

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Прямые наблюдения вязкости внешнего ядра Земли и экстраполяция измерений вязкости жидкого железа

Д.Е. Смайли, В.В. Бражкин, А. Палмер

Оценки вязкости внешнего жидкого ядра Земли весьма неоднозначны. Прямые наблюдения, как правило, дают значения на много порядков величины большие, чем экстраполяции результатов лабораторных экспериментов, дающие значения близкие к вязкости расплавленного железа при атмосферном давлении. Столь значительного несоответствия удалось избежать при экстраполяции лабораторных измерений с помощью активационной модели Аррениуса. Эта модель широко использовалась ранее, но в предположении, что активационный объем не зависит от давления. Новые исследования показывают, что при большом давлении этот объем быстро возрастает, приводя к значениям 10^2 Па с на поверхности жидкого ядра и 10^{11} Па с на его нижней границе. Такая экстраполяция сопряжена с большой неопределенностью. В статье рассматривается метод определения вязкости на поверхности внешнего ядра, основанный на наблюдениях затуханий свободной нутации земного ядра, который дает величину $2,371 \pm 1,530$ Па с, и метод определения вязкости на его нижней границе, основанный на наблюдениях за уменьшением вращательного "расщепления" двух экваториальных трансляционных составляющих колебаний твердого внутреннего ядра, в среднем дающий значения $1,247 \pm 0,035 \times 10^{11}$ Па с. Ввиду хорошего согласия экстраполяции Аррениуса с реальностью используется дифференциальная форма активационной модели Аррениуса для проведения интерполяции по кривой температуры плавления и построения профиля вязкости на всю глубину внешнего ядра. Вариация вязкости оказывается близкой к логарифмической между ее граничными значениями, полученными из наблюдений.

PACS numbers: 66.20.-d, 91.35.-x, 93.85.-q

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200901d.0091

От редакции. Вопросы геофизики не принадлежат к числу проблем, которые УФН может освещать регулярно и посвящать им заметную часть своего объема. Физика изучает в основном простые объекты на основе хорошо воспроизводимых экспериментов и достоверных теоретических моделей. Напротив, Земля — это очень сложный объект. Информация о ее внутренней структуре добывается из результатов наблюдений, интерпретация которых зависит от принятой модели, справедливость которой для сложной системы не очевидна. Вместе с тем проблемы геофизики (структура Земли, ее эволюция,

прогноз катастрофических событий и многие другие) очень интересны всем. Публикуя статью и дискуссию, мы хотели познакомить читателей УФН с одной из актуальных проблем геофизики и подчеркнуть (на примере оценок вязкости жидкого ядра Земли) как сложность объекта, так и отсутствие общепринятой точки зрения даже среди ведущих специалистов в этой области. Дискуссию в настоящий момент считаем завершенной. В ближайшем будущем публиковать статьи на эту тему в УФН не предполагается.

Содержание

1. Введение (91).
2. Вязкость на поверхности внешнего ядра (93).
3. Вязкость на нижней границе внешнего ядра (96).
4. Профиль вязкости внешнего ядра (99).
5. Заключение (99).
6. Приложения (101).
А. Пограничные слои Экмана и диссипация энергии. Б. Вязкостное взаимодействие с внутренним ядром и оболочкой.

Список литературы (105).

Д.Е. Смайли. Department of Earth and Space Science and Engineering, York University,
4700 Keele Street, Toronto, Ontario, M3J 1P3, Canada
Tel. (416) 736-2100, ext. 66438. Fax (416) 736-5817
E-mail: doug@core.yorku.ca
В.В. Бражкин. Институт физики высоких давлений РАН,
142190 г. Троицк, Московская обл., Российская Федерация
Тел. (495) 751-00-11. Факс (495) 751-00-12
E-mail: brazhkin@hppi.troitsk.ru
А. Палмер. Sander Geophysics Ltd.,
260 Hunt Club Road, Ottawa, Ontario, K2P 1K2, Canada
E-mail: palmer@core.yorku.ca

Статья поступила 16 января 2008 г.,
после доработки 4 августа 2008 г.

1. Введение

Свойства глубоких недр Земли, такие как упругость, плотность, давление и сила тяжести традиционно опре-

делялись на основе анализа результатов сейсмического зондирования. Хотя эти свойства сыграли важную роль в объяснении внутренней структуры Земли, для понимания динамики жидкого ядра и механизма генерации геомагнитного поля решающее значение имеет величина вязкости жидкого ядра. Однако оценки этой величины расходятся на много порядков [1]. Прямые наблюдения, как правило, дают гораздо более высокие пределы вязкости [2, 3], чем большинство теоретических оценок [4–7] и экстраполяций экспериментальных результатов в области высоких давлений и температур [8–13]. Размеры этого несоответствия наглядно предстают в таблицах Секко [14]. Секко делит оценки вязкости на несколько категорий: полученные из геодезических исследований, достигающие значений порядка 10^{11} Па с, полученные из кратковременных сейсмологических исследований, достигающие порядка $8,6 \times 10^{11}$ Па с, полученные из результатов изучения магнитного поля, достигающие порядка $2,7 \times 10^7$ Па с, и наконец, предсказываемые теорией жидких металлов, находящиеся в пределах от $2,5 \times 10^{-3}$ Па с до 50 Па с. Расхождение между теорией и результатами наблюдений составляет 14 порядков!

Отклонение от неправдоподобно низких значений вязкости обнаруживается при экстраполяции результатов лабораторных экспериментов [15, 16] с использованием активационной модели Аррениуса. Эта модель широко использовалась ранее [13–17], но при этом подразумевалось, что активационный объем почти не зависит от давления. Однако из измерений среднего размера кристалликов в образцах железа, мгновенно охлажденных из расплавов, а также из анализа данных о поведении молекулярных жидкостей следует [15, 16], что активационный объем значительно зависит от давления, что приводит к оценкам вязкости $\sim 10^2$ Па с на поверхности жидкого ядра и $\sim 10^{11}$ Па с — на девять (!) порядков больше — на его нижней границе, хотя необходимо подчеркнуть, что неопределенности таких экстраполяций очень велики.

Необычные свойства вещества в глубинах внешнего ядра Земли были замечены уже давно. Так, в 1926 г. Джейфри [18] высказал предположение о существовании в ядре значительного отрицательного градиента скорости распространения волн сжатия. Хотя теперь считается, что этот градиент в ядре мал, но все же положителен, возможно, из-за наличия твердых включений, которые и замедляют волны сжатия [19], его свойства остаются предметом догадок. Блот [20] даже предлагает новую сейсмическую fazу, РKhКР, порождаемую отражениями от нижних слоев внешнего ядра. В этой статье мы рассматриваем два метода прямого измерения вязкости внешнего ядра: один метод дает значение вязкости на его поверхности, другой — на нижней границе. Оба значения, полученные с помощью этих методов, находятся в согласии с граничными значениями, вытекающими из экстраполяций Аррениуса [15, 16].

Внешнее жидкое ядро Земли может свободно двигаться, вращаясь вокруг оси отличной от оси вращения всей остальной части планеты, — это явление называется свободной нутацией земного ядра. В первом исследовании свободной нутации ядра, проведенном Пуанкаре [21], жидкое ядро считалось несжимаемым, однородным, не подверженным самогравитации, лишенным внутреннего тела и окруженным недеформируемой оболочкой из мантии и коры. Такая модель давала сильную

долгопериодическую обратную свободную нутацию земного ядра (retrograde free core nutation, RFCN) и связанное с ней почти суточное свободное колебание (nearly diurnal free, retrograde Wobble, NDFW). Отношение периодов нутации и этого колебания близко к отношению их амплитуд. Модель Пуанкаре прекрасно описывает лабораторные эксперименты с жидкостями, заключенными во вращающиеся вокруг закрепленных осей сосуды [22], но ее сходство с действительными недрами Земли, в которых все вращение свободно, имеется внутреннее тело, жидкость является сжимаемой, расслоенной и самогравитирующей, а поверхности деформируются, является очень отдаленным. Основное уравнение при этом становится субсейсмическим, а не инерционным волновым уравнением [23]. Свободная нутация ядра описывается субсейсмическим волновым уравнением как процесс, близкий к чистому вращению по отношению к оболочке — мантии и коре [24–26]. Таким образом, движение в земной системе координат напоминает перекрученный режим инерционного волнового уравнения. Некоторые основные черты слоев Экмана на двух границах в глубине Земли на самом деле напоминают перекручивание, но авторы предыдущих теорий не дают детальных расчетов, а приводят только результаты — похоже, их смущает изречение Гринспена, гласящее, что "расчет эффектов вязкости ... хотя и трудоемок, но не замысловат" [27]. Мы же приводим все детали анализа слоев Экмана на обеих границах вне зависимости от инерционного волнового уравнения, а также детальные вычисления вязкостного взаимодействия между внешним и внутренним ядрами и их соответствующими оболочками в приложениях А и Б. Насколько нам известно, подобные детали ещё никто не публиковал. Явные математические выражения получены для величин обратных добротности Q (равной энергии движения, отнесённой к затуханию энергии на 1 рад) на обеих границах и для вращающих моментов вязкостного взаимодействия между внешним ядром и его оболочкой, а также между внешним и внутренним ядрами. Внутреннее ядро оказывается сильно связанным с нутацией внешнего ядра.

Внешнее ядро является генератором магнитного поля Земли. Поэтому следует также учитывать электромагнитные эффекты. При движениях с длинами волн, намного превышающими эффективную глубину электромагнитного проникновения, осцилляции ядра можно рассматривать как чисто механическое явление [28, 29]. Аргументы, основанные на масштабных соображениях, показывают, что при таких движениях сила Лоренца на много порядков меньше, чем сила Кориолиса [30], и электромагнитная связь оказывается чрезвычайно слабой [31, 32]. Тем не менее Баффит с коллегами [33] утверждают, что электромагнитная связь может играть важную роль в возбуждении и демпфировании свободной нутации земного ядра. Эти исследователи предполагают существование в нижней мантии высокопроводящего слоя с двухсотметровой толщиной и проводимостью 5×10^5 См m^{-1} , в отличие от обычно принимаемого значения 100 См m^{-1} . Столь резкий скачок в проводимости скрыл бы все наблюдаемые (вековые) вариации, как это было изначально указано Рункорном [34] (см. детальное рассмотрение в [35]). Конечная временная константа определяется среднеквадратичным значением проводимости [36], и двухсотметровый

слой с проводимостью 10^8 См полностью скрыл бы все вековые вариации.

Вариационные расчеты режимов колебаний и нутации в правдоподобных моделях Земли, проведённые Джинантом [24] с использованием в качестве вспомогательных функций бикубических сплайнов, привели к открытию второй прямой свободной нутации земного ядра (prograde free core nutation, PFCN), в дополнение к классической обратной (RFCN), обнаруженной Пуанкаре. В земной системе координат малейшее возмущение периода почти суточного свободного колебания приводит к обратной нутации, что, вероятно, вызвано кориолисовым расщеплением вращательной деформации оболочки. Этот второй режим нутации ранее был обнаружен при изучении реакции Земли на принудительное побуждение к нутации [37, 38]. Но в то время серии данных наблюдений нутации с помощью радиointерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ) являлись ещё слишком короткими для того, чтобы на их основе можно было прийти к каким-либо заключениям с приемлемой степенью достоверности, и заявлений о наблюдательном подтверждении не делалось.

В последнее время были проанализированы нутационные серии РСДБ Годдардского центра космических полетов (GSFC) и Морской обсерватории США (USNO), охватывающие период более двадцати трех лет [39]. Как следует из этих данных, и прямая, и обратная нутация почти свободно затухают. Четырнадцать последовательных спектральных оценок по времени, которые использовались для определения скорости затухания, вместе с анализом слоев Экмана на обеих границах дают среднее значение вязкости на поверхности внешнего ядра ($2,371 \pm 1,530$) Па с, которое немного выше, чем экстраполированное значение [15, 16], но гораздо ниже средней величины для ядра, полученной Девисом и Вейлером [3].

