Август 2010 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 180, № 8*

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Об инвариантной форме волновых уравнений и уравнений движения заряженной точечной массы [1]

В.А. Фок

(Поступила 30 июля 1926 г.) †

Волновое уравнение Шрёдингера записано в форме инвариантного уравнения Лапласа, а уравнения движения — как уравнения геодезической линии в пятимерном пространстве. Избыточная пятая координата находится в тесной связи с линейной дифференциальной формой электромагнитного потенциала.

PACS numbers: **01.65.+g**, **04.20.−q**, **11.15.−q** DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008h.0874

Х. Мандел в своей ещё не опубликованной работе [2] пользуется понятием пятимерного пространства с целью рассмотрения гравитации и электромагнитного поля с единой точки зрения. Нам кажется, что введение пятой координаты хорошо подходит для представления волнового уравнения Шрёдингера и уравнений движения в инвариантной форме.

1. Специальная теория относительности

Функция Лагранжа, соответствующая движению некоторой заряженной точечной массы, записывается в легко понятных обозначениях как

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}\mathbf{v} - e\varphi\,, \tag{1}$$

и соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби (H.P.) (Hamilton Prinzip. — *Примеч. пер.*) имеет вид

$$(\operatorname{grad} W)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - \frac{2e}{c}\left(\mathfrak{A}\operatorname{grad} W + \frac{\varphi}{c}\frac{\partial W}{\partial t}\right) + m^2c^2 + \frac{e^2}{c^2}(\mathfrak{A}^2-\varphi^2) = 0\,. \tag{2}$$

По аналогии с подстановкой, использованной в нашей ранней работе [3], мы положим здесь

$$\operatorname{grad} W = \frac{\operatorname{grad}\psi}{\partial\psi/\partial p}\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial\psi/\partial t}{\partial\psi/\partial p}\,, \tag{3}$$

где p обозначает некоторый новый параметр с размерностью кванта действия. После умножения на $(\partial\psi/\partial p)^2$ мы получаем квадратичную форму

$$Q = (\operatorname{grad}\psi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \frac{2e}{c}\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi + \frac{\varphi}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \left[m^2c^2 + \frac{e^2}{c^2}(\mathfrak{A}^2-\varphi^2)\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2. \tag{4}$$

Замечаем, что коэффициенты при нулевой, первой и второй степени $\partial\psi/\partial p$ являются четырёхмерными инвариантами. Кроме того, форма Q остаётся инвариантной при замене

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_1 + \operatorname{grad} f\,,\\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\,,\\ p &= p_1 - \frac{e}{c}f\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где f обозначает некоторую произвольную функцию координат и времени. Последнее преобразование также

[1] Идея этой работы возникла в беседе с проф. В. Фредериксом, ему же я обязан некоторыми ценными советами.

Замечание при корректуре. Когда эта заметка была уже в печати, до Ленинграда дошла прекрасная работа Оскара Клейна (*Z. Phys.* **37** 895 (1926)) [2], в которой автор получил результаты в принципе идентичные результатам этой заметки. Ввиду важности результатов, однако, их вывод, выполненный другим способом (обобщение подстановки, использованной в одной из моих предыдущих работ), также может представлять интерес.

[2] Автор любезно предоставил мне возможность ознакомиться с рукописью своей работы [3].

† Статья впервые опубликована в *Z. Phys.* **39** 226 (1926) [1].

Перевёл с немецкого для настоящего издания *С.Д. Данилов*.

[3] В. Фок "К волновой механике Шрёдингера" (V. Fock "Zur Schrödingershen Wellenmechanik" *Z. Phys.* **37** 242 (1926)) [4].

