Январь 2007 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 177, № 1*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса

В.И. Ритус

Излагается вигнеровская концепция поворота спина и скорости частицы и изменения угла между ними при лоренцевых преобразованиях с неколлинеарными скоростями. Показано, что мёллеровское описание поворота спина может быть сведено к вигнеровскому, и исправлена мёллеровская формула для угла поворота спина при криволинейном движении частицы. Несимметрия релятивистского закона сложения скоростей относительно их перестановки выделяет вигнеровскую последовательность лоренцевых бустов ее адаптируемостью к описанию поворота спина и скорости при криволинейном движении.

PACS number: **03.30.+p**

Содержание

1. Введение

Угол между направлением спина частицы и ее скоростью не является лоренцевым инвариантом. Рассмотрим, например, протон, покоящийся на платформе станции Бологое, со спином, направленным в сторону Петербурга. Тогда для наблюдателя, едущего мимо Бологого в поезде из Петербурга в Москву, угол между спином и скоростью будет равным нулю, в то время как для наблюдателя, едущего из Москвы в Петербург, он будет равным π. Однако у частиц с нулевой массой нет системы покоя. Для них угол между спином и скоростью равен либо нулю, либо π и является лоренцевым инвариантом, как и само значение спина в направлении движения частицы.

2. Вигнеровский поворот

Нетривиальная связь угла поворота спина массивной частицы с углом поворота ее импульса при лоренцевых преобразованиях неоднократно рассматривалась Вигнером [1, 2]. (Переводы этих статей на русский язык см. в сборнике [3].) Приведем здесь наиболее существенный для дальнейшего фрагмент из статьи Вигнера [1], изменив лишь нумерацию формул и полагая скорость света равной единице. Вигнер пишет:

"Рассмотрим частицу, находящуюся в состоянии покоя и поляризованную в направлении оси z. Подвергнув частицу преобразованию Лоренца с гиперболическим углом α, сообщим ей скорость в направлении оси z. Позднее мы будем считать, что этот угол очень велик и что частица "сильно" релятивистская, пока же мы получили частицу, поляризованную в направлении движения, которое совпадает с осью z. Чтобы получить частицу, поляризованную в направлении своего движения, но уже движущуюся в каком-то другом направлении, необходимо сначала произвести поворот и добиться желаемого направления поляризации, а затем сообщить частице скорость в нужном направлении. Релятивистскую инвариантность утверждения о том, что частица поляризована в направлении своего движения, можно проверить следующим образом. Частице, движущейся в направлении оси z и поляризованной в том же направлении, сообщим скорость в направлении оси x, подвергнув ее преобразованию Лоренца с гиперболическим углом ε. Сначала мы будем считать угол ε произвольным, но затем предположим, что он много меньше угла α. Частица могла бы находиться в том же состоянии движения, если бы ей сначала сообщили скорость в направлении, составляющем угол ϑ с осью z (подвергнув ее преобразованию с гиперболическим углом α'), где

$$\cosh\alpha' = \cosh\alpha\cosh\varepsilon\,, \quad \sin\vartheta = \frac{\cosh\alpha\sinh\varepsilon}{\sinh\alpha'}\,. \qquad (1)$$

Однако направление поляризации во втором случае отличалось бы от направления поляризации в первом. Чтобы оба направления совпали, систему, прежде чем придавать ей скорость в направлении ϑ, необходимо

В.И. Ритус. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (495) 132-64-26
E-mail: ritus@lpi.ru

Статья поступила 28 ноября 2006 г.

повернуть на угол $\vartheta - \delta$, где δ определяется из условия

$$\sin\delta = \frac{\sinh\varepsilon}{\sinh\alpha'} = \frac{\sinh\varepsilon}{\sqrt{\cosh^2\alpha\,\cosh^2\varepsilon - 1}}\,. \tag{2}$$

Последнее следует просто из тождества для преобразований Лоренца

$$A\left(\frac{\pi}{2},\,\varepsilon\right)A(0,\alpha) = A(\vartheta,\alpha')\,R\,(\vartheta-\delta)\,, \tag{3}$$

где углы α и ε произвольны, а углы α', ϑ и δ определяются из соотношений (1) и (2); $A(\vartheta,\alpha)$ означает преобразование Лоренца с гиперболическим углом α (в дальнейшем — просто "преобразование α") в направлении, лежащем в плоскости xz и составляющем угол ϑ с осью z; $R(\varphi)$ — поворот на угол φ в плоскости xz. Если бы угол δ был равен нулю, то частица, поляризованная в направлении своего движения после того как над ней произвели преобразование α, осталась бы поляризованной в направлении своего нового движения (в направлении ϑ) после второго преобразования ε. Если же угол δ отличен от нуля, то "согласованность" направлений движения и поляризации нарушается. Однако угол δ очень мал, если $\varepsilon \ll \alpha$, т.е. когда гиперболический угол второго преобразования намного меньше гиперболического угла первого, и если $\alpha \gg 1$".

Матрица $A\,(0,\alpha)$ лоренцева преобразования (буста), сообщающего системе координат S' относительно системы S скорость $v = \tanh\alpha$ вдоль оси z, имеет вид

$$A\,(0,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ 0 & \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрица $R(\vartheta)$ поворота системы S' в плоскости x, z системы S на угол ϑ по часовой стрелке равна

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Три строки и три столбца этих матриц относятся к осям x, z, t и x', z', t' систем S и S' соответственно. Поэтому матричные элементы естественно обозначить через $A_{SS'}(\vartheta,\alpha)$, $R_{SS'}(\vartheta)$, где индексы S и S' принимают значения x, z, t и x', z', t'. Направление в плоскости x, z, проходящее между осями x и z и образующее угол ϑ с осью z, будем называть "направлением ϑ". Тогда лоренцево преобразование

$$A_{SS'}(\vartheta,\alpha) = \big(R(\vartheta)\,A(0,\alpha)\,R(-\vartheta)\big)_{SS'} = \\ = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cosh\alpha & \sin\vartheta\cos\vartheta\,(\cosh\alpha - 1) & \sin\vartheta\sinh\alpha \\ \sin\vartheta\cos\vartheta\,(\cosh\alpha - 1) & \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\cosh\alpha & \cos\vartheta\sinh\alpha \\ \sin\vartheta\sinh\alpha & \cos\vartheta\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \tag{6}$$

придает системе координат S' относительно системы S скорость $v = \tanh\alpha$ в направлении ϑ.