Второй метод прямого измерения, который определяет значения вязкости на нижней границе внешнего жидкого ядра, основан на изучении свободных трансляционных составляющих осцилляции твердого внутреннего ядра. Плотность его поверхности примерно на $1,2 \times 10^3$ кг м⁻³ больше, чем плотность окружающей жидкости. Внутреннее ядро, которое удерживается в своем центральном положении относительно слабой силой тяжести, может совершать свободные трансляционные колебания или маятниковые покачивания. Такие покачивания, впервые описанные Л. Слихтером [40], иногда называются модами Слихтера. При вращении Земли сила Кориолиса расщепляет их на три составляющих: первая из них направлена по оси вращения, а вторая, ориентированная с запада на восток, и третья, имеющая обратное направление, лежат в экваториальной плоскости. Анализ результатов многочисленных долговременных наблюдений, проводимых с помощью сверхпроводящих гравиметров по всему миру [41–43], даёт периоды $3,5822 \pm 0,0012$ ч для обратной экваториальной составляющей, $3,7656 \pm 0,0015$ ч для осевой и $4,0150 \pm 0,0010$ ч для прямой. Вязкость уменьшает вращательное расхождение экваториальных составляющих, тогда как на осевую составляющую почти не оказывает влияния. Таким образом, имеются два способа измерения вязкости. По уменьшению расхождения обратной и прямой экваториальной составляющих находятся соответственно значения вязкости $1,190 \pm 0,035 \times 10^{11}$ Па с

и $1,304 \pm 0,034 \times 10^{11}$ Па с, что в среднем даёт $1,247 \pm 0,035 \times 10^{11}$ Па с. Ввиду огромных расхождений между результатами экстраполяции и наблюдений в прошлом, такое сходство экстраполяции Аррениуса [15, 16] с действительностью представляется воистину замечательным.

2. Вязкость на поверхности внешнего ядра

В правдоподобных моделях Земли вариационные расчеты Джинанга [24], выполненные по методу конечных элементов, обнаруживают два вида свободной нутации ядра. В дополнение к классической обратной нутации (RFCN) появляется прямая (PFCN). Эти нутации наглядно предстают в моделях Пуансона, где малый конус в течение звёздных суток прокатывается без проскальзывания по большому конусу, как показано на рис. 1.

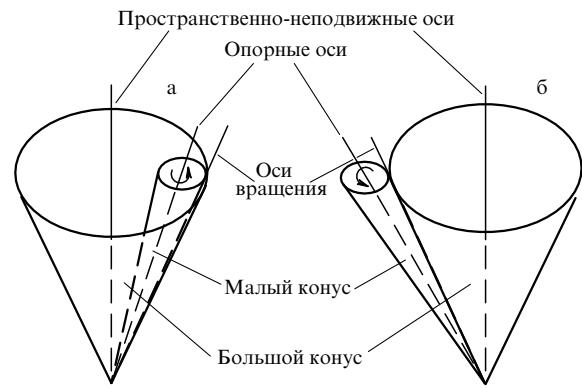


Рис. 1. Модели Пуансона свободных нутаций ядра: (а) обратная нутация, (б) прямая нутация. В каждой из них малый конус прокатывается один раз в звездные сутки без проскальзывания по большому космическому конусу. Линия контакта конусов является текущей осью вращения Земли.

В системе координат, связанной с Землей (земной шкале отсчета), оба вида нутации проявляются в виде примерно ежесуточных обратных колебаний. Колебание, связанное с обратной нутацией, является немного более быстрым, чем связанное с прямой нутацией. Амплитуда обратной нутации a_N и амплитуда колебания a_W связаны соотношением $a_N/a_W - 1 = -\Omega/\sigma_N$, где Ω — угловая скорость вращения Земли, σ_N — угловая частота нутации. Для прямой нутации справедливо аналогичное соотношение: $a_N/a_W + 1 = \Omega/\sigma_N$.

В работе [39] на основании анализа нутационных серий РСДБ GSFC и USNO более чем двадцатирёллетней протяженности делается вывод о том, что и прямая, и обратная нутации являются свободно затухающими. Серия GSFC длится с 3 августа 1979 г. по 6 марта 2003 г., охватывая 8617 дней, а серия USNO — с 3 августа 1979 г. по 29 марта 2003 г., охватывая 8631 день. Для детального изучения затуханий, каждая серия была подразделена на 2000-суточные сегменты, перемещающиеся вперед по оси времени с 400-суточным шагом. Спектральные плотности оценивались в каждом из четырех последовательных 2000-суточных сегментов. В результате были получены спектральные оценки на 1600-е сутки от начала отсчета и через каждые

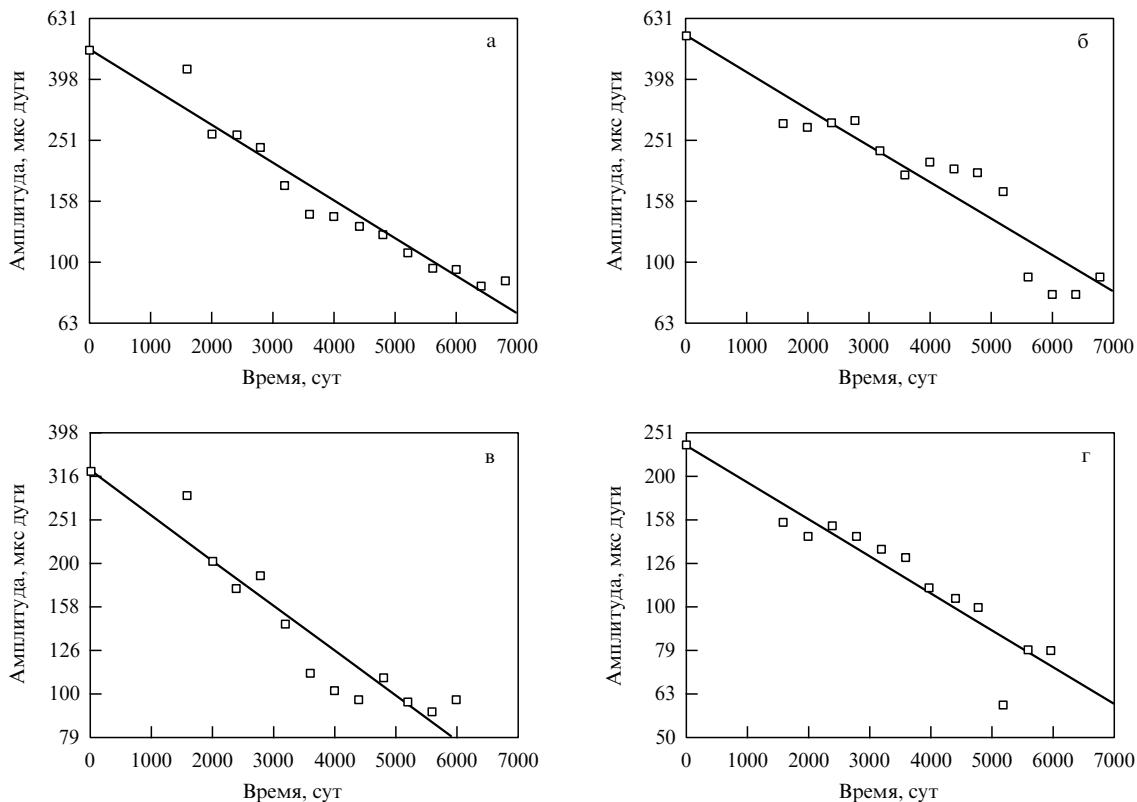


Рис. 2. Амплитуды свободных нутаций ядра, представленные в логарифмической шкале как функции от времени: обратная нутация ядра из серии GSFC (а) и серии USNO (б), прямая нутация из GSFC (в) и USNO (г). Показаны линейные осреднения в зависимости от времени вместе со значениями, экстраполированными для начального времени.

Таблица 1. Приведенные параметры затухания свободной нутации земного ядра

		$c, 10^{-4} \text{ сут}^{-1}$	d	$a_{N_0}, \text{ мкс дуги}$	$T_N, \text{ сут}$	Q_N	Q_W	$t_{1/2}, \text{ сут}$
RFCN	GSFC	-1,23909 ±0,1006	2,69740	498,20	-440,865 ±31,519	26,404 ±4,031	11,068 ±2,481	2,429
	USNO	-1,20360 ±0,1486	2,74547	556,51	-410,147 ±17,706	27,444 ±4,573	11,394 ±2,390	2,501
PFCN	GSFC	-1,03217 ±0,1461	2,51192	325,03	474,308 ±86,578	34,052 ±11,036	13,221 ±6,698	2,916
	USNO	-0,85237 ±0,1236	2,37147	235,22	444,847 ±74,677	41,356 ±12,939	16,009 ±7,696	3,532

последующие 400 суток. Зависимость спектральных амплитуд от времени показана на рис. 2.

При свободном затухании логарифм нутационной амплитуды a_N уменьшается линейно со временем:

$$\log a_N = ct + d, \quad (1)$$

где

$$c = \pm \frac{\pi \log e}{Q_N T_N} = -\frac{\log e}{\tau}, \quad d = \log a_{N_0}, \quad (2)$$

$$t_{1/2} = \tau \ln 2, \quad (3)$$

T_N — период нутации (отрицательный для обратной нутации и положительный для прямой), Q_N — явная добротность нутации для N -го цикла в небесной системе координат, a_{N_0} — амплитуда в начальный момент $t = 0$, τ — время е-свертки, $t_{1/2}$ — полупериод затухания. Знак плюс в правой части (2) относится к обратной нутации, а минус — к прямой.

Действительная физическая диссипация имеет место в земной шкале отсчета вследствие почти ежесуточных обратных колебаний и равняется реальной добротности нутаций в земной системе координат Q_W , которая связана с видимой нутацией Q_N как

$$Q_W = \pm \left(1 - \frac{T_N}{T_s} \right) Q_N, \quad (4)$$

где T_s — продолжительность звёздных суток, и оказывается равной

$$Q_W = -\frac{\pi \log e}{c T_s} \left(1 - \frac{T_s}{T_N} \right). \quad (5)$$

Результаты регрессии по логарифму амплитуды нутации (1) приведены в табл. 1.

В правдоподобных моделях Земли с двумя видами свободной нутации ядра ассоциируются почти ежесуточные обратные колебания, которые близки к простым

вращениям относительно оболочки из мантии и коры и относительно внутреннего ядра [24–26]. Их угловые частоты приближаются к $-\Omega$ — значению угловой скорости вращения Земли с противоположным знаком. В сферических координатах (r, θ, ϕ) поле скорости близко к

$$\mathbf{v} = -\mathbf{\Theta}Ar \sin(\phi + \Omega t) - \mathbf{\Phi}Ar \cos \theta \cos(\phi + \Omega t), \quad (6)$$

для почти ежесуточного колебания с амплитудой A .

В предположении, что толщина пограничных слоёв мала по сравнению с радиусом, уравнения первого порядка для пограничного слоя в θ - и ϕ -компонентах его добавочной скорости (v_θ, v_ϕ) выражаются в виде [44, 45]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - 2\Omega v_\phi \cos \theta &= v \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + 2\Omega v_\theta \cos \theta &= v \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где v — кинематическая вязкость.

