

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**Странные атTRACTоры в динамике кельтских камней**

А.В. Борисов, И.С. Мамаев

Работа представляет собой обзор по динамике кельтских камней — одной из моделей неголономной механики с любопытными физическими свойствами. Собраны все известные ранее аналитические результаты и приведены новые результаты компьютерного анализа, полученные авторами. В частности, впервые систематически исследуются трехмерные точечные отображения Пуанкаре, порождаемые динамической системой. Показано, что для трехмерного отображения, связанного с динамикой кельтского камня, типичны явления потери устойчивости периодических и квазипериодических решений, приводящие к появлению странных атTRACTоров. Это позволяет объяснить некоторые новые свойства в поведении кельтских камней, связанные с существованием параметров, при которых регулярные решения сменяются на хаотические.

PACS numbers: 05.45.-a, 45.10.-b, 45.40.-f

Содержание

1. Введение (407).
 2. Неголономная модель поведения. Уравнения движения (408).
 3. Модели поверхности — параболоид и эллипсоид (409).
 4. Переменные Андуайе–Депри и трехмерные отображения Пуанкаре (409).
 5. Симметрии потока и отображения (410).
 - 5.1. Свойство обратимости.
 - 5.2. Симметрия относительно поворота осей.
 - 5.3. Симметрия относительно плоскости.
 6. Известные результаты в динамике кельтских камней (411).
 - 6.1. Устойчивость перманентных вращений.
 - 6.2. Бифуркация Хопфа. Рождение цикла.
 - 6.3. Нелинейные колебания вблизи положения равновесия.
 - 6.4. Несуществование инвариантной меры.
 - 6.5. Численные исследования Линдберга и Лонгмана.
 7. Глобальная динамика кельтского камня. Странный атTRACTор (413).
 - 7.1. Модель параболоида ($\delta = 0,2$).
 - 7.2. Модель эллипсоида.
 8. Заключение (418).
- Список литературы (418).

1. Введение

Сделаем первоначально ряд физических и исторических замечаний относительно кельтских камней, их свойств и связанных с ними исследований. Первое знакомство с ними можно получить в любопытной статье Дж. Уолкера (J. Walker) [1].

Напомним, что необычное поведение кельтского камня заключается в следующем. Если поместить его на

горизонтальную плоскость и закрутить в определенном направлении вдоль вертикальной оси, то он может устойчиво продолжать свое вращение. Если же направление вращения изменить на противоположное, то он вскоре перестает вращаться, начинает колебаться вокруг горизонтальной оси, а потом без внешнего воздействия меняет направление вращения вокруг вертикальной оси на противоположное (явление реверса). Для некоторых моделей камней такие смены вращения могут наблюдаться при любом направлении вертикального вращения и происходят многократно.

В статье Уолкера приводятся также другие любопытные опыты с кельтскими камнями и описание нескольких их моделей. Одна из моделей приведена на рис. 1. Как видно, для кельтских камней типична некоторая динамическая асимметрия в точке контакта тела и плоскости.

Простейшую модель кельтского камня, также рассматриваемую Уолкером, можно получить, прикрепив небольшую палочку к половинке яйца под некоторым углом к его оси симметрии (рис. 2). Здесь можно будет наблюдать, на первый взгляд, очень странные движения: если надавить на одну сторону палочки вниз, то тело не будет колебаться вокруг горизонтальной оси, как пер-

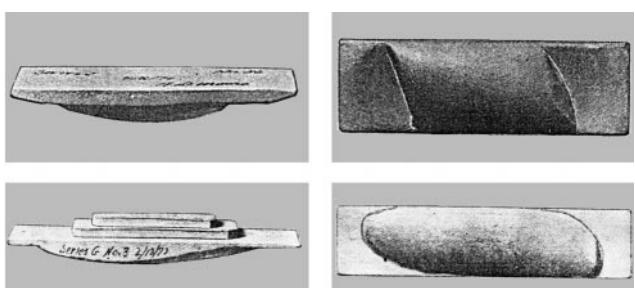


Рис. 1. Две модели кельтского камня из статьи Уолкера [1].

Статья поступила 24 июня 2002 г., после доработки 4 декабря 2002 г.

А.В. Борисов, И.С. Мамаев. Институт компьютерных исследований, 426034 г. Ижевск, Университетская ул. 1, Российская Федерация
Тел. (3412) 76-82-95
E-mail: borisov@rcd.ru; mamaev@rcd.ru

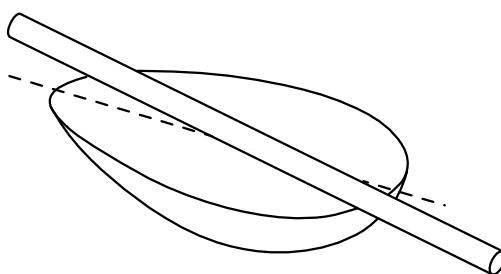


Рис. 2. Еще одна модель кельтского камня из статьи Уолкера [1].

воначально кажется, а начнет медленно вращаться вокруг вертикальной оси. Если ту же палочку надавить вниз с другой стороны, то это приведет к изменению направления вращения вокруг той же вертикальной оси.

Не предполагая здесь подробно останавливаться на исторических и описательных аспектах, касающихся движения кельтских камней, отметим только, что они подробно обсуждаются в литературе, приведенной в книге [2]. Замечательные свойства кельтских камней были замечены Г.Т. Уолкером (G.T. Walker) в 1895 г., который дал их элементарное физическое описание. Этой задачей занимались также Г. Герглотц (1941 г.) и К. Магнус (1974 г.), которые в основном исследовали вопросы устойчивости. Мы будем в дальнейшем ссылаться на работы И.С. Астапова [3], А.В. Карапетяна [4, 5], А.П. Маркеева [6], имеющие непосредственное отношение к нашим результатам, а также на численную работу Линдберга и Лонгмана (R.E. Lindberg, R.W. Longman) [7], краткий анализ которой содержится в [8]. Среди других авторов, занимавшихся проблемой, видимо, следует отметить Кейна и Левинсона (T.R. Kane, D.A. Levinson) [9] и М. Паскаль [10].

Относительно происхождения термина "кельтские камни" мы снова сошлемся на Уолкера, который связывает открытие их поведения с находками археологов, которые занимались раскопками поселений древних кельтов. Первоначально камни, похожие на топорики, были названы кельтскими вследствие уже описанного загадочного поведения, которое обнаруживалось при запускании их по поверхности стола.

Существует несколько динамических моделей, иллюстрирующих поведение кельтского камня. Наиболее общая постановка заключается в исследовании движения твердого тела по горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести и силы трения (диссиpации), которое может быть, например, сухим (кулоновским) или вязким (пропорциональным скорости). Однако такая общая постановка не допускает подробного качественного анализа динамики в силу своей сложности. Фактически здесь выполнено лишь несколько численных экспериментов.

Менее реалистической, но более простой и наглядной является неголономная модель движения кельтского камня. Отметим, что неголономные динамические системы занимают некоторое промежуточное положение между обычными лагранжевыми (и гамильтоновыми) и общими диссипативными системами. Например, как правило, неголономные системы обладают интегралом энергии (и в этом смысле являются консервативными и близкими к гамильтоновым), а с другой стороны — у них отсутствует инвариантная мера [11].

Отсутствие инвариантной меры типично для диссипативных систем, в то же время гамильтоновы системы всегда обладают стандартной инвариантной мерой в силу теоремы Лиувилля.

Более подробно с различными формами уравнений неголономной механики можно ознакомиться по книгам [2, 8, 12]. В данной работе для вывода уравнений движения мы не будем пользоваться этими формами, а выведем уравнения движения кельтского камня из общих принципов динамики (закона изменения кинетического момента и импульса и некоторых кинематических уравнений). В частности, основным постулируемым свойством неголономной модели является наличие неинтегрируемой связи, состоящей в том, что скорость точки контакта тела и плоскости равняется нулю. Это условие сильно отличается от гамильтоновой модели полного проскальзывания (абсолютно гладкая плоскость) и не допускает действия силы трения скольжения. В этом случае говорят об абсолютно шероховатой плоскости (поверхности) и об условии полного сцепления. Несложно видеть, что при полном сцеплении (так как силы трения не совершают работы) имеется интеграл энергии, и система является консервативной.