Приведенные выражения для матриц $A(\vartheta,\alpha)$ и $R(\vartheta)$ позволяют убедиться в справедливости равенства (3), если использовать соотношения (1), (2). Удобнее всего это сделать, если представить (3) в виде

$$A(\vartheta,-\alpha')\,A\left(\frac{\pi}{2}\,,\varepsilon\right)A(0,\alpha) = R(\vartheta-\delta)\,, \tag{7}$$

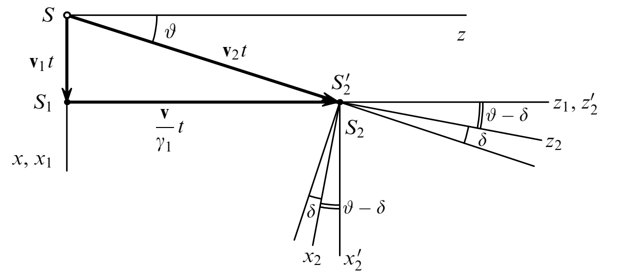

Рис. 1.

используя то, что матрица $A(\vartheta,-\alpha)$ обратна матрице $A(\vartheta,\alpha)$.

Равенство (3) означает, что произведение двух чисто лоренцевых преобразований с непараллельными скоростями не сводится к чисто лоренцеву преобразованию, т.е. такие преобразования не образуют группы. Но чисто лоренцевы преобразования и пространственные вращения образуют группу — однородную группу Лоренца.

Записав левую часть равенства (3) в виде $A_{SS_1}(\pi/2,\varepsilon)\times$ $\times\,A_{S_1S_2}(0,\alpha)$, ее можно интерпретировать следующим образом. Буст $A_{S_1S_2}(0,\alpha)$ сообщает системе S_2 относительно системы S_1 скорость $v = \tanh\alpha$ вдоль оси z_1, а буст $A_{SS_1}(\pi/2,\varepsilon)$ сообщает системе S_1 относительно лабораторной системы S скорость $v_1 = \tanh\varepsilon$ вдоль оси x. Тогда если в момент $t = 0$ начала трех инерциальных систем S, S_1, S_2 были в одной точке, то в момент t лабораторного времени они будут находиться в точках лабораторной системы S, отмеченных буквами S, S_1, S_2 на рис. 1.

То, что в момент t лабораторного времени начало S_1 будет находиться на расстоянии $v_1 t$ от начала S очевидно. В этот же момент начало S_2 будет находиться в лабораторной системе на расстоянии $(v/\gamma_1)\,t$, $\gamma_1 =$ $= 1/(1-v_1^2)^{1/2}$, от начала S_1. Действительно, начало S_2 находится на расстоянии vt_1 от начала S_1 в момент t_1 собственного времени системы S_1, а он связан с моментом t лабораторного времени соотношением $t_1 = t/\gamma_1$ из-за замедления хода движущихся часов по сравнению с ходом лабораторных. Поэтому

$$vt_1 = \frac{v}{\gamma_1}\,t\,. \tag{8}$$

Тогда скорость начала S_2 в лабораторной системе S равна

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}}{\gamma_1}\,, \tag{9}$$

а ее абсолютная величина равна

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{v^2}{\gamma_1^2}} = \tanh\alpha'\,, \tag{10}$$

если вместо скоростей v и v_1 воспользоваться гиперболическими углами α и ε,

$$v = \tanh\alpha\,,\quad v_1 = \tanh\varepsilon\,, \tag{11}$$

и их связью (1) с гиперболическим углом α'. Таким образом, скорость лоренцева преобразования $A(\vartheta,\alpha')$ в правой части (3) связана с гиперболическим углом α' традиционным соотношением (10). Рисунок 1 подтверждает также формулу (1) для угла ϑ между скоростью $\mathbf{v}_2$ и осью z лабораторной системы S:

$$\sin\vartheta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\tanh\varepsilon}{\tanh\alpha'} = \frac{\sinh\varepsilon\cosh\alpha}{\sinh\alpha'}\,. \tag{12}$$

Правую часть равенства (3), представленную в виде $A_{SS_2'}(\vartheta,\alpha')\,R_{S_2'S_2}(\vartheta-\delta)$, можно интерпретировать следующим образом. Преобразование $R_{S_2'S_2}(\vartheta-\delta)$ поворачивает систему S_2 относительно S_2' по часовой стрелке на угол $\vartheta-\delta$, а буст $A_{SS_2'}(\vartheta,\alpha')$ сообщает системе S_2' скорость v_2 в направлении ϑ.

Таким образом, если частица первоначально покоилась в лабораторной системе S, а ее спин был направлен вдоль оси z, то два лоренцевых буста, фигурирующих в левой части (3), сначала поворачивают ее спин по часовой стрелке на угол $\vartheta-\delta$ и затем сообщают частице скорость $\mathbf{v}_2$ в направлении ϑ. Из формул (1), (2) Вигнера для угла поворота спина следует формула

$$\omega \equiv \vartheta - \delta = \arcsin\frac{\sinh\alpha\sinh\varepsilon}{1+\cosh\alpha\cosh\varepsilon}\,. \tag{13}$$

Обратим внимание на важный предельный случай: если первый буст $A(0,\alpha)$ придает частице скорость v как угодно близкую к скорости света, т.е. $\alpha\to\infty$, $v\to 1$, то второй буст $A(\pi/2,\varepsilon)$ поворачивает эту скорость на конечный угол ϑ, оставляя скорость как угодно близкой к 1. В самом деле, записывая (10) в виде

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v^2(1-v_1^2)} = \sqrt{v^2 + v_1^2(1-v^2)} \tag{14}$$

и устремляя v к 1, получаем, что $v_2\to 1$. При этом из (12) следует, что $\sin\vartheta\to v_1$. Для $v=1$ формула (12) становится частным случаем формулы (5.6) [4] для аберрации света.

