Март 2010 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 180, № 3*

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

К 90-летию академика И.М. Халатникова

Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, 21 октября 2009 г.

А.Ю. Каменщик, В.Л. Покровский, И.Б. Хриплович

PACS number: 01.10.Fv DOI: 10.3367/UFNr.0180.201003g.0313

21 октября 2009 г. в конференц-зале Физического института им. П.Н. Лебедева РАН состоялась научная сессия Отделения физических наук, посвящённая 90-летию академика И.М. Халатникова. На сессии были заслушаны доклады:

1. **Андреев А.Ф.** (Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, Москва). *Дефицит импульса в квантовых стёклах*.
2. **Каменщик А.Ю.** (Болонский университет и отделение Национального института ядерной физики, Болонья, Италия; Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва). *Проблема сингулярностей и хаос в космологии*.
3. **Покровский В.Л.** (Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва, A&M Университет Техаса, США). *Поверх барьеров* (*о рассеянии частиц высоких энергий*).
4. **Хриплович И.Б.** (Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера РАН, Новосибирск). *Экранирование и антиэкранирование заряда в калибровочных теориях*.

Краткое содержание докладов 2–4 публикуется ниже.

Исаак Маркович Халатников

PACS numbers: **01.65.+g**, **04.20.–q**, **98.80.–k**
DOI: 10.3367/UFNr.0180.201003h.0313

Проблема сингулярностей и хаос в космологии

А.Ю. Каменщик

1. Введение

В докладе рассматриваются различные аспекты проблемы космологической сингулярности, такие как решение Белинского – Халатникова – Лифшица (БХЛ), описывающее колебательный режим приближения к сингулярности, новые черты космологической динамики в окрестности сингулярности в многомерных и суперструнных космологических моделях и их связи с такими современными разделами математики, как бесконечномерные алгебры Ли. Также обсуждается хаотичность колебательного приближения к космологической сингулярности. В заключении содержатся некоторые мысли о прошлом и будущем Вселенной в свете колебательного подхода к сингулярностям Большого взрыва и Большого хлопка.

Много лет назад, в беседах со своими учениками, Лев Давидович Ландау говорил, что существует три наиболее важных проблемы в теоретической физике: проблема космологической сингулярности, проблема фазовых переходов и проблема сверхпроводимости [1]. Впоследствии, как известно, был осуществлён грандиозный прорыв в объяснении явлений сверхпроводимости [2] и фазовых переходов [3]. Проблема космологической сингулярности широко обсуждалась в течение последних 50 лет, и было получено много важных результатов, но эта проблема всё ещё обладает некоторыми интригующими чертами. Более того, были открыты некоторые совершенно неожиданные грани проблемы космологической сингулярности. Исаак Маркович Халатников, один из учеников Л.Д. Ландау, внёс значительный вклад в открытие и разработку различных аспектов проблемы космологической сингулярности и хаоса, возникающего в процессе асимптотического приближения к этой сингулярности.

В нашем обзоре, опубликованном 10 лет назад [4] в номере *УФН*, посвящённом 90-летию со дня рождения Л.Д. Ландау, мы обсудили некоторые вопросы, связанные с проблемой сингулярности в космологии. В статье, посвящённой 100-летию со дня рождения Л.Д. Ландау [5], мы подробно остановились на взаимоотношениях между хорошо известными старыми результатами этих исследований и новыми разработками в данной области.

В настоящем докладе, посвящённом 90-летию И.М. Халатникова, я представлю краткий обзор некоторых старых и новых идей, связанных с развитием теории асимптотического приближения к космологической сингулярности и попытаюсь обосновать, почему это может быть интересно не только физикам и математикам, но и, возможно, более широкой аудитории.

Прежде всего, вспомним, что Р. Пенроуз и С. Хокинг [6–8] доказали невозможность неограниченного продолжения геодезических при определённых условиях. Это было интерпретировано как указание на существование сингулярности в общем решении уравнений Эйнштейна. Эти теоремы, однако, не позволяют найти конкретную аналитическую структуру сингулярности. Аналитическое поведение общих решений уравнений Эйнштейна в окрестности сингулярности исследовано в работах Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова [9–12] и В.А. Белинского, Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова [13–15]. В этих работах было обнаружено загадочное явление колебательного приближения к сингулярности, которое стало известно как *модель перемешанного мира* [16]. Модель замкнутой однородной, но анизотропной вселенной с тремя степенями свободы (космологическая модель типа IX по Бьянки) использовалась, чтобы показать, что Вселенная приближается к сингулярности таким образом, что её сжатие по двум осям сопровождается расширением по третьей оси и роли осей изменяются по довольно сложному закону, который выявляет хаотическое поведение [14–18].

Изучение динамики Вселенной в окрестности космологической сингулярности стало бурно развивающейся областью современной теоретической и математической физики. Прежде всего, нам хотелось бы упомянуть обобщение исследования колебательного приближения к космологической сингулярности для многомерных космологических моделей. Было замечено [19–21], что приближение к космологической сингулярности в многомерных (типа Калуцы–Клейна) космологических моделях имеет хаотический характер в пространстве-времени размерностью не выше 10, тогда как в пространстве-времени с более высокой размерностью Вселенная после конечного числа колебаний входит в стадию монотонного казнеровского сжатия [22].

Развитие космологических исследований, основанных на суперструнных моделях, выявило новые грани в динамике вблизи сингулярности [23–25]. Во-первых, было показано, что в этих моделях существуют механизмы изменения казнеровских эпох, обусловленные не гравитационными взаимодействиями, а влиянием других полей, присутствующих в этих теориях. Во-вторых, было доказано, что космологические модели, основанные на шести главных моделях суперструн и модели $D = 11$ супергравитации, демонстрируют хаотическое колебательное приближение к сингулярности. В-третьих, была обнаружена связь между космологическими моделями с колебательным приближением к сингулярности и специальным подклассом бесконечномерных алгебр Ли [26] — так называемыми гиперболическими алгебрами Каца–Муди (обширный обзор соответствующего математического аппарата и его применения к теории Белинского–Халатникова–Лифшица (БХЛ) дан в [27]). Изучение алгебраических структур, стоящих за хаотическим приближением к космологической сингулярности, открывает новые (хотя ещё и очень слабо разработанные) перспективы развития последовательной квантовой теории гравитации [28].

Говоря о новых аспектах колебательного приближения к космологической сингулярности в многомерных и суперструнных теориях, не следует забывать, что уже "классическое" БХЛ-поведение в $3+1$-мерной общей теории относительности ещё не понято до конца и заслуживает дальнейшего изучения. Кроме того, я попытаюсь привлечь внимание к некоторым философским сторонам этого явления, которые до сих пор недооценивались.

