mu$  по этим данным следует исключить две последние точки и определить линию регрессии. При уровне надёжности  $\alpha = 0,95$  в приведённом примере  $\mu = 0,472 \pm 0,008$ ,  $R^2 = 0,999$ . Здесь  $R^2$  — коэффициент детерминации для линии регрессии. Сравнение такого алгоритма вычисления  $D$  ( $D = \mu + 1$ ) и соответственно  $H$  ( $H = 2 - D = 1 - \mu$ ) со стандартными алгоритмами вычисления этих индексов показывает, что результаты с приемлемой точностью совпадают. Однако значения  $V_f(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе заметно точнее ложатся на прямую линию (кроме двух последних точек), чем значения, соответствующие другим алгоритмам, что позволяет также определить характерный масштаб, на котором происходит излом.

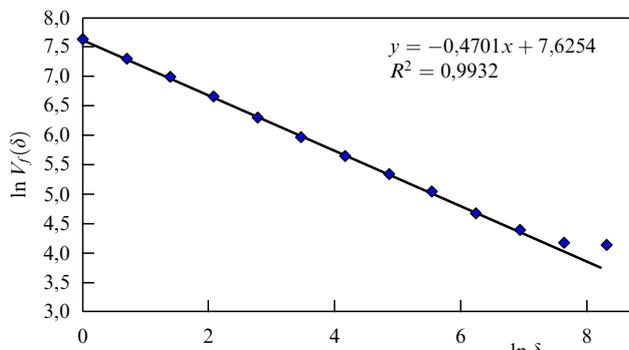
Далее, следует отметить, что для каждой из 30 компаний график  $V_f(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе почти так же хорошо ложится на прямую линию и на всех меньших репрезентативных интервалах, вплоть до 32 дней, а иногда даже и до 16 дней. При этом на интервалах, меньших, чем 500 дней, излом линейной части графика, как правило, исчезает.

Типичный пример поведения функции  $V_f(\delta)$  на участке финансового временного ряда длиной в 32 дня (рис. 3а) представлен на рис. 3б. При  $\alpha = 0,95$  получаем  $\mu = 0,571 \pm 0,071$ ,  $R^2 = 0,992$ . На рисунке 3в для сравнения представлен пример поведения функции  $\langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle$  на том же участке (здесь используется  $32 + 1 = 33$  цены закрытия  $C(t)$  и усреднение происходит по непересекающимся интервалам длиной  $\delta = 2^n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ). В этом случае  $H = 0,229 \pm 0,405$ ,  $R_H^2 = 0,382$ . Отсюда сразу становится ясно, что вычисление показателя  $H$  на таком интервале просто не имеет смысла.

Таким образом, быстрый выход величины  $V_f(\delta)$  на степенной асимптотический режим позволяет вполне надёжно вычислять индекс фрактальности  $\mu$  и на малых интервалах. Дальнейшие исследования показали, что степенной закон для функции  $V_f(\delta)$  выполняется с удивительной точностью на интервале масштабов от нескольких минут до нескольких лет. Как оказывается, это позволяет существенно продвинуться в решении двух основных задач анализа временных рядов — задачи идентификации и задачи прогноза.



**Рис. 3.** (а) Типичный финансовый ряд на интервале 32 дня (использован график цен акций компании "Coca-Cola") в виде японских свечей. Каждый из прямоугольников (называемый телом свечи) с двумя штрихами сверху и снизу (называемыми тенями свечи) изображает колебания цен в течение дня. Верхняя точка верхней тени показывает максимум цены за день, нижняя точка нижней тени — минимум цены за день. Верхняя и нижняя границы тела свечи показывают цены открытия и закрытия торгов. При этом если тело свечи белого (чёрного) цвета, то цена закрытия выше (ниже) цены открытия. (б) Результат вычисления  $V_f(\delta)$  в двойном логарифмическом масштабе для представленного ряда. Зависимость  $y = ax + b$  построена методом наименьших квадратов; здесь  $\mu = -a$ . (в) Результат вычисления  $\langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle$  для этого же ряда и соответствующая зависимость  $y = ax + b$ , здесь  $H = a$ .