Из формул (1), (2) следуют простые соотношения для угла δ:

$$\tan\delta = \frac{\tanh\varepsilon}{\sinh\alpha} = \frac{\tan\vartheta}{\gamma_1\gamma}\,,\quad \sin\delta = \frac{\sin\vartheta}{\cosh\alpha} = \frac{\sin\vartheta}{\gamma}\,. \tag{15}$$

Первая из этих формул в других обозначениях совпадает с формулой (1.7) работы [2]. При $v\to 1$ $(\gamma\to\infty)$ угол $\delta\to 0$, т.е. для ультрарелятивистских частиц угол между спином и скоростью исчезает.

Если скорость $v_1 \ll v$, то углы ϑ и δ малы, а $\gamma_1\approx 1$. В этом случае $\delta=\vartheta/\gamma$, так что угол $\omega\equiv\vartheta-\delta$ поворота спина связан с углом ϑ поворота скорости простым соотношением

$$\omega \equiv \vartheta-\delta = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\vartheta,\quad \gamma=(1-v^2)^{-1/2},\quad \vartheta\ll 1\,. \tag{16}$$

Для ультрарелятивистских частиц углы поворота спина и скорости совпадают.

3. Трехпараметрические формулы для угла поворота спина

В более общем случае, когда скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ двух последовательных лоренцевых преобразований не ортогональны, поворот спина был рассмотрен в работах Стаппа [5], автора [6] и ряде других. В этом случае

скорость $\mathbf{v}_2$ начала системы S_2 относительно лабораторной системы S представляется векторной суммой

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{1+\mathbf{v}\mathbf{v}_1}\left\{\mathbf{v}_1\left[\frac{(\mathbf{v}\mathbf{v}_1)}{v_1^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_1}\right)+1\right]+\frac{\mathbf{v}}{\gamma_1}\right\} = \mathbf{v}_1\oplus\mathbf{v} \tag{17}$$

скорости $\mathbf{v}$ системы S_2 относительно S_1 и скорости $\mathbf{v}_1$ системы S_1 относительно S. Формула (17) представляет собой релятивистский закон сложения скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}$ и совпадает с формулой (5.1) из [4], если под $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2$ понимать фигурирующие в [4] скорости $\mathbf{V}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}$ соответственно.

В (17) дано также условное обозначение приведенной суммы двух скоростей с коэффициентами, зависящими от абсолютных величин этих скоростей и угла между ними. Последовательность скоростей в этом обозначении станет ясной, если придать скоростям физический смысл, снабдив каждую из них индексами систем отсчета. Тогда если $\mathbf{v}_{S_1S_2}$ обозначает скорость $\mathbf{v}$ системы S_2 относительно S_1 и т.д., то (17) примет вид

$$\mathbf{v}_{2SS_2} = \mathbf{v}_{1SS_1}\oplus\mathbf{v}_{S_1S_2}\,.$$

Заметим также, что если скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ подчиняются закону сложения (17), то они же подчиняются и обратному закону сложения $\mathbf{v}=(-\mathbf{v}_1)\oplus\mathbf{v}_2$.

Для угла ω поворота спина Стапп [5] получил формулу

$$\mathbf{n}\sin\omega = [\mathbf{v}\mathbf{v}_1]\,\gamma\gamma_1\frac{1+\gamma+\gamma_1+\gamma_2}{(1+\gamma)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)}\,,$$

$$\gamma_2 = \gamma\gamma_1(1+\mathbf{v}\mathbf{v}_1)\,, \tag{18}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления векторного произведения $[\mathbf{v}\mathbf{v}_1]$. В этой формуле ω выражается не через два, как у Вигнера, а через три независимых параметра — через абсолютные величины v, v_1 скоростей $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ и угол между ними, если учесть, что γ_2 также выражается через эти три величины.

В случае ортогональности скоростей $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ скорость $\mathbf{v}_2$ приобретает простой вид (9), а для угла ω поворота спина получаем

$$\sin\omega = \frac{vv_1\gamma\gamma_1}{1+\gamma\gamma_1}\,, \tag{19}$$

т.е. формулу Вигнера (13).

В работе автора [6] угол ω поворота спина явно выражен через абсолютные величины скоростей $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ и угол θ между ними:

$$\omega(u,u_1,\theta) = 2\arctan\frac{uu_1\sin\theta}{uu_1\cos\theta+(\gamma+1)(\gamma_1+1)}\,. \tag{20}$$

Здесь и ниже $\mathbf{u}=\mathbf{v}\gamma$, $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1\gamma_1$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2\gamma_2$ — пространственные части 4-скоростей, а γ, γ_1, γ_2 — временны́е компоненты последних. Формула (20) связана с формулой Стаппа (18) благодаря соотношению

$$\sin\omega = \frac{2\tan(\omega/2)}{1+\tan^2(\omega/2)}\,.$$

Вследствие определенной симметрии, выражаемой формулами (37), (38) работы [6], угол ω представляется также через абсолютные величины скоростей $\mathbf{v}_2$, $-\mathbf{v}_1$ и угол θ' между ними:

$$\omega(u_2, u_1, \theta') = 2\arctan\frac{u_2 u_1 \sin\theta'}{u_2 u_1 \cos\theta' + (\gamma_2+1)(\gamma_1+1)}\,, \tag{21}$$

а также через абсолютные величины скоростей $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2$ и угол ϑ между ними

$$\omega(u, u_2, \vartheta) = 2\arctan\frac{u u_2 \sin\vartheta}{u u_2 \cos\vartheta + (\gamma+1)(\gamma_2+1)}\,. \tag{22}$$

Когда скорости v, v_2 совпадают со скоростью света, $\omega = \vartheta$. В остальных случаях угол поворота спина меньше угла поворота скорости, $\omega < \vartheta$, это основное качественное утверждение статьи [6].