Структура доклада следующая: в разделе 2 кратко обсуждается теорема Ландау о сингулярности, которая не публиковалась в отдельной статье и была приведена в книге [29] и обзоре [9]. В разделе 3 мы напомним основные особенности колебательного приближения к сингулярности в релятивистской космологии, включая его хаотический характер. Раздел 4 будет посвящён современному развитию идей и методов БХЛ, в том числе динамике в присутствии безмассового скалярного поля, многомерной космологии, космологии в теории суперструн и соответствию между хаотической космологической динамикой и гиперболическими алгебрами Каца–Муди. В заключительном разделе 5 мы выскажем некоторые соображения по поводу прошлого и будущего Вселенной в свете явления БХЛ.

2. Теорема Ландау о сингулярности

Рассмотрим синхронную систему отсчёта с метрикой

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta\,, \tag{1}$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ — пространственная метрика. Л.Д. Ландау указал на то, что детерминант g метрики в синхронной системе отсчёта может обратиться в нуль за конечное время, если уравнение состояния удовлетворяет некоторым простым условиям. Для доказательства этого утверждения удобно выписать $0-0$-компоненту тензора Риччи в следующем виде:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial K_\alpha^\alpha}{\partial t} - \frac{1}{4}\,K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha\,, \tag{2}$$

где $K_{\alpha\beta}$ — тензор внешней кривизны, определённый как

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}\,, \tag{3}$$

а пространственные индексы поднимаются и опускаются пространственной метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$. Уравнение Эйнштейна для R_0^0 имеет вид

$$R_0^0 = T_0^0 - \frac{1}{2}T\,, \tag{4}$$

где тензор энергии-импульса

$$T_i^j = (\rho + p)\,u_i u^j - \delta_i^j p\,, \tag{5}$$

ρ, p и u_i — плотность энергии, давление и четырескорость соответственно. Величина в правой части уравнения (4)

$$T_0^0 - \frac{1}{2}\,T = \frac{1}{2}\,(\,\rho + 3p) + (\,\rho + p)\,u_\alpha u^\alpha \tag{6}$$

положительна, если

$$\rho + 3p > 0\,. \tag{7}$$

Таким образом, из уравнения (4) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K_\alpha^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{4}\,K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha \leqslant 0\,. \tag{8}$$

В силу алгебраического неравенства

$$K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha \geqslant \frac{1}{3}\,(K_\alpha^\alpha)^2 \tag{9}$$

получаем

$$\frac{\partial K_\alpha^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{6}\,(K_\alpha^\alpha)^2 \leqslant 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{K_\alpha^\alpha} \geqslant \frac{1}{6}\,. \tag{11}$$

Если $K_\alpha^\alpha > 0$ в некоторый момент времени, то при уменьшении t величина $1/K_\alpha^\alpha$ уменьшается до нуля за конечное время. Следовательно, K_α^α стремится к $+\infty$, и это означает, что вследствие равенства

$$K_\alpha^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ln g \tag{12}$$

детерминант g стремится к нулю (не быстрее, чем t^6, согласно неравенству (11)). Если в начальный момент $K_\alpha^\alpha < 0$, то тогда тот же самый результат получится для возрастающего времени. Похожий результат был получен Райчаудхури [30, 31] для случая пылевидной материи и Комаром [32].

Этот результат не доказывает неизбежности существования истинной физической сингулярности, которая представляет собой сингулярность самого пространства-времени и не зависит от характера выбранной системы отсчёта. Однако этот результат сыграл важную роль, стимулируя дискуссию о существовании и общности сингулярностей в космологии. Отметим, что условие энергодоминантности (7), использованное для доказательства теоремы Ландау, появляется также в доказательстве теоремы о сингулярностях Пенроуза и Хокинга [6–8]. Более того, нарушение этого условия необходимо для объяснения явления космического ускорения.

Существует глубокая связь между теоремой Ландау и эффектом появления каустик, изучавшихся Е.М. Лифшицем, И.М. Халатниковым и В.В. Судаковым [33, 34] и обсуждавшихся ими с Л.Д. Ландау в 1961 г. Пытаясь геометрически построить синхронную систему отсчёта, строят начиная с трёхмерной поверхности Коши семейство геодезических, ортогональных к этой поверхности. Протяжённость таких геодезических служит мерой времени. Известно, что эти геодезические пересекаются на некоторой двумерной каустической поверхности. Такая схема, построенная для пустого пространства, применима также при наличии пылевидной материи ($p = 0$). Пылевидная материя, двигаясь вдоль геодезических, собирается на каустиках, но возрастание плотности не может продолжаться неограниченно, поскольку возникающее давление разрушает каустики [1]. Этот вопрос изучался Л.П. Грищуком [35]. Позднее В.И. Арнольд, С.Ф. Шандарин и Я.Б. Зельдович [36] использовали каустики для объяснения начального скучивания пыли, которое, хотя и не порождает физических сингулярностей, тем не менее является ответственным за образование так называемых блинов. Эти блины представляют собой начальную стадию развития крупномасштабной структуры Вселенной.

3. Колебательное приближение к сингулярности в релятивистской космологии

Одним из первых точных решений, найденных в рамках общей теории относительности, было решение Казнера [22] для космологических моделей типа I по Бьянки, представляющих собой гравитационное поле в пустом пространстве с евклидовой метрикой, зависящей от времени,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - t^{2p_1}\,\mathrm{d}x^2 - t^{2p_2}\,\mathrm{d}y^2 - t^{2p_3}\,\mathrm{d}z^2\,, \tag{13}$$

где показатели степени p_1, p_2 и p_3 удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\,. \tag{14}$$

Примечательно, что это решение было первым нестационарным космологическим решением, найденным до изотропных решений Фридмана. Возможно, из-за своей "экзотичности" оно много лет игнорировалось космологами и было оценено по достоинству только в 1950-е годы. Выбирая упорядочение показателей степени как

$$p_1 < p_2 < p_3\,, \tag{15}$$

их можно параметризовать следующим образом [9, 10]:

$$p_1 = \frac{-u}{1 + u + u^2}\,,\quad p_2 = \frac{1 + u}{1 + u + u^2}\,,\quad p_3 = \frac{u(1 + u)}{1 + u + u^2}\,. \tag{16}$$

По мере того, как параметр u изменяется в области $u \geqslant 1$, p_1, p_2 и p_3 принимают все свои допустимые значения:

$$-\frac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0,\quad 0 \leqslant p_2 \leqslant \frac{2}{3}\,,\quad \frac{2}{3} \leqslant p_3 \leqslant 1\,. \tag{17}$$

[1] В пустом пространстве каустика является математической, но не физической сингулярностью. Это вытекает просто из того факта, что мы всегда можем сдвинуть её положение изменением начальной поверхности Коши.

Значения $u < 1$ приводят к тем же диапазонам значений p_1, p_2, p_3, поскольку

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u),\ p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u),\ p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u)\,. \quad (18)$$

Параметр u, введённый в начале 1960-х годов, оказался очень полезным, и его свойства привлекают внимание исследователей в различных контекстах. Например, в недавно вышедшей статье [37] была установлена связь между параметром Лифшица – Халатникова u и инвариантами, возникающими в классификации пространств Эйнштейна [38] по Петрову.

В космологических моделях типа Бьянки-VIII или Бьянки-IX казнеровский режим (13), (14) более не является решением уравнений Эйнштейна, но могут быть построены обобщённые решения Казнера [11 – 15]. Можно построить своеобразную теорию возмущений, в которой точное решение Казнера (13), (14) играет роль нулевого приближения, тогда как роль возмущений играют те члены уравнений Эйнштейна, которые зависят от тензоров пространственной кривизны (очевидно, что такие члены отсутствуют в космологии Бьянки-I). Эта теория возмущений эффективно работает в окрестности сингулярности или, другими словами, при $t \to 0$. Замечательная особенность этих возмущений состоит в том, что они вызывают переход от казнеровского режима с одним набором параметров к казнеровскому режиму с другим набором параметров.

Метрика обобщённого решения Казнера в синхронной системе отсчёта может быть представлена в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta)\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta\,, \quad (19)$$

где

$$a = t^{p_l}, \quad b = t^{p_m}, \quad c = t^{p_n}\,. \quad (20)$$

Трёхмерные векторы $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ определяют направления, вдоль которых пространственные расстояния изменяются со временем по степенны́м законам (20). Пусть $p_l = p_1, p_m = p_2, p_n = p_3$, так что

$$a \sim t^{p_1}, \quad b \sim t^{p_2}, \quad c \sim t^{p_3}\,, \quad (21)$$

т.е. Вселенная сжимается в направлениях, заданных векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ и расширяется вдоль $\mathbf{l}$. Было показано [14], что возмущения, созданные членами пространственной кривизны, вызывают переход переменных a, b и c к другому казнеровскому режиму, задаваемому следующими формулами:

$$a \sim t^{p'_l}, \quad b \sim t^{p'_m}, \quad c \sim t^{p'_n}\,, \quad (22)$$

где

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_m = -\frac{2|p_1| - p_2}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_n = -\frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}\,. \quad (23)$$

Таким образом, влияние возмущения заключается в смене одной "казнеровской эпохи" другой, так что отрицательная степень t переходит от направления $\mathbf{l}$ к направлению $\mathbf{m}$. Во время перехода функция $a(t)$ достигает максимума, а функция $b(t)$ — минимума. Следовательно, прежде убывавшая величина b теперь возрастает, величина a уменьшается, а $c(t)$ остаётся убывающей функцией. Прежде возраставшее возмущение, вызывавшее переход из режима (21) в режим (22), подавляется и в конце концов исчезает. Затем другое возмущение начинает возрастать и обусловливает новую замену одной казнеровской эпохи другой и т.д.

Нам хотелось бы подчеркнуть: именно тот факт, что возмущение влечёт за собой такую перемену динамики, которая его гасит, позволяет столь успешно использовать теорию возмущений. Отметим, что эффект изменения казнеровского режима существует уже в космологических моделях более простых, чем Бьянки-VIII и Бьянки-IX. На самом деле, во вселенной типа Бьянки-II имеется только один тип возмущений, связанных с пространственной кривизной, и это возмущение приводит к одному изменению казнеровского режима (один скачок). Этот факт был известен Е.М. Лифшицу и И.М. Халатникову в начале шестидесятых годов прошлого века, и они обсуждали эту тему с Л.Д. Ландау (как раз незадолго до аварии), который придавал ему большое значение. Результаты, описывающие динамику модели Бьянки-IX, И.М. Халатников обнародовал в январе 1968 г. в докладе на семинаре Анри Пуанкаре в Париже. Дж.А. Уиллер, который там присутствовал, отметил, что динамика вселенной типа Бьянки-IX представляет собой нетривиальный пример хаотической динамической системы. Позднее Кип Торн распространил препринт с текстом этого доклада.

Возвращаясь к правилам, регулирующим перебрасывание отрицательного показателя степени по времени с одного направления на другое, необходимо подчеркнуть, что вблизи сингулярности очень сложная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к довольно простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для того чтобы получить информацию о правилах (23), было достаточно провести их качественный анализ. Этот анализ можно сравнить с описанием движения мяча, поднимающегося на вершину холма: после достижения наивысшей возможной точки мяч останавливается и начинает катиться вниз. У подножия холма его скорость равна начальной скорости, но с противоположным знаком. Кроме того, использовался некоторый закон сохранения суммы скоростей, соответствующих расширению (сжатию) разных пространственных направлений [14, 29].

С другой стороны, было показано, что правила перебрасывания (23) могут быть удобно выражены с помощью параметризации (16):

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u)\,, \quad (24)$$

тогда

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1)\,. \quad (25)$$

Наибольшая из двух положительных степеней остаётся положительной.

Последовательные изменения (25), сопровождающиеся перебрасыванием отрицательного показателя степени между направлениями $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$, продолжаются до тех пор, пока не исчерпается целая часть u, т.е. до тех пор, пока u не станет меньше единицы. Тогда, согласно уравнению (18), величина $u < 1$ превращается в $u > 1$, при этом или показатель p_l, или p_m является отрицательным и p_n становится меньшим из двух положительных чисел ($p_n = p_2$). Следующая последовательность изменений будет перекидывать отрицательный показатель степени между направлениями **n** и **l** или **n** и **m**. Подчеркнём, что полезность параметра Лифшица–Халатникова u связана с тем, что он позволяет закодировать довольно сложные законы переходов между различными казнеровскими режимами (23) в таких простых правилах, как $u \to u - 1$ и $u \to 1/u$.

Следовательно, эволюция нашей модели к сингулярной точке состоит из последовательных периодов (называемых эрами), в течение которых расстояния вдоль двух осей осциллируют, а вдоль третьей оси расстояние монотонно убывает, причём объём уменьшается по закону, близкому к $\sim t$. При переходе от одной эры к другой эре оси, вдоль которых расстояния монотонно уменьшаются, меняются местами. Порядок, в котором пары осей меняются местами, и очерёдность, в которой эры с различной продолжительностью следуют друг за другом, приобретают хаотический характер.