оставляет инвариантной линейную дифференциальную форму[4]

$$\mathrm{d}'\Omega = \frac{e}{mc^2}(\mathfrak{A}_x\,\mathrm{d}x + \mathfrak{A}_y\,\mathrm{d}y + \mathfrak{A}_z\,\mathrm{d}z) - \frac{e}{mc}\,\varphi\,\mathrm{d}t + \frac{1}{mc}\,\mathrm{d}p\,. \tag{6}$$

Мы хотим сейчас выразить форму Q как квадрат градиента функции ψ в пятимерном пространстве (R_5) и ищем соответствующий интервал. Легко находим

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 + (\mathrm{d}'\Omega)^2\,. \tag{7}$$

Уравнение Лапласа в R_5 записывается как

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{2e}{c}\left(\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\varphi}{c}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial p}\right) - \\ - \frac{e}{c}\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\mathrm{div}\,\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \\ + \left[m^2c^2 + \frac{e^2}{c^2}(\mathfrak{A}^2 - \varphi^2)\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} = 0\,. \tag{8}$$

Оно, так же как и (7) и (4), остаётся инвариантным при преобразованиях Лоренца и преобразованиях (5).

Так как коэффициенты уравнения (8) не содержат параметра p, мы можем выбрать зависимость функции ψ от p в экспоненциальной форме, и мы должны для согласия с наблюдениями положить[5]

$$\psi = \psi_0 \exp\left(2\pi\mathrm{i}\,\frac{p}{h}\right). \tag{9}$$

Уравнение для ψ_0 инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца, но не по отношению к преобразованиям (5). Значение избыточного координатного параметра p оказывается состоящим именно в том, что он обусловливает инвариантность уравнений по отношению к добавке произвольного градиента к четырёхмерному потенциалу.

Здесь следует отметить, что коэффициенты уравнения для ψ_0 в общем случае являются комплексными.

Если далее предположить, что эти коэффициенты не зависят от t, и представить

$$\psi_0 = \exp\left[-\frac{2\pi\mathrm{i}}{h}(E + mc^2)t\right]\psi_1\,, \tag{10}$$

то для ψ_1 получается уравнение, не содержащее времени, которое идентично обобщённому волновому уравнению Шрёдингера, предложенному в нашей ранней работе. Те значения E, для которых существует функция ψ_1, удовлетворяющая определённым соотношениям ограниченности и непрерывности, являются боровскими уровнями энергии. Из таким образом проведённого рассмотрения следует, что добавление градиента к четырёхмерному потенциалу не может повлиять на уровни энергии. Полученные для четырёхмерных потенциалов $\mathfrak{A}$ и $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - \mathrm{grad}\,f$ функции ψ_1 и $\bar{\psi}_1$ будут отличаться только множителем $\exp\,[2\pi\mathrm{i}ef/(ch)]$ с абсолютным значением 1 и, следовательно (при очень общих требованиях на функцию f), будут иметь одинаковые свойства непрерывности.

2. Общая теория относительности

А. Волновое уравнение. Запишем для квадрата интервала в пятимерном пространстве

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \sum_{i,k=1}^{5}\gamma_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k = \\ &= \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k + \frac{e^2}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{5} q_i\,\mathrm{d}x_i\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь величины g_{ik} — компоненты эйнштейновского фундаментального тензора, величины q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — компоненты четырёхмерного потенциала, делённые на c^2, т.е.

$$\sum_{i=1}^{4} q_i\,\mathrm{d}x_i = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{A}_x\,\mathrm{d}x + \mathfrak{A}_y\,\mathrm{d}y + \mathfrak{A}_z\,\mathrm{d}z - \varphi c\,\mathrm{d}t)\,, \tag{12}$$

величина q_5 является константой, а x_5 — избыточный координатный параметр. Все коэффициенты действительнозначны и не зависят от x_5.

Величины g_{ik} и q_i зависят только от полей, но не от характеристик точечной массы; последние представляются множителем e^2/m^2. Для краткости, однако, мы хотим ввести зависящие от e/m величины

$$\frac{e}{m}\,q_i = a_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{13}$$

и воспользоваться соглашением, что при суммировании от 1 до 5 знак суммы будет писаться, а при суммировании от 1 до 4, напротив, будет опущен.