При $\theta = \pi/2$ формула (20) обращается в

$$\omega\left(u, u_1, \frac{\pi}{2}\right) = \arctan\frac{u u_1}{\gamma+\gamma_1} = \arcsin\frac{u u_1}{1+\gamma\gamma_1} \tag{23}$$

и согласуется с вигнеровским выражением (19).

Вследствие того, что

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})\,C\,, \quad C = \frac{\gamma+\gamma_2}{\gamma\gamma_2 + \mathbf{u}\mathbf{u}_2 + 1} = \frac{\gamma_1+1}{\gamma+\gamma\gamma_1+\mathbf{u}\mathbf{u}_1}\,, \tag{24}$$

единая ось поворота в каждом из трех представлений (20)–(22) может быть выражена соответствующим векторным произведением, так как

$$[\mathbf{u}\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}\mathbf{u}_2]\,C\,. \tag{25}$$

Под знаком arctan в формулах (20)–(22) в числителях стоят длины равных друг другу векторов (25), а в знаменателях — равные друг другу величины

$$\mathbf{u}\mathbf{u}_1 + (\gamma+1)(\gamma_1+1) = -\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 + (\gamma_2+1)(\gamma_1+1) = \\ = C\big(\mathbf{u}\mathbf{u}_2 + (\gamma+1)(\gamma_2+1)\big)\,, \tag{26}$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2$ связаны лоренцевым преобразованием со скоростью $\mathbf{v}_1$.

Угол ω и направление $\mathbf{n}$ вращения — характеристики этого лоренцева преобразования. Обратное преобразование вектора $\mathbf{u}_2$ в $\mathbf{u}$ бустом со скоростью $-\mathbf{v}_1$ характеризуется тем же углом ω, но противоположным направлением вращения.

4. Мёллеровский подход и его связь с вигнеровским

В § 2.8 своей книги [7] Мёллер рассматривает цепочку двигающихся друг относительно друга инерциальных систем отсчета S, S', S'', в которой система S'' двигается относительно S' со скоростью $\mathbf{u}'$, а система S' — относительно S со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда скорость $\mathbf{w}$ системы S'' относительно S будет даваться формулой (17), в которой роли $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}$ выполняют теперь мёллеровские скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$, т.е.

$$\mathbf{w} = \frac{1}{1+\mathbf{v}\mathbf{u}'}\left\{\mathbf{v}\left[\frac{(\mathbf{v}\mathbf{u}')}{v^2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)+1\right]+\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}\right\} = \mathbf{v}\oplus\mathbf{u}'. \tag{27}$$

Эта формула совпадает с формулой (2.59) Мёллера. Мёллер приводит также выражение (2.59′) для скорости $\mathbf{w}''$ системы S относительно S'':

$$\mathbf{w}'' = -\frac{1}{1+\mathbf{u}'\mathbf{v}}\left\{\mathbf{u}'\left[\frac{(\mathbf{u}'\mathbf{v})}{u'^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_{u'}}\right)+1\right]+\frac{\mathbf{v}}{\gamma_{u'}}\right\} = \\ = (-\mathbf{u}')\oplus(-\mathbf{v}) = -(\mathbf{u}'\oplus\mathbf{v})\,. \tag{28}$$

Оно отличается от (27) перестановкой скоростей и знаком. Это следует из того, что $\mathbf{w}''$ является релятивистской суммой скорости $(-\mathbf{v})$ системы S относительно S' и скорости $(-\mathbf{u}')$ системы S' относительно S''. Снабжая все скорости в (27) и (28) индексами систем, можно записать

$$\mathbf{w}_{SS''} = \mathbf{v}_{SS'}\oplus\mathbf{u}'_{S'S''}\,, \quad \mathbf{w}''_{S''S} = (-\mathbf{u}')_{S''S'}\oplus(-\mathbf{v})_{S'S}\,. \tag{29}$$

Релятивистская сумма двух неколлинеарных скоростей $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$ не симметрична относительно их перестановки [4], поэтому скорости $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}''$ не противоположны друг другу, хотя и равны по величине:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}\oplus\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}'\oplus\mathbf{v} = -\mathbf{w}''\,, \quad \mathbf{w}^2 = \mathbf{w}''^2\,. \tag{30}$$

Сравнение формул (17) и (28) показывает, что если считать скорость $\mathbf{v}_1$ равной скорости $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}'$, то $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{w}''$. Это означает, что $-\mathbf{w}''$ имеет физический смысл скорости системы S_2 относительно лабораторной системы S и представляется релятивистской суммой скорости $\mathbf{v}$ системы S_2 относительно S_1 и скорости $\mathbf{u}'$ системы S_1 относительно S:

$$\mathbf{v}_{2SS_2} = (-\mathbf{w}'')_{SS_2} = \mathbf{u}'_{SS_1}\oplus\mathbf{v}_{S_1S_2}\,. \tag{31}$$

Покажем теперь, что угол ω между векторами $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{w}''$ совпадает с углом поворота спина частицы, когда ее скорость меняется от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{w}''$. В этом случае величина ω определяется левой частью формулы

$$\mathbf{n}\sin\omega = \frac{[\mathbf{w}, -\mathbf{w}'']}{w^2} = [\mathbf{v}\mathbf{v}_1]\,\gamma\gamma_1\,\frac{1+\gamma+\gamma_1+\gamma_2}{(\gamma+1)(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}\,, \tag{32}$$

где единичный вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль всех встречающихся здесь и ниже векторных произведений. Правое выражение в (32) возникает в результате вычисления векторного произведения с помощью выражений (27) и (28) для $\mathbf{w}$ и $-\mathbf{w}''$ и совпадает с формулой Стаппа (18). Ради компактности мы вернулись к обозначениям

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}'\,, \quad \gamma_1 = \gamma_{u'}\,, \quad \gamma_2 = \gamma_{w''} = \gamma_w = \gamma\gamma_{u'}(1+\mathbf{v}\mathbf{u}')\,. \tag{33}$$

Таким образом, утверждение о двояком смысле угла ω доказано.

