

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Образ неба другой вселенной, наблюдаемый через горловину кротовой норы

А.А. Шацкий

*Рассмотрена методика вычислений гравитационного линзирования для света, распространяющегося через кротовые норы (из одной вселенной в другую). Найдены принципиальные и характерные особенности в электромагнитном излучении, проходящем через кротовые норы. На основании этих особенностей предложены новые методы наблюдения характерных отличий кротовых нор от других объектов, а также методы определения характерных параметров для разных моделей кротовых нор.*

PACS numbers: 04.20.-q, 04.40.-b, 04.70.-s

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200908c.0861

**Содержание**

1. Введение (861).
  2. Уравнения Эйнштейна (861).
  3. Прохождение света через горловину (862).
  4. Заключение (863).
- Список литературы (864).

**1. Введение**

В последнее время в релятивистской астрофизике усилился интерес к работам, в которых обсуждаются решения с проходимыми кротовыми норами (КН). Этот интерес вызван, в частности, строительством и проектированием высокоточных радиоинтерферометров, которые позволят в будущем отличать КН от чёрных дыр.

В этой работе рассмотрено статичное и сферически-симметричное решение для КН, мало отличающееся от решения для чёрной дыры в предельном случае Рейснера – Нордстрема (см. [1, 2]). Как было показано в [3, 4], решение для КН при изменении параметров уравнения состояния материи может плавно переходить в решение с горизонтом предельного случая Рейснера – Нордстрема и КН становится непроходимой.

Свои экзотические свойства КН поддерживает за счёт фантомной материи, нарушающей нулевое энергетическое условие<sup>1</sup> и окружающей её горловину (см., например, [3, 5]).

**А.А. Шацкий.** Астрокосмический центр  
Физического института им. П.Н. Лебедева РАН,  
Профсоюзная ул. 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация  
Тел. (495) 333-33-66  
Факс (495) 333-23-78  
E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

Статья поступила 3 сентября 2008 г.,  
после доработки 17 октября 2008 г.

Практически интересным может быть случай малого отличия КН от электрически заряженной (или магнитно заряженной) предельной чёрной дыры Рейснера – Нордстрема с зарядом  $q$  (заряд  $q = m$  полностью определяет все свойства этой чёрной дыры<sup>2</sup>). В этом случае количество фантомной материи у КН можно сделать сколь угодно малым.

Уникальные свойства КН могут проявляться в особенностях в гравитационном линзировании (см., например, [6]). В данной работе предлагается методика вычисления подобных гравитационных эффектов для разных моделей КН, что в принципе позволит в будущем наблюдать КН и их особенности.

**2. Уравнения Эйнштейна**

Метрический тензор для статичной и сферически-симметричной КН запишем в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= \exp[2\phi(r)] dt^2 - \exp[\lambda(r)] dr^2 - r^2 d\Omega^2, \\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим материю с линейным уравнением состояния, когда связь плотности энергии  $\varepsilon$  с продольным давлением  $p_{\parallel}$  (вдоль радиуса) и с поперечным давлением  $p_{\perp}$  (перпендикулярно радиусу) определяется постоянным коэффициентом  $1 + \delta$

$$1 + \delta = -\frac{p_{\parallel}}{\varepsilon} = \frac{p_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Это условие состоит в выполнении неравенства (NEC):  $T_{ik}\zeta^i\zeta^k \geq 0$ , где  $T_{ik}$  — тензор энергии-импульса материи и  $\zeta^i$  — нулевой 4-вектор фотона. Физический смысл экзотичности фантомной материи, нарушающей условие NEC, состоит в возможности выбора такой системы отсчёта, в которой наблюдаемая плотность энергии будет отрицательна.

<sup>2</sup> В работе используется система единиц с  $c = 1$  и  $G = 1$ .

При  $\delta = 0$  тензор энергии-импульса, определяемый (1) и (2), соответствует тензору энергии-импульса статического (и сферически-симметричного) магнитного (или электрического) поля. Таким образом, добавление к тензору энергии-импульса слагаемого  $\delta$  приводит к добавке к радиальному магнитному полю чисто фантомной материи с  $\epsilon + p_{\parallel} < 0$  (без которой невозможно статичное существование КН).