Каждой (s-й) эре соответствует убывающая последовательность значений параметра u. Эта последовательность имеет вид $u^{(s)}_{\max}, u^{(s)}_{\max} - 1, \ldots, u^{(s)}_{\min}$, где $u^{(s)}_{\min} < 1$. Введём следующие обозначения:

$$u^{(s)}_{\min} = x^{(s)}, \quad u^{(s)}_{\max} = k^{(s)} + x^{(s)}, \tag{26}$$

т.е. $k^{(s)} = [u^{(s)}_{\max}]$ (квадратные скобки обозначают наибольшее целое $\leqslant u^{(s)}_{\max}$). Числа $k^{(s)}$ определяют продолжительность эры. Для следующей эры мы получаем

$$u^{(s+1)}_{\max} = \frac{1}{x^{(s)}}, \quad k^{(s+1)} = \left[\frac{1}{x^{(s)}}\right]. \tag{27}$$

Распределение продолжительностей $k^{(s)}$ последовательных эр (измеряемое числом казнеровских эпох, содержащихся в них) приобретает асимптотически стохастический характер. Случайность этого процесса вытекает из правил (26), (27), которые определяют переходы от одной эры к другой в бесконечной последовательности значений u. Если вся эта бесконечная последовательность начинается с какого-то начального значения $u^{(0)}_{\max} = k^{(0)} + x^{(0)}$, то продолжительности серий $k^{(0)}$, $k^{(1)}, \ldots$ являются числами, входящими в разложение в непрерывную дробь:

$$k^{(0)} + x^{(0)} = k^{(0)} + \cfrac{1}{k^{(1)} + \cfrac{1}{k^{(2)} + \ldots}}\,. \tag{28}$$

Мы можем статистически описать эту последовательность эр, если рассмотрим вместо заданного начального значения $u^{(0)}_{\max} = k^{(0)} + x^{(0)}$ распределение $x^{(0)}$ на интервале $(0, 1)$, определяемое некоторым вероятностным законом [17]. Тогда мы также получаем некоторые распределения величин $x^{(s)}$, которые завершают каждую s-ю последовательность чисел. Можно показать, что с увеличением s эти распределения стремятся к стационарному (независимому от s) распределению вероятности $w(x)$, в котором начальное значение $x^{(s)}$ полностью "забыто":

$$w(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2}\,. \tag{29}$$

Из уравнения (29) следует, что распределение вероятностей длин серий k даётся выражением

$$W(k) = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\,. \tag{30}$$

Источник стохастичности, возникающий при колебательном приближении к космологической сингулярности, может быть описан в таких терминах: переход от одной эры Казнера к другой описывается преобразованием интервала $[0, 1]$ в самого себя по формуле

$$Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\}, \quad \text{т.е.} \quad x_{s+1} = \left\{\frac{1}{x_s}\right\}, \tag{31}$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Это преобразование является расширяющимся и обладает свойством экспоненциальной неустойчивости. Это не взаимно однозначное преобразование. Обратное к нему преобразование не единственно. Другими словами, зафиксировав значение параметра u, мы можем предсказать эволюцию к сингулярности, но не можем описать прошлое.

Можно перейти от односторонней бесконечной последовательности

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) \tag{32}$$

к двойной бесконечной последовательности [18]

$$X = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)\,. \tag{33}$$

Последовательность X эквивалентна последовательности целых чисел

$$K = (\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots)\,, \tag{34}$$

такой, что

$$k_s = \left[\frac{1}{x_{s-1}}\right]. \tag{35}$$

Обратно:

$$x_s = \cfrac{1}{k_{s+1} + \cfrac{1}{k_{s+2} + \ldots}} \equiv x^+_{s+1}\,, \tag{36}$$

$$x^+_s = [k_s, k_{s+1}, \ldots]\,, \tag{37}$$

$$x^-_s \equiv [k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots]\,. \tag{38}$$

Сдвиг всей последовательности X вправо означает совместное преобразование

$$x^+_{s+1} = \left\{\frac{1}{x^+_s}\right\}, \quad x^-_{s+1} = \frac{1}{\left(\left[\dfrac{1}{x^+_s}\right] + x^-_s\right)}\,. \tag{39}$$

Это взаимно однозначное отображение в единичном квадрате, которое позволяет точно вычислить распределения вероятности для других, описывающих последовательные эры параметров, таких как параметр δ, дающий соотношение между амплитудами логарифмов функций a, b, c и логарифмического времени [18].

Таким образом, в результате статистического анализа эволюции в окрестности сингулярности [17] мы увидели, что стохастичность и вероятностные распределения параметров возникают уже в классической общей теории относительности. В конце этого раздела сделаем историческое замечание. В 1968 г. непрерывная дробь (28) была показана И.М. Лифшицу (Л.Д. Ландау уже скончался), и он сразу же отметил, что можно вывести формулу для стационарного распределения величины x (29). Позднее стало известно, что эта формула была выведена в XIX в. Карлом Фридрихом Гауссом, который описал её в письме к одному из своих коллег.

4. Колебательное приближение к сингулярности: современные достижения

Колебательное приближение к сингулярности, описанное в разделе 3, было разработано для случая пустого пространства-времени. Нетрудно понять, что если рассмотреть вселенную, заполненную идеальной жидкостью с уравнением состояния $p = w\rho$, где p — давление, ρ — плотность энергии и $w < 1$, то присутствие этой материи не может изменить динамику в окрестности сингулярности. В самом деле, используя закон сохранения энергии, можно показать, что

$$\rho = \frac{\rho_0}{(abc)^{w+1}} = \frac{\rho_0}{t^{w+1}}\,, \tag{40}$$

где ρ_0 — положительная константа. Таким образом, описывающий материю член в уравнениях Эйнштейна, ведёт себя как $\sim 1/t^{1+w}$, и при $t \to 0$ он слабее, чем члены геометрической природы, происходящие от производных метрики по времени, которые ведут себя как $1/t^2$, не говоря уже о возмущениях, обусловленных пространственной кривизной, ответственных за смену казнеровского режима, которые ведут себя как $1/t^{2+4|p_1|}$. Однако ситуация кардинально меняется, если параметр w равен единице, т.е. давление равно плотности энергии. Такой вид материи, который называется веществом с "жёстким" уравнением состояния, может быть представлен безмассовым скалярным полем. В этом случае $\rho \sim 1/t^2$ и вклад материи того же порядка, что и основных членов геометрического происхождения. Следовательно, нужно найти решения казнеровского типа, учитывающие наличие членов, связанных с материей с жёстким уравнением состояния (безмассовым скалярным полем). Такое исследование было проведено в статье [39]. Было показано, что масштабные факторы a, b и c снова могут быть представлены в виде t^{2p_1}, t^{2p_2} и t^{2p_3} соответственно, где казнеровские показатели удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1\,, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 - q^2\,, \tag{41}$$