Детальное решение уравнений (7) и расчёты скоростей диссипации энергии в каждом пограничном слое внешнего ядра приводятся в приложении А. Из уравнения (85) (см. приложение А) следует, что скорость диссипации энергии в каждом пограничном слое равна

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{35} \rho_0 A^2 r_0^4 \sqrt{2v\Omega} (9\sqrt{3} + 19), \quad (8)$$

где ρ_0 — плотность, A — амплитуда, r_0 — радиус границы. Суммарная энергия, рассеиваемая в обоих пограничных слоях за цикл, имеет вид

$$\begin{aligned} E = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{dE}{dt} &= \frac{2}{35} \pi^2 (\rho_0(a) A_a^2 a^4 \sqrt{v_a} + \rho_0(b) A_b^2 b^4 \sqrt{v_b}) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2}{\Omega}} (9\sqrt{3} + 19), \end{aligned} \quad (9)$$

где A_a — амплитуда почти ежесуточного обратного колебания внешнего ядра относительно внутреннего, A_b — амплитуда его колебания относительно оболочки, $\rho_0(a)$ и v_a — соответственно плотность и кинематическая вязкость прямо над границей внутреннего ядра (ICB) (при $r_0 = a$), $\rho_0(b)$ и v_b — плотность и кинематическая вязкость сразу под границей между ядром и мантией (CMB) (при $r_0 = b$). Реальная добротность Q_W почти ежесуточных колебаний, сопровождающих свободную нутацию ядра, определяется как 2π , умноженное на отношение суммарной энергии к энергии E , рассеянной за цикл. Суммарная энергия движения приблизительно равна

$$\frac{1}{2} I_{oc} A^2, \quad (10)$$

где $I_{oc} = 911,79 \times 10^{34}$ кг м² — момент инерции внешнего ядра. Тогда величина, обратная общей добротности, равняется сумме величин, обратных эффективным добротностям на двух границах:

$$\frac{1}{Q_W} = \frac{1}{Q_a} + \frac{1}{Q_b}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{Q_a} = \frac{2\pi\rho_0(a)a^4 \sqrt{2v_a/\Omega} (9\sqrt{3} + 19)}{35I_{oc}}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{Q_b} = \frac{2\pi\rho_0(b)b^4 \sqrt{2v_b/\Omega} (9\sqrt{3} + 19)}{35I_{oc}}. \quad (13)$$

Пренебрегая возмущением вращения оболочки и обозначая амплитуду почти ежесуточного колебания внешнего ядра как B , а внутреннего как C , имеем

$$A_b = B, \quad A_a = B - C.$$

Детальный расчет вязкостных вращающих моментов, обусловленных влиянием внешнего ядра на внутреннее и на оболочку, приведен в приложении Б. Из уравнений (103) и (104) (см. приложение Б), пренебрегая незначительным влиянием резонанса Чандлера, получаем уравнения движения внешнего ядра,

$$\begin{aligned} \gamma_a \exp(-i\Omega t) (C - B) - \gamma_b \exp(-i\Omega t) B &= \\ = I_{oc} (\dot{B} - i\Omega B) \exp(-i\Omega t), \end{aligned} \quad (14)$$

и внутреннего ядра,

$$-\gamma_a \exp(-i\Omega t) (C - B) = I_{ic} (\dot{C} - i\Omega C) \exp(-i\Omega t), \quad (15)$$

где I_{ic} — момент инерции внутреннего ядра, константы γ_a и γ_b определены в приложении Б (см. выражения (103), (104)). Уравнения (14) и (15) образуют систему линейных однородных дифференциальных уравнений. Для временной зависимости $\exp(\lambda t)$ эта система принимает вид

$$\begin{pmatrix} \lambda - i\Omega + \frac{\gamma_a + \gamma_b}{I_{oc}} & -\frac{\gamma_a}{I_{oc}} \\ -\frac{\gamma_a}{I_{ic}} & \lambda - i\Omega + \frac{\gamma_a}{I_{ic}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

с характеристическим уравнением

$$\lambda'^2 + \left(\frac{1 + \gamma_b/\gamma_a}{I_{oc}} + \frac{1}{I_{ic}} \right) \gamma_a \lambda' + \frac{\gamma_a \gamma_b}{I_{oc} I_{ic}} = 0, \quad (17)$$

где $\lambda' = \lambda - i\Omega$.

Из (103), (104) следует

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_a} = \frac{\rho_0(b)b^4 \sqrt{v_b}}{\rho_0(a)a^4 \sqrt{v_a}} = \frac{1}{117,4}, \quad (18)$$

для отношения плотностей 0,8069, отношения радиусов 2,8668 и отношения квадратных корней кинематических вязкостей 1/6400. С точностью до первого порядка малой величины γ_b/γ_a корни характеристического уравнения равняются

$$\lambda'_1 = \frac{\gamma_b}{I_{ic}}, \quad \lambda'_2 = -\frac{I_{ic}}{I_{oc} I_{ic}} \gamma_a - \frac{I_{ic}}{I_{oc} I_{ic}} \gamma_b, \quad (19)$$

где $I_c = I_{oc} + I_{ic}$ — момент инерции всего ядра. Допустимыми решениями системы уравнений (16), таким образом, являются линейные комбинации

$$B \exp(-i\Omega t) = \alpha \exp(\lambda'_1 t) + \beta \exp(\lambda'_2 t), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C \exp(-i\Omega t) &= \left(1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \frac{I_{ic}}{I_{oc}} \right) \alpha \exp(\lambda'_1 t) - \\ &- \left(\frac{I_{oc}}{I_{ic}} - \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \frac{I_{oc}}{I_{ic}} \right) \beta \exp(\lambda'_2 t), \end{aligned}$$

где α, β — произвольные численные коэффициенты. Времена затухания двух решений соответственно

равны

$$\tau_1 = \frac{I_c}{\operatorname{Re} \gamma_b}, \quad (21)$$

$$\tau_2 = \frac{I_{oc} I_{ic}}{I_c \operatorname{Re} \gamma_a + I_{ic} \operatorname{Re} \gamma_b}, \quad (22)$$

где

$$\operatorname{Re} \gamma_a = \pi \rho_0(a) a^4 \sqrt{v_a \Omega} \frac{\sqrt{2}}{35} (9\sqrt{3} + 19), \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} \gamma_b = \pi \rho_0(b) b^4 \sqrt{v_b \Omega} \frac{\sqrt{2}}{35} (9\sqrt{3} + 19). \quad (24)$$

С точностью до первого порядка малой величины γ_b/γ_a отношение времен затухания выражается как

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{I_{oc} I_{ic}}{I_c^2} \frac{\operatorname{Re} \gamma_b}{\operatorname{Re} \gamma_a} = \frac{I_{oc} I_{ic}}{I_c^2} \frac{\gamma_b}{\gamma_a}. \quad (25)$$

При $I_{oc} = 911,79 \times 10^{34}$ кг м², $I_{ic} = 6,16 \times 10^{34}$ кг м² и, следовательно, $I_c = 917,95 \times 10^{34}$ кг м² имеем $\tau_2/\tau_1 = 1/17613$. Таким образом, второе решение быстро затухает, и у нас остается

$$C = \left(1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \frac{I_{ic}}{I_c} \right) B, \quad (26)$$

$$B - C = - \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \frac{I_{ic}}{I_c} B. \quad (27)$$

Из выражения (85) тогда находим суммарную скорость диссипации энергии на обеих границах:

$$\frac{dE}{dt} = \pi \rho_0(b) A_b^2 b^4 \sqrt{v_b \Omega} \frac{\sqrt{2}}{35} (9\sqrt{3} + 19) \left[1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \left(\frac{I_{ic}}{I_c} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

Энергия, рассеиваемая за цикл, равняется

$$E = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{dE}{dt} = \frac{2}{35} \pi^2 \rho_0(b) A_b^2 b^4 \sqrt{\frac{2v_b}{\Omega}} (9\sqrt{3} + 19) \times \\ \times \left[1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \left(\frac{I_{ic}}{I_c} \right)^2 \right]. \quad (29)$$

Полная энергия движения выражается в виде

$$T = \frac{1}{2} I_{oc} A_b^2 + \frac{1}{2} I_{ic} \left(1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \frac{I_{ic}}{I_c} \right)^2 = \frac{1}{2} I_c \left[1 + 2 \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \left(\frac{I_{ic}}{I_c} \right)^2 \right] A_b^2 \quad (30)$$

с точностью до первого порядка малой величины γ_b/γ_a . С такой же точностью добротность колебания можно записать как

$$Q_W = \frac{2\pi T}{E} = \frac{35 I_c [1 + \gamma_b/\gamma_a (I_{ic}/I_c)^2]}{2\pi \rho_0(b) b^4 \sqrt{2v_b/\Omega} (9\sqrt{3} + 19)}. \quad (31)$$

Наконец, с точностью до первого порядка величины вязкость, полученная из наблюдаемой величины Q_W почти ежесуточного обратного колебания, равняется

$$v_b = \frac{1225 I_c^2 \Omega [1 + 2\gamma_b/\gamma_a (I_{ic}/I_c)^2]}{8\pi^2 \rho_0^2(b) b^8 (9\sqrt{3} + 19)^2 Q_W^2}. \quad (32)$$

Из выражения (32) мы видим, что внутреннее ядро сильно связано с внешним ядром и его движением и что поправка на диссипацию в нижнем пограничном слое, представленная в (32) выражением в квадратных скобках в числителе, отличается от единицы только на $3,8 \times 10^{-7}$ и ею можно пренебречь.

Используя выражение (32) и значения Q_W из табл. 1, мы получаем значения вязкости 3038 ± 1362 Па с для обратной нутации из серии GSFC и 2866 ± 1203 Па с из серии USNO, а также 2129 ± 2157 Па с для прямой нутации из серии GSFC и 1452 ± 1396 Па с из серии USNO. Тогда среднее значение динамической вязкости составляет 2371 ± 1530 Па с, а значению плотности $9,82 \times 10^3$ кг м⁻³ на поверхности ядра соответствует кинематическая вязкость $0,2414 \pm 0,1558$ м² с⁻¹.

3. Вязкость на нижней границе внешнего ядра

Вязкость F-слоя, расположенного на нижней границе внешнего ядра [46, 47], может быть определена по уменьшению во вращательном расщеплении двух экваториальных поступательных колебаний внутреннего ядра. Поступательные колебания обнаруживаются в так называемом Продукте Спектр из наблюдений всемирной сети сверхпроводящих гравиметров [41–43]. На рисунке 3 показаны три трансляционных колебательных резонанса, обнаруженные в Спектре из наблюдений в Бад Хомбурге (24272 часа), Брюсселе (83892 часа), Кентли (32992 часа) и Страсбурге (78504 часа). Резонансы и прямого, и осевого колебания определены с доверительным уровнем, значительно превышающим 95 % С.И., а обратного — с немногим более низким (см. рис. 8б из [42]).

Гораздо более жесткая проверка значимости возникает при рассмотрении действующего на внутреннее

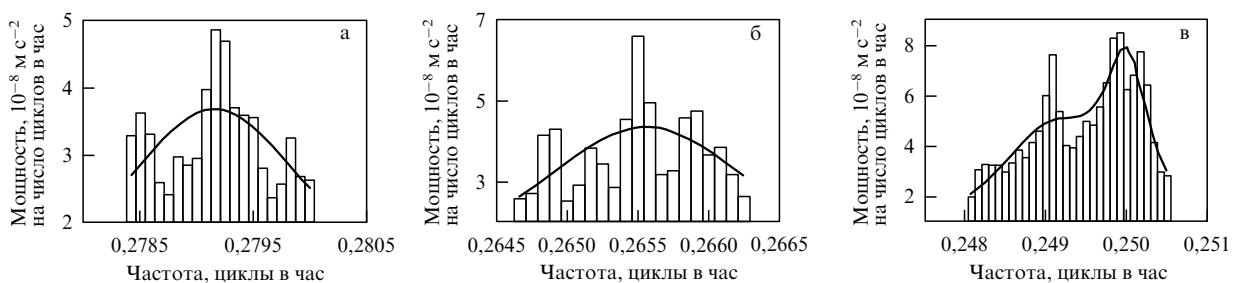


Рис. 3. Спектры обратного экваториального (а), осевого (б) и прямого экваториального (в) трансляционных колебаний внутреннего ядра. Прямое экваториальное колебание, близкое к значительной спектральной особенности, порождаемой приливом от солнечного нагрева S_6 , имеет в точности шесть циклов за солнечные сутки. Полученные центральные периоды составляют соответственно $3,5822 \pm 0,0012$ ч, $3,7656 \pm 0,0015$ ч и $4,0150 \pm 0,0010$ ч.