Отметим, что, в отличие от чёрной дыры, никакого реального заряда  $q$  в КН нет: силовые линии монопольного магнитного поля в нашей вселенной входят в горловину КН и потом выходят из неё в другой вселенной, уходя затем на бесконечность.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{q}, & \exp(-\lambda) &\equiv 1 - \frac{y(x)}{x}, \\ \xi(x) &\equiv 8\pi\epsilon q^2, & z(x) &\equiv \left(1 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим штрихом производные по  $x$ . Соответствующие этой метрике уравнения Эйнштейна имеют вид<sup>3</sup>

$$8\pi\epsilon r^2 = \xi x^2 = -\exp(-\lambda)(1 - x\lambda') + 1, \quad (4)$$

$$8\pi p_{\parallel} r^2 = -(1 + \delta)\xi x^2 = \exp(-\lambda)(1 + 2x\phi') - 1, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 8\pi p_{\perp} r^2 &= (1 + \delta)\xi x^2 = \exp(-\lambda) \times \\ &\times \left( x^2\phi'' + x^2\phi'^2 - x\frac{\lambda'}{2} - x^2\phi'\frac{\lambda'}{2} + x\phi' \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Тождества Бианки ( $T_{l;k}^k \equiv 0$ ) содержатся в уравнениях Эйнштейна и имеют вид

$$(1 + \delta)(\ln \xi)' + 4(1 + \delta)(\ln x)' + \delta\phi' = 0. \quad (7)$$

Вводя определение радиуса горловины<sup>4</sup>  $r_0$  (или  $x_0$ ) у КН

$$x_0 \equiv y(x_0), \quad (8)$$

переписываем уравнения (4), (5) и (7) в следующем удобном виде

$$y(x) = x_0 + \int_{x_0}^x \xi x^2 dx, \quad (9)$$

$$[\ln(\xi x^4)]' = \frac{\delta}{2(1 + \delta)} \frac{\xi x(1 + \delta) - y/x^2}{1 - y/x}, \quad (10)$$

$$\exp[\phi(x)] = (\xi x^4)^{-(1+\delta)/\delta}. \quad (11)$$

При  $\delta = 0$  это решение переходит в решение для предельного случая Рейснера – Нордстрема:

$$\begin{aligned} y_{[\delta=0]}(x) &= 2 - \frac{1}{x}, & \xi_{[\delta=0]}(x) &= \frac{1}{x^4}, \\ \exp[\phi_{[\delta=0]}(x)] &= 1 - \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>3</sup> Вывод этих уравнений можно посмотреть, например, в [7, задача 5 к § 100].

<sup>4</sup> Горловиной КН является (по определению) минимально возможный радиус  $r$ , стоящий в квадрате перед угловым элементом  $d\Omega^2$  в метрике.

Постановкой задачи для вышеуказанных уравнений Эйнштейна является получение их решения в явном аналитическом виде в первом приближении по малой поправке  $\delta$  с последующим применением этого решения для расчёта гравитационного линзирования на КН.

В линейном приближении по  $\delta$  уравнение (10) переписывается в виде

$$\frac{\partial \ln(\xi x^4)}{\partial x} = -\delta \frac{\partial \ln z}{\partial x}. \quad (13)$$

Отсюда, с учётом необходимости совпадения на бесконечности величины  $\xi$  с величиной  $\xi_{[\delta=0]}$ , получаем приближённое решение

$$\begin{aligned} \xi x^4 &= z^{-\delta}, & y(x) &= x_0 + \frac{z^{1-\delta} - z_0^{1-\delta}}{1 - \delta} \quad \left( z_0 \equiv 1 - \frac{1}{x_0} \right), \\ \exp \phi &= z^{1+\delta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Связь радиуса горловины  $x_0$  с  $\delta$  определяется необходимостью совпадения асимптотик у функций  $\exp(-\lambda)$  и  $\exp(2\phi)$  при  $x \rightarrow \infty$

$$x_0 + \frac{1 - z_0^{1-\delta}}{1 - \delta} \rightarrow 2(1 + \delta). \quad (15)$$

Из этого трансцендентного уравнения определяется радиус горловины. Подробный анализ этого уравнения даёт асимптотику

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta = (x_0 - 1)^2. \quad (16)$$

При этом параметр  $\delta$  определяется уравнением состояния материи в КН.

Полученное решение при  $\delta > 0$  уже не соответствует чёрной дыре, так как метрический коэффициент  $\exp(2\phi)$  нигде не обращается в нуль (поскольку  $x_0 > 1$ ), поэтому горизонт отсутствует. Следовательно, это решение соответствует КН с горловиной при  $x = x_0$ .

Строго говоря, разложение в ряд по  $\delta$  не вполне корректно и прямая подстановка выражений (14) в уравнения (5) и (6) показывает это. Однако решение для КН можно искать обратным способом: в качестве компонент метрики  $\exp(2\phi)$  и  $\exp \lambda$  для КН использовать выражения (14), а выражения для  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  найти из (5) и (6). Такой подход не менее корректен, чем обычное решение уравнений Эйнштейна.

### 3. Прохождение света через горловину

Пусть в другой вселенной есть  $N$  звёзд одинаковой светимости,  $N \gg 1$ , и пусть все эти звёзды равномерно распределены по небесной сфере.