В этих обозначениях мы находим

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{ik} = g_{ik} + a_i a_k\,; \quad g_{i5} = 0 && (14)\\ &\gamma = \|\gamma_{ik}\| = a_5^2 g && (15) \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{lk} = g^{lk} \\ &\gamma^{5k} = -\frac{1}{a_5}\,g^{ik}a_i = -\frac{a^i}{a_5} \\ &\gamma^{55} = \frac{1}{a_5^2}(1 + a_i a^i) \end{aligned}\right\} \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{16}$$

Волновое уравнение, соответствующее уравнению (8), имеет вид

$$\sum_{i,k=1}^{5}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ik}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) = 0\,, \tag{17}$$

или, будучи записанным подробнее,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{a_5}\,a^i\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_5} + \\ + \frac{1}{a_5^2}(1 + a_i a^i)\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_5^2} = 0\,. \tag{18}$$

[4] Обозначение d' указывает, что $\mathrm{d}'\Omega$ не является полным дифференциалом.

[5] Появление связанного с линейной формой параметра p в экспоненциальной функции, возможно, находится в связи с некоторыми замеченными Э. Шрёдингером соотношениями (*Z. Phys.* **12** 13 (1923)) [5].

Наконец, вводя функцию ψ_0 и потенциалы q_i, это уравнение можно переписать как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_k}\right)-\frac{4\pi}{h}\sqrt{-1}\,ceq^i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_i}-$$
$$-\frac{4\pi^2c^2}{h^2}(m^2+e^2q_iq^i)\,\psi_0=0\,. \qquad (19)$$

В. Уравнения движения. Мы намереваемся сейчас представить уравнения движения заряженной точечной массы как уравнения геодезической линии в R_5.

С этой целью мы должны сначала вычислить символы Кристоффеля. Мы будем обозначать пятимерные символы как

$$\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_5,$$

а четырёхмерные как

$$\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_4.$$

Мы введём далее ковариантные производные четырёхмерного потенциала

$$A_{lk}=\frac{\partial a_l}{\partial x_k}-\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_4 a_r \qquad (20)$$

и разложим тензор $2A_{ik}$ на симметричную и антисимметричную части:

$$B_{lk}=A_{lk}+A_{kl}\,,$$
$$M_{lk}=A_{lk}-A_{kl}=\frac{\partial a_l}{\partial x_k}-\frac{\partial a_k}{\partial x_l}\,. \qquad (21)$$

Мы имеем тогда

$$\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_5=\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_4+\frac{1}{2}(a_kg^{ir}M_{il}+a_lg^{ir}M_{ik})\,,$$
$$\left\{\begin{matrix} k\,l \\ 5 \end{matrix}\right\}_5=\frac{1}{2a_5}B_{lk}-\frac{1}{2a_5}(a_ka^iM_{il}+a_la^iM_{ik})\,,$$
$$\left\{\begin{matrix} k\,5 \\ 5 \end{matrix}\right\}_5=-\frac{1}{2}a^iM_{ik}\,, \qquad (22)$$
$$\left\{\begin{matrix} 5\,5 \\ k \end{matrix}\right\}_5=0\,,$$
$$\left\{\begin{matrix} 5\,5 \\ 5 \end{matrix}\right\}_5=0\,.$$

Уравнения геодезической линии в R_5 тогда примут вид

$$\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}s^2}+\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_4\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}s}g^{ir}M_{il}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}s}=0\,, \qquad (23)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x_5}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{2a_5}B_{lk}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{a_5}\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}s}a^iM_{il}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}s}=0\,. \qquad (24)$$

Здесь, как и ранее, $\mathrm{d}'\Omega$ обозначает линейную форму

$$\mathrm{d}'\Omega=a_i\,\mathrm{d}x_i+a_5\,\mathrm{d}x_5\,. \qquad (25)$$

Умножая четыре уравнения (23) на a_r и пятое уравнение (24) на a_5 и складывая, получаем уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}s}\right)=0\,. \qquad (26)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}s}=\mathrm{const}\,. \qquad (27)$$

Если же умножить (23) на $g_{r\alpha}\,\mathrm{d}x_\alpha/\mathrm{d}s$ и просуммировать по r и α, то получается, вследствие антисимметрии M_{ik},

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{r\alpha}\frac{\mathrm{d}x_r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\right)=0 \qquad (28)$$

или, если ввести собственное время τ по формуле

$$g_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k=-c^2\,\mathrm{d}\tau^2\,, \qquad (29)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right)^2=0\,. \qquad (30)$$

Уравнение (28) или (30), впрочем, является из-за соотношения

$$\mathrm{d}s^2=-c^2\,\mathrm{d}\tau^2+(\mathrm{d}'\Omega)^2 \qquad (31)$$

следствием (26).

Из сказанного вытекает, что уравнение (24) является следствием (23) и может быть отброшено. Если ввести в (23) собственное время как независимую переменную, то пятый параметр выпадает полностью; мы также опустим индекс 4 у символов Кристоффеля:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}\tau^2}+\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}\tau}g^{ir}M_{il}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}\tau}=0\,. \qquad (32)$$

Последнее слагаемое в левой части представляет собой силу Лоренца. В специальной теории относительности первое из этих уравнений может быть записано как

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}+\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{e}{c}\left(\dot{z}H_y-\dot{y}H_z+\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)+e\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=0\,. \qquad (33)$$

Для того чтобы достичь согласия с опытом, множитель перед квадратной скобкой должен быть равен 1. Следовательно, имеет место

$$\frac{\mathrm{d}'\Omega}{\mathrm{d}\tau}=c \qquad (34)$$

и

$$\mathrm{d}s^2=0\,. \qquad (35)$$

Траектории точечной массы являются геодезическими нулевыми линиями в пятимерном пространстве.

Для того чтобы получить уравнения Гамильтона–Якоби, положим квадрат пятимерного градиента функции ψ равным нулю

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{2}{a_5}\frac{\partial\psi}{\partial x_5}a^i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+(1+a_ia^i)\left(\frac{1}{a_5}\frac{\partial\psi}{\partial x_5}\right)^2=0\,. \qquad (36)$$

Если мы положим здесь

$$mca_5 \frac{\partial\psi/\partial x_i}{\partial\psi/\partial x_5} = \frac{\partial W}{\partial x_i} \tag{37}$$

и введём вместо a_i потенциалы q_i, то мы получим уравнение

$$g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_k} - 2ecq^i \frac{\partial W}{\partial x_i} + c^2(m^2 + e^2 q_i q^i) = 0\,, \tag{38}$$

которое может рассматриваться как обобщение нашего уравнения (2), послужившего нам исходным пунктом.

Ленинград, Физический факультет Университета,
24 июля 1926 г.

Список литературы

1. Fock V "Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt" *Z. Phys.* **39** 226 (1926)
2. Klein O "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie" *Z. Phys.* **37** 895 (1926)
3. Mandel H "Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie" *Z. Phys.* **39** 136 (1926)
4. Fock V "Zur Schrödingershen Wellenmechanik" *Z. Phys.* **38** 242 (1926)
5. Schrödinger E "Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen" *Z. Phys.* **12** 13 (1923)

On the invariant form of the wave and motion equations for a charged point-mass

V.A. Fock

The Schrödinger wave-equation and the equations of motion are written as an invariant Laplace equation and the equation of a geodesic in five-dimensional space respectively. The superfluous fifth coordinate is closely related to the linear differential form of the electromagnetic potential.

PACS numbers: **01.65.+g**, **04.20.–q**, **11.15.–q** DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008h.0874

Bibliography — 5 references *Received 30 July 1926*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (8) 874–877 (2010) *Physics – Uspekhi* **53** (8) (2010)