ядро торможения, вызываемого давлением и вязкостью [47], что приводит к уравнению расщепления следующего вида:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 + 2g^v \frac{T_0}{T_s} \left(\frac{T}{T_0}\right) - 1 = 0, \quad (33)$$

где T — период, T_0 — начальный период, T_s — продолжительность звёздных суток, g^v — безразмерный параметр вязкостного расщепления. Для осевого колебания этот параметр связан с параметром невязкого расщепления g^i как

$$g^v = g^i \left[1 + \frac{1}{4} \frac{M_I - M'_I}{M_I + \alpha} \sqrt{\text{Ek}} f^a(\sigma) \right], \quad (34)$$

а для экваториальных — как

$$g^v = g^i \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{M'_I - \beta}{M_I + \beta} + \frac{M'_I + \alpha}{M_I + \alpha} \right) \sqrt{\text{Ek}} f^e(\sigma) \right], \quad (35)$$

где Ek — число Экмана, α, β — коэффициенты торможения внутреннего ядра, вызываемого давлением,

$$\alpha = M'_I \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{M_I + (a/b)^3 M_S}{M_O + M_S (1 - (a/b)^3)} \right), \quad (36)$$

$$\beta = M'_I \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{M_I + (a/b)^3 M_S}{M_O + M_S (1 - (a/b)^3)} \right). \quad (37)$$

M_I — масса внутреннего ядра, M_O — масса внешнего ядра, M_S — масса оболочки, $M'_I = 4/3\pi a^3 \rho_0(a)$ — смещённая масса, $\rho_0(a)$ — плотность на нижней границе внешнего ядра, $\sigma = \omega/2\Omega$ — безразмерная частота Кориолиса, соответствующая угловой скорости ω , $f^a(\sigma), f^e(\sigma)$ — безразмерные функции σ (индексы "a" и "e" соответственно означают "axial" (осевая) и "equatorial" (экваториальная)),

$$f^a(\sigma) = \left\{ 8[(\sigma + 1)^{3/2} + (\sigma - 1)^{3/2}] - \frac{16}{5} [(\sigma + 1)^{5/2} - (\sigma - 1)^{5/2}] \right\}, \quad (38)$$

$$f^e(\sigma) = \left\{ \mp 24(\pm \sigma \mp 1)^{1/2} - 16(\pm \sigma \mp 1)^{3/2} - \frac{16}{5} [(\pm \sigma - 1)^{5/2} - (\pm \sigma + 1)^{5/2}] \right\}, \quad (39)$$

здесь верхний знак относится к обратному колебанию, для которого σ положительна, а нижний — к прямому, для которого σ отрицательна.

Для трех подходящих периодов, T_R (обратный), T_C (осевой) и T_P (прямой), уравнение расщепления (33) даёт соответствующие значения безразмерного параметра вязкостного расщепления g_R^v, g_C^v и g_P^v для заданной величины T_0 . Таким образом, поиск соответствующим образом расщеплённых резонансов может быть проведён по всей оси частот. Для резонанса с центром на частоте f_j его форма на соседних частотах f_i имеет вид

$$r_{ij} = \frac{a_j^2}{1 + 4Q[(f_i - f_j)/f_j]^2}. \quad (40)$$

Для 12000-часовых серий данных оценки s_i из Продукта Спектр распределяются с интервалами 1/12000 циклов в час по оси частот. В субприливном диапазоне, между 2-часовыми и 8-часовыми периодами, имеются 4501 спектральных оценок. Для 25 спектральных оценок с центром на частоте f_j при $Q = 100$ несовпадение (40) со спектральной оценкой s_i выражается как

$$\epsilon_{ij} = A_j r_{ij} - s_i. \quad (41)$$

Энергетическая оценка погрешности:

$$I_j = \sum_{i=j-12}^{j+12} \epsilon_{ij}^2. \quad (42)$$

Минимизация ошибки погрешности даёт

$$A_j = \frac{\sum_{i=j-12}^{j+12} r_{ij} s_i}{\sum_{i=j-12}^{j+12} r_{ij}^2} \quad (43)$$

с минимумом для ошибки погрешности

$$I_{\min} = \sum_{i=j-12}^{j+12} s_i^2 - A_j^2 \sum_{i=j-12}^{j+12} r_{ij}^2. \quad (44)$$

Для измерения силы потенциального резонанса формы (40) мы используем параметр $S_j^2 = A_j^2/I_{\min}$. При обнаружении сильного, хорошо подходящего резонанса мы ожидаем, что S_j^2 будет большим, а при обнаружении небольшой, плохо подходящей спектральной особенности мы ожидаем, что S_j^2 будет малым. Для каждой из имеющихся 4477 частот f_j субприливного диапазона мы задаем $T_0 = 1/f_j$ и рассчитываем $f_R = 1/T_R, f_C = 1/T_C$ и $f_P = -1/T_P$ из уравнения (33). Значения S_R^2, S_C^2 и S_P^2 резонансного параметра S^2 на дискретных частотах, ближайших к f_R, f_C и f_P соответственно, потом перемножаются, что даёт продукт расщепления P_j , являющийся указателем наличия соответствующим образом расщеплённых резонансов. Полученная в результате функция плотности вероятности (ФПВ) для продукта расщепления, вычисленного по 4119 точкам на оси частот в субприливном диапазоне, показана на рис. 4.

Приведённая на рис. 4 ФПВ позволяет провести оценку значимости трансляционных триплетов по оси частот. На рисунке 5 представлены продукты расщеп-

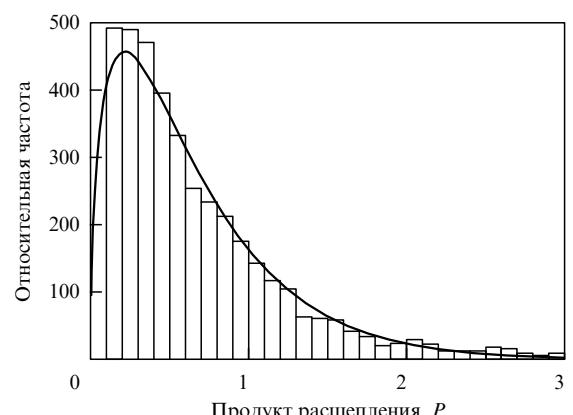


Рис. 4. Функция плотности вероятности (ФПВ) для продукта расщепления P . Ширина бинов по P 0,1. ФПВ приведена к χ^2_v -распределению с $v = 2,97614$ для случайного значения переменной $4,5314P$.

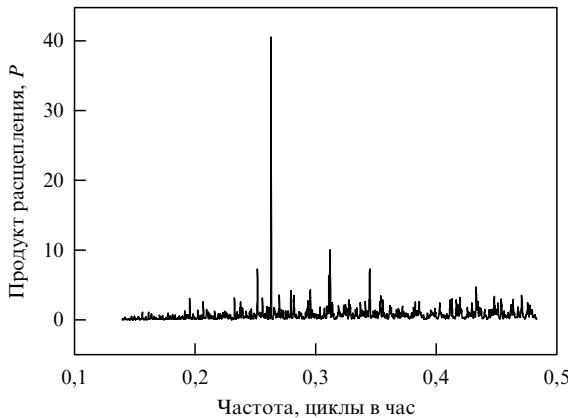


Рис. 5. Продукт расщепления P как функция частоты. Резкий всплеск при $T_0 = 3,7975$ соответствует трансляционному триплету, представленному на рис. 3.

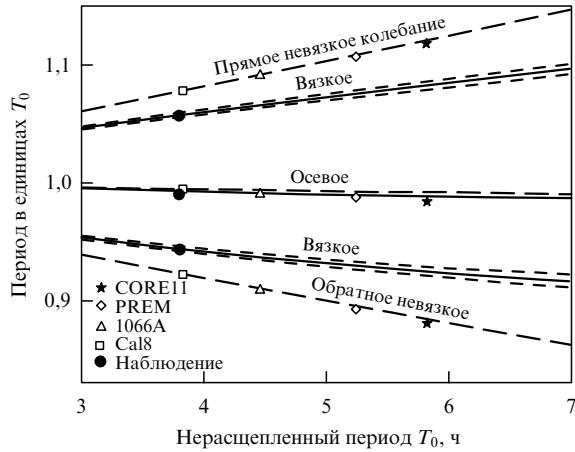


Рис. 6. Кривые расщепления трех трансляционных колебаний. Штриховые кривые получены без учета вязкости с использованием параметров расщепления для модели Земли Cal8 (квадраты), разработанной Болтом и Урхаммером [20] (см. приложение А). Периоды без учета вязкости моделей Земли Core11 (звездочки) [48], PREM (ромбы) [49] и 1066A (треугольники) [50]. Сплошные кривые вязкостного расщепления соответствуют вязкости при давлении $1,247 \times 10^{11}$ Па с.

ления, находящиеся между двух- и десятичасовыми периодами. Очень большое значение P имеет при $T_0 = 3,7975$ ч. Из ФПВ следует, что вероятность существования P_j , превосходящего наибольший из приведенных на рис. 5 продуктов, составляет только $1/(6,8 \times 10^{38})$! Повидимому, показанные на рис. 3 резонансы правильно идентифицированы как трансляционные колебания.

На рисунке 6 показаны графики расщепления трех трансляционных колебаний. Периоды без учёта вязкости из четырёх моделей Земли по этому рисунку представлены в табл. 2.

Приводятся два независимых измерения вязкости, так как уменьшение вращательного расщепления для обратной экваториальной составляющей больше, чем для прямой. Обратная экваториальная составляющая даёт значение $1,190 \pm 0,035 \times 10^{11}$ Па с, тогда как прямая — $1,304 \pm 0,034 \times 10^{11}$ Па с. Сбалансированное по величине ошибки значение $1,247 \times 10^{11}$ Па с даёт периоды с учётом вязкости лишь на 6,5 больше наблюдавших.

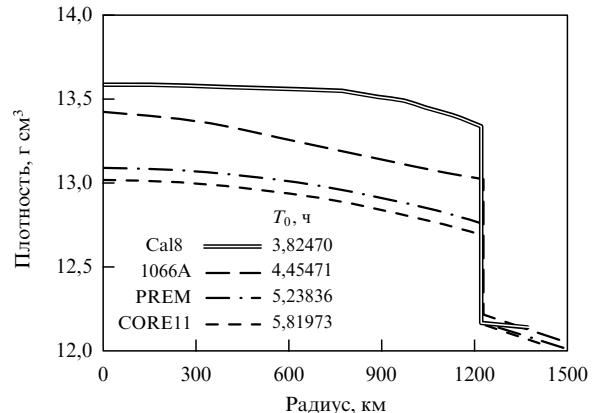


Рис. 7. Детальные профили плотности внутреннего ядра в моделях Земли Cal8, 1066A, PREM и Core11. Разброс в $0,6 \text{ г см}^{-3}$ приводит к почти двухчасовой разнице в продолжительности начального периода T_0 , давая разрешение в $200 \text{ мин г}^{-1} \text{ см}^{-3}$.