Наблюдатель в нашей вселенной, смотря через горловину КН на звёзды в другой вселенной, видит их неравномерное распределение в горловине. Это связано с тем, что горловина КН преломляет и искажает свет от этих звёзд. Очевидно, что эти искажения будут центрально-симметричны, с центром в центре горловины КН.

Пусть теперь наблюдатель смотрит только на часть этих звёзд, видимых ему через тонкое кольцо, центр которого находится в центре горловины, радиус кольца равен  $h$  и его толщина —  $dh$ . Тем самым наблюдатель обозревает телесный угол  $d\Omega$  неба другой вселенной,

причём  $d\Omega = 2\pi |\sin \theta| d\theta$ . Здесь  $\theta(h)$  — угол отклонения лучей света, проходящих через горловину КН, от своего прямолинейного распространения<sup>5</sup>. Так как полный телесный угол равен  $4\pi$ , то наблюдатель видит в этом кольце  $dN = N d\Omega / (4\pi)$  звёзд<sup>6</sup>. При этом видимая плотность звёзд (на единицу площади кольца  $dS = 2\pi h dh$ )  $J = dN/dS$ . Таким образом, получаем

$$J(h) = \frac{N |\sin \theta|}{4\pi h} \frac{dh}{dh}. \quad (17)$$

В работе [3] была получена следующая зависимость для  $\theta(h)$ :

$$\theta(h) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{h/q}{x^2 \sqrt{(1-y/x)(\exp(-2\phi) - h^2/(qx)^2)}} dx. \quad (18)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{2}{q} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\exp(-2\phi)}{x^2 \sqrt{1-y/x} [\exp(-2\phi) - h^2/(qx)^2]^{3/2}} dx. \quad (19)$$

Используя формулы (14), (17), (18) и (19), можно найти выражение для видимой плотности звёзд  $J(h)$  в кротовой норе.

Заметим, что из формулы (18) выводится максимально возможный прицельный параметр  $h = h_{\max}$ , при котором ещё можно увидеть звёзды из другой вселенной. Этот параметр ограничен нулём второго множителя в подкоренном выражении (18)

$$\exp(-2\phi) - \frac{h^2}{(qx)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{h}{q} \leq x \exp(-\phi). \quad (20)$$

Поэтому максимально возможное значение  $h$  соответствует минимально возможному значению  $x \exp(-\phi)$ . Проведя тривиальное исследование, получаем с помощью (14) при  $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{h_{\max}}{q} = 4 \times 2^\delta \approx 4. \quad (21)$$

Интеграл в уравнении (19) расходится, но полный угол отклонения фотона  $\theta_{\max}$  в (18) — конечен. Поэтому расходимость в (19) при  $h = h_{\max}$  связана с математически бесконечной плотностью звёзд в элементе телесного угла при  $h = h_{\max}$ . Эта математическая сингулярность не связана с физическими процессами, а устраняется при наблюдении этой области КН на любом физическом приборе, всегда имеющем конечное угловое разрешение, которое и определяет наблюдаемую плотность звёзд в элементе телесного угла (вместо (17)) вблизи  $h = h_{\max}$ .

Искажение лучей света, прошедших через горловину КН, приводит не только к перераспределению плотности звёзд, но и к изменению их видимой яркости следующим

<sup>5</sup> Прямолинейным распространением считается (по определению) прохождение луча через центр горловины КН.

<sup>6</sup> Так как угол отклонения света  $\theta$  может быть больше  $\pi$ , то и полный телесный угол оказывается больше  $4\pi$ , но эта замена сводится к другой константе (вместо  $4\pi$ ) и не влияет на итоговый результат.

образом: с увеличением прицельного параметра  $h$  яркость звезды меняется. Это связано с тем, что при увеличении радиуса кольца  $h$ , через которое проходит свет звезды, изменяется и элемент телесного угла, в который этот свет рассеивается. Соответствующее изменение яркости звезды пропорционально величине  $\kappa = dS/d\Omega$ . Поэтому полная яркость всех звёзд, видимых с единицы площади вышеописанного кольца, есть  $\kappa dN/dS$ .

При  $N \rightarrow \infty$  отдельных звёзд уже становится не видно — они размазываются из-за ограниченного углового разрешения наблюдательного прибора. Поэтому из равенства  $\kappa dN/dS = N/(4\pi)$  следует независимость от  $h$  средней яркости излучения, т.е. её однородность. При малых же значениях  $N$  в КН будут видны отдельные звёзды, т.е. будет отсутствие однородности.

Таким образом получаем, что при  $N \rightarrow \infty$  видимая яркость участка КН внутри её горловины не зависит от прицельного параметра и кротовая нора выглядит как однородное пятно во всех диапазонах длин волн света, независимо от модели КН. Причём этот результат универсален — он не зависит от выбора конкретной модели КН, важна лишь неотрицательность полной массы КН.