**Рис. 4.** Результат вычисления  $V_f(\delta)$  и соответствующая зависимость  $y = ax + b$  для временного ряда цен акций компании "Microsoft" на интервале 4096 дней.

2. Задача идентификации обычно заключается в определении состояния системы (макросостояния временного ряда) на основе наблюдаемых значений ряда на некотором локальном интервале. Для финансовых временных рядов специалисты выделяют три типа локальных состояний: тренд (направленное движение вверх или вниз), флэт (относительно стабильное состояние), случайное блуждание (промежуточное состояние между трендом и флэтом). Для того чтобы соотнести значение  $\mu$  с состояниями финансового временного ряда, введём функцию  $\mu(t)$  как такое значение  $\mu$ , которое ещё может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем  $t$  интервале  $\tau_\mu$ . В случае непрерывного аргумента  $t$  в качестве такого интервала можно

было бы взять произвольно малый интервал. Однако поскольку на практике временной ряд всегда имеет минимальный масштаб (в нашем случае он равен одному дню), то  $\tau_\mu$  имеет конечную длину (в нашем случае мы берём  $\tau_\mu = 32$  дня). Такая функция  $\mu(t)$  была построена для каждой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса.

На рисунке 5 представлен типичный фрагмент ценового ряда одной из таких компаний вместе с вычисленной для этого фрагмента функцией  $\mu(t)$ . Достаточно беглого взгляда на рис. 5, чтобы понять, что индекс  $\mu$  имеет прямое отношение к состояниям временного ряда. Действительно, на интервале между 1-м и 39-м днём, где цены ведут себя относительно стабильно (флэт),  $\mu(t) > 0,5$ . Далее, одновременно с развитием тренда на графике цен,  $\mu(t)$  резко падает до значений, меньших 0,5, и, наконец, после 56-го дня, когда цены находятся в промежуточном состоянии между трендом и флэтом,  $\mu(t)$  возвращается к значению  $\mu \approx 0,5$ . Таким образом, исходный ряд оказывается тем стабильнее, чем больше  $\mu$ . При этом если  $\mu > 0,5$ , то наблюдается флэт, если  $\mu < 0,5$ , то наблюдается тренд. Наконец, если  $\mu \approx 0,5$ , то ряд находится в состоянии случайного блуждания, которое является промежуточным между трендом и флэтом. Такая корреляция между значением  $\mu$  и характером поведения исходного временного ряда наблюдалась для всех изученных рядов. Теоретическое обоснование указанной корреляции приведено, например, в [16]. Далее будет показано, как функция  $\mu(t)$  может быть использована для обоснования классической теории финансов.

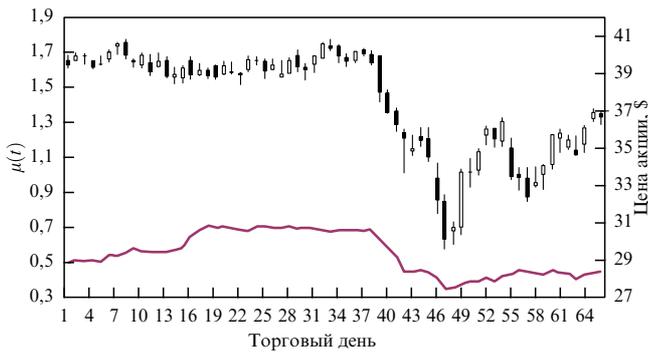


Рис. 5. Ежедневные цены акций компании "Exxon Mobil Corporation" (японские свечи, правая шкала) и график функции  $\mu(t)$  (сплошная кривая, левая шкала).