Введем соотношением

$$\mathbf{n}\sin\omega = \frac{[\mathbf{w}, -\mathbf{w}'']}{w^2} = -\boldsymbol{\Omega} \tag{34}$$

вектор $\boldsymbol{\Omega}$. Знак минус перед $\boldsymbol{\Omega}$ поставлен исключительно для совпадения со знаком этого вектора у Мёллера. Тогда оператор поворота D, определенный в книге Мёллера формулой (2.60), а именно, $D\mathbf{w}'' = -\mathbf{w}$, можно выразить через $\mathbf{\Omega}$ следующим образом:

$$D\mathbf{w}'' = -\mathbf{w} = \mathbf{w}''\sqrt{1-\mathbf{\Omega}^2} + [\mathbf{\Omega}\,\mathbf{w}'']\,. \tag{35}$$

Начиная с формулы (2.61) Мёллер ограничивается приближением, когда скорость $\mathbf{u}'$ мала по сравнению с $\mathbf{v}$. Тогда угол поворота спина ω и модуль вектора $\mathbf{\Omega}$ малы по сравнению с единицей. В этом приближении Мёллер получает для $\mathbf{\Omega}$ выражение (2.64):

$$-\mathbf{\Omega} = (\gamma - 1)\,\frac{[\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{v}]}{v^2}\,, \tag{36}$$

где согласно формуле (2.63) Мёллера $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ есть просто обозначение разности $\mathbf{w} - \mathbf{v}$.

Мое утверждение заключается в том, что если в формуле (36), т.е. в формуле (2.64) Мёллера, вместо обозначения $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ использовать сначала разность $\mathbf{w} - \mathbf{v}$, затем ее выражение

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{u}' + \mathbf{v}\,\frac{(\mathbf{v}\mathbf{u}')}{v^2}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\right], \quad u' \ll v\,, \tag{37}$$

из верхней строчки формулы (2.62) Мёллера и, наконец, в возникшем произведении $[\mathbf{v}\mathbf{u}']$ использовать для $\mathbf{u}'$ среднюю строчку

$$\mathbf{w}'' = -\left[\mathbf{v} + \mathbf{u}' - \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{u}')\right], \quad u' \ll v\,, \tag{38}$$

той же формулы (2.62), то получим для $\mathbf{\Omega}$ три тождественных выражения:

$$-\mathbf{\Omega} = (\gamma - 1)\,\frac{[\mathbf{v}\mathbf{w}]}{v^2} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{[\mathbf{v}\mathbf{u}']}{v^2} = \\ = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{[\mathbf{v}, -\mathbf{w}'']}{v^2}\,, \quad u' \ll v\,. \tag{39}$$

Для вычисления векторных произведений в (39) удобно представить фигурирующие там скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}'$, $-\mathbf{w}''$ в одной лабораторной системе отсчета.

Если в момент $t = 0$ начала мёллеровских систем отсчета S, S', S'' совпадали, то в момент лабораторного времени $t = 1$ с они будут находиться в точках лабораторной системы S, отмеченных буквами S, S', S'' на рис. 2.

На этом же рисунке нанесено также положение начал вигнеровских систем отсчета S, S_1, S_2 в тот же момент лабораторного времени $t = 1$ с. Для простоты мы ограничились случаем, когда скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}'$ ортогональны, так что

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}'}{\gamma}\,, \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{w}'' = \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}}{\gamma_1}\,, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}'\,. \tag{40}$$

На рисунке 2 изображена ситуация, когда $v = 2v_1 = 0{,}94$, так что $\gamma = 3$, $\gamma_1 = 1{,}14$. Однако при вычислении векторных произведений в (39) нас будет интересовать случай $v_1 = u' \ll v$. В этом случае углы ϑ и δ малы и поэтому

$$\frac{[\mathbf{v}\mathbf{w}]}{v^2} = \mathbf{n}\,\delta\,, \quad \frac{[\mathbf{v}\mathbf{u}']}{v^2} = \mathbf{n}\,\vartheta\,, \quad \frac{[\mathbf{v}, -\mathbf{w}'']}{v^2} = \mathbf{n}\,\vartheta\,. \tag{41}$$

При $u' \ll v$ малая скорость $\mathbf{u}' \perp \mathbf{v}$ поворачивает скорость $\mathbf{v}$ к $\mathbf{v}_2 \equiv -\mathbf{w}''$ на малый угол $\vartheta = u'/v$ в γ раз бо́льший, чем угол поворота $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$ при обратном порядке сложения скоростей. Это происходит потому, что согласно закону $\mathbf{v}_2 \equiv -\mathbf{w}'' = \mathbf{u}' \oplus \mathbf{v}$ малая скорость $\mathbf{u}'$ отсчитывается относительно лабораторной системы, в то время как в сумме $\mathbf{w} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}'$ малая скорость $\mathbf{u}'$ отсчитывается относительно системы S', быстро движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно лабораторной. Поэтому из-за замедления времени в системе S' по сравнению с временем в лабораторной системе S отклонение $\Delta x_{S'S''}$ начала S'' от начала S' в поперечном к $\mathbf{v}$ направлении происходит в лабораторной системе со скоростью u'/γ, т.е. в γ раз медленнее, чем в системе S':