В связи с этим отметим, что в работе [8] был сделан ошибочный вывод о неоднородном наблюдении света из другой вселенной через горловину КН. В этой работе правильным математическим выражениям была дана неправильная физическая интерпретация.

#### 4. Заключение

Несмотря на полученный результат, из которого следует однородность распределения света в горловине КН для любых моделей КН, стоит отметить, что в реальной вселенной число видимых звёзд конечно (хотя и велико). Из этого следует, что если угловое разрешение прибора наблюдателя в нашей вселенной достаточно, то он сможет зафиксировать изменяющуюся плотность звёзд в горловине  $J(h)$ . Этот график для  $\delta = 0,001$  представлен на левой части рисунка. Острые минимумы на этом графике соответствуют нулям синуса в выражении (17). Дело в том, что лучи света при достаточно больших прицельных параметрах  $h \sim h_{\max}$  отклоняются на большие углы ( $\theta > \pi$ ), поэтому вблизи точек  $\theta = \pi n$  возникают резкие "провалы" в распределении. Однако вблизи таких "провалов" наблюдаемая яркость звёзд стремится

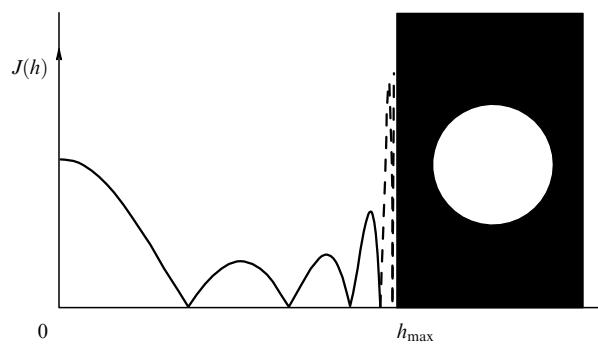


Рис. Зависимость  $J(h)$  при  $h \in (0, h_{\max})$  и  $\delta = 0,001$  (слева); видимое изображение неба другой вселенной через горловину КН при  $N \rightarrow \infty$  (справа).

к бесконечности (линзирование), что в итоге обеспечивает равномерный (в среднем) поток света через горловину КН, показанный на правой части рисунка.

Местоположение этих "провалов" зависит от величины  $\delta$ , поэтому с помощью их регистрации можно определять параметры уравнения состояния материи КН и характеристики её модели (аналогично тому, как это делается при расшифровке спектров света).

Таким образом, в данной работе предложена методика вычислений гравитационного линзирования для света, проходящего через кротовые норы, а также методика наблюдения отличительных особенностей конкретных моделей кротовых нор.

В заключение я хотел бы выразить благодарность В. Строкову, Н.С. Кардашеву и И.Д. Новикову за плодотворное обсуждение работы и высказанные ценные замечания.

Работа поддержана РФФИ, гранты 07-02-01128-а, 08-02-00090-а, научными школами НШ-626.2008.2, НШ-2469.2008.2 и программой РАН "Происхождение и эволюция звёзд и галактик 2008".

## Список литературы

1. Misner Ch W, Thorne K, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973) [Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* Т. 3 (М.: Айнштайн, 1997)]
2. Frolov V P, Novikov I D *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments* (Dordrecht: Kluwer, 1998)
3. Шацкий А А *Астрон. журн.* **81** 579 (2004) [Shatskii A A *Astron. Rep.* **48** 525 (2004)]
4. Шацкий А А, Новиков И Д, Кардашев Н С *УФН* **178** 481 (2008) [Shatskii A A, Novikov I D, Kardashev N S *Phys. Usp.* **51** 457 (2008)]
5. Vissler M *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (Baltimore: United Book Press, 1996)
6. Müller T *Phys. Rev. D* **77** 044043 (2008)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматлит, 1995) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1995)]
8. Шацкий А А *Астрон. журн.* **84** 99 (2007) [Shatskii A A *Astron. Rep.* **51** 81 (2007)]

## The sky of a universe as seen through a wormhole

**A.A. Shatskii**

*Astro-Space Center of the P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-495) 333-33 66. Fax (7-495) 333-23 78  
E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru*

A technique is discussed for calculating the gravitational lensing of light passing through the wormhole from one universe to another. Fundamental and characteristic features of wormhole traveling radiation are identified, leading to new methods for observing wormhole specific characteristics and yielding techniques for determining wormhole model parameters.

PACS numbers: **04.20.-q, 04.40.-b, 04.70.-s**

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200908c.0861

Bibliography — 8 references

Received 3 September 2008, revised 17 October 2008

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **179** (8) 861–864 (2009)

*Physics – Uspekhi* **52** (8) (2009)