3. Базовой моделью финансовых временных рядов является модель случайного блуждания<sup>3</sup>. В результате переосмысления этой модели возникла концепция *эффективного рынка* (*Effective Market Hypothesis*, ЕМН), на котором цена в полной мере отражает всю доступную информацию. Для существования такого рынка достаточно предположить, что на нём действует большое число полностью информированных, рациональных агентов, имеющих однородные предпочтения, которые мгновенно корректируют цены, приводя их в состояние равновесия. Естественно, что основной моделью такого рынка является модель случайного блуждания. Следует отметить, что все основные результаты классической теории финансов (портфельная теория, модель CAPM (Capital Asset Pricing Model), модель Блэка–Шоулза и др.) были получены в рамках именно такого подхода. В настоящее время "концепция эффективного рынка продолжает играть доминирующую роль и в финансовой теории, и в финансовом бизнесе" [20].

Однако уже к началу 60-х годов прошлого века эмпирические исследования показали, что сильные изменения ряда доходностей происходят значительно чаще, чем следовало бы ожидать, исходя из нормального распределения (проблема "толстых хвостов"), причём такие изменения обычно следовали друг за другом (эффект кластеризации волатильности). Одним из первых, кто подверг указанную концепцию всесторонней критике, был Мандельброт [2]. Действительно, если вычислить значение показателя  $H$  (в нашем случае  $H = 1 - \mu$ ) для какой-либо акции, то это значение (см. начало раздела), скорее всего, будет отклонено от  $H = 0,5$ , которое соответствует модели случайного блуждания.

Напомним, что в основе этой модели лежат два постулата. Во-первых, приращения цены<sup>4</sup> на любом интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования

достаточно большого числа независимых случайных слагаемых с конечной дисперсией. Во-вторых, эти приращения на непересекающихся интервалах являются статистически независимыми. Именно отказ от первого постулата при сохранении второго привёл Мандельброта к рассмотрению случайного процесса, который он назвал полётом Леви (*Levi flight*) [2]. Отказ от второго постулата при сохранении первого привёл его к введению понятия *обобщённого броуновского движения* (*Fractional Brownian Motion*) [21].

Поведение временного ряда, для которого  $H \neq 0,5$ , можно описать с помощью любого из этих процессов. При этом в качестве идеологической базы обычно используют концепцию *фрактального рынка* (*Fractal Market Hypothesis*, ФМН), которую принято рассматривать в качестве альтернативы ЕМН. Эта концепция предполагает, что на рынке имеется широкий спектр агентов с разными инвестиционными горизонтами и, следовательно, с разными предпочтениями. Эти горизонты изменяются от одной минуты для *внутридневных* трейдеров до нескольких лет для банков и корпораций. Устойчивым положением равновесия на таком рынке является режим, при котором "средняя доходность не зависит от масштаба, если не считать умножения на соответствующий масштабный коэффициент" [2]. Поскольку указанный коэффициент имеет неопределённый степенной показатель, то речь фактически идёт о целом классе режимов, каждый из которых определяется своим значением показателя  $H$ . При этом значение  $H = 0,5$  оказывается вполне равноправным с любым другим значением ( $0 < H < 1$ ). Близкие соображения стали поводом для серьёзных сомнений (см., например, [20–24]) относительно существования действительного равновесия на фондовом рынке, а следовательно, и относительно обоснованности современной теории финансов.

Исследование функции  $\mu(t)$  на основе исходной базы (см. начало раздела), а также российских (входящих в индекс ММВБ) и американских (входящих в DJII) компаний вместе с соответствующими индексами за последние десять лет позволяют с очевидностью показать выделенность значения  $H = 0,5$ .