Неголономная модель динамики кельтского камня, как оказывается, отражает основные качественные свойства его движения, но вследствие отсутствия проскальзывания и наличия интеграла энергии все эффекты (колебания и перевороты) проходят за существенно большее время, чем в реальных экспериментах. Тем не менее для первоначального физического описания такая модель применяется наиболее часто (см. [3–6, 8–10, 12]).

2. Неголономная модель поведения. Уравнения движения

В качестве модели кельтского камня в этой работе мы остановимся на качении тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости без проскальзывания. При этом имеется неинтегрируемая (неголономная) связь, состоящая в том, что скорость точки контакта тела с плоскостью равна нулю. Это условие можно записать в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта Q , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно (рис. 3). В дальнейшем все векторы мы предполагаем спроектированными на оси, жестко связанные с твердым телом.

Запишем уравнение изменения импульса тела и момента импульса относительно центра масс G (см. рис. 3) в системе координат, связанной с телом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) &= m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{N} — сила реакции в точке касания Q , $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный орт вертикали (направленный против силы тяжести), m — масса тела, g — ускорение свободного падения, \mathbf{I} — тензор моментов инерции тела относительно центра масс.

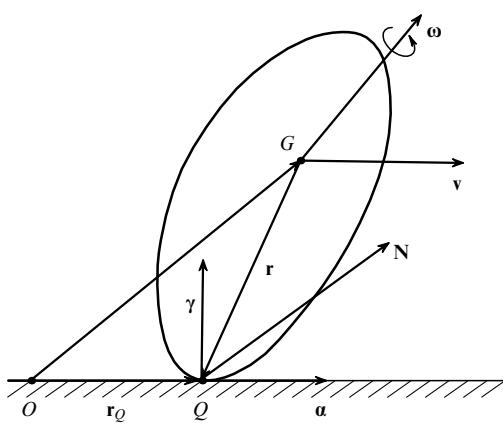


Рис. 3. Твердое тело на плоскости.

С помощью уравнения связи (1) и первого из уравнений (2) исключим из системы \mathbf{v} и \mathbf{N} ; получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{m}\mathbf{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + \mathbf{m}\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = \\ = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{m}\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

Определим кинетический момент тела относительно точки контакта Q :

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (3)$$

Тогда, используя кинематическое уравнение, описывающее эволюцию неподвижного орта $\boldsymbol{\gamma}$ в системе координат, связанной с телом, представим уравнения движения тела в форме [8]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{m}\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ полагается выраженным через \mathbf{M} из уравнения (3).

Уравнения (4) аналогичны уравнениям Эйлера–Пуассона [13], описывающим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки; они обладают двумя интегралами:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{m}\mathbf{g}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (5)$$

энергии и геометрическим. При этом предполагается, что векторы \mathbf{r} и $\boldsymbol{\gamma}$ связаны соотношением, задающим гауссову проекцию:

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\text{grad } F(\mathbf{r})}{|\text{grad } F(\mathbf{r})|}, \quad (6)$$

где $F(\mathbf{r}) = 0$ представляет собой уравнение поверхности тела в жестко связанных с ним осях.

В отличие от уравнений Эйлера–Пуассона, для уравнений (4) в общем случае уже отсутствуют интеграл площадей и инвариантная мера, что приводит к новым динамическим эффектам, не типичным для гамильтоновых систем [14].

3. Модели поверхности — параболоид и эллипсоид

Для моделирования движения кельтского камня используют наиболее простые поверхности эллиптического параболоида и трехосного эллипсоида.

Наиболее простая поверхность параболоида используется для описания колебаний и вращений тела вблизи вертикали (при этом точка контакта совпадает с вершиной параболоида), но не позволяет описывать перевороты и качение. Поверхность тела и гауссова проекция (6) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{a_1} + \frac{r_2^2}{a_2} \right) - (r_3 + h) = 0, \\ r_1 &= -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \\ r_3 &= -h + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_3^2}{2\gamma_3^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где a_1, a_2 — радиусы главных кривизн в вершине параболоида, h — высота центра масс, расположенного на оси параболоида.

Для исследования глобальных эффектов (не только движения вблизи вертикальных вращений) используется модель трехосного эллипсоида, поверхность и гауссова проекция для которого задаются формулами

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{r_1^2}{b_1^2} + \frac{r_2^2}{b_2^2} + \frac{r_3^2}{b_3^2} - 1 = 0, \\ r_i &= \frac{b_i^2 \gamma_i}{\sqrt{b_1^2 \gamma_1^2 + b_2^2 \gamma_2^2 + b_3^2 \gamma_3^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где b_1, b_2, b_3 — главные полуоси эллипсоида. Радиусы главных кривизн a_1, a_2 , например, в вершине $r_1 = r_2 = 0, r_3 = b_3$, задаются формулами $a_1 = b_1^2/b_3, a_2 = b_2^2/b_3$.

Предположим также, что центр масс в обоих случаях располагается в точке $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, а одна из главных осей инерции (ось OX_3) совпадает с главной геометрической осью (e_3). Отличительной особенностью кельтских камней является то, что две другие главные оси инерции повернуты относительно геометрических осей на угол $\delta \neq 0$. Тензор инерции в главных геометрических (но не динамических) осях имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции.

4. Переменные Андуайе–Депри и трехмерные отображения Пуанкаре

Система (4) в терминологии углов Эйлера описывает поведение углов нутации θ ($\cos \theta = \gamma_3$) и собственного вращения φ ($\tan \varphi = \gamma_1/\gamma_2$). В дальнейшем мы сосредоточимся именно на изучении этой системы, не забывая при этом, что поведение угла прецессии ψ и точки контакта, зная решение (4), можно получить простыми квадратурами [8, 13].

Вместо углов Эйлера и переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ для численного изучения наиболее приемлемы переменные Андуайе–Депри (L, G, H, l, g) , с физическим смыслом которых можно ознакомиться, например, по книге [13]. Здесь мы приведем только явные формулы пере-

счета:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \\ \gamma_1 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G} \right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \cos g \right) \sin l + \\ &\quad + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G} \right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \cos g \right) \cos l - \\ &\quad - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \left(\frac{H}{G} \right) \left(\frac{L}{G} \right) - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \cos g. \end{aligned} \quad (10)$$

На уровне двух известных интегралов движения (5) уравнения (4) задают четырехмерный фазовый поток, сечение которого трехмерной гиперплоскостью приводит к некоторому точечному трехмерному отображению (отображение Пуанкаре). Отметим, что для переменных L, G, H, l, g из (10) заведомо выполнено $(\gamma, \gamma) = 1$, поэтому на уровне этого интеграла формулы (10) задают взаимно однозначное преобразование. Трехмерное сечение четырехмерного уровня энергии $\mathcal{H}(L, G, H, l, g) = E$ мы зададим плоскостью $g = g_0 = \text{const}$, на которой выберем координаты $(l, L/G, H/G)$.

Отметим, что в классических уравнениях Эйлера – Пуассона в силу наличия дополнительного интеграла площадей $H = \text{const}$ (да и вообще для всех двухстепенных гамильтоновых систем) исследование динамики сводится к двумерному отображению, сохраняющему меру.

В нашем случае ситуация существенно более сложная (что, кстати, подчеркивает нетривиальность описания динамических эффектов кельтских камней) — отображение является трехмерным и, вообще говоря, не сохраняет меру. Подобное свойство приближает нашу систему к "диссипативному" типу и обуславливает существование сложных притягивающих множеств (странных аттракторов), обсуждаемых далее. В качестве простого трехмерного отображения, обладающего хаотическим аттрактором, укажем на известное отображение Смейла – Вильямса.

Таким образом, задача об исследовании фазового потока уравнений (4) на уровне энергии приводится к исследованию отображения

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n = \left(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right). \quad (11)$$

Вследствие наличия соотношений $0 < l \leq 2\pi$, $-G \leq L \leq G$, $-G \leq H \leq G$ точечное отображение (11) определено в некоторой компактной области.

Очевидно, что неподвижным точкам отображения (11) соответствуют периодические решения фазового потока (4), его инвариантным кривым — двумерные торы, двумерным точечным многообразиям — трехмерные многообразия. В дальнейшем мы будем пользоваться этой терминологией как для потока, так и для отображения, надеясь, что это не вызовет путаницы.

Замечание. Согласно формулам (10) на каждом уровне $H/G = \text{const}$ необходимо отождествить точки с координатами l и $l + 2\pi$, а также заклеить всю прямую

$L/G = 1$ в одну точку. После такого отождествления получается двумерная сфера S^2 . Таким образом, фазовое пространство отображения (11) гомеоморфно $S^2 \times I$, где I — отрезок $[-1, 1]$.

Отметим также, что в недавно вышедшей нашей книге [8] (см. также [15, 16]) была указана иерархия интегрируемости в задачах неголономной динамики, причем задача о кельтском камне в этой иерархии оказывается некоторым граничным вариантом, когда система максимально неинтегрируема, т.е. не допускает ни одного из возможных дополнительных тензорных инвариантов. Другим граничным вариантом является полная интегрируемость. В этом случае фазовый портрет отображения (11) расслоен на инвариантные кривые, тем самым отображение (11) может быть использовано для поиска новых интегрируемых случаев. Новая интегрируемая система, открытая с помощью такого подхода, указана в [17] (см. также [8]).

В работах [15, 16, 18] нами были указаны системы, в которых существует лишь ограниченный набор тензорных инвариантов — всего лишь один интеграл или инвариантная мера. Наиболее интересной ситуацией является *неголономная задача Якоби* [18], под которой мы подразумеваем качение однородного шара по инерции, при котором центр масс шара движется по трехосному эллипсоиду. В этом случае одновременно существуют дополнительный первый интеграл и инвариантная мера (что исключает существование асимптотических траекторий). Тем не менее эта задача не является вполне интегрируемой, кроме случая осесимметричного эллипсоида, отмеченного Э. Раусом [16]. При этом фазовый портрет трехмерного отображения Пуанкаре (11) расслаивается на двумерные инвариантные поверхности, на которых наблюдается хаотическое поведение. Это соответствует отсутствию еще одного дополнительного интеграла, необходимого для полной интегрируемости.

В качестве примеров систем, в которых наблюдается близкое поведение, отметим качение динамически несимметричной пластинки по поверхности сферы и качение по плоскости неуравновешенного шара Чаплыгина [16]. Как было обнаружено С.А. Чаплыгиным, качение без проскальзывания динамически несимметричного (т.е. с произвольным эллипсоидом инерции) и уравновешенного (т.е. центр масс совпадает с геометрическим центром) шара по горизонтальной плоскости является полностью интегрируемым. В этом случае существуют два интеграла и инвариантная мера. При сдвиге центра масс от геометрического центра пропадают одновременно один интеграл и инвариантная мера, что также было обнаружено авторами в [15].

5. Симметрии потока и отображения

Остановимся на различных симметриях системы (4) и соответствующих им симметриях трехмерного отображения (11).

5.1. Свойство обратимости

Система (4) инвариантна относительно преобразования (инволюций)

$$\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}, \quad t \rightarrow -t. \quad (12)$$

Для определенного выше сечения при $g_0 = 0$ преобразование (12) задает следующую инволюцию:

$$l' = \pi - l, \quad \left(\frac{L}{G}\right)' = -\frac{L}{G}, \quad \left(\frac{H}{G}\right)' = -\frac{H}{G}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1},$$

где через \mathcal{F}^{-1} обозначено обратное отображение (11).

Основные следствия обратимости следующие.

1. *Вблизи неподвижных точек инволюции, т.е. вблизи положений равновесия $\omega = 0$, применима КАМ-теория* [19]. Нелинейный анализ вблизи устойчивых положений равновесия выполнен А.П. Маркеевым [6] и более подробно обсуждается ниже.

2. *Неподвижные точки отображения \mathcal{F} (т.е. периодические траектории системы (4)), не инвариантные относительно инволюции (12), встречаются парами, причем их мультиликаторы равны по модулю и имеют противоположные знаки.* То же самое справедливо для любых аттракторов. Таким образом, если система (4) имеет притягивающее множество при $t \rightarrow +\infty$, то оно имеет аналогичное симметричное притягивающее множество при $t \rightarrow -\infty$.

Если тело обладает дополнительными геометрическими и динамическими симметриями, то уравнения (4) могут допускать другие инволюции.

5.2. Симметрия относительно поворота осей

Если главная геометрическая ось e_3 совпадает с главной осью инерции (две оставшиеся могут быть повернуты вокруг нее на угол δ по отношению к динамическим осям), то уравнения (4) допускают поворот осей e_1, e_2 на угол π вокруг оси e_3 , т.е. остаются инвариантными относительно преобразования

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightarrow -\omega_1, & \omega_2 &\rightarrow -\omega_2, & \omega_3 &\rightarrow \omega_3, \\ \gamma_1 &\rightarrow -\gamma_1, & \gamma_2 &\rightarrow -\gamma_2, & \gamma_3 &\rightarrow \gamma_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Для отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_n)$ этому преобразованию соответствует симметрия

$$l' = l - \pi, \quad \left(\frac{L}{G}\right)' = \frac{L}{G}, \quad \left(\frac{H}{G}\right)' = \frac{H}{G}.$$

Как следствие, отображение \mathcal{F} симметрично относительно плоскости $l = \pi$, а все неподвижные точки, не принадлежащие этой плоскости, спарены.

5.3. Симметрия относительно плоскости

Если, например, у эллипсоида геометрическая и динамическая оси совпадают (e_3), то уравнения (4) инвариантны при отражении относительно плоскости e_1e_2 и последующей замены времени, т.е.

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightarrow \omega_1, & \omega_2 &\rightarrow \omega_2, & \omega_3 &\rightarrow -\omega_3, \\ \gamma_1 &\rightarrow \gamma_1, & \gamma_2 &\rightarrow \gamma_2, & \gamma_3 &\rightarrow -\gamma_3, & t &\rightarrow -t. \end{aligned}$$

Трехмерное отображение при этом становится инвариантным относительно инволюции \mathcal{F} :

$$l' = l, \quad \left(\frac{L}{G}\right)' = -\left(\frac{L}{G}\right), \quad \left(\frac{H}{G}\right)' = \frac{H}{G}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1}. \quad (14)$$

Докажем следующее простое утверждение: *при наличии симметрии (14) для неподвижных точек отображе-*

5*

ния \mathcal{F} одно собственное число равно 1 и произведение двух других также равно 1.

Действительно, если обозначить матрицу линейного преобразования координат (14) через $\sigma = \text{diag}(1, -1, 1)$, а матрицу линеаризации отображения \mathcal{F} вблизи неподвижной точки через \mathbf{A} , то из условия инвариантности (14) следует

$$\mathbf{A} = \sigma \mathbf{A}^{-1} \sigma,$$

а также $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{-1} = 1$, $a = \text{Tr } \mathbf{A} = \text{Tr } \mathbf{A}^{-1}$. Для характеристического полинома матрицы \mathbf{A} имеем

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + (1 - a)\lambda + 1).$$

Появление единичного собственного значения связано с вырождением неподвижных точек, которые лежат в плоскости $L = 0$ (см. далее рис. 10, 11). Если два оставшихся мультиликатора будут иметь ненулевые мнимые части, то вблизи этих точек имеются замкнутые инвариантные кривые.

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, при котором все динамические и геометрические оси совпадают (см. далее). Здесь имеются еще две плоскости симметрии и инвариантные кривые существуют вблизи вертикальных вращений, которые оказываются инвариантными при отражении в плоскостях, проходящих через ось вращения.

6. Известные результаты в динамике кельтских камней

6.1. Устойчивость перманентных вращений

Приведем явное выражение для характеристического полинома линеаризации системы (4) вблизи равномерных вращений параболоида вокруг вертикальной оси, которые для уравнений (4) являются неподвижными точками с координатами $\omega = (0, 0, \omega_0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$. Он имеет вид [3, 5]

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^2(k_0\lambda^4 + k_1\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_3\lambda + k_4), \\ k_0 &= (I_1 + mh^2)(I_2 + mh^2), \\ k_1 &= \omega_0mh(a_1 - a_2)I_{12}, \quad k_3 = \omega_0^3mh(a_1 - a_2)I_{12}, \\ k_2 &= \omega_0^2((I_3 - I_2)(I_3 - I_1) + mh((I_3 - I_{11})(a_2 - h) + \\ &\quad + (I_3 - I_{22})(a_1 - h)) + m^2h^2(a_1 - h)(a_2 - h)) + \\ &\quad + mg((I_{22} + mh^2)(a_2 - h) + (I_{11} + mh^2)(a_1 - h)), \\ k_4 &= \omega_0^4((I_3 - I_2)(I_3 - I_1) + mh((I_3 - I_{11})(a_2 - h) + \\ &\quad + (I_3 - I_{22})(a_1 - h)) + m^2h^2(a_1 - h)(a_2 - h)) + \\ &\quad + \omega_0^2mg((I_3 - I_{11})(a_2 - h) + (I_3 - I_{22})(a_1 - h) + \\ &\quad + 2mh(a_1 - h)(a_2 - h)) + m^2g^2(a_1 - h)(a_2 - h), \end{aligned} \quad (15)$$

I_{ij} — компоненты матрицы (9). Линейная устойчивость определяется вещественными частями решений (15). На каждом уровне энергии существуют два вертикальных вращения в разные стороны с одной и той же по величине частотой ω_0 .

По теореме Раяса–Гурвица могут быть получены следующие условия устойчивости вертикальных вращений.

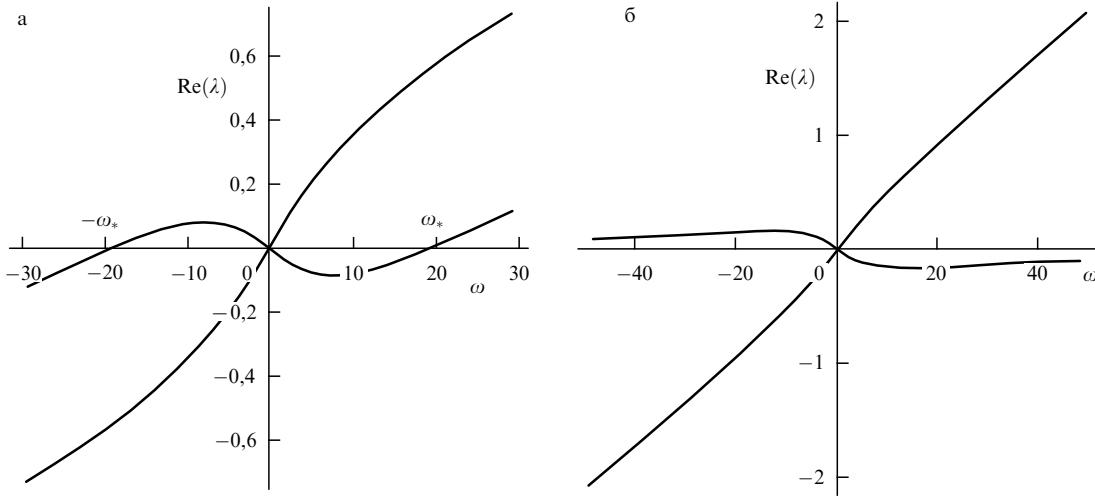


Рис. 4. Вещественные части характеристических показателей вертикальных вращений при различных соотношениях главных моментов инерции. В случае $I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7$ (а) геометро-динамическое неравенство 1°) выполнено, а в случае $I_1 = 4, I_2 = 5, I_3 = 6$ (б) — нет ($m = 1, g = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1, \delta = 0,2$).

Утверждение [3, 5]. Вертикальные вращения параболоида устойчивы при выполнении следующих условий:

- 1°) $(I_1 + I_2 + I_3)(a_1 + a_2 - 2h) - mh(4h^2 - 3h(a_1 + a_2) + 2a_1a_2) = F_{GD} > 0;$
- 2°) $\omega_0 < -\omega_*,$ где $\omega_*^2 = F_{GD}^{-1} mg(a_1 - h)(a_2 - h);$

где F_{GD} — указанная геометро-динамическая функция.

Уровень энергии, соответствующий ω_* , обозначим через E_* .

Основным динамическим выводом из этой теоремы является зависимость устойчивости вращений при $\delta \neq 0$ от направления вращения. Это, в частности, отличает неголономные системы от гамильтоновых.

Кроме того, для существования устойчивости вращений необходимо специальное распределение масс $F_{GD} > 0$ и достаточно большая по абсолютной величине угловая скорость. При этом существуют тела, вертикальные вращения которых в обе стороны неустойчивы.

На рисунке 4 приведены графики вещественных частей характеристических показателей при выполнении и невыполнении геометро-динамического неравенства 1°).

Из приведенных графиков следует, что при энергиях E , для которых $\omega_0 < \omega_*$, всегда существует неустойчивое вертикальное вращение, к которому асимптотически стремится система при $t \rightarrow -\infty$. Характерный фазовый портрет точечного отображения для параболоида при $E > E_*$ будет приведен на рис. 5. При этом все траектории при $t \rightarrow +\infty$ наматываются на устойчивое равномерное вращение, а при $t \rightarrow -\infty$ — на неустойчивое. Как показывают расчеты, других аттракторов в фазовом пространстве не существует.

6.2. Бифуркация Хопфа. Рождение цикла

В работе [5] было показано, что вблизи критического значения частоты $\omega_0 > -\omega_*$, $\omega_0 \approx -\omega_*$ при потере устойчивости вращения выполняются условия теоремы о рождении цикла (теорема Андронова–Хопфа). При этом вблизи вертикального вращения возникает устой-

чивый предельный цикл, определяющий некоторое периодическое решение системы (4).

Как следует из рис. 4а, при $\omega_0 < \omega_*$, $\omega_0 \approx \omega_*$ также выполняются условия теоремы о рождении цикла при обращении времени, это так называемая обратная бифуркация Хопфа (это также следует из свойства обратимости (11)).

Компьютерные исследования (см. далее рис. 6) показывают, что при $t \rightarrow +\infty$ помимо (устойчивого) цикла Карапетяна в фазовом пространстве рождаются еще два устойчивых цикла (сохраняющихся при малом шевелении параметров), аналитическое предсказание появления которых невозможно. Согласно свойству обратимости (см. выше) аналогичные неустойчивые циклы (притягивающие решения при $t \rightarrow -\infty$) возникают вблизи неустойчивого вертикального вращения. Других аттракторов (включая $t \rightarrow \pm\infty$) в фазовом пространстве нет.

6.3. Нелинейные колебания вблизи положения равновесия

Некоторые свойства движения кельтских камней объяснил А.П. Маркеев, исследуя нелинейные малые колебания вблизи положения равновесия, т.е. при $\omega_0 = 0$ (эти решения являются неподвижными точками инволюций). При этом характеристический полином (15) становится биквадратным, и при $a_1 > h, a_2 > h$ его корнями являются две пары чисто мнимых чисел.

В работе [6] построена нормальная форма системы (4) вблизи положения равновесия с точностью до членов третьего порядка. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -a\Omega_1^2\rho_1\rho_3, & \dot{\rho}_2 &= a\Omega_2^2\rho_2\rho_3, \\ B\dot{\rho}_3 &= a(\Omega_1^4\rho_1^2 - \Omega_2^4\rho_2^2), & \dot{\sigma}_1 &= \Omega_1, & \dot{\sigma}_2 &= \Omega_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — некоторые полярные координаты, σ_i — угловые координаты, Ω_1, Ω_2 — частоты нормальных колебаний системы, $a, B = \text{const}$.

При этом отделяется укороченная трехмерная система (для ρ_1, ρ_2, ρ_3), которая является интегрируемой.

Уравнения (16) имеют интегралы

$$\Omega_1^2 \rho_1^2 + \Omega_2^2 \rho_2^2 + B \rho_3^2 = \text{const}, \quad \rho_1^\alpha \rho_2 = \text{const}, \quad \alpha = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2},$$

которые и позволяют провести качественный анализ движения.

Замечание. Явные выражения координат ρ_i , σ_i и частот нормальных колебаний Ω_i через фазовые переменные и интегралы системы (4) получаются из решения задачи на собственные векторы и собственные числа и имеют сложный вид, их можно найти в статье [6].

Для нормальной формы полной системы (16) траектории представляют собой обмотки трехмерных инвариантных торов.

Кроме того, у нормальной формы системы (16) существует особая трехмерная поверхность, заполненная двоякоасимптотическими траекториями, при которых тело выходит из вращения в одну сторону и приходит к вращению в другую сторону при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, вблизи рассматриваемого положения равновесия система (16) (и, следовательно, система (4)) имеет почти гамильтонов характер.

Вследствие обратности в окрестности положения равновесия выполняются условия КАМ-теоремы [19], причем в качестве невозмущенной системы можно взять нормальную форму (16), а в качестве малого параметра — отклонение энергии от минимального значения $E_{\min} = mgh$.

Таким образом, при малых энергиях в полной системе (4) существуют трехмерные колмогоровские торы. Далее (см. рис. 9) будут приведены трехмерные сечения торов, вложенных в четырехмерное пространство.

Приведенные соображения из КАМ-теории дополняют результаты А.П. Маркеева [6], имеющие асимптотический характер и справедливые на ограниченных временах.

6.4. Несуществование инвариантной меры

Этот результат также является основой для понимания динамики кельтского камня. Он справедлив при условии $\delta \neq 0$ и отражает качественное отличие поведения неголономных систем от гамильтоновых, в которых мера всегда существует по теореме Лиувилля. Как уже было отмечено, в этом смысле неголономные системы ближе к диссипативным, и в их фазовом пространстве возникают аттракторы.

Приведем результат [11] в более точной формулировке.

Для параболоида установлено отсутствие вблизи вертикального вращения $\omega = \omega_0$, $\gamma_3 = 1$, $\omega_0 \neq 0$ инвариантной меры с аналитической плотностью при выполнении неравенства $I_1 \neq I_2$, $\delta \neq 0$, справедливых для кельтских камней.

Замечание. Рассмотрим случай $\delta = 0$, справедливый для эллипсоидов или параболоидов, у которых геометрические оси совпадают с динамическими, в частности однородных. С помощью явных вычислений можно показать, что в любых порядках в окрестности рассматриваемого вертикального вращения не существует препятствий к существованию инвариантной меры с аналитической плотностью. К сожалению, в явном (алгебраическом) виде она найдена только в нескольких специальных случаях. Вопрос о ее форме в общем случае или

о других препятствиях к ее существованию остается открытым.

6.5. Численные исследования Линдберга и Лонгмана

Кроме описанных аналитических результатов, в нескольких работах были проведены численные исследования, среди которых особенно выделяются результаты Линдберга и Лонгмана [7]. Основной вывод работы [7] состоит в том, что параболоид, закрученный в одну сторону вокруг вертикальной оси, через некоторое время, пройдя стадию колебаний, снова придет к вращению вокруг вертикальной оси, но в другую сторону. Для параметров, выбранных в [7], не выполнено условие устойчивости 2°) вертикального вращения, и, как показывают более детальные исследования, в этом случае в фазовом пространстве имеется также регулярный аттрактор — предельный цикл. Более подробное обсуждение результатов [7], которые к тому же оказались не вполне верифицируемыми, содержится в [8].

7. Глобальная динамика кельтского камня. Странный аттрактор

Опишем общую динамику отображения в зависимости от значения энергии E . При $E > E_*$ движение асимптотически стремится к устойчивому перманентному вращению, а при $E \lesssim E_*$ — к циклу Карапетяна. В то же время при малых энергиях $E \gtrsim E_{\min}$ система демонстрирует гамильтоново поведение по Маркееву. Как показано далее, в промежутке $[E_{\min}, E_*]$ система, как правило, демонстрирует сложное хаотическое поведение, которое в некоторых случаях имеет характер перемежаемости, а в других — странного аттрактора.

Приведем результаты компьютерных исследований описанного выше трехмерного отображения для случаев параболоида и эллипсоида в зависимости от значений полной энергии тела. Динамика эллипсоида при этом оказывается более сложной вследствие возможности переворотов тела.

Для обоих случаев зафиксируем следующие динамические и геометрические параметры:

$$I_1 = 5, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad m = 1, \quad g = 100; \quad (17)$$

для параболоида (7) примем $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, для эллипсоида $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$. В обоих случаях главные радиусы кривизны в точке $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$ совпадают, устойчивость описывается диаграммой рис. 4а, соответствующее критическое значение энергии $E_* = 1300$, а частота вертикальных вращений $\omega_* = \pm 18,516\dots$ (единицы измерения здесь следующие: длины — сантиметры, массы — килограммы, времени — $10^{-1/2}$ с).

7.1. Модель параболоида ($\delta = 0,2$)

Компьютерные исследования, хотя и носящие предварительный характер, позволяют разбить область возможных энергий (E_{\min}, ∞) , где $E_{\min} = mgh = 100$, на пять областей, в каждой из которых для различных значений энергии E динамика имеет сходный характер.

I. $E > E_*$. В фазовом пространстве имеется только вертикальное вращение (в одну сторону), которое является асимптотически устойчивым (в отображении имеется регулярный аттрактор; рис. 5). Вследствие обратности при $t \rightarrow -\infty$ все решения стремятся к верти-

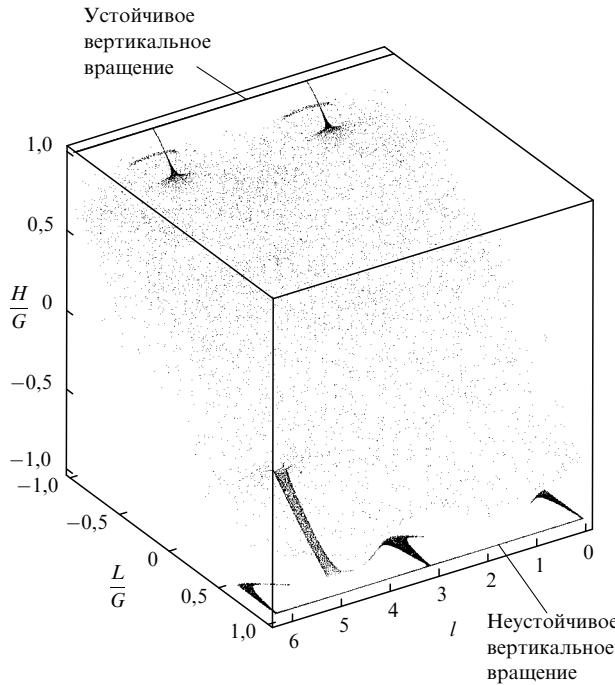


Рис. 5. $E = 2000$, $\delta = 0,005$, $g_0 = 0,5\pi$. Иллюстрируется поведение при больших энергиях $E > E_*$: все траектории сматываются с неустойчивого вертикального вращения (при $t \rightarrow \infty$) и наматываются на устойчивое. (Здесь для увеличения времени, проводимого вблизи вертикальных вращений, взято $\delta = 0,005$, что не соответствует указанному в тексте.)

кальному вращению, но в другую сторону. Заметим, что здесь мультипликаторы устойчивого перманентного вращения меньше 1, один вещественный и два комплексно сопряженных. Видимо, на одномерной сепаратрисе, выходящей из неустойчивого вращения, расположен также неустойчивый предельный цикл, являющийся неподвижной точкой отображения (см. рис. 5).

II. $E_1 < E < E_*$, $933 < E_1 < 941$. При уменьшении энергии ниже E_* происходит описанная выше (см. раздел 6) бифуркация Андронова–Хопфа, и вблизи становящегося неустойчивым вертикального вращения рождается предельный цикл (рис. 6). Вблизи второго вертикального вращения происходит обратная бифуркация и также рождается предельный цикл, притягивающий траектории при $t \rightarrow -\infty$.

Кроме того (и это является удивительным фактом, который, видимо, нельзя предсказать аналитически), в фазовом пространстве рождаются еще два устойчивых цикла, отличных от цикла Карапетяна (см. рис. 6). Пара аналогичных циклов (устойчивых при $t \rightarrow -\infty$) рождаются вблизи неустойчивых перманентных вращений. (Эти циклы сохраняются при малых изменениях параметров (17).)

При этом режиме все траектории сматываются с трех неустойчивых циклов и наматываются на три устойчивых. Два из них являются непосредственными продолжениями (по энергии) циклов Карапетяна, а четыре остальных найдены нами в численных экспериментах. В фазовом пространстве имеются также неустойчивые неподвижные точки, соответствующие вертикальным вращениям.

III. $E_2 < E < E_1$, $560,7 < E_2 < 561,9$. При прохождении через E_1 происходит потеря устойчивости одного цикла Карапетяна, при этом два других устойчивых цикла сохраняют устойчивость (рис. 7). В фазовом пространстве остаются регулярные аттракторы (при $t \rightarrow \pm\infty$), соответственно два устойчивых и неустойчивых предельных цикла. На фазовом портрете также имеются четыре неустойчивых неподвижных точки: два вертикальных вращения и два неустойчивых цикла Карапетяна.

IV. $E_3 < E < E_2 - \varepsilon_1$, ε_1 положительно и мало. Рождение странного аттрактора. В этой области теряют устойчивость два оставшихся предельных цикла и возникает притягивающее множество сложной структуры (рис. 8). Как показывают вычисления, максимальный

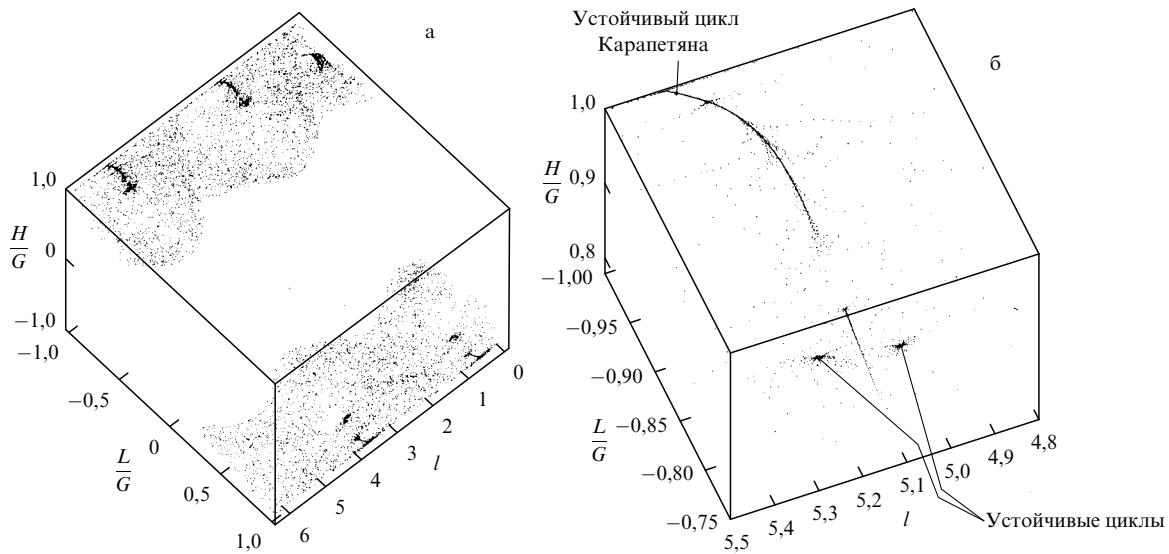


Рис. 6. $E = 1295 \lesssim 1300 = E_*$, $\delta = 0,2$, $g = 0,5\pi$. Общий вид фазового портрета при уменьшении энергии ниже уровня E_* : все траектории уходят от трех неустойчивых циклов (они устойчивы при $t \rightarrow \infty$) в правом нижнем углу на (а) и наматываются на три устойчивых цикла сверху (один из них — цикл Карапетяна). На (б) увеличена область вблизи верхнего левого угла (а).

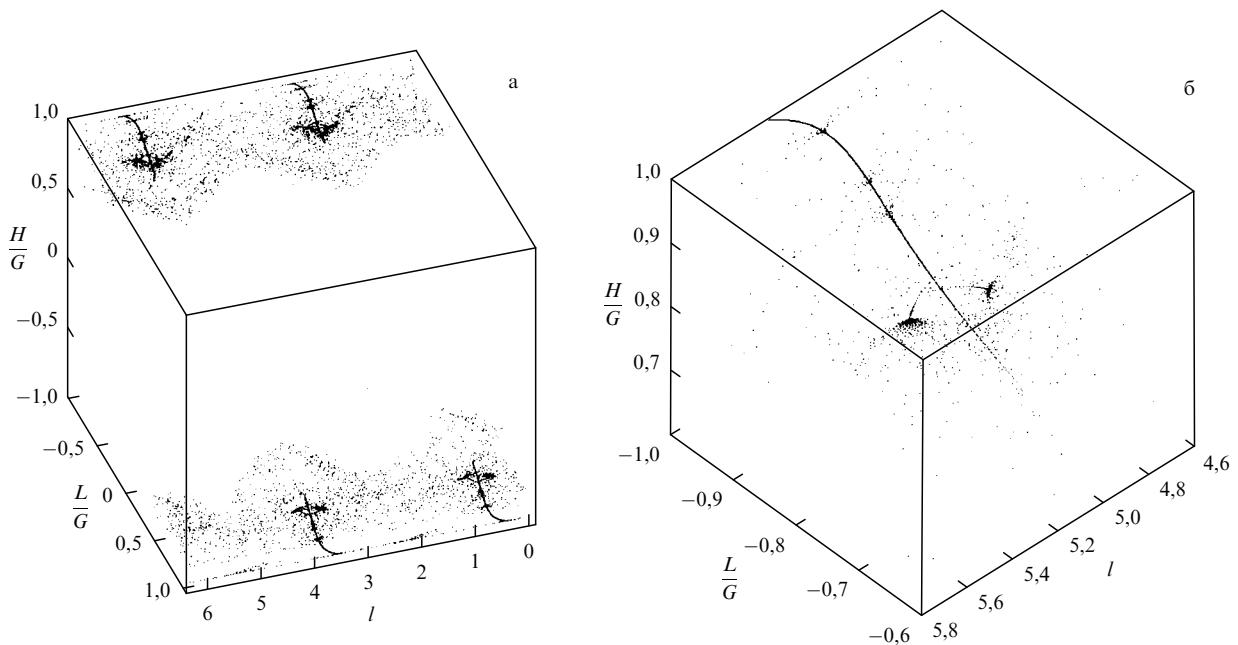


Рис. 7. $E = 900$, $\delta = 0,2$, $g = 0,5\pi$. Общий вид фазового портрета после потери устойчивости цикла Карапетяна: все траектории сматываются с двух неустойчивых предельных циклов (внизу на (а)) и наматываются на два устойчивых цикла (вверху на (а)). На (б) увеличена область в левом верхнем углу.

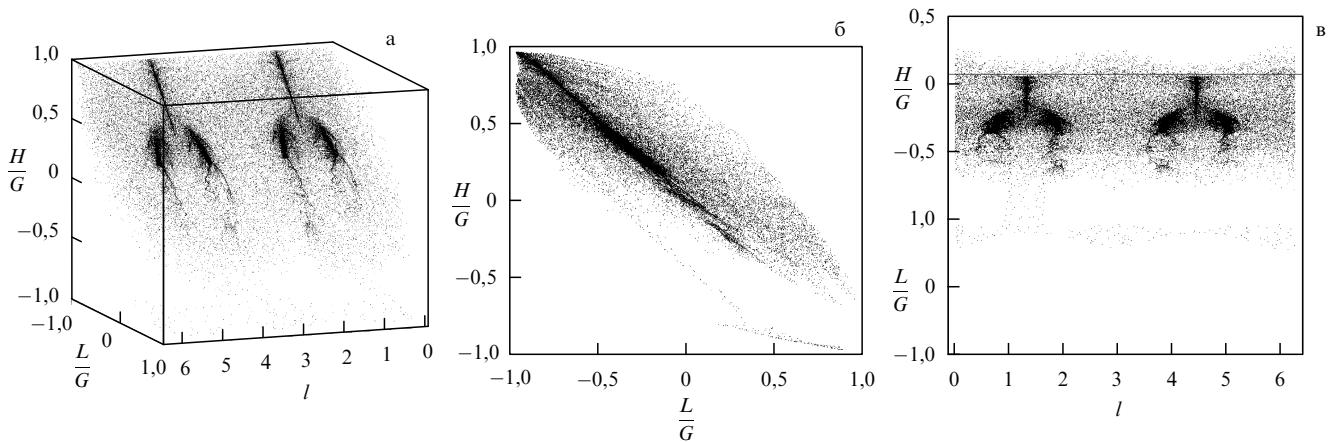


Рис. 8. $E = 555$, $\delta = 0,2$, $g = 0$. Возникновение странного аттрактора при потере устойчивости циклов. На (б) видно, что траектория покидает область вблизи перманентного вращения (снизу вблизи прямой $L/G = H/G = -1$) и попадает в сложное притягивающее множество — странный аттрактор.

показатель Ляпунова для траекторий этого множества положителен, что позволяет отнести его к странным аттракторам. Его возникновение в динамике кельтского камня является неочевидным и замечательным, тем более что первоначальная система (4) является консервативной. Сценарий перехода к странному аттрактору связан с потерей устойчивости нескольких предельных циклов, при этом динамика кельтского камня на соответствующих уровнях энергии становится глобально хаотической. Отметим, что на предыдущих режимах также наблюдались хаотические стадии колебаний, тем не менее их эволюция заканчивалась выходом на регулярный периодический режим. При дальнейшем уменьшении энергии E также наблюдаются сложные хаотические режимы, имеющие характер перемежаемости, и их сложно описать даже численно.

V. $E_{\min} < E < E_{\min} + \varepsilon_2$, ε_2 положительно и мало. Имеется в виду окрестность малых колебаний вблизи

положения равновесия (ситуация Маркеева; рис. 9). Как уже указывалось, при малых ε_2 здесь имеются трехмерные инвариантные колмогоровские торы, запирающие остальные траектории системы.

При $E_{\min} + \varepsilon_2 \leq E \leq E_3$ поведение системы остается неисследованным. Более детальный анализ требует компьютерного исследования поведения сепаратрис неподвижных точек и предельных циклов. Необходимо также дать более точные оценки для значений E_3 и ε_2 , при которых возникает странный аттрактор, и дать его более строгое математическое описание.

7.2. Модель эллипсоида

Здесь мы сосредоточимся на некоторых геометрических и динамических особенностях эллипса по сравнению с параболоидом.

I. Геометрические и динамические оси совпадают. Это собственно не ситуация кельтского камня, но в дальней-

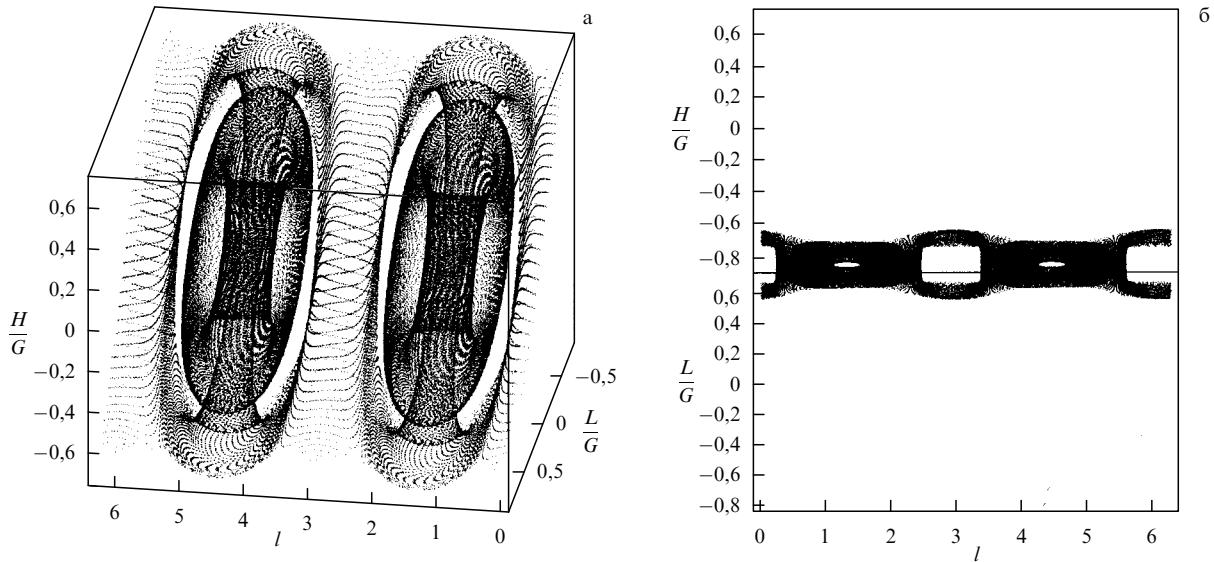


Рис. 9. $E = 200$, $\delta = 0,2$, $g_0 = 0$. Общий вид фазового портрета с различных точек зрения при небольших энергиях. Хорошо заметны сохранившиеся нерезонансные торы.

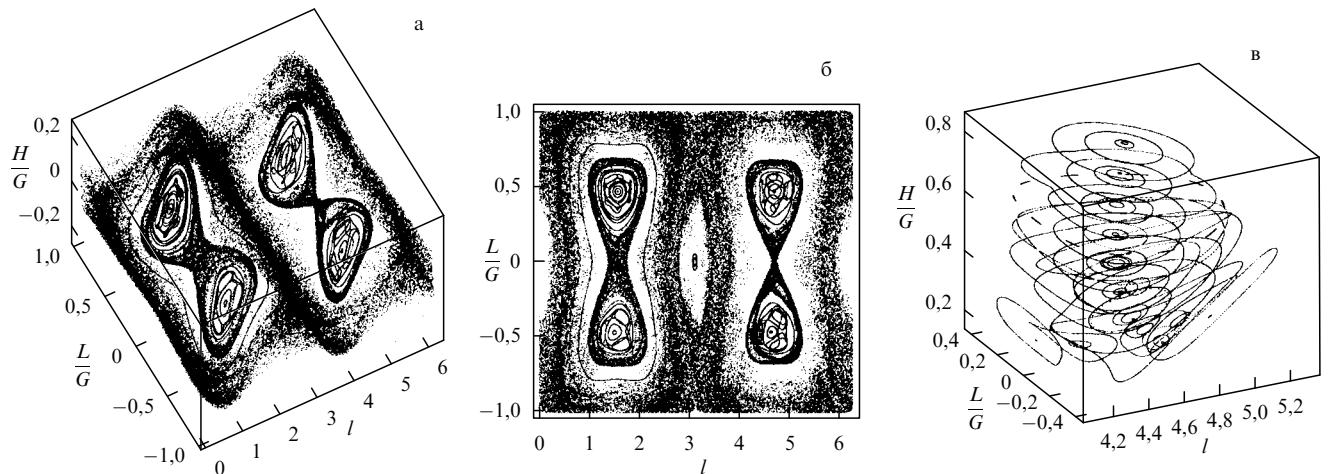


Рис. 10. Фазовый портрет (с различных точек зрения — а, б) для случая эллипсоида, у которого совпадают главные геометрические и динамические оси. Хорошо заметно вырождение периодических решений для этого случая, обусловленное дискретными симметриями. На (в) показано увеличение фазового портрета по сравнению с (а) и (б). Хорошо прослеживается кривая вырожденных периодических решений и сохраняющиеся вблизи нее одномерные инвариантные кривые отображения, которым в потоке соответствуют двумерные торы. Видно, что эти торы не обладают свойством запирания ($E = 1500$).

шем будет рассматриваться ее возмущение. При этом система (4) инвариантна при отражениях относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Как следствие, периодические решения (неподвижные точки отображения), лежащие в плоскостях: а) $L = 0$; б) $l = 0$; в) $l = \pi/2, 3\pi/2$; являются вырожденными и образуют целые кривые в трехмерном пространстве, окруженные инвариантными кривыми, задающими двумерные торы фазового потока (рис. 10). Между этими торами, видимо, возможна диффузия, однако ее механизм еще не изучен. Кривая неподвижных точек соответствует колебаниям эллипсоида вокруг главных осей в теле и горизонтальных осей в пространстве. Вертикальные вращения в этом случае также имеют мультипликаторы, равные по модулю единице.

П. Главные динамические оси повернуты вокруг одной геометрической оси e_3 на угол δ . При этом сохраняется вырождение для колебательных решений

в плоскости $L = 0$, а мультипликаторы возможных вращений уже не равны по модулю единице. При $E > E_*$ одно из вертикальных вращений вокруг оси e_3 приобретает устойчивость. На рисунке 11 показано рождение двух притягивающих множеств, одно при $t \rightarrow +\infty$, другое при $t \rightarrow -\infty$, имеющих природу странных аттракторов (возможно, квазиаттракторов), — их показатели Ляпунова больше нуля. В отличие от параболоида к этим странным аттракторам притягиваются не все траектории: существует область, в которой имеются описанные выше вырожденные периодические решения и охватывающие их двумерные инвариантные торы.

III. Произвольное расположение осей. Пусть динамические оси e_1, e_2 повернуты относительно оси l_3 на малый угол δ , а затем ось e_3 наклонена относительно геометрической на некоторый малый угол ζ .

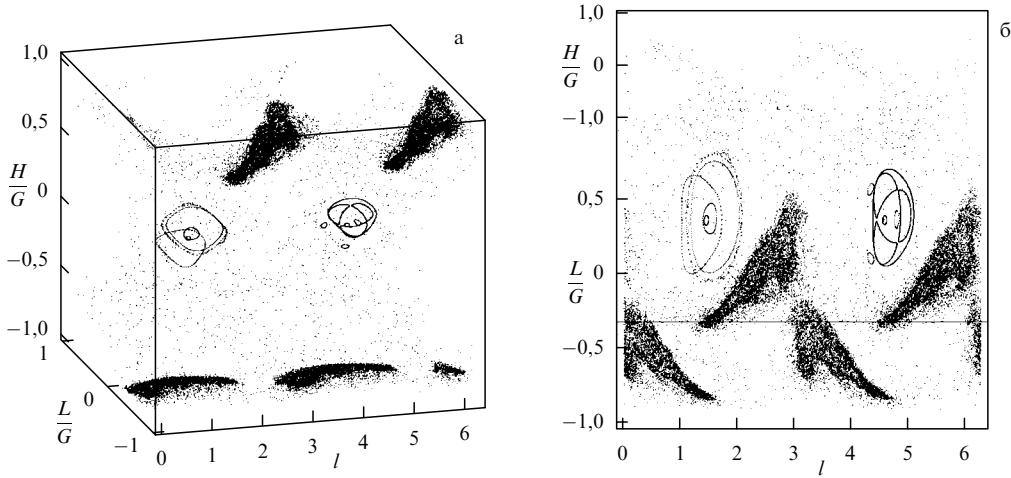


Рис. 11. Фазовый портрет (с различных точек зрения) при совпадении лишь одной главной геометрической и одной главной динамической оси. Хорошо заметны темные области (странные атTRACTоры), к которым траектории притягиваются при $t \rightarrow +\infty$ (область сверху) и при $t \rightarrow -\infty$ (область снизу). Наблюдаются также сохранившиеся инвариантные кривые вблизи вырожденных периодических решений ($E = 245$, $\theta = 0$, $\psi = 0,1$).

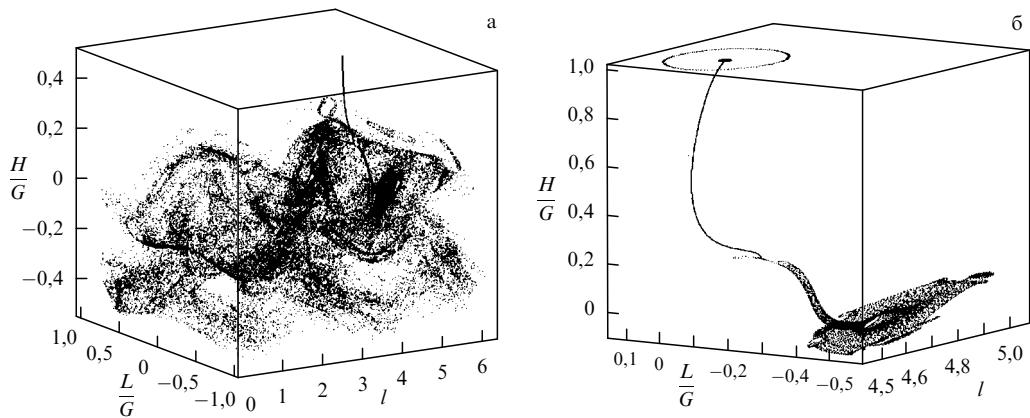


Рис. 12. Фазовый портрет в случае малого произвольного поворота динамических осей относительно геометрических ($\theta \neq 0$, $\psi \neq 0$; здесь θ, ψ, φ — углы Эйлера поворота геометрических осей). Хорошо заметно разрушение вырождения (эллиптических) периодических решений. На (б) показаны увеличенные начальные участки трех траекторий предыдущего портрета. Хорошо заметна кривая, вблизи которой траектория, выпущенная из периодического решения невозмущенной системы ($\theta = 0$, $\psi = 0$), проводит очень длительное время ($E = 1500$, $\theta = 0,08$, $\psi = 0,01$, $\varphi = 0$).

В этом случае пропадают все геометрические симметрии и с неподвижных точек, образующих кривую на рис. 10б, снимается вырождение, и они становятся изолированными. Как показывают эксперименты, траектория, запущенная вблизи эллиптической неподвижной точки невозмущенной системы (соответствующей совпадению геометрических и динамических осей), долгое время движется вблизи кривой, которая в невозмущенном случае заполнена вырