Сентябрь 2010 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 180, № 9*

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

О сложении скоростей в теории относительности*

А. Зоммерфельд

(Мюнхен)

Воспроизводится в переводе с немецкого опубликованная в 1909 г. в журнале Physikalische Zeitschrift [**10** 826 (1909)] *статья А. Зоммерфельда "Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie", не утратившая важного значения и спустя 100 лет, о чём говорится в статье Г.Б. Малыкина* [*УФН* **180** 965 (2010)].

PACS numbers: **01.65.+g**, 02.40.Ky, **03.30.+p** DOI: 10.3367/UFNr.0180.201009e.0970

Минковский научил нас рассматривать преобразование Лоренца–Эйнштейна как "вращения пространства-времени", т.е. как преобразование, которое имеет характер обычного вращения, но не в пространстве xyz, а в четырёхмерном пространстве $xyzl$, где $l = \mathrm{i}ct$ также является длиной, обозначающей путь света, умноженный на мнимую единицу. Если штрихованная система отсчёта движется относительно нештрихованной с постоянной скоростью v в направлении оси x и если обозначить через β отношение скоростей v/c, то преобразования координат записываются как

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + l\sin\varphi\,, \quad y' = y\,, \\ l' &= -x\sin\varphi + l\cos\varphi\,, \quad z' = z\,, \end{aligned} \tag{1}$$

причём между мнимым углом вращения и отношением скоростей существуют соотношения

$$\tan\varphi = \mathrm{i}\beta\,, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{i}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{2}$$

Я хотел бы показать на некотором примере, насколько полезной является эта аналогия (или при аналитическом рассмотрении — тождество) между вращениями пространства-времени и обычными вращениями для кинематики теории относительности.

Если мы выполняем два вращения относительно одной и той же оси, или, иначе говоря, в одной и той же плоскости вращения, то складываются углы, а не их тригонометрические функции.

Это же имеет место для двух трансляций в одном и том же направлении x (два поворота в пространстве-времени в одной и той же плоскости xl); обозначая углы (мнимые) вращения как φ_1, φ_2, результирующий угол составной операции как φ и соответствующие отношения скоростей v_1, v_2, v к скорости света как β_1, β_2, β, получим

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,,$$

отсюда

$$\beta = \frac{1}{\mathrm{i}}\tan(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\tan\varphi_1 + \tan\varphi_2}{1-\tan\varphi_1\tan\varphi_2} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\,,$$

или

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}\,.$$

Последняя формула представляет собой знаменитую теорему сложения скоростей Эйнштейна; в интерпретации Минковского она утрачивает всякую необычность.

Два вращения в одной и той же плоскости перестановочны, т.е. их результат не зависит от последовательности отдельных операций. То же самое имеет место для двух трансляций в одном направлении, так как $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$. Два вращения в разных плоскостях неперестановочны, так же как и две трансляции в разных направлениях. Причина этого заключается, очевидно, в том, что первое вращение в общем случае изменит плоскость вращения второго. Именно, это происходит всегда, когда эти плоскости не совпадают.

Если мы выполним, например, первое вращение в xl-плоскости на угол φ_1 и затем второе вращение в плоскости yl относительно повёрнутой системы с углом поворота φ_2, определённым в повёрнутой системе, то,

* Статья А. Зоммерфельда "Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie" в 1909 г. была направлена автором, с целью лучшего оповещения научного сообщества, согласно принятой тогда практике, сразу в два научных издания и опубликована в них почти одновременно: *Physikalische Zeitschrift* [**10** 826 (1909)] и *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* [**11** 557 (1909)].

Перевод с немецкого публикации в *Physikalische Zeitschrift* *С.Д. Данилова.*

согласно схеме (1), получается

$$x_1 = x\cos\varphi_1 + l\sin\varphi_1\,,$$
$$y_1 = y\,,$$
$$l_1 = -x\sin\varphi_1 + l\cos\varphi_1$$

и

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 = x\cos\varphi_1 + l\sin\varphi_1\,,\\ y_2 &= y_1\cos\varphi_2 + l_1\sin\varphi_2 = -x\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + y\cos\varphi_2 + \\ &\quad + l\cos\varphi_1\sin\varphi_2\,,\\ l_2 &= -y_1\sin\varphi_2 + l_1\cos\varphi_2 = -x\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2 + \\ &\quad + l\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,. \end{aligned}$$

Участвующая в составном движении φ_1, φ_2 точка $x_2 = \mathrm{const}$, $y_2 = \mathrm{const}$ описывает также в системе xy некоторую прямую, направление которой определяется из

$$0 = \mathrm{d}x\cos\varphi_1 + \mathrm{d}l\sin\varphi_1\,,$$
$$0 = -\mathrm{d}x\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{d}y\cos\varphi_2 + \mathrm{d}l\cos\varphi_1\sin\varphi_2\,,$$

что приводит к

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} &= -\tan\varphi_1\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} &= \tan\varphi_2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\right) = -\frac{\tan\varphi_2}{\cos\varphi_1}\,, \end{aligned} \qquad (3)$$

или, вследствие (2), к

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta_1\,, \qquad \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta_2\sqrt{1-\beta_1^2}\,. \qquad (4а)$$

В отличие от этого при обратной последовательности операций получается

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta_2\,, \qquad \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta_1\sqrt{1-\beta_2^2}\,. \qquad (4б)$$

Поместим прямоугольную линейку в плоскости рис. 1 так, чтобы её стороны в начальном положении совпадали с OA и OB. Мы будем проводить карандашом по стороне OB линейки со скоростью $v_2 = \beta_2 c$, одновременно перемещая линейку в направлении её другой стороны, OA, со скоростью $v_1 = \beta_1 c$. При этом грифель карандаша опишет траекторию, отличную от той, которая получилась бы, если бы мы передвигали грифель карандаша со скоростью v_1 вдоль OA, перемещая линейку со скоростью v_2 в направлении OB. Отклонение обоих путей в единицу времени (OC в первом случае и OD во втором) является величиной второго порядка малости, если β_1 и β_2 представляют собой величины первого порядка малости. Причина этого заключается в том, что в первом случае скорость v_2 движущейся системы (линейка), вследствие зависимости понятия времени от движения, будет оцениваться по-другому, чем в неподвижной системе отсчёта (плоскость рис. 1); то же касается скорости v_1 во втором случае. Именно эту ситуацию выше мы отразили в том, что в пространстве xyl после выполнения поворота пространства-времени плоскость другого поворота будет перемещена. На рисунке 1 скорости AC, BD изображены так, как они видятся относительно неподвижной плоскости рисунка; верхняя из приведённых около них величин означает скорость линейки, а нижняя — скорость, определённую относительно неподвижной плоскости рисунка.

Для результирующей скорости $v = \beta c$, определяемой относительно неподвижной системы, из (4а) и (4б) в обоих случаях получается одинаковая величина

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2\,,$$

или

$$1 - \beta^2 = (1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\,,$$

или же, когда мы введём, наряду с φ_1, φ_2, результирующий угол φ, с учётом (2):

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\,. \qquad (5)$$

Если α_1 и α_2 являются наклонами траекторий, представленных на рисунке, то из (3) следует

$$\tan\alpha_1 = \frac{\tan\varphi_2}{\sin\varphi_1}$$

и, соответственно,

$$\tan\alpha_2 = \frac{\tan\varphi_1}{\sin\varphi_2}\,, \qquad (6)$$

причём всегда имеет место

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2}\,. \qquad (7)$$

Эти изначально несколько странные результаты также становятся прозрачными, если исходить из точки зрения Минковского. В самом деле, если мы возьмём углы поворота φ_1, φ_2 как дуги на единичной сфере (рис. 2) так, что угол при A в треугольнике OAC и угол при B в треугольнике OBD будут являться прямыми, то результирующий угол $\mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \varphi$ получается непосредственно из теоремы косинусов как гипотенуза конгруэнт-

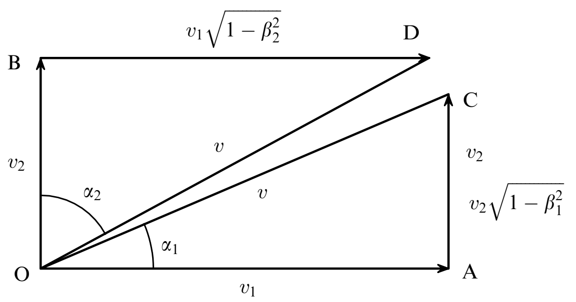

Рис. 1.

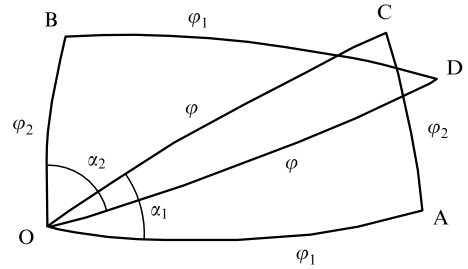

Рис. 2.

ных сферических треугольников, в соответствии с равенством (5). То, что результирующая плоскость поворота зависит от последовательности двух поворотов, видно из рис. 2. Действительно, большой круг, идущий через B перпендикулярно к OB, пересекает, очевидно, не OB, а AC. Так называемое правило Непера для прямоугольных сферических треугольников даёт формулу (6) для углов при катетах α_1, α_2. Сумма углов в сферическом треугольнике превосходит два прямых угла, сумма углов при катетах в прямоугольном сферическом треугольнике превосходит прямой угол, как видно из рис. 2. Более того, превышение (сферический эксцесс) равно площади треугольника на единичной сфере. Стороны наших сферических треугольников в случае пространственно-временны́х вращений являются мнимыми, их площадь отрицательна. Сферический эксцесс переходит в сферический дефект; он обусловливает неравенство (7) и расхождение траекторий OC, OD на рис. 1 [1]).

Подводя итоги, мы можем утверждать: для сложения скоростей в теории относительности должны применяться формулы не плоской, а сферической тригонометрии (с мнимыми сторонами). С учётом этого замечания

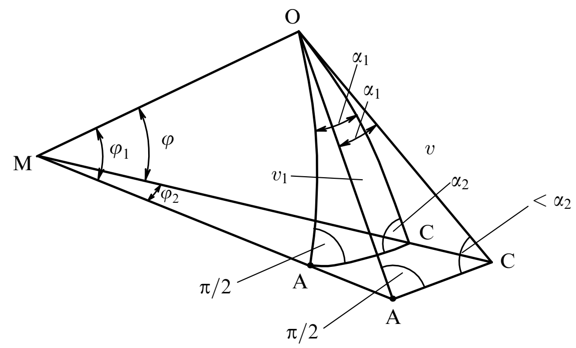

Рис. 3.

затруднительные вычисления преобразований, пример которых приведён выше, становятся излишними и могут быть заменены наглядными построениями на сфере. Добавим ещё один пример.

Если скорости v_1 и v_2 наклонены под произвольным углом α друг к другу, то внешний угол A в сферическом треугольнике OAC на рис. 2 также будет равняться α и из теоремы косинусов для сферической геометрии для результирующего угла φ следует, что

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\alpha\,. \tag{8}$$

Если мы хотим переписать это в терминах скоростей v_1, v_2, v, то, согласно (2), получается

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta_1\beta_2\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}}\,,\\ v_2 = \frac{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha-(1/c^2)v_1^2v_2^2\sin^2\alpha}{\left(1+(1/c^2)v_1v_2\cos\alpha\right)^2}\end{gathered} \tag{9}$$

— формула, которую уже вывел Эйнштейн [1] из трансформационных соотношений. Как можно видеть, формула (8) является более прозрачной, чем формула (9), так же как и рис. 2 является более полезным, чем рис. 1. Это объясняется тем, что вычисления в терминах углов поворота и (при учёте реальных обстоятельств) соответствующие построения, очевидно, лучше отвечают смыслу теории относительности, чем операции исключительно в терминах проекций на касательную плоскость v скоростей.

Единственная цель этого небольшого сообщения состояла в том, чтобы показать, что глубокий взгляд Минковского на пространство-время не только облегчает общее построение теории относительности в методическом смысле, но также выступает как удобный принцип при рассмотрении специальных вопросов.

Список литературы

1. Einstein A *Jahrbuch Radioaktivität Elektronik* **411** (1908) p. 423

(Поступила 30 сентября 1909 г.)

[1] Для пояснения соотношения между рисунками может служить следующее: рис. 1 получается, когда мы выполняем центральную проекцию рис. 2 из центра сферы M на касательную плоскость, проведённую через точку касания O. При этом сохраняются углы при O, а также прямые углы при A и B, исходящие из O стороны φ_1, φ_2, φ, заменяются их проекциями на касательную плоскость [1*] и, соответственно, пропорциональными им скоростями v_1, v_2, v. Напротив, углы при C и D будут при этой проекции изменены (на рис. 2 они равны α_2, α_1 соответственно, но на рис. 1 соответствующие углы больше, чем α_1 и α_2), и стороны CA и BD не могут быть просто заменены их тангенсами. Рисунок 3 показывает, как эта проекция получается в действительности для треугольника OAC [2*].

[1*] В тексте статьи дважды встречается слово Tangenten (касательная), которое здесь переведено как "проекция на касательную плоскость", так как именно об этом идёт речь. (*Примеч. перевод.*)

[2*] Для прямоугольных треугольников на поверхности сферы, изображённых на рис. 2, 3, справедливы формулы (5), (6) с вещественными углами. Тогда

$$\tan\alpha_1\tan\alpha_2 = \frac{1}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\,.$$

Чтобы перейти к прямоугольным треугольникам на поверхности псевдосферы, изображённым на рис. 1, нужно сделать углы φ_1, φ_2, φ чисто мнимыми. Тогда правая часть написанного равенства будет меньше единицы и, следовательно,

$$\sin\alpha_1\sin\alpha_2 < \cos\alpha_1\cos\alpha_2\,,$$

т.е. $\cos(\alpha_1+\alpha_2) > 0$, что приводит к формуле (7): $\alpha_1+\alpha_2 < \pi/2$.

Углы при вершинах C и D в этих треугольниках на рис. 1 (обозначим их α_2' и α_1' соответственно) удовлетворяют, очевидно, равенствам

$$\alpha_1+\alpha_2' = \frac{\pi}{2}\,,\qquad \alpha_1'+\alpha_2 = \frac{\pi}{2}\,,$$

которые при сопоставлении с формулой (7) приводят к $\alpha_2' > \alpha_2$, $\alpha_1' > \alpha_1$, что и утверждается Зоммерфельдом в сноске 1. (*Примеч. В.И. Ритуса.*)

On the addition of velocities in relativity theory

A. Sommerfeld

Presented in translation from the German is A Sommerfeld's paper "Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie", *Physikalische Zeitschrift* **10** 826 (1909), which retains its relevance a hundred years after its publication, as is discussed by G B Malykin, *Usp. Fiz. Nauk* **180** 965 (2010) [*Physics – Uspekhi* **53** (9) (2010)].

PACS numbers: **01.65.+g**, 02.40.Ky, **03.30.+p**
DOI: 10.3367/UFNr.0180.201009e.0970
Bibliography — 1 reference
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (9) 970 – 972 (2010)
Physics – Uspekhi **53** (9) (2010)