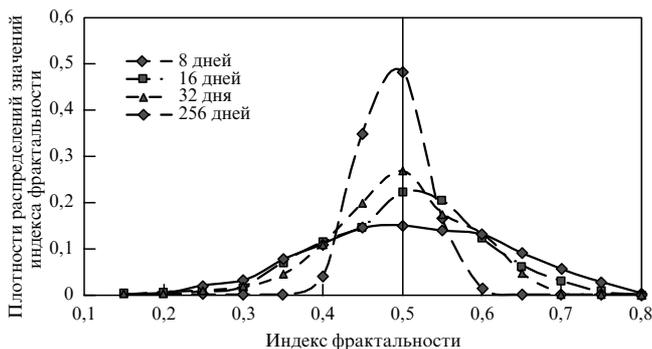
На рисунке 6 представлены типичные распределения вероятности значений индекса  $\mu$  для временного ряда одной из акций, входящей в DJII, на участках с различной длительностью (от 8 до 256 дней). Все распределения являются асимметричными. Это означает, что в среднем значение индекса фрактальности для этой акции на соответствующих интервалах отлично от значения  $\mu = 0,5$ . Однако все указанные распределения имеют *главную моду* именно при таком значении  $\mu$ .

В первом приближении общая картина, наблюдаемая во всех рядах, оказывается следующей. Функция  $\mu(t)$  совершает квазипериодические колебания около положения  $\mu = 0,5$  между значениями  $\mu < 0,5$  и  $\mu > 0,5$ . При этом временной ряд непрерывно изменяет свой режим, переходя из тренда через состояние случайного блуждания во флэт и обратно. Время от времени для каждого ряда появляются и исчезают состояния с относительно стабильными значениями  $\mu$  (см. рис. 5). Среди таких состояний режим  $\mu = 0,5$  занимает явно привилегированное положение. Для каждого временного ряда он является самым длительным на всех интервалах, содержащих 8 и более точек.

Следует отметить, что агентно-ориентированная интерпретация указанных колебаний может сильно различаться на разных масштабах. Так, например, на малых масштабах внутри дня, когда более 50% сделок

<sup>3</sup> Первая модель случайного блуждания [17] была построена Луисом Башелье в 1900 г. (за пять лет до модели броуновского движения, предложенной Эйнштейном) и использована им для описания поведения цен акций на Парижской фондовой бирже. При этом многие относящиеся к этой модели результаты, которые позднее были получены другими авторами (уравнение Чепмена–Колмогорова, теория мартингалов, уравнение Блэка–Шоулза), в работе Башелье уже присутствовали.

<sup>4</sup> В различных модификациях модели Башелье [18, 19] вместо приращений цены обычно рассматривают логарифмы приращений. Для нас здесь указанное различие не является существенным.



**Рис. 6.** Распределения вероятностей значения индекса  $\mu$  для ряда дневных изменений цены акций компании "Ford" за период с 03.01.2000 г. по 30.11.2010 г. (всего 2745 записей торговых дней, содержащих информацию о ценах открытия и закрытия, а также о максимальной и минимальной ценах за каждый день). Функция  $\mu(t)$  рассчитывалась по предшествующим интервалам, содержащим от 8 до 256 значений, затем строились эмпирические плотности распределения по значениям  $\mu$  в каждом случае.

совершается (на рынках США) торговыми роботами, поведение агентов, видимо, является очень близким к рациональному. Тогда как на масштабах от нескольких дней до нескольких месяцев существенную роль играет социальная психология, которая всегда содержит иррациональный элемент. Между тем неизменный характер указанных колебаний воспроизводится на всех масштабах, начиная от самых малых. Последнее наводит на мысль о том, что в основе природы таких колебаний лежит, видимо, общий механизм запаздывания, сопутствующий самому способу принятия решений. При этом основным состоянием является, тем не менее, именно случайное блуждание, которое остаётся главным режимом притяжения на всех масштабах.

4. Задача прогноза в общем случае ставит своей целью определение каких-либо качественных или количественных параметров будущего поведения временного ряда на основе всего массива исторических данных. При этом особый интерес представляет задача определения ранних предвестников критического поведения ряда. Рассмотрим один из подходов к решению этой задачи. На основе (5) введём среднюю амплитуду  $A(\delta)$  по формуле

$$A(\delta) \equiv \langle A_i(\delta) \rangle = m^{-1} V_f(\delta). \quad (11)$$

Умножая (5) на  $m^{-1} \sim \delta$  и подставляя в (6), получим

$$A(\delta) \sim \delta^{H_\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (12)$$

где  $H_\mu \equiv 1 - \mu$ . Сопоставляя  $H_\mu$  с рис. 5, мы получаем визуальное подтверждение того, что этот индекс является показателем персистентности ряда (см. пункт 3 этого раздела) и прямым обобщением показателя Хёрста  $H$  для случая малых интервалов. В пункте 3 этого раздела мы видели, что индекс  $\mu$ , по существу, задаёт определённый способ функционального интегрирования по временным рядам, при котором оказывается, что ряды, соответствующие случайному блужданию, получают наибольший вес. Это даёт возможность строить различные, в том числе условные, распределения по  $\mu$ . Как выясняется, особую роль здесь играет эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных. Этот эффект является результатом того, что, во-первых, степенной закон для функции  $A(\delta)$  (так же, как и для функции  $V_f(\delta)$ ) выполняется на огромном интервале масштабов (от нескольких минут до нескольких лет). Во-вторых, степенная функция обла-

дает особым свойством: чем медленнее она уменьшается (по сравнению с функцией с другим степенным показателем) при  $\delta \rightarrow 0$ , тем быстрее она возрастает при  $\delta \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что изменение режима системы, связанное с резким уменьшением  $\mu$  (увеличением показателя  $H_\mu$ ), приводит в дальнейшем к подавлению мелкомасштабных колебаний и одновременно к увеличению крупномасштабных колебаний ряда. Это означает, что резкое уменьшение мелкомасштабных колебаний в настоящем при определённых условиях может стать предвестником сильных крупномасштабных колебаний в будущем. Как показало тестирование по всей указанной выше базе финансовых данных, этот эффект проявляет себя с вероятностью примерно 70–80%. Причём в тех случаях, в которых удаётся свести до минимума влияние внешних факторов, этот процент оказывается ещё выше.

На рисунке 7 представлен индикатор (штриховая кривая), который был построен на основе этого эффекта в Управляющей компании "Интраст" в 2007 г. В качестве исходного ряда (сплошная линия) рассматривается агрегированный индекс, включающий в себя фондовые индексы как развитых, так и развивающихся стран (по одному от страны)<sup>5</sup>. Такой подход исключает фактор влияния фондовых рынков различных стран друг на друга, который связан с перетоком капитала на глобальном финансовом рынке. Из рисунка 7 видно, что индикатор показал резкое уменьшение мелкомасштабных флуктуаций начиная с 2001 г. — в два раза. Первый раз — в декабре 2004 г., затем через полгода последовал бурный рост всех индексов, который продолжался около двух лет. Второй раз — в апреле 2008 г., после чего также примерно через полгода в связи с кризисом произошло резкое падение всех индексов. Кроме того, из рисунка видно, что в настоящий момент (08.11.2010) активно идёт формирование нового сигнала, который является предвестником сильных колебаний фондового рынка в среднесрочной перспективе<sup>6</sup> (от полугода до одного года). И хотя индикатор ничего не говорит о том, в какую сторону произойдёт сильное движение, полученной информации может оказаться вполне достаточно, например, для построения успешной стратегии управления активами на фондовом рынке.

В завершение этого раздела скажем несколько слов относительно эффекта увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных. По существу, указанный эффект означает, что тенденции в сложных системах (природных, социальных, технологических), формирующиеся очень медленно и незаметно, но имеющие повышенную неуклонность, со временем часто становятся глобальными, определяя основной вектор развития таких систем. Заметим, что хорошо известный эффект *затишья* (подавление высокочастотной компоненты шума), который обычно предшествует природным катастрофам (например, землетрясениям), является частным проявлением указанного эффекта. Таким образом, многие глобальные тенденции в своей эволюции в действительности напоминают *горчиное зерно* из евангельской притчи, "которое, хотя меньше всех семян, но, когда вырастет, бывает больше всех злаков и становится деревом, так что прилетают птицы небесные и укрываются в ветвях его". (Евангелие от Матфея, 13: 32).

<sup>5</sup> США, Германия, Франция, Япония, Россия, Бразилия, Китай, Корея.

<sup>6</sup> Этот прогноз находится в явном противоречии с общепринятым прогнозом "медленного выхода из рецессии".

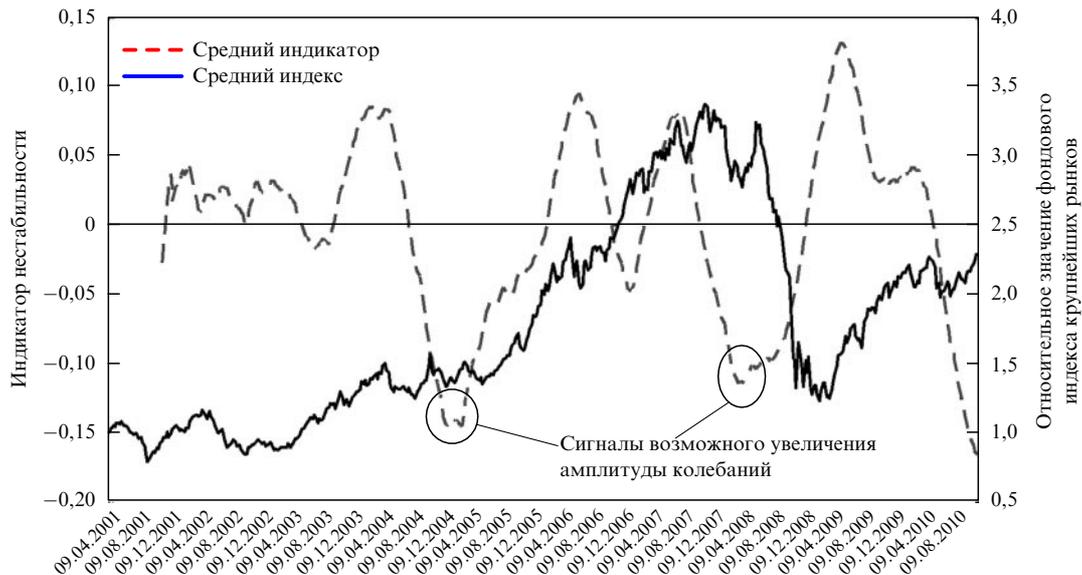


Рис. 7. Агрегированный индекс в относительных единицах (сплошная кривая, правая шкала) и соответствующий индикатор неустойчивости, центрированный относительно среднего значения (штриховая кривая, левая шкала).

## 5. Заключение

Итак, для одномерной фрактальной функции  $f(t)$  были предложены новые фрактальные показатели: размерность  $D_\mu$  и связанный с ней индекс  $\mu$ . Как предельное значение при  $\delta \rightarrow 0$  размерность  $D_\mu$  совпадает с обычной фрактальной размерностью  $D$ . Численные расчёты, выполненные для ценовых рядов акций, показали, что использование минимальных покрытий приводит к быстрому выходу на степенной асимптотический режим по  $\delta$  функции  $V_f(\delta)$ . По этой причине репрезентативный масштаб, необходимый для определения указанных показателей с приемлемой точностью, содержит на два порядка меньше данных, чем, например, масштаб для определения показателя Хёрста  $H$ . Это позволяет рассматривать индекс  $\mu$  как локальную характеристику и ввести функцию  $\mu(t)$ , которая является индикатором локальной стабильности временного ряда: чем больше  $\mu$ , тем стабильнее ряд. На большом эмпирическом материале показано, что индекс фрактальности, по существу, определяет некоторый естественный способ интегрирования по всем возможным ценовым траекториям (начиная от самых коротких). При этом оказывается, что наибольший вес имеют траектории, соответствующие случайному блужданию. Этот факт вполне можно рассматривать в качестве обоснования современной теории финансов. И наконец, на основе эффекта увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных был построен ранний предвестник сильных колебаний на фондовых рынках.

Бенуа Мандельброт, которого следует считать одним из главных предшественников эконофизики, имел славу "ниспровергателя основ", вызывая среди экономистов явно неоднозначное к себе отношение. С момента возникновения современной финансовой теории, основанной на концепции общего равновесия, он был одним из главных её критиков и до конца жизни пытался найти ей приемлемую альтернативу. Аналогичным образом, но уже в рамках всей экономической теории, эконофизика пытается предложить альтернативу концепции общего равновесия. Однако именно Мандельброт разработал систему понятий, которая при соответствующей модификации, как было показано, позволяет не только построить эффективный прогноз, но и предложить,

видимо, единственное на данный момент эмпирическое обоснование классической теории финансов.

В заключение авторы пользуются случаем выразить сердечную благодарность В.М. Полтеровичу за постоянную поддержку, полезные советы и ценные замечания.

## Список литературы

1. Mantegna R N, Stanley H E *Nature* **376** 46 (1995)
2. Mandelbrot B J. *Business* **36** 394 (1963)
3. Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: W.H. Freeman, 1982)
4. Mandelbrot B *Les objets fractals* (Paris: Flammarion, 1975) [*Fractals* (San Francisco: W.H. Freeman, 1977)]
5. Hausdorff F *Math. Ann.* **79** 157 (1919)
6. Малинецкий Г Г, Потапов А Б, Подлазов А В *Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды* (М.: УРСС, 2006)
7. Александров П С, Пасынков Б А *Введение в теорию размерности* (М.: Наука, 1973)
8. Brown J et al., "Working Papers in Economics 08/13" (Christchurch, New Zealand: Univ. of Canterbury, Department of Economics and Finance, 2008)
9. Clegg R *Int. J. Simulation: Syst., Sci. Technol.* **7** (2) 3 (2006)
10. Mishura Y *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes* (New York: Springer, 2007)
11. Brodu N, nlin/0511041
12. Kantz H, Schreiber T *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
13. Abarbanel H D I *Analysis of Observed Chaotic Data* (New York: Springer, 1996)
14. Peters E E *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics* (New York: J. Wiley, 1994) [Петерс Э *Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике* (М.: Интернет-трейдинг, 2004)]
15. Peters E E *Chaos and Order in the Capital Markets* (New York: Wiley, 1996) [Петерс Э *Хаос и порядок на рынках капитала* (М.: Мир, 2000)]
16. Dubovikov M M, Starchenko N S, Dubovikov M S *Physica A* **339** 591 (2004)
17. Bachelier L, in *The Random Character of Stock Market Prices* (Ed. P H Cootner) (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1964) p. 17
18. Kendall M G J. *R. Statistical Soc.* **96** 11 (1953)
19. Samuelson P A *Industrial Management Rev.* **6** 13 (1965)
20. Ширяев А Н *Основы стохастической финансовой математики* Т. 1 (М.: Фазис, 1998)
21. Mandelbrot B B, Van Ness J W *SIAM Rev.* **10** 422 (1968)
22. Ширяев А Н *Теория вероятностей и ее применения* **39** 5 (1994) [Shiryayev A N *Theor. Probab. Appl.* **39** (1) 1 (1994)]
23. Ширяев А Н *Обзорные приклад. и промыш. мат.* **1** 780 (1994)
24. Полтерович В М *Экономическая наука современной России* (1) 46 (1998)