где число q^2, которое отражает наличие материи с жёстким уравнением состояния, ограничено величиной

$$q^2 \leqslant \frac{2}{3}\,. \tag{42}$$

Можно убедиться, что если $q^2 > 0$, то существуют комбинации положительных показателей Казнера, удовлетворяющие соотношениям (41). Более того, если $q^2 \geqslant 1/2$, то соотношениям (41) могут удовлетворять только наборы трёх положительных казнеровских показателей. Если вселенная оказалась в казнеровском режиме с тремя положительными показателями, то поправочные члены, обусловленные пространственной кривизной, слишком слабы, чтобы изменить этот казнеровский режим, и он, таким образом, становится устойчивым. Это означает, что в присутствии материи с жёстким уравнением состояния вселенная после конечного числа изменений казнеровских эпох оказывается в устойчивом режиме и колебания прекращаются. Таким образом, безмассовое скалярное поле играет "антихаотизирующую" роль в процессе космологической эволюции [39]. В этом случае можно также использовать параметр Лифшица – Халатникова. Казнеровские показатели, удовлетворяющие соотношениям (41), удобно представить в виде [39]

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{-u}{1+u+u^2}\,,\\
p_2 &= \frac{1+u}{1+u+u^2}\left[u - \frac{u-1}{2}\left(1-(1-\beta^2)^{1/2}\right)\right],\\
p_3 &= \frac{1+u}{1+u+u^2}\left[1 + \frac{u-1}{2}\left(1-(1-\beta^2)^{1/2}\right)\right],\\
\beta^2 &= \frac{2(1+u+u^2)^2}{(u^2-1)^2}\,.
\end{aligned} \tag{43}$$

Теперь диапазон изменения параметра u: $-1 \leqslant u \leqslant 1$, а допустимые значения параметра q при некотором заданном u определяются неравенством

$$q^2 \leqslant \frac{(u^2-1)^2}{2(1+u+u^2)^2}\,. \tag{44}$$

Можно легко показать, что после одного скачка величина параметра q^2 изменяется по правилу

$$q^2 \to q'^2 = q^2\,\frac{1}{(1+2p_1)^2} > q^2\,. \tag{45}$$

Таким образом, параметр q^2 возрастает, и, следовательно, возрастает вероятность найти все три показателя Казнера положительными. Это ещё раз подтверждает тезис о том, что после конечного числа скачков вселенная в присутствии безмассового скалярного поля оказывается в казнеровском режиме с тремя положительными показателями и колебания прекращаются.

Во второй половине 1980-х годов была опубликована серия статей [19 – 21], в которых изучались решения уравнений Эйнштейна в окрестности сингулярности для $d+1$-мерного пространства-времени. Был рассмотрен многомерный аналог вселенной типа Бьянки-I, метрика которого является обобщённой метрикой Казнера:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \sum_{i=1}^{d} t^{2p_i}\,\mathrm{d}x^{i2}\,, \tag{46}$$

где показатели Казнера p_i удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{d} p_i = \sum_{i=1}^{d} p_i^2 = 1\,. \tag{47}$$

Ввиду наличия членов пространственной кривизны происходит переход от одной казнеровской эпохи к другой, и этот переход подчиняется следующему правилу: новые показатели Казнера

$$p_1', p_2', \ldots, p_d' = \text{упорядоченным по возрастанию } q_1, q_2, \ldots, q_d, \tag{48}$$

$$q_1 = \frac{-p_1 - P}{1 + 2p_1 + P}\,, \quad q_2 = \frac{p_2}{1 + 2p_1 + P}\,, \ldots,$$
$$q_{d-2} = \frac{p_{d-2}}{1 + 2p_1 + P}\,, \quad q_{d-1} = \frac{2p_1 + P + p_{d-1}}{1 + 2p_1 + P}\,,$$
$$q_d = \frac{2p_1 + P + p_d}{1 + 2p_1 + P}\,, \tag{49}$$

где

$$P = \sum_{i=2}^{d-2} p_i\,. \tag{50}$$

Однако такой переход от одной эпохи Казнера к другой происходит, если, по крайней мере, одно из чисел α_{ijk} отрицательно. Эти числа определены следующим образом:

$$\alpha_{ijk} \equiv 2p_i + \sum_{l \neq j, k, i} p_l \quad (i \neq j,\, i \neq k,\, j \neq k)\,. \tag{51}$$

Для пространства-времени с $d < 10$ один из факторов α всегда отрицателен и, значит, один казнеровский режим сменяет другой, из чего следует колебательное поведение Вселенной в окрестности космологической сингулярности. Однако для пространства-времени с $d \geqslant 10$ существуют такие, удовлетворяющие соотношениям (47) комбинации показателей Казнера, для которых все числа α_{ijk} положительны. Если вселенная входит в казнеровский режим с такими показателями (так называемую область казнеровской устойчивости), то её поведение перестаёт быть хаотическим и этот казнеровский режим сохраняется. Таким образом, была выдвинута гипотеза о том, что в пространстве-времени с $d \geqslant 10$ после конечного числа оцилляций рассматриваемая вселенная оказывается в области казнеровской устойчивости и колебательный режим сменяется монотонным казнеровским поведением.

Открытие того факта, что хаотический характер приближения к космологической сингулярности исчезает в пространстве-времени с $d \geqslant 10$, было неожиданным, и выглядело как случайный результат игры вещественных чисел, удовлетворяющих обобщённым соотношениям Казнера (49). Позднее стало ясно, что за этим фактом стоит глубокая математическая структура, а именно гиперболические алгебры Каца – Муди. Действительно, в серии работ Дамура, Энно, Николаи и некоторых других авторов (см., например, [16]) по космологической динамике в рамках моделей, основанных на теориях суперструн, существующих в 10-мерном пространстве-времени, и по $d + 1 = 11$-моделям супергравитации было показано, что в окрестности сингулярности эти модели выявляют колебательное поведение типа БХЛ. Важной новой чертой динамики в этих моделях является та роль, которую в ней играют негравитационные бозонные поля (р-формы), которые также отвечают за переход от одного казнеровского режима к другому. Для описания этих переходов оказывается очень удобен гамильтонов формализм [16].

В рамках такого формализма конфигурационное пространство казнеровских параметров, описывающее динамику вселенной, может рассматриваться как бильярд, тогда как члены кривизны в теории Эйнштейна, а также потенциалы р-форм в теориях суперструн играют роль стенок этих бильярдов. Переход от одной эпохи Казнера к другой — это отражение от одной из стенок. Таким образом, существует соответствие между довольно сложной динамикой вселенной в окрестности космологической сингулярности и движением воображаемого шара на бильярдном столе. Однако есть более поразительное и неожиданное соответствие между хаотическим поведением вселенной в окрестности сингулярности и таким абстрактным математическим объектом, как гиперболические алгебры Каца – Муди [23 – 25]. Кратко объясним, что это означает. Каждая алгебра Ли определяется её генераторами h_i, e_i, f_i, $i = 1, \ldots, r$, где r — ранг алгебры Ли, т.е. максимальное число её генераторов h_i, коммутирующих друг с другом (эти генераторы составляют подалгебру Картана). Коммутационные соотношения между генераторами таковы:

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i\,,$$
$$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j\,,$$
$$[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j\,,$$
$$[h_i, h_j] = 0\,. \tag{52}$$

Коэффициенты A_{ij} образуют обобщённую матрицу Картана $r \times r$ такую, что $A_{ii} = 2$, недиагональные элементы являются неположительными целыми числами и из равенства $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$ следует, что и $A_{ji} = 0$. Можно сказать, что e_i являются повышающими операторами, аналогичными хорошо известному оператору $L_+ = L_x + \mathrm{i}L_y$ в теории момента импульса, тогда как f_i являются понижающими операторами подобными $L_- = L_x - \mathrm{i}L_y$. Генераторы h_i подалгебры Картана могут быть сопоставлены с оператором L_z. Генераторы также должны подчиняться соотношениям Серре

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1 - A_{ij}} e_j = 0\,,$$
$$(\mathrm{ad}\, f_i)^{1 - A_{ij}} f_j = 0\,, \tag{53}$$

где $(\mathrm{ad} A)B \equiv [A, B]$.

Алгебры Ли $\mathcal{G}(A)$, построенные на симметризуемой матрице Картана A, классифицируются согласно свойствам их собственных значений:

если A положительно определена, то $\mathcal{G}(A)$ является конечномерной алгеброй Ли;

если A имеет одно нулевое собственное значение, а все остальные собственные значения строго положительны, то $\mathcal{G}(A)$ является аффинной алгеброй Каца – Муди (КМ);

если A имеет одно отрицательное собственное значение, а все остальные собственные значения строго положительны, то $\mathcal{G}(A)$ является лоренцевой алгеброй КМ.

Существует соответствие между структурой алгебры Ли и определённой системой векторов в r-мерном евклидовом пространстве, которое существенно упрощает классификацию алгебр Ли. Эти векторы, называемые "корнями", представляют собой повышающие и понижающие операторы алгебры Ли. Векторы, соответствующие генераторам e_i и f_i, называются простыми корнями. Система простых положительных корней (т.е. корней, соответствующих повышающим генераторам e_i) может быть представлена узлами их диаграмм Дынкина, тогда как рёбра, соединяющие (или не соединяющие) узлы, дают информацию об углах между векторами простых положительных корней.

Важный подкласс лоренцевых алгебр КМ может быть определён следующим образом: алгебра КМ такая, в которой устранение одного узла из её диаграммы Дынкина даёт сумму конечных или аффинных алгебр, называется гиперболической алгеброй КМ. Все эти алгебры известны. В частности, не существует гиперболической алгебры с рангом выше 10.

Напомним ещё несколько определений из теории алгебр Ли. Отражения по отношению к гиперплоскостям, ортогональным простым корням, оставляют системы корней инвариантными. Соответствующая конечномерная группа называется группой Вейля. Наконец, вышеупомянутые гиперплоскости делят r-мерное евклидово пространство на области, называемые камерами Вейля. Группа Вейля преобразует одну камеру Вейля в другую.

Теперь мы можем, следуя статье [40], кратко сформулировать результаты подхода [23–25]: связи между бильярдами, описывающими эволюцию Вселенной в окрестности сингулярности, и соответствующими им алгебрами Каца–Муди могут быть описаны следующим образом:

казнеровские показатели, описывающие "свободное" движение Вселенной между отражениями от стенок, соответствуют элементам подалгебры Картана алгебры КМ;

основные стенки, т.е. члены в уравнениях движения, отвечающие за переход от одной казнеровской эпохи к другой, соответствуют простым корням алгебры КМ;

группа отражений в космологическом бильярде представляет собой группу Вейля алгебры КМ;

бильярдный стол может быть отождествлён с камерой Вейля алгебры КМ.

Можно представить себе бильярдные столы двух типов: бесконечные, такие, в которых возможно линейное движение без столкновений со стенками (нехаотический режим), и такие, в которых отражения от стенок неизбежны и режим может быть только хаотическим. Примечательно, что камеры Вейля гиперболических алгебр КМ устроены так, что возникают бесконечно повторяющиеся столкновения со стенками. Было показано, что все теории с колебательным приближением к сингулярности, такие как теория Эйнштейна в размерности $d < 10$ и суперструнные космологические модели, соответствуют гиперболическим алгебрам КМ. Существование связей между БХЛ-приближением к сингулярностям и структурой некоторых бесконечномерных алгебр Ли вдохновило некоторых авторов на выдвижение новой программы развития квантовой гравитации и космологии [28]. Они предлагают «всерьёз принять идею, что вблизи сингулярности (т.е. когда кривизна становится больше, чем планковский масштаб) описание пространственного континуума и пространства-времени, основанное на (квантовой) теории поля, перестаёт работать и оно должно уступить место гораздо более абстрактному описанию на языке алгебр Ли. Тем самым информация, прежде закодированная в пространственном изменении геометрии и материальных полей, перемещается в бесконечную последовательность алгебраических переменных Ли, зависящих только от "времени". Другими словами, мы приходим к выводу о том, что пространство, а следовательно, после квантования и пространство-время, действительно *исчезает* (или "вырождается") при приближении к сингулярности».

5. Заключение: некоторые мысли о прошлом и будущем Вселенной

В разделе 4 мы кратко рассказали о новейших разработках в БХЛ-теории приближения к космологической сингулярности, связанных с космологическими моделями суперструнного происхождения и бесконечномерными алгебрами Ли. Однако уже в "стандартной" $3+1$-мерной общей теории относительности эффект колебательного приближения к сингулярности и хаотичности, вытекающей из него, представляет большой интерес. В самом деле, открытие нестационарных космологических решений в общей теории относительности, прежде всего, решений Фридмана, породило оживлённые дискуссии о следующих вопросах.

Имела ли Вселенная начало?

Настанет ли конец Вселенной?

Может ли Вселенная существовать в течение *конечного* промежутка времени?

Что было *до* начала и что будет *после* конца?

Эти вопросы кажутся вполне разумными, поскольку мы знаем, что во всех трёх фридмановских моделях — плоской, открытой и замкнутой — Вселенная имеет начало, и это начало — не что иное, как сингулярность Большого взрыва. В замкнутой модели Фридмана Вселенная также имеет и конец — сингулярность Большого хлопка — и существует конечный промежуток времени. Более того, согласно так называемой Стандартной космологической модели, основанной на довольно большом объёме наблюдательных данных, нечто подобное Большому взрыву имело место примерно 13,7 млрд лет назад (по космическому, т.е. синхронному времени). Более или менее признанное существование начала эволюции Вселенной и возможное существование её конца может порадовать тех, кто верит в сотворение Вселенной и для кого её возможный конец может служить подтверждением их философских или богословских убеждений. Любопытно, что Папская академия наук организовала в октябре–ноябре 2008 г. специальную конференцию в Ватикане под названием "Научные взгляды на эволюцию Вселенной и жизни". С другой стороны, возможность ограничения существования Вселенной по времени может вызвать некий психологический дискомфорт у тех, кому конечная продолжительность существования Вселенной кажется бессмысленной. Кому-то сам факт, что его жизнь проходит во Вселенной, которая может существовать только ограниченный период времени, покажется угнетающим.

Анализируя этот аспект проблемы эволюции Вселенной, необходимо спросить себя: какую параметризацию времени следует использовать, говоря о времени существования Вселенной? Как мы знаем со времени создания специальной теории относительности, время относительно. В рамках общей теории относительности время становится ещё более относительным и может идти с разной скоростью в разных точках пространства. Проводя конформные преобразования (например, когда строятся конформные диаграммы Пенроуза [6–8]), можно бесконечный промежуток времени превратить в конечный. Так почему же нам следует использовать космическое время? Ответ на этот вопрос прост: космическое время для частицы, находящейся в покое в однородной и изотропной фридмановской Вселенной, совпадает с собственным временем, введённым в специальной теории относительности. Следовательно, когда мы рассматриваем современную Вселенную, вполне разумно говорить на языке космического времени и утверждать, что Вселенная была создана 13,7 млрд лет назад. Однако, когда мы рассматриваем окрестность космологической сингулярности Большого взрыва в прошлом или когда мы принимаем возможность существования сингулярности Большого хлопка в отдалённом будущем, ситуация кардинально меняется. Вселенная в окрестности таких сингулярностей является чрезвычайно анизотропной и описывается случайной последовательностью казнеровских эпох и эр, как обсуждалось выше. (Здесь нужно уточнить: хотя с помощью выбора очень специальных изотропных начальных условий можно исключить хаотичность вблизи сингулярности Большого взрыва, которая может в принципе иметь фридмановский вид, невозможно избежать хаотического режима в окрестности сингулярности Большого хлопка, поскольку неоднородности, развившиеся за время эволюции Вселенной, делают её стадию сжатия сильноанизотропной [41].)

Таким образом, хотя период эволюции между произвольным моментом космического времени и моментом, соответствующим сингулярности начального Большого взрыва или конечного Большого хлопка, занимает конечный отрезок космического времени, за этот ограниченный период времени происходит бесконечное число событий. Бесконечная хаотическая последовательность казнеровских эпох и эр обессмысливает космическое время как меру космологической эволюции. На самом деле мы имеем бесконечную историю, которая отделяет нас от рождения Вселенной в Большом взрыве. Если в будущем нас ждёт сжатие Вселенной, завершающееся встречей с сингулярностью Большого хлопка [42, 43], то впереди нас всё ещё ждёт бесконечное число событий. Итак, колебательный режим приближения к космологической сингулярности БХЛ экранирует нас от Большого взрыва и Большого хлопка.

С математической точки зрения это означает, что в окрестности сингулярности естественным временны́м параметром является не космическое, а логарифмическое время. Пока космическое время пробегает от нулевого момента, соответствующего сингулярности, до некоего конечного момента времени t_1, логарифмическое время пробегает бесконечный временной интервал — от $-\infty$ до $\ln t_1$.

Примечательно, что комментарий относительно важности логарифмического времени можно найти уже в предпоследнем параграфе монографии Ландау и Лифшица [29]: "Последовательные серии колебаний сгущаются по мере приближения к особой точке. Между любым конечным моментом мирового времени t и моментом $t = 0$ заключено бесконечное множество колебаний. Естественной переменной для описания временно́го хода этой эволюции оказывается не само время t, а его логарифм, $\ln t$, по которому весь процесс приближения к особой точке растянут до $-\infty$".

Похожая идея высказана также в ранее цитировавшейся статье Дамура и Николаи [28]: «Нет никакого "квантового скачка", перекидывающего мост через брешь между входящей коллапсирующей и исходящей расширяющейся квазиклассической Вселенной. Вместо этого "жизнь продолжается" в сингулярности в течение *бесконечного аффинного времени*, с учётом того, что 1) динамика более не "имеет места" в пространстве и 2) бесконечное аффинное время (измеренное, скажем, с помощью зенононоподобной временно́й координаты) соответствует субпланковскому интервалу $0 < T < T_{\rm Planck}$ геометрического собственного времени». Любопытно, что аналогом объекта, который авторы [28] назвали зенононоподобным временем, является пространственная "черепашья" координата в геометрии Шварцшильда [44]. Оба эти названия происходят от парадокса Зенона об Ахиллесе и черепахе, который является, по-видимому, первым примером преобразования конечного временно́го интервала в бесконечный (см., например, раздел I третьей части третьего тома "Войны и мира" Льва Толстого [45]).

В заключение я хотел бы полушутя-полусерьёзно сказать, что открытие колебательного приближения к космологической сингулярности имеет практическое значение: оно освобождает нас от страха перед концом Света.

Эта работа была частично поддержана грантом РФФИ 08-02-00923 и грантом НШ-4899.2008.2.

Список литературы

1. Ландау Л Д, частное сообщение
2. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
3. Wilson K G, Kogut J "The renormalization group and the ε-expansion" *Phys. Rep.* **12** 75 (1974) [Вильсон К, Когут Дж *Ренормализационная группа и ε-разложение* (М.: Мир, 1975)]
4. Халатников И М, Каменщик А Ю *УФН* **168** 593 (1998) [Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu *Phys. Usp.* **41** 525 (1998)]
5. Халатников И М, Каменщик А Ю *УФН* **178** 639 (2008) [Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu *Phys. Usp.* **51** 609 (2008)]
6. Penrose R "Structure of space-time", in *Lectures in Mathematics and Physics, Battelle Rencontres, 1967* (Eds C M DeWitt, J A Wheeler) (New York: W.A. Benjamin, 1968)] p. 121 [Пенроуз Р *Структура пространства-времени* (М.: Мир, 1972)]
7. Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Univ. Press, 1973) [Хокинг С, Эллис Дж *Крупномасштабная структура пространства, времени* (М.: Мир, 1977)]
8. Hawking S W, Penrose R *Proc. R. Soc. London A* **314** 529 (1970)
9. Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **80** 391 (1963) [Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **6** 495 (1964)]
10. Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Adv. Phys.* **12** 185 (1963)
11. Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Phys. Rev. Lett.* **24** 76 (1970)
12. Лифшиц Е М, Халатников И М *Письма в ЖЭТФ* **11** 200 (1970) [Lifshitz E M, Khalatnikov I M *JETP Lett.* **11** 123 (1970)]
13. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **56** 1700 (1969) [Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **29** 911 (1969)]
14. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **102** 463 (1970) [Belinskii V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **13** 745 (1971)]
15. Belinskii V A, Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Adv. Phys.* **31** 639 (1982)
16. Misner C W *Phys. Rev. Lett.* **22** 1071 (1969)
17. Лифшиц Е М, Лифшиц И М, Халатников И М *ЖЭТФ* **59** 322 (1970) [Lifshitz E M, Lifshitz I M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **32** 173 (1971)]
18. Khalatnikov I M et al. *J. Stat. Phys.* **38** 97 (1985)
19. Demaret J, Henneaux M, Spindel P *Phys. Lett. B* **164** 27 (1985)
20. Demaret J et al. *Phys. Lett. B* **175** 129 (1986)

21. Demaret J, de Rop Y, Henneaux M *Int. J. Theor. Phys.* **28** 1067 (1989)
22. Kasner E *Am. J. Math.* **43** 217 (1921)
23. Damour T, Henneaux M *Phys. Rev. Lett.* **85** 920 (2000)
24. Damour T et al. *Phys. Lett. B* **509** 323 (2001)
25. Damour T, Henneaux M, Nicolai H *Class. Quantum Grav.* **20** R145 (2003)
26. Kac V G *Infinite Dimensional Lie Algebras* 3rd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
27. Henneaux M, Persson D, Spindel P *Living Rev. Rel.* **11** (1) (2008); http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2008-1/
28. Damour T, Nicolai H *Int. J. Mod. Phys. D* **17** 525 (2008)
29. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)]
30. Raychaudhuri A *Phys. Rev.* **98** 1123 (1955)
31. Raychaudhuri A *Phys. Rev.* **106** 172 (1957)
32. Komar A *Phys. Rev.* **104** 544 (1956)
33. Лифшиц Е М, Судаков В В, Халатников И М *ЖЭТФ* **40** 1847 (1961) [Lifshitz E M, Sudakov V V, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **13** 1298 (1961)]
34. Khalatnikov I M, Lifshitz E M, Sudakov V V *Phys. Rev. Lett.* **6** 311 (1961)
35. Грищук Л П *ЖЭТФ* **51** 475 (1966) [Grishchuk L P *Sov. Phys. JETP* **24** 320 (1967)]
36. Arnold V I, Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **20** 111 (1982)
37. Bini D, Cherubini C, Jantzen R T *Class. Quantum Grav.* **24** 5627 (2007)
38. Петров А З *Пространства Эйнштейна* (М.: ГИФМЛ, 1961) [Petrov A Z *Einstein Spaces* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
39. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **63** 1121 (1972) [Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **36** 591 (1973)]
40. Damour T "Cosmological singularities, billiards and Lorentzian Kac-Moody algebras", gr-qc/0412105
41. Belinski V "Cosmological singularity", arXiv:0910.0374
42. Kallosh R et al. *Phys. Rev. D* **66** 123503 (2002)
43. Alam U, Sahni V, Starobinsky A A *JCAP* (04) 002 (2003)
44. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973) [Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)]
45. Толстой Л Н *Война и мир* (М.: ЭКСМО, 2008) [Tolstoy L *War and Peace* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1983)]

PACS numbers: **01.65 + g, 02.30. – f, 03.65. – w**
DOI: 10.3367/UFNr.0180.201003i.0322

Поверх барьеров

(работы И.М. Халатникова о рассеянии частиц высоких энергий)

В.Л. Покровский

Сравнительно недавно, осенью 1957 г., мне выпала удача выступить на семинаре Ландау с докладом о работе по надбарьерному отражению частиц высоких энергий. Я тогда работал в Новосибирске, в Институте радиофизики, директором которого был один из моих учителей Ю.Б. Румер, познакомивший меня с Ландау. Моими соавторами были мои ровесники и друзья С.К. Саввиных и Ф.Р. Улинич [1, 2]. Отражение частиц с энергией, превосходящей высоту барьера, — сугубо квантовый эффект: классическая частица испытывает лишь замедление и ускорение вблизи вершины барьера. Мы решали уравнение Шрёдингера в квазиклассическом приближении, формально разлагая его в ряд по малому параметру λ/a, где λ — дебройлевская длина волны, a — характерный размер потенциала. Тонкость задачи, не замеченная другими теоретиками, работавшими над ней, состояла в том, что каждый последующий член ряда содержал сингулярность более высокого порядка, чем предыдущий, так что результативно они различались лишь универсальными численными факторами. Численный ряд удалось просуммировать, воспользовавшись точно решаемой задачей. Работа понравилась Ландау, и он поставил её на семинар. После семинара я познакомился со многими знаменитостями, которых до того знал лишь по публикациям и легендам. Но самый горячий интерес к работе проявил Исаак Маркович Халатников, предложивший лестное для меня сотрудничество. Свой интерес он объяснил поручением Ландау найти ошибку в работе Л. Шиффа на ту же тему. Объяснение звучало странно, так как ошибку мы уже нашли. Лишь потом я догадался, что на меня излилась горячая и совершенно бескорыстная симпатия И.М. ко всякому новичку-теоретику, появившемуся с интересной идеей, — свойство, которое сделало его впоследствии идеальным директором Института теоретической физики и позволило собрать в институте уникальную команду, быстро завоевавшую мировое признание. Я надеюсь, однако, что в наших отношениях был некоторый индивидуальный элемент, доказательством чему служит наша дружба и продолжительное научное сотрудничество, дотянувшееся до 1992 г. Наверное, оно могло продлиться и дольше, если бы его не прервали бурные события того времени. Наше быстрое сближение, необходимое для совместной работы, стало возможным благодаря другому редкостному качеству И.М.: полному отсутствию заносчивости и чинопочитания, простоте и спокойствию в общении.

Мы оба осознавали, что доложенная мною работа — только начало. Метод суммирования рядов, хотя он и привёл к красивому и нетривиальному результату, всё же был физически непрозрачным. Было непонятно, как обобщить его для сходных задач квантовой и классической механики. Размышляя об этом, мы пришли к следующей идее [3]. Классическая и квазиклассическая частица отражаются от точки поворота, в которой кинетическая энергия обращается в нуль. Если энергия частицы превосходит высоту барьера, то точка поворота отсутствует при любом вещественном значении координаты. Но она непременно появится в комплексной плоскости координаты, если потенциал является аналитической функцией. Выход в комплексную плоскость — довольно привычная операция в квантовой механике. Выход в комплексную плоскость импульса физически эквивалентен туннелированию, т.е. проникновению в область классически запрещённых координат. Подобно этому выход в комплексную плоскость координаты означает проникновение в область классически запрещённых импульсов. Таким образом, нужно найти подходящий путь в комплексной плоскости, вдоль которого волна доходит без отражения до комплексной точки поворота и сильно изменяется в её малой окрестности, а затем спуститься на вещественную ось и найти на ней отражённую волну. Практически эта программа была осуществлена, как показано на рис. 1. Путь начинается с вещественной оси координаты x при $x \to \infty$. В этой области, где потенциалом можно пренебречь, существует лишь прошедшая волна $\Psi \sim t \exp(ikx)$, где t — амплитуда прохождения. Путь далее поднимается в верхнюю комплексную полуплоскость до пересечения с