Таблица 2. Периоды без учёта вязкости из четырёх моделей Земли, показанные на рис. 6

Периоды	Обратный, ч	Оевой, ч	Прямой, ч
Core11	5,1280	5,7412	6,5114
PREM	4,6776	5,1814	5,7991
1066A	4,0491	4,4199	4,8603
Cal8	3,5168	3,7926	4,1118

Таблица 3. Сравнение наблюдаемых периодов трансляционных колебаний с периодами модели Земли Cal8

Периоды	Обратный, ч	Оевой, ч	Прямой, ч
Наблюдаемые	3,5822	3,7656	4,0150
Cal8 (с учётом вязкости)	3,5840	3,7731	4,0168
Cal8 (без учёта вязкости)	3,5168	3,7926	4,1118

Из рисунка 6 следует, что лучше всего с наблюдаемыми периодами согласуются периоды модели Земли Cal8. В таблице 3 приводится их детальное сравнение.

Хорошее совпадение периодов модели Земли Cal8 с наблюдаемыми обусловлено чувствительностью периодов трансляционных колебаний к плотности внутреннего ядра. На рисунке 7 показаны профили плотности внутреннего ядра в моделях Земли Cal8, 1066A, PREM (Preliminary Reference Earth Model) и Core11 вместе с их начальными периодами T_0 .

Период осевой составляющей подвергается лишь незначительному вращательному или вязкому расщеплению, и его наблюдаемая продолжительность налагает жесткие ограничения на плотность внутреннего ядра. Полученный из модели Cal8 период осевой составляющей только на 27 с больше наблюдаемого. Общее снижение плотности во внутреннем ядре лишь на $2,25 \text{ кг м}^{-3}$ привело бы к их полному совпадению, дав хорошее подтверждение Cal8. В таблице 4 приводится сравнение нерасщепленных периодов T_0 из четырёх моделей Земли с наблюдаемым.

Хорошее соответствие полученного в модели Земли Cal8 и наблюдаемого периодов осевой трансляционной составляющей колебаний внутреннего ядра ставит вопрос о различиях в скачке плотности на границе внутреннего ядра в разных моделях Земли, представленных на рис. 7. Скачок плотности в Cal8, равный

Таблица 4. Сравнение нерасщеплённого периода T_0 из разных моделей Земли с его наблюдаемым значением

Модель Земли	Нерасщепленный период T_0 , ч	Отклонение ΔT_0 , ч	Ошибка, %
Наблюдаемый	3,7985		
Cal8	3,82470	0,0262	0,69
1066A	4,45471	0,65621	17,28
PREM	5,23836	1,43986	37,91
Core11	5,81973	2,02123	53,21

1170 кг м⁻³, должен быть снижен на 2,25 кг м⁻³, до 1167,75 кг м⁻³, для того чтобы привести период осевой составляющей в соответствие с наблюдаемым. При разрешении по средней плотности внутреннего ядра в 0,2 мин кг⁻¹ м⁻³ периоды трансляционных колебаний очень чувствительны к плотности. Дисперсия скачков плотности в различных моделях Земли, вытекающая из данных по свободной осцилляции и данных сейсмологических наблюдений, означает, что эти наблюдения гораздо менее чувствительны к плотности внутреннего ядра, чем трансляционные колебания. Фактически модель Cal8, разработанная Болтом и Урхаммером [51, 52], находится в согласии с теми же самыми сейсмологическими данными, как и три другие модели.

4. Профиль вязкости внешнего ядра

Найденные нами граничные значения вязкости очень хорошо согласуются с экстраполяцией Аррениуса результатов лабораторных экспериментов [15, 16], давая значения 10¹¹ Па с на нижней границе внешнего ядра и 10² Па с на его поверхности. Хотя неопределенность таких экстраполяций очень велика, столь хорошее согласие между измеренными и экстраполированными значениями побуждает нас к использованию модели Аррениуса для построения профиля вязкости на всю глубину внешнего жидкого ядра с помощью интерполяции граничных значений вязкости [53].

Выражение Аррениуса для зависимости динамической вязкости η от температуры и давления имеет вид [15]:

$$\eta \sim \exp \frac{E_{act_0} + PV_{act}}{kT}, \quad (45)$$

где E_{act_0} — активационная энергия при нормальном давлении, P — давление, V_{act} — активационный объем, k — константа Больцмана, T — температура по Кельвину. Объем V_{act} пропорционален атомному объему V_{at} , который, в свою очередь, обратно пропорционален плотности ρ . Хотя активационный объем для жидких металлов при атмосферном давлении очень мал [8, 9], предполагается [15, 16], что, как и в молекулярных расплавах, активационный объем в жидких металлах возрастает при сжатии от 0,05 V_{at} до (0,2–0,4) V_{at} при давлениях, близких к величине ≈ 10 ГПа, и может возрасти до (0,5–1) V_{at} при увеличении давления до 100 ГПа. Сильная зависимость от давления требует интегрирования дифференциального уравнения Аррениуса. В случае преобладающей зависимости от давления из выражения (45) получим, что дифференциальное приращение вязкости пропорционально

$$\frac{E}{\rho T_m} \exp \left(E \frac{P}{\rho T_m} \right) dP, \quad (46)$$

Таблица 5. Профили давления, плотности, температуры плавления и радиального градиента давления

Радиус, км	$P, 10^{11}$ Па	$\rho, 10^3$ кг м ⁻³	T_m, K	$dP/dr, 10^4$ Па м ⁻¹
1216	3,300	12,20	4961	-5,600
1371	3,223	12,14	4905	-6,094
1571	3,094	12,03	4824	-6,737
1821	2,916	11,84	4710	-7,507
2171	2,636	11,52	4521	-8,479
2571	2,278	11,11	4258	-9,421
2971	1,886	10,62	3936	-10,12
3171	1,681	10,33	3751	-10,34
3371	1,473	10,01	3551	-10,47
3486	1,350	9,860	3429	-10,56

где E — параметр, зависящий от давления и позволяющий учитывать зависимость активационного объема от давления, dP — дифференциальное приращение давления, T_m — температура плавления. Интеграл от (46) по давлению несложно преобразовать в интеграл по радиусу, так как $dP/dr = -\rho g$, где g — ускорение силы тяжести, направленное по радиусу r . Зависимость вязкости от радиуса r тогда выражается в виде

$$\eta(r) = \eta_b + \eta_b \int_b^r \frac{E}{\rho T_m} \exp \left(E \frac{P}{\rho T_m} \right) \frac{dP}{dr} dr, \quad (47)$$

где b — радиус на границе между ядром и мантией, $\eta_b = 2371$ Па с — динамическая вязкость на поверхности ядра. Для интегрирования в (47) нам требуются профили давления, плотности, температуры плавления и градиент давления. Профиль давления может быть найден интегрированием произведения силы тяжести и плотности из какой-либо модели Земли (мы используем Cal8 (см. Буллен и Болт [20, с. 472–473])). Температуры плавления находятся сплайновой интерполяцией по радиусам модели Cal8 из тех, что представлены в таблице Стейси [54, с. 459]. Требуемые профили приведены в табл. 5.

Так как активационный объем быстро возрастает с давлением [15, 16], что и определяется нашим параметром E в уравнении (46), мы допускаем линейную вариацию с глубиной:

$$E = E_b + \frac{b-r}{b-a} E_a, \quad (48)$$

где a — радиус внутреннего ядра, E_b, E_a — константы. Интегрирование в (47) производится по правилу Симпсона за 100 итераций со сплайновой интерполяцией по всему внешнему ядру. Оказывается, что константа E_b определяет кривизну профиля вязкости вблизи поверхности раздела между ядром и мантией, в то время как без ее учёта кривизна лишь немного отличается от логлинейной. Некоторые численные эксперименты показывают, что профиль близок к логлинейному даже вблизи поверхности раздела ядра и мантии для значения $E_b = 4,5 \times 10^{-4} \text{ м}^{-2} \text{ с}^2 \text{ К}$ и что при $E_a = 2,976 \times 10^{-3} \text{ м}^{-2} \text{ с}^2 \text{ К}$ вязкость на нижней границе внешнего ядра приближается к $\eta_a = 1,247 \times 10^{11}$ Па с. Полученный профиль вязкости представлен на рис. 8.

5. Заключение

Ввиду несоответствий, имевших место в прошлом, согласие между значениями вязкости внешнего ядра,

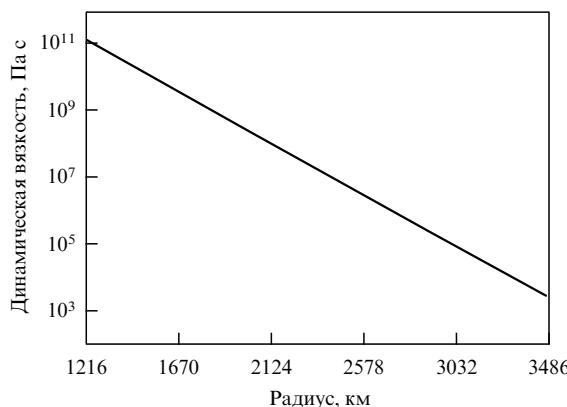


Рис. 8. Профиль вязкости для внешнего земного ядра.

полученными из наблюдений нутации на РСДБ, из наблюдений трансляционных колебаний на сверхпроводящих гравиметрах и из аррениусской экстраполяции результатов лабораторных экспериментов, представляется очень хорошим. Большое несоответствие между реальностью и теорией исчезло. Тем не менее ряд компьютерных моделей и эмпирических подходов [4–13] приводят к совершенно другим оценкам вязкости в таких условиях, которые существуют в ядре Земли. Кроме того, наша интерполяция вязкости между граничными значениями осуществлялась по кривой температуры плавления, а не по настоящей геотерме. Необходимо отметить, что результаты большинства из поставленных до сих пор экспериментов [8–11] указывают на незначительное возрастание вязкости железистых расплавов под давлением при соответствующем активационном объеме $V_{\text{act}} \approx 0,1 V_{\text{at}}$. Однако небольшие пределы изменения вязкости изучавшихся расплавов не дают оснований для того, чтобы отдать предпочтение какой-либо из существующих моделей в оценке вязкости внешнего ядра Земли, давление в котором находится в области от 135 до 330 ГПа. Например, Добсон [13] показал, что различные аналитические уравнения, которые хорошо согласуются с наблюдаемыми зависимостями свойств материалов от давления, при их экстраполяции приводят к совершенно несуразным результатам. Так, модель Аррениуса и модель свободного объема в применении к экстраполяции вязкости для расплава железа при давлениях от 135 до 330 ГПа, существующих во внешнем ядре Земли, дают значения коэффициента диффузии, различающиеся на 10 порядков (рис. 9).

Как обсуждалось в [16], динамическая вязкость при ее низких значениях обратно пропорциональна коэффициенту диффузии согласно соотношению Стокса–Эйнштейна (см. [13, уравнение (13)]), но при высоких вязкостях $D \sim \eta^{-\alpha}$ с α от 0,28 до 0,75. Большие неопределенности и невозможность сколько-нибудь увереной экстраполяции значений вязкости, полученных при давлениях, меньших 10 ГПа, в мегабарной области также обсуждалась в обзоре [55]. В работах [15, 16] представлены доводы в пользу модели Аррениуса и быстрого возрастания активационного объема при увеличении давления от 135 до 330 ГПа. Надо признать, что некоторые из теоретических расчетов [4–7] показывают лишь небольшой прирост вязкости железистых расплавов под действием давления. Но эти же расчёты [56] дают температуру плавления железа в мегабарной области

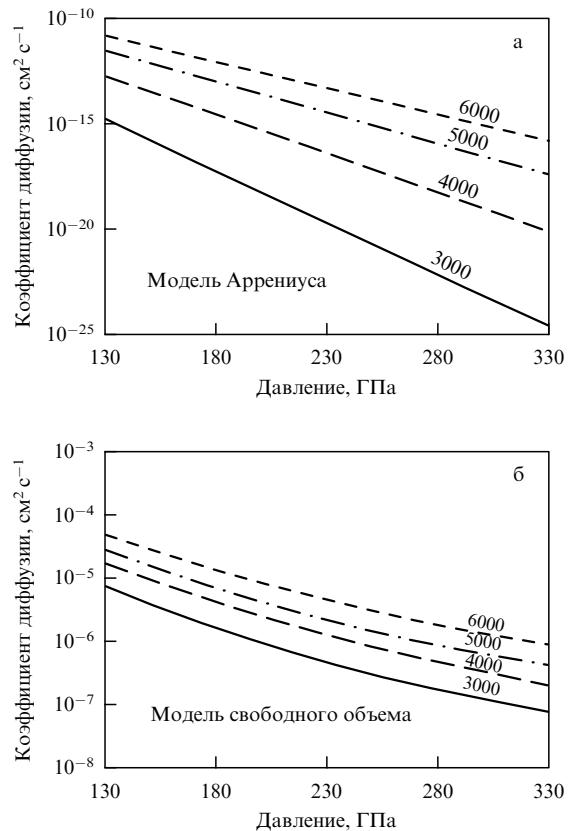


Рис. 9. Сравнение экстраполированных значений коэффициента диффузии при использовании модели Аррениуса (а) и модели свободного объема (б) для температур 3000, 4000, 5000 и 6000 К. (Из работы [13].)

совершенно несоответствующую найденной экспериментально [57]. Очевидно, расчеты не учитывают особенностей поведения внутренней электронной оболочки атома железа при чрезвычайно высоких давлениях. Необходимы новые исследования, как теоретические, так и экспериментальные. Представленные в этой статье данные говорят о том, что большая вязкость железистых расплавов во внешнем ядре Земли является весьма вероятной.

Рассматриваемые значения вязкости относятся к молекулярной вязкости, и они достаточно высоки для того, чтобы течения в ядре оставались ламинарными, в противоречие общепринятому взгляду, что они являются турбулентными и высокие значения вязкости обусловлены завихрениями.

В соответствии с профилем вязкости, который мы построили, локальное число Экмана изменяется от $1,2 \times 10^{-2}$ на нижней границе до $2,7 \times 10^{-10}$ на поверхности внешнего ядра. Полученные нами результаты, видимо, подтверждают гипотезу Брагинского [58] о том, что выделение скрытой теплоты сплавления при выпадении металлических фракций из расплава в F-слое на нижней границе внешнего ядра является источником энергии, снабжающим геодинамо посредством композиционной конвекции, как это изучалось Лоупером и Робертсом [59]. В то же время числа Экмана, за исключением их значений на самой нижней границе внешнего ядра, составляют не более $10^{-4} - 10^{-5}$, тем самым удовлетворяя условиям работы математических моделей геодинамо [60].

Таким образом, и лабораторные измерения, и непосредственные наблюдения приводят к довольно высоким значениям вязкости во внешнем ядре Земли, очевидно, подтверждая сильную зависимость активационного объема от давления, обнаруженную экспериментально [15, 16]. Нет больше нужды в привлечении гипотетической турбулентности и огромных вихревых вязкостей для объяснения несоответствия значений вязкости, полученных с помощью экстраполяции результатов лабораторных экспериментов и непосредственно наблюдаемых во внешнем ядре Земли.

Благодарности. Д. Смайли приносит благодарность Совету по естественным наукам и инженерным изысканиям Канады за финансовую поддержку. Авторы также выражают признательность Кейсу Эллриджу за то, что он привлек их внимание к тонкостям теории слоев Экмана.

6. Приложения

A. Пограничные слои Экмана и диссипация энергии

В этом приложении мы приводим детальное решение уравнений пограничного слоя (7) и расчёт скорости диссипации энергии в двух пограничных слоях внешнего ядра. Для удобства отслеживания фазы компоненты скорости v_θ, v_ϕ представлены комплексными фазорами с временными и долготными вариациями, даваемыми $\exp[-i(\phi + \Omega t)]$. Для предполагаемой радиальной зависимости, пропорциональной $\exp(\lambda r)$, мы приходим к системе однородных уравнений

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 v + i\Omega & 2\Omega \cos \theta \\ -2\Omega \cos \theta & \lambda^2 v + i\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = 0. \quad (49)$$

Чтобы система (49) имела решение, λ должна удовлетворять соотношению

$$(\lambda^2 v + i\Omega)^2 = -4\Omega^2 \cos^2 \theta, \quad (50)$$

или

$$\lambda^2 v + i\Omega = \pm i2\Omega \cos \theta. \quad (51)$$

Подстановка отношения (51) в систему уравнений (49) даёт

$$v_\phi = \mp iv_\theta, \quad (52)$$

$$v_\phi = \pm iv_\theta. \quad (53)$$

Пограничные слои характеризуются безразмерным числом Экмана

$$Ek = \frac{v}{b^2 \Omega}, \quad (54)$$

где шкала длины определяется радиусом b границы между ядром и мантией. Четыре корня векового уравнения (50) $\pm \lambda_1, \pm \lambda_2$ имеют вид

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{1-i}{b} \sqrt{\frac{1/2 + \cos \theta}{Ek}} = \frac{1-i}{\delta_1} & \text{при } \theta < \frac{2\pi}{3}, \end{cases} \quad (55)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{1+i}{b} \sqrt{\frac{-1/2 + \cos \theta}{Ek}} = \frac{1+i}{\delta_1} & \text{при } \theta > \frac{2\pi}{3}, \end{cases} \quad (56)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{1-i}{b} \sqrt{\frac{1/2 - \cos \theta}{Ek}} = \frac{1-i}{\delta_2} & \text{при } \theta > \frac{\pi}{3}, \\ \frac{1+i}{b} \sqrt{\frac{-1/2 - \cos \theta}{Ek}} = \frac{1+i}{\delta_2} & \text{при } \theta < \frac{\pi}{3}, \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} \frac{1+i}{b} \sqrt{\frac{-1/2 + \cos \theta}{Ek}} = \frac{1+i}{\delta_2} & \text{при } \theta < \frac{\pi}{3}, \\ \frac{1-i}{b} \sqrt{\frac{1/2 + \cos \theta}{Ek}} = \frac{1-i}{\delta_2} & \text{при } \theta > \frac{\pi}{3}, \end{cases} \quad (58)$$

где δ_1, δ_2 — значения толщины соответствующих пограничных слоев, составляющие $O(\sqrt{Ek})$.

В граничном слое на поверхности ядра возмущающие компоненты скорости (v_θ, v_ϕ) уменьшаются с уменьшением радиуса и возрастают с его увеличением, так что при $r = b$ они равны по величине и противоположны по знаку компонентам скорости нутации ядра (6), тем самым удовлетворяя условию непрекальвания по границе между ядром и мантией. Так, допустимые значения λ , удовлетворяющие уравнению (51), — λ_1, λ_2 . В пограничном слое на нижней границе внешнего ядра возмущающие компоненты скорости уменьшаются с увеличением радиуса и возрастают с его уменьшением, тем самым удовлетворяя условию непрекальвания по поверхности внутреннего ядра. Там допустимыми значениями λ , удовлетворяющими уравнению (51), являются $-\lambda_1, -\lambda_2$. Возмущающие компоненты скорости тогда выражаются в виде линейных комбинаций

$$v_\theta = \exp\left(-\frac{\Delta r}{\delta_1}\right) f \exp\left[i\left(\frac{\Delta r}{\delta_1} \pm \phi \pm \Omega t\right)\right] + \exp\left(-\frac{\Delta r}{\delta_2}\right) g \exp\left[i\left(\frac{\Delta r}{\delta_2} \pm \phi \pm \Omega t\right)\right], \quad (59)$$

$$v_\phi = \exp\left(-\frac{\Delta r}{\delta_1}\right) i f \exp\left[i\left(\frac{\Delta r}{\delta_1} \pm \phi \pm \Omega t\right)\right] - \exp\left(-\frac{\Delta r}{\delta_2}\right) i g \exp\left[i\left(\frac{\Delta r}{\delta_2} \pm \phi \pm \Omega t\right)\right], \quad (60)$$

где нижние знаки относятся к области $\pi/3 < \theta < 2\pi/3$, а верхние знаки относятся к области $0 < \theta < \pi/3$ для выражений, включающих в себя δ_2 , и к области $2\pi/3 < \theta < \pi$ для членов, содержащих $\delta_1, \Delta r$ — приращение радиуса. На поверхности ядра $\Delta r = b - r$, а на нижней границе $\Delta r = r - a$. В общем случае коэффициенты f и g являются комплексными числами с действительными и мнимыми частями:

$$f = \alpha + i\beta, \quad (61)$$

$$g = \gamma + ie. \quad (62)$$

Как действительные, так и мнимые части выражений (59) и (60) являются решениями уравнений граничного слоя (7). Нас интересуют действительные части компонент скорости, выражющиеся в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} v_\theta = \exp\left(-\frac{\Delta r}{\delta_1}\right) & \left[\left(\alpha \cos \frac{\Delta r}{\delta_1} \pm \beta \sin \frac{\Delta r}{\delta_1} \right) \cos(\phi + \Omega t) + \right. \\ & \left. \left(\beta \cos \frac{\Delta r}{\delta_1} \mp \alpha \sin \frac{\Delta r}{\delta_1} \right) \sin(\phi + \Omega t) \right] + \\ & \exp\left(-\frac{\Delta r}{\delta_2}\right) \left[\left(\gamma \cos \frac{\Delta r}{\delta_2} \pm \varepsilon \sin \frac{\Delta r}{\delta_2} \right) \cos(\phi + \Omega t) + \right. \\ & \left. \left(\varepsilon \cos \frac{\Delta r}{\delta_2} \mp \gamma \sin \frac{\Delta r}{\delta_2} \right) \sin(\phi + \Omega t) \right], \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} v_\phi = & \exp \left(-\frac{\Delta r}{\delta_1} \right) \left[\left(-\beta \cos \frac{\Delta r}{\delta_1} \pm \alpha \sin \frac{\Delta r}{\delta_1} \right) \cos(\phi + \Omega t) + \right. \\ & + \left. \left(\alpha \cos \frac{\Delta r}{\delta_1} \pm \beta \sin \frac{\Delta r}{\delta_1} \right) \sin(\phi + \Omega t) \right] + \\ & + \exp \left(-\frac{\Delta r}{\delta_2} \right) \left[\left(\varepsilon \cos \frac{\Delta r}{\delta_2} \mp \gamma \sin \frac{\Delta r}{\delta_2} \right) \cos(\phi + \Omega t) + \right. \\ & + \left. \left(-\gamma \cos \frac{\Delta r}{\delta_2} \mp \varepsilon \sin \frac{\Delta r}{\delta_2} \right) \sin(\phi + \Omega t) \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Для того чтобы компоненты скорости (63) и (64) сократились с компонентами из (6) на границах, приведём их к следующему виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} v_\theta = & (\alpha + \gamma) \cos(\phi + \Omega t) + (\beta + \varepsilon) \sin(\phi + \Omega t) = \\ = & Ar_0 \sin(\phi + \Omega t), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} v_\phi = & (\varepsilon - \beta) \cos(\phi + \Omega t) + (\alpha - \gamma) \sin(\phi + \Omega t) = \\ = & Ar_0 \cos \theta \cos(\phi + \Omega t), \end{aligned} \quad (66)$$

где r_0 — радиус границы, $r_0 = b$ на поверхности внутреннего ядра и $r_0 = a$ на его нижней границе. Тогда

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{1}{2} Ar_0(1 - \cos \theta), \quad \varepsilon = \frac{1}{2} Ar_0(1 + \cos \theta), \\ \alpha = \gamma = & 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Дифференцирование выражений (63) и (64) даёт производные компонент скорости на поверхности ядра:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} v_\theta}{\partial r} = & \left(\mp \frac{\beta}{\delta_1} \mp \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \cos(\phi + \Omega t) + \\ & + \left(\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \sin(\phi + \Omega t), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} v_\phi}{\partial r} = & \left(-\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \cos(\phi + \Omega t) + \\ & + \left(\mp \frac{\beta}{\delta_1} \pm \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \sin(\phi + \Omega t), \end{aligned} \quad (69)$$

производные компонент скорости на нижней границе внешнего ядра обратны им. На поверхности ядра нагрузки первого порядка равны

$$\sigma_{r\theta} = \eta \frac{\partial \operatorname{Re} v_\theta}{\partial r}, \quad \sigma_{r\phi} = \eta \frac{\partial \operatorname{Re} v_\phi}{\partial r}, \quad (70)$$

где η — динамическая вязкость. Напряжения первого порядка на нижней границе внешнего ядра обратны этим величинам, так что на обеих поверхностях ядра скорость диссипации энергии на единицу площади при движении со скоростью (6), направленной против этих напряжений, равна

$$\begin{aligned} \frac{de}{dr} = & v_\theta \sigma_{r\theta} + v_\phi \sigma_{r\phi} = \\ = & Ar_0 \eta \left\{ \left(\mp \frac{\beta}{\delta_1} \mp \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \sin^2(\phi + \Omega t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \cos \theta \left[\left(\frac{\varepsilon}{\delta_2} - \frac{\beta}{\delta_1} \right) \cos^2(\phi + \Omega t) + \right. \\ & + \left. \left(\mp \frac{\beta}{\delta_1} \pm \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Подстановка (55)–(58) и (67) даёт для $0 < \theta < \pi/3$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & \frac{1}{2} \rho_0 A^2 r_0^2 \left\{ \sqrt{v\Omega \left(\frac{1}{2} + \cos \theta \right)} \times \right. \\ & \times \left[\sin^2 \theta (\cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) - \cos^2(\phi + \Omega t)) + \right. \\ & + 1 - \cos \theta \left. \right] - \sqrt{v\Omega \left(-\frac{1}{2} + \cos \theta \right)} \times \\ & \times \left[\sin^2 \theta (\cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) + \cos^2(\phi + \Omega t)) - \right. \\ & \left. \left. - 1 - \cos \theta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (72)$$

для $\pi/3 < \theta < 2\pi/3$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & \frac{1}{2} \rho_0 A^2 r_0^2 \left\{ \sqrt{v\Omega \left(\frac{1}{2} + \cos \theta \right)} \times \right. \\ & \times \left[\sin^2 \theta (\cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) - \cos^2(\phi + \Omega t)) + \right. \\ & + 1 - \cos \theta \left. \right] + \sqrt{v\Omega \left(\frac{1}{2} - \cos \theta \right)} \times \\ & \times \left[\sin^2 \theta (\cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) - \cos^2(\phi + \Omega t)) + \right. \\ & \left. \left. + 1 + \cos \theta \right] \right\} \end{aligned} \quad (73)$$

и для $2\pi/3 < \theta < \pi$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & \frac{1}{2} \rho_0 A^2 r_0^2 \left\{ -\sqrt{v\Omega \left(-\frac{1}{2} - \cos \theta \right)} \times \right. \\ & \times \left[\sin^2 \theta (\cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) + \cos^2(\phi + \Omega t)) - \right. \\ & - 1 + \cos \theta \left. \right] + \sqrt{v\Omega \left(\frac{1}{2} - \cos \theta \right)} \times \\ & \times \left[\sin^2 \theta (\cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) - \cos^2(\phi + \Omega t)) + \right. \\ & \left. \left. + 1 + \cos \theta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (74)$$

где ρ_0 — плотность сразу же внутри за соответствующей границей.

Интегрированием по всей границе получаем суммарную скорость диссипации энергии:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{de}{dt} \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{\pi}{2} \rho_0 A^2 r_0^4 \sqrt{v\Omega} \times \\ & \times \left\{ \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{1}{2} + \cos \theta} \sin \theta (1 - \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta + \right. \\ & + \left. \int_0^{\pi/3} \sqrt{-\frac{1}{2} + \cos \theta} \sin \theta (1 + \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{\frac{1}{2} + \cos \theta} \sin \theta (1 - \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta + \\
& + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{\frac{1}{2} - \cos \theta} \sin \theta (1 + \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta + \\
& + \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{-\frac{1}{2} - \cos \theta} \sin \theta (1 - \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta + \\
& + \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} - \cos \theta} \sin \theta (1 + \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta \Big\}, \quad (75)
\end{aligned}$$

где при интегрировании по ϕ мы использовали соотношения

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(\phi + \Omega t) \sin(\phi + \Omega t) d\phi = \\
= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin[2(\phi + \Omega t)] d\phi = 0, \quad (76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi + \Omega t) d\phi = \\
= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos[2(\phi + \Omega t)] + 1 \right\} d\phi = \pi. \quad (77)
\end{aligned}$$

Мы можем записать (75) в компактном виде:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\pi}{2} \rho_0 A^2 r_0^4 \sqrt{v\Omega} [J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6], \quad (78)$$

где $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ обозначают шесть интегралов в (75). Вычисление интегралов в выражении (75) зависит от неопределенных интегралов:

$$I_1 = \int \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{1/2} \sin^3 \theta d\theta = \pm \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} \sin^2 \theta - \\
- \frac{8}{15} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{5/2} \cos \theta \mp \frac{16}{105} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{7/2}, \quad (79)$$

$$I_2 = \int \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{1/2} (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta = \\
= \pm \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} \mp \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} \cos \theta - \\
- \frac{4}{15} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{5/2}, \quad (80)$$

$$I_3 = \int \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{1/2} (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta = \\
= \pm \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} \pm \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} \cos \theta + \\
+ \frac{4}{15} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{5/2}, \quad (81)$$

знак s в каждом выражении может принимать значение или $+1$, или -1 . Используя (79)–(81) и задавая пределы интегрирования, находим

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{13}{30} + \frac{16}{105} - \frac{18}{35} \sqrt{\frac{3}{2}}, \\
J_2 &= -\frac{57}{105} \sqrt{2}, \quad J_3 = -\frac{1}{6} - \frac{44}{105}, \quad (82)
\end{aligned}$$

$$J_4 = -\frac{1}{6} - \frac{44}{105} = J_3, \quad J_5 = -\frac{57}{105} \sqrt{2} = J_2, \quad (83)$$

$$J_6 = \frac{13}{30} + \frac{16}{105} - \frac{18}{35} \sqrt{\frac{3}{2}} = J_1.$$

Шесть интегралов в сумме дают

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 = -2\sqrt{2} \frac{9\sqrt{3} + 19}{35}. \quad (84)$$

Подставляя результат (84) в выражение (78), находим скорость диссипации энергии в каждом пограничном слое:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{35} \rho_0 A^2 r_0^4 \sqrt{2v\Omega} (9\sqrt{3} + 19). \quad (85)$$

Б. Вязкостное взаимодействие с внутренним ядром и оболочкой

Из отношения (11) следует, что величина, обратная общей добротности, не может быть меньше обратной величины эффективной добротности, обусловленной пограничным слоем на поверхности внутреннего ядра. Ввиду его большой вязкости внутреннее ядро, вероятно, сильно связано с внешним и с его колебаниями. Почти ежесуточные обратные колебания внешнего ядра, сопряженные с его свободной нутацией, порождают вязкостные врачающие моменты, создаваемые внешним ядром на внутреннем ядре и на оболочке.

Вязкостные врачающие моменты, создаваемые внешним ядром на его поверхностях, равны

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Theta} \sigma_{r\theta} + \boldsymbol{\Phi} \sigma_{r\phi}) dS = \\
&= \int (-\boldsymbol{\Theta} r \sigma_{r\phi} + \boldsymbol{\Phi} r \sigma_{r\theta}) dS, \quad (86)
\end{aligned}$$

где интеграл берется по соответственной поверхности раздела. Сферические полярные координаты векторов связаны с их декартовыми координатами ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) соотношениями

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{i} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \phi - \mathbf{k} \sin \theta, \quad (87)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi. \quad (88)$$

Таким образом, декартовы компоненты вязкостных врачающих моментов равны

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \mathbf{i} r_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (-\sigma_{r\phi} \cos \theta \cos \phi - \sigma_{r\theta} \sin \phi) d\theta d\phi + \\
&+ \mathbf{j} r_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (-\sigma_{r\phi} \cos \theta \sin \phi + \sigma_{r\theta} \cos \phi) d\theta d\phi + \\
&+ \mathbf{k} r_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_{r\phi} \sin^2 \theta d\theta d\phi. \quad (89)
\end{aligned}$$

Из выражений (70) для напряжений первого порядка видно, что интегрирование по ϕ зависит от элементарных интегралов

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi + \Omega t) \cos \phi d\phi = \pi \cos \Omega t,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\phi + \Omega t) \cos \phi d\phi = \pi \sin \Omega t,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\phi + \Omega t) \sin \phi d\phi &= -\pi \sin \Omega t, \\ \int_0^{2\pi} \sin(\phi + \Omega t) \sin \phi d\phi &= \pi \cos \Omega t, \\ \int_0^{2\pi} \cos(\phi + \Omega t) d\phi &= \int_0^{2\pi} \sin(\phi + \Omega t) d\phi = 0. \end{aligned}$$

Два последних интеграла обусловливают наличие в моментах вязкости только экваториальных декартовых составляющих (Γ_x, Γ_y), отсюда, записывая $\tilde{\Gamma} = \Gamma_x + i\Gamma_y$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = -\pi r_0^3 \eta \exp(-i\Omega t) \int_0^\pi &\left[\cos \theta \sin \theta \left(\frac{\beta}{\delta_1} - \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) - \right. \\ &- \sin \theta \left(\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \Big] d\theta + \\ &+ i\pi r_0^3 \eta \exp(-i\Omega t) \int_0^\pi \left[\cos \theta \sin \theta \left(\mp \frac{\beta}{\delta_1} \pm \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) + \right. \\ &\left. + \sin \theta \left(\pm \frac{\beta}{\delta_1} \pm \frac{\varepsilon}{\delta_2} \right) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (90)$$

Подстановка из уравнений (55)–(58) и (67) показывает, что определение вращающего момента (90) зависит от интегралов

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{s}{2} \mp \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta &= \\ &= \pm \frac{2}{3} \cos \theta \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} + \frac{4}{15} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{5/2}, \\ \int \sqrt{\frac{s}{2} \mp \cos \theta} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \\ &= \pm \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2} \cos^2 \theta + \frac{8}{15} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{5/2} \cos \theta \pm \\ &\pm \frac{16}{105} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{7/2}, \\ \int \sqrt{\frac{s}{2} \mp \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \pm \frac{2}{3} \left(\frac{s}{2} \mp \cos \theta \right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (91)$$

где s — знак, который принимает значение или $+1$, или -1 в каждом выражении.