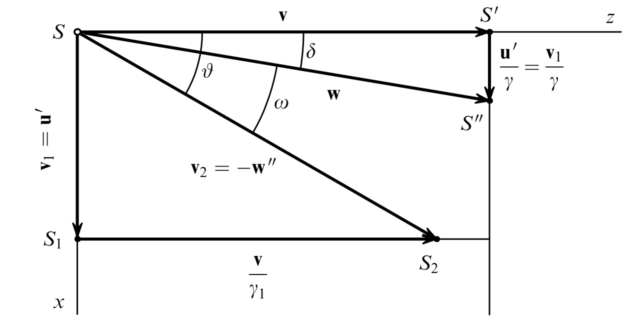

Рис. 2.

$$\Delta x_{S'S''} = u'\Delta t' = u'\sqrt{1 - v^2}\,\Delta t = \frac{u'}{\gamma}\,\Delta t = \frac{1}{\gamma}\,\Delta x_{SS_1}\,. \tag{42}$$

Здесь Δt и $\Delta t' = \Delta t/\gamma$ — интервалы времени отклонения на одно и то же расстояние $\Delta x_{S'S''}$ в системах S и S'. С другой стороны, отклонение Δx_{SS_1} начала S_1 от начала S, происходящее в лабораторной системе со скоростью $\mathbf{u}' \perp \mathbf{v}$ будет за то же время Δt в γ раз больше отклонения $\Delta x_{S'S''}$.

Таким образом, при $u' \ll v$ угол $\delta = \vartheta/\gamma$ и формулы (34), (39), (41) дают для связи угла поворота спина с углом поворота скорости выражение

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\vartheta\,, \tag{43}$$

совпадающее с предельным выражением (16), полученным из более общих формул Вигнера, Стаппа и автора.

Итак, используя формулы § 2.8 книги Мёллера и вигнеровское определение угла поворота спина при последовательных лоренцевых преобразованиях с неколлинеарными скоростями (совпадающее с мёллеровским определением с точностью до знака; см. (34)), мы получаем одинаковый результат в пределе $u' \ll v$.

5. Поворот спина при криволинейном движении частицы

Перейдем, однако, к обсуждению формулы Мёллера (36). Обозначение $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ не случайно. Формулу для поворота спина при переходе от одной инерциальной системы к другой Мёллер хочет применить для описания поворота спина при движении частицы по криволинейной траектории. В этом случае скорость $\mathbf{v}(t)$ зависит от времени и ее значения в близкие моменты времени $t = 0$ и $t = \delta t$ связаны формулой

$$\mathbf{v}(\delta t) = \mathbf{v}(0) + \dot{\mathbf{v}}(0)\,\delta t\,, \tag{44}$$

где скорость и ускорение в момент $t = 0$ далее обозначаются просто как $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ и удовлетворяют условию $|\dot{\mathbf{v}}\delta t| \ll v$.

Обозначая разность $\mathbf{w}-\mathbf{v}$ через $\mathrm{d}\mathbf{v}$, Мёллер вводит ускорение $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$, где интервал $\mathrm{d}t$ равен, очевидно, лабораторному времени изменения скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{w}$. Ограничиваясь случаем $u' \ll v$ и сравнивая формулу (44) при $\delta t = \mathrm{d}t$ с формулой (37) для разности $\mathbf{w}-\mathbf{v}$, получаем условие совпадения скоростей $\mathbf{v}(\mathrm{d}t)$ и $\mathbf{w}$:

$$\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{u}' + \mathbf{v}\,\frac{(\mathbf{v}\mathbf{u}')}{v^2}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\right]. \tag{45}$$

Ясно, что величину u' нужно выбрать пропорциональной $\mathrm{d}t$.

Формальным решением уравнения (45) является

$$\mathbf{u}' = \left[\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\,\frac{(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{v^2}\,(\gamma-1)\right]\gamma\,\mathrm{d}t\,. \tag{46}$$

Однако такое решение при любом ненулевом ускорении $\dot{\mathbf{v}}$, удовлетворяющем условию $|\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}t| \ll v$, не удовлетворяет условию $u' \ll v$ в ультрарелятивистском пределе, т.е. при $\gamma \gg 1$, даже если $\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = 0$. Условие малости u' предъявляет значительно более жесткое требование к интервалу $\mathrm{d}t$: $|\dot{\mathbf{v}}\gamma\,\mathrm{d}t| \ll v$. Этот интервал становится зависящим не только от ускорения, но и от скорости. По существу, это условие определяет другой, не зависящий от скорости интервал лабораторного времени $\Delta t = \gamma\,\mathrm{d}t$, на котором скорость меняется от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{v}_2 \equiv -\mathbf{w}''$, поворачиваясь на угол ϑ, а спин поворачивается на угол ω, в то время как условие $|\dot{\mathbf{v}}\Delta t| \ll v$ становится условием малости этих углов. Мёллер, однако, игнорирует это обстоятельство и, используя формулу (36), получает для скорости изменения угла поворота спина с лабораторным временем формулу

$$-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{M}} \equiv -\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = (\gamma-1)\,\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{v^2}\,, \tag{47}$$

имеющую у него номер (2.65). (Мы снабдили мёллеровскую скорость поворота спина индексом М, чтобы не путать с нашим углом поворота спина ω. Вектор $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{M}}$ имеет размерность рад c^{-1}, а ω измеряется в радианах.)

В наших обозначениях приведенное выражение должно было бы равняться $\mathbf{n}\,(\omega/\mathrm{d}t)$. Но эта величина не равна угловой скорости поворота спина, т.е. производной угла поворота спина по лабораторному времени, так как ω — это угол поворота спина при изменении скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{v}_2 \equiv -\mathbf{w}''$, а $\mathrm{d}t$ — это лабораторное время изменения скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{w}$. Так как угол ϑ между скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2$ в γ раз больше угла δ между скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ (см. рис. 2), то при заданной в момент $t=0$ угловой скорости $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]/v^2$ движения время Δt изменения скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{v}_2$ в γ раз больше времени $\mathrm{d}t$ изменения скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{w}$, $\Delta t = \gamma\,\mathrm{d}t$. Поэтому правильное выражение для угловой скорости поворота спина таково

$$\mathbf{n}\,\frac{\omega}{\Delta t} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{M}}}{\gamma} = -\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Delta t} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{v^2}\,. \tag{48}$$

Левую и правую части этого равенства и само равенство можно записать в виде

$$\mathbf{n}\,\dot{\omega}(0) = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\dot{\vartheta}(0)\,\mathbf{n}\,, \tag{49}$$

где $\omega(t) = \dot{\omega}(0)\,t$ и $\vartheta(t) = \dot{\vartheta}(0)\,t$ — углы поворота спина и скорости, линейно зависящие от лабораторного времени t, пока они малы по сравнению с единицей.

Так как лабораторное время t связано с собственным временем t' системы S' соотношением $t = \gamma t'$, а частица, покоящаяся в начале S'', движется в системе S' с нерелятивистской скоростью $u' \ll v$, то мёллеровскому вектору $-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{M}}$ можно придать смысл угловой скорости поворота спина в собственной системе:

$$-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{M}} = \mathbf{n}\,\omega'(0) = (\gamma-1)\,\dot{\vartheta}(0)\,\mathbf{n}\,. \tag{50}$$

Штрих и точка обозначают производные по собственному времени и по лабораторному времени соответственно. Тогда для ультрарелятивистской скорости $\mathbf{v}(0)$ и фиксированной угловой скорости движения $\dot{\vartheta}(0)$ угловая скорость поворота спина в собственной системе частицы может быть как угодно большой просто из-за замедления собственного времени по сравнению с лабораторным.

Итак, формулу (36), которая в книге Мёллера предшествует формуле (47), можно представить через вигнеровские углы,

$$\mathbf{n}\,\omega = -\boldsymbol{\Omega} = (\gamma-1)\,\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{v^2}\,\mathrm{d}t = (\gamma-1)\,\delta\,\mathbf{n}\,, \tag{51}$$

используя то, что $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]/v^2 = \mathbf{n}\,\dot{\vartheta}(0)$ — это угловая скорость движения в момент $t=0$, а $\mathrm{d}t$ — время поворота скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{w}$, т.е. поворота на угол $\delta = \dot{\vartheta}(0)\,\mathrm{d}t$ (см. рис. 2). Эта формула эквивалентна

$$\omega \equiv \vartheta - \delta = (\gamma-1)\,\delta \tag{52}$$

и приводит к уже знакомым нам соотношениям $\vartheta = \gamma\delta$ и $\omega = (1-1/\gamma)\,\vartheta$ между углами ϑ, δ и ω. Таким образом, ошибка Мёллера содержится в самом последнем шаге, когда правильное выражение (51) он делит на $\mathrm{d}t$ и объявляет выражение (47) угловой скоростью поворота спина в лабораторной системе. Это не верно, так как спин поворачивается на угол ω в собственной системе за лабораторное время $\Delta t = \gamma\,\mathrm{d}t$, а скорость за это же время поворачивается в лабораторной системе на угол ϑ. Условие $|\,\dot{\mathbf{v}}\,\Delta t| \ll v$ применимости приведенных формул эквивалентно малости угла ϑ. Это условие не позволяет, в частности, при заданном ускорении $\dot{\mathbf{v}}$ и γ, стремящемся к бесконечности, фиксировать угол δ. В этом случае интервал $\mathrm{d}t$ стремится к нулю, а вместе с ним и угол

$$\delta = \dot{\vartheta}(0)\,\mathrm{d}t = \dot{\vartheta}(0)\,\frac{\Delta t}{\gamma}\,, \tag{53}$$

так как скорость $\mathbf{w}$ стремится к $\mathbf{v}$ (см. рис. 2).

Существенная зависимость интервала $\mathrm{d}t$ от скорости $\mathbf{v}$ в релятивистской области и совпадение его величины с величиной интервала $\Delta t'$ собственного времени, соответствующего интервалу $\Delta t = \gamma\Delta t'$ лабораторного времени изменения скорости частицы от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}\,(\Delta t)$,

$$\mathrm{d}t = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}\,, \tag{54}$$

создают некоторые затруднения при рассмотрении поворота спина в криволинейном движении с помощью мёллеровской последовательности лоренцевых бустов.

Для описания поворота спина при движении частицы по криволинейной траектории значительно удобнее и концептуально нагляднее использовать не мёллеровскую, а вигнеровскую последовательность лоренцевых бустов. Тогда первый буст придает частице скорость $\mathbf{v}$ вдоль ее спина, а второй уже двигающейся частице сообщает дополнительную скорость $\mathbf{v}_1$. При $v_1 \ll v$ результирующая скорость частицы согласно (17) становится равной

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{w}'' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{v}_1)\,, \tag{55}$$

и линейный по $\mathbf{v}_1$ член в этой формуле можно отождествить с членом $\dot{\mathbf{v}}\Delta t$ в формуле (44), т.е.

$$\dot{\mathbf{v}}\Delta t = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{v}_1)\,. \tag{56}$$

Для этого отождествления нужно считать величину v_1 пропорциональной интервалу Δt лабораторного времени изменения скорости от значения $\mathbf{v}$ до значения $\mathbf{v}_2$. Формальным решением уравнения (56) является

$$\mathbf{v}_1 = \left[\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\,\gamma^2\right]\Delta t\,. \tag{57}$$

Оно удовлетворяет условию $v_1 \ll v$ при любом γ, если $|\dot{\mathbf{v}}\Delta t| \ll v$ и $\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = 0$. Тогда любой из двух последних членов в (39) приводит к формуле

$$\mathbf{n}\,\omega = -\boldsymbol{\Omega} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{v^2}\,\Delta t = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\dot{\vartheta}(0)\,\Delta t\,\mathbf{n}\,, \tag{58}$$

совпадающей с формулами (16) или (43), так как $\dot{\vartheta}(0)\,\Delta t = \vartheta$ — угол между скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2$. Отсюда немедленно следуют формулы связи угловых скоростей (48), (49), не вызывающие никаких недоумений.