Суммарный вязкостный вращающий момент состоит из вкладов от трёх широтных зон: вклада области $0 < \theta < \pi/3$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0 < \theta < \pi/3} = -\pi \rho_0 A r_0^4 \sqrt{v \Omega} \exp(-i\Omega t) \times \\ \times \left\{ \frac{41}{140} - \frac{9}{35} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{35} \frac{1}{\sqrt{2}} + \right. \\ \left. + i \left[-\frac{41}{140} + \frac{9}{35} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{35} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (92)$$

вклада области $\pi/3 < \theta < 2\pi/3$

$$\tilde{\Gamma}_{\pi/3 < \theta < 2\pi/3} = -\pi \rho_0 A r_0^4 \sqrt{v \Omega} \exp(-i\Omega t) \frac{41}{70} (-1 + i), \quad (93)$$

и вклада области $2\pi/3 < \theta < \pi$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{2\pi/3 < \theta < \pi} = -\pi \rho_0 A r_0^4 \sqrt{v \Omega} \exp(-i\Omega t) \times \\ \times \left\{ \frac{41}{140} - \frac{9}{35} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{35} \frac{1}{\sqrt{2}} + \right. \\ \left. + i \left[-\frac{41}{140} + \frac{9}{35} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{35} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (94)$$

Тогда суммарный вязкостный вращающий момент равняется

$$\tilde{\Gamma} = \pi \rho_0 A r_0^4 \sqrt{v \Omega} \exp(-i\Omega t) \frac{19}{35} \sqrt{2} \left[1 + i + \frac{9}{19} \sqrt{3} (1 - i) \right]. \quad (95)$$

Отделяя моменты от двух пограничных слоев, получим вязкостные вращающие моменты, создаваемые внешним ядром на внутреннем ядре,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_a = \pi \rho_0 (a) A_a a^4 \sqrt{v_a \Omega} \exp(-i\Omega t) \times \\ \times \frac{19}{35} \sqrt{2} \left[1 + i + \frac{9}{19} \sqrt{3} (1 - i) \right], \end{aligned} \quad (96)$$

и на оболочке,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_b = \pi \rho_0 (b) A_b b^4 \sqrt{v_b \Omega} \exp(-i\Omega t) \times \\ \times \frac{19}{35} \sqrt{2} \left[1 + i + \frac{9}{19} \sqrt{3} (1 - i) \right]. \end{aligned} \quad (97)$$

Дополнительное почти ежесуточное обратное колебание внешнего ядра относительно его границ в комплексной фазорной нотации выражается в виде

$$\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2 = A \exp(-i\Omega t), \quad (98)$$

с угловой скоростью качения $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$. Мощность, с которой внешнее ядро работает против вязкостных вращающих моментов, равна

$$\frac{dE}{dt} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\omega} = \Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2 = \frac{1}{2} (\tilde{\omega} \tilde{\Gamma}^* + \tilde{\omega}^* \tilde{\Gamma}), \quad (99)$$

где $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ — вектор вращающего момента, звёздочка обозначает комплексно сопряженную величину. Из уравнения вращающего момента (95) находим скорость диссипации энергии в пограничных слоях:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{35} \rho_0 A^2 r_0^4 \sqrt{2v \Omega} (9\sqrt{3} + 19), \quad (100)$$

в согласии с уравнением (85).

Выражения (96) и (97) для вязкостных вращающих моментов, создаваемых внешним ядром на своих границах, могут быть сведены к

$$\tilde{\Gamma}_a = \gamma_a \exp(-i\Omega t) A_a, \quad (101)$$

$$\tilde{\Gamma}_b = \gamma_b \exp(-i\Omega t) A_b, \quad (102)$$

где

$$\gamma_a = \pi \rho_0 (a) a^4 \sqrt{v_a \Omega} \frac{19}{35} \sqrt{2} \left[1 + i + \frac{9}{19} \sqrt{3} (1 - i) \right], \quad (103)$$

$$\gamma_b = \pi \rho_0 (b) b^4 \sqrt{v_b \Omega} \frac{19}{35} \sqrt{2} \left[1 + i + \frac{9}{19} \sqrt{3} (1 - i) \right]. \quad (104)$$

Список литературы

1. Lumb L I, Aldridge K D *J. Geomag. Geoelectr.* **43** 93 (1991)
2. Anderson D L *Theory of the Earth* (Boston: Blackwell Sci. Publ., 1989)
3. Davis R G, Whaler K A *Phys. Earth Planet. Inter.* **103** 181 (1997)
4. de Wijs G A et al. *Nature* **392** 805 (1998)
5. Alfe D, Kresse G, Gillan M J *Phys. Rev. B* **61** 132 (2000)
6. Desgranges C, Delhommele J *Phys. Rev. B* **76** 172102 (2007)
7. Vočadlo L et al. *Faraday Discuss.* **106** 205 (1997)
8. Rutter M D et al. *Geophys. Res. Lett.* **29** 1217 (2002)
9. Dobson D P et al. *Am. Mineralogist* **85** 1838 (2000)
10. Urakawa S et al. *Am. Mineralogist* **86** 578 (2001)
11. Terasaki H et al. *Geophys. Res. Lett.* **33** L22307 (2006)
12. Rutter M D et al. *Phys. Rev. B* **66** 060102 (2002)
13. Dobson D P *Phys. Earth Planet. Inter.* **139** 271 (2002)
14. Secco R A "Viscosity of the outer core", in *Mineral Physics & Crystallography: A Handbook of Physical Constants* (AGU Reference Shelf, Vol. 2, Ed. T J Ahrens) (Washington, DC: American Geophysical Union, 1995) p. 218
15. Бражкин В В *Письма в ЖЭТФ* **68** 469 (1998) [Brazhkin V V *JETP Lett.* **68** 502 (1998)]
16. Бражкин В В, Ляпин А Г *УФН* **170** 535 (2000) [Brazhkin V V, Lyapin A G *Phys. Usp.* **43** 493 (2000)]
17. Poirier J P *Geophys. J.* **92** 99 (1988)
18. Jeffreys H *Mon. Not. R. Astron. Soc. Geophys. Suppl.* **1** 371 (1926)
19. Garland G D *Introduction to Geophysics: Mantle, Core and Crust* (Philadelphia: Saunders, 1971) p. 42
20. Bullen K E, Bolt B A *An Introduction to the Theory of Seismology* 4th ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985) p. 322
21. Poincaré H *Bull. Astron.* **27** 321 (1910)
22. Aldridge K D "An experimental study of axisymmetric inertial oscillations of a rotating liquid sphere", Ph.D. Thesis (Cambridge, Mass.: MIT, 1967)
23. Smylie D E et al. *Geophys. J. Int.* **108** 465 (1992)
24. Jiang X "Wobble-nutation modes of the Earth", Ph.D. Thesis, (Toronto: York Univ., 1993)
25. Jiang X, Smylie D E *Phys. Earth Planet. Inter.* **90** 91 (1995)
26. Jiang X, Smylie D E *Phys. Earth Planet. Inter.* **94** 159 (1996)
27. Greenspan H P *The Theory of Rotating Fluids* (London: Cambridge Univ. Press, 1968) p. 66
28. Crossley D, Smylie D E *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **42** 1011 (1975)
29. Acheson D J *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **43** 253 (1975)
30. Smylie D E, Szeto A M K, Rochester M G *Rep. Prog. Phys.* **47** 855 (1984)
31. Smylie D E "Electromagnetic excitation of the Chandler Wobble", Ph.D. Thesis (Toronto: Univ. of Toronto, 1963)
32. Rochester M G, Smylie D E *Geophys. J. Int.* **10** 289 (1965)
33. Buffett B A, Mathews P M, Herring T A *J. Geophys. Res.* **107** (B4) 2070 (2002)
34. Runcorn S K *Trans. Am. Geophys. Union* **36** 191 (1955)
35. Smylie D E *Geophys. J. Int.* **9** 169 (1965)
36. Johnson I M, Smylie D E *Geophys. J. Int.* **22** 41 (1970)
37. Mathews P M et al. *J. Geophys. Res.* **96** (B5) 8219 (1991)
38. de Vries D, Wahr J M *J. Geophys. Res.* **96** (B5) 8275 (1991)
39. Palmer A, Smylie D E *Phys. Earth Planet. Inter.* **148** 285 (2005)
40. Slichter L B *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **47** 186 (1961)
41. Smylie D E et al. *Phys. Earth Planet. Inter.* **80** 135 (1993)
42. Courtier N et al. *Phys. Earth Planet. Inter.* **117** 3 (2000)
43. Smylie D E, Francis O, Merriam J P *J. Geodetic Soc. Jpn.* **47** 364 (2001)
44. Moore D W "Homogeneous fluids in rotation", in *Rotating Fluids in Geophysics* (Eds P H Roberts, A M Soward) (New York: Academic Press, 1978)
45. Smylie D E, McMillan D G *Phys. Earth Planet. Inter.* **117** 71 (2000)
46. Smylie D E *Science* **284** 461 (1999)
47. Smylie D E, McMillan D G *Phys. Earth Planet. Inter.* **117** 71 (2000)
48. Widmer R, Masters G, Gilbert F, in *17th Inter. Conf. on Mathematical Geophysics (Blanes, Spain, IUGG, June 1988)*
49. Dziewonski A M, Anderson D L *Phys. Earth Planet. Inter.* **25** 297 (1981)
50. Gilbert F, Dziewonski A M *Philos. Trans. R. Soc. London A* **278** 187 (1975)
51. Bolt B A, Urhammer R *Geophys. R. Astron. Soc. J.* **42** 419 (1975)
52. Bolt B A, Urhammer R A, in *Evolution of the Earth* (Geodynamics Series, Vol. 5, Eds R J O'Connell, W S Fyfe) (Washington, DC: American Geophysical Union, 1981) p. 28
53. Smylie D E, Palmer A, arXiv:0709.3333
54. Stacey F D *Physics of the Earth* 3rd ed. (Brisbane: Brookfield Press, 1992)
55. Минеев В Н, Фунтиков А И *УФН* **174** 727 (2004) [Mineev V N, Funtikov A I *Phys. Usp.* **47** 671 (2004)]
56. Alfe D, Gillan M J, Price G D *Nature* **401** 462 (1999)
57. Boehler R *Nature* **363** 534 (1993)
58. Брагинский С И *ДАН СССР* **149** 8 (1963)
59. Loper D E, Roberts P H *Phys. Earth Planet. Inter.* **24** 302 (1981)
60. Olson P, Christensen U R *Geophys. J. Int.* **151** 809 (2002)

Direct observations of the viscosity of the outer core and extrapolation of measurements of the viscosity of liquid iron

D.E. Smylie

Department of Earth and Space Science and Engineering, York University,
4700 Keele Street, Toronto, Ontario, M3J 1P3, Canada
Tel. (416) 736-2100, ext. 66438. Fax (416) 736-5817. E-mail: doug@core.yorku.ca

V.V. Brazhkin

Institute for High Pressure Physics, Russian Academy of Sciences,
142190 Troitsk, Moscow region, Russian Federation
Tel. (7-495) 751-00 11. Fax (7-495) 751-00 12. E-mail: brazhkin@hppi.troitsk.ru

A. Palmer

Sander Geophysics Ltd., 260 Hunt Club Road, Ottawa, Ontario, K2P 1K2, Canada
E-mail: palmer@core.yorku.ca

Estimates vary widely as to the viscosity of Earth's outer fluid core. Directly observed viscosity is usually orders of magnitude higher than the values extrapolated from high-pressure high-temperature laboratory experiments, which are close to those for liquid iron at atmospheric pressure. It turns out that this discrepancy can be removed by extrapolating via the widely known Arrhenius activation model modified by lifting the commonly used assumption of pressure-independent activation volume (which is possible due to the discovery that at high pressures the activation volume increases strongly with pressure, resulting in 10^2 Pa s at the top of the fluid core and in 10^{11} Pa s at the bottom). There are of course many uncertainties affecting this extrapolation process. This paper reviews two viscosity determination methods, one for the top and the other for the bottom of the outer core, the former of which relies on the decay of free core nutations and yields 2.371 ± 1.530 Pa s; and the other relies on the reduction in the rotational splitting of the two equatorial translational oscillation modes of the solid inner core and yields an average $1.247 \pm 0.035 \times 10^{11}$ Pa s. Encouraged by the good performance of the Arrhenius extrapolation, a differential form of the Arrhenius activation model is used to interpolate along the melting temperature curve and to find the viscosity profile across the entire outer core. The variation is found to be nearly log-linear between the measured boundary values.

PACS numbers: **66.20.-d, 91.35.-x, 93.85.-q**

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200901d.0091

Bibliography — 60 references

Received 16 January 2008, revised 4 August 2008

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **179** (1) 91–105 (2009)

Physics – Uspekhi **52** (1) (2009)