Заметим теперь, что в нерелятивистском пределе $v \ll 1$ решения (46) и (57) для мёллеровского и вигнеровского подходов удовлетворяют условию $u' = v_1 \ll v$, если $|\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}t|$, $|\dot{\mathbf{v}}\Delta t| \ll v$, условие ортогональности скорости и ускорения отпадает. В этом случае интервалы $\mathrm{d}t$ и Δt и углы δ и ϑ практически совпадают, а

$$\omega = \frac{1}{2}\,v^2\vartheta\,. \tag{59}$$

Это и есть формула Томаса [8].

6. Еще о связи мёллеровского и вигнеровского подходов

Формально мёллеровская последовательность лоренцевых бустов отличается от вигнеровской перестановкой местами матриц $A(0,\alpha)$ и $A(\pi/2,\varepsilon)$. Такая перестановка эквивалентна транспонированию левой и правой частей (3) и приводит к матрице

$$M \equiv A(0,\alpha)\,A\left(\frac{\pi}{2}\,,\varepsilon\right) = R(\delta-\vartheta)\,A(\vartheta,\alpha') = \\ = A(\delta,\alpha')\,R(\delta-\vartheta)\,, \tag{60}$$

так как при транспонировании матрица лоренцева преобразования не меняется (см. (6)), а матрица поворота меняет знак угла поворота (см. (5)). Последнее выражение в (60) для матрицы M получено с помощью соотношений

$$A(\vartheta,\alpha') = R(\vartheta)\,A(0,\alpha')\,R(-\vartheta)\,,\;\; R(\delta-\vartheta)\,R(\vartheta) = R(\delta)\,. \tag{61}$$

Аналогично и вигнеровская последовательность бустов представляется двумя полярными разложениями, т.е. произведениями симметрической и ортогональной матриц [9],

$$W \equiv A\left(\frac{\pi}{2}\,,\varepsilon\right)A(0,\alpha) = A(\vartheta,\alpha')\,R(\vartheta-\delta) = \\ = R(\vartheta-\delta)\,A(\delta,\alpha')\,. \tag{62}$$

Таким образом, вигнеровская и мёллеровская матрицы связаны как транспонированием, так и соотношением эквивалентности:

$$W = \widetilde{M} = R(\vartheta-\delta)\,M\,R(\vartheta-\delta)\,. \tag{63}$$

По поводу полярных разложений и эвивалентности матриц см. [9, гл. 3, § 5; гл. 9, § 14; гл. 11, § 2].

Соотношение эквивалентности (63) можно интерпретировать следующим образом. Читаем справа налево. Матрица $R(\vartheta-\delta)$ поворачивает спин в системе покоя частицы с оси z на угол $\vartheta-\delta$ по часовой стрелке. Матрица $R(\delta-\vartheta)$, входящая в правое представление (60) для M, возвращает спин на ось z. Буст $A(\delta,\alpha')$ придает частице скорость $\mathbf{w}$, $w = \tanh\alpha'$, в направлении δ, так что угол между спином и скоростью оказывается равным δ. Матрица $R(\vartheta-\delta)$ поворачивает по часовой стрелке как скорость, так и спин на угол $\vartheta-\delta$, в результате чего скоростью частицы становится вектор $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{w}''$, $v_2 = w'' = \tanh\alpha'$. Скорость $\mathbf{v}_2$ отклонена от оси z на угол ϑ, в то время как спин отклонен от оси z на угол $\vartheta-\delta$. Именно эта информация содержится в представлении (3) или (62) для вигнеровской матрицы W.

В заключение следует подчеркнуть, что в работах Вигнера рассматривается поворот спина и скорости частицы и изменение угла между спином и скоростью при переходе из одной инерциальной системы в другую (вигнеровский поворот). В книге Мёллера такое рассмотрение используется (приспосабливается) для описания поворота спина вслед за поворотом скорости при криволинейном движении частицы в одной и той же инерциальной системе в предположении, что силы изменяют направление скорости, но не сообщают спину момента вращения. Именно к этому случаю относятся формула Томаса и термин прецессия Томаса.

Эта статья — результат анализа вопросов, содержавшихся в представленном в *УФН* обзоре Г.Б. Малыкина, недавно опубликованном [10].

Работа поддержана грантами РФФИ 05-02-17217 и Научных школ 4401.2006.2.

Список литературы

1. Wigner E P *Helv. Phys. Acta* (Suppl. IV) 210 (1956)
2. Wigner E P *Rev. Mod. Phys.* **29** 255 (1957)
3. Вигнер Е *Этюды о симметрии* (М.: Мир, 1971)
4. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
5. Stapp H P *Phys. Rev.* **103** 425 (1956)

6. Ритус В И *ЖЭТФ* **40** 352 (1961)
7. Мёллер К *Теория относительности* 2-е изд. (М.: Атомиздат, 1975)
8. Thomas L H *Nature* **117** 514 (1926)
9. Гантмахер Ф Р *Теория матриц* 4-е изд. (М.: Наука, 1988)
10. Малыкин Г Б *УФН* **176** 865 (2006)

On the difference between Wigner's and Møller's approaches to the description of the Thomas precession

V.I. Ritus
P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-495*) *132-64 26*
E-mail: *ritus@lpi.ru*

Wigner's ideas are described on how the spin and velocity of a particle rotate and the angle between them changes under noncollinear velocity Lorentz transformations. It is shown that the Møller description of spin rotation can be reduced to that of Wigner. The Møller formula for the spin rotation angle is corrected for the curvilinear motion of a particle. The lack of velocity permutation symmetry in the relativistic law of addition of velocities makes Wigner's sequence of Lorentz boosts distinguished in being adaptable to the description of spin and velocity rotation for curvilinear motion.

PACS number: **03.30.+p**

Bibliography — 10 references *Received 28 November 2006*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **177** (1) 105–112 (2007) *Physics – Uspekhi* **50** (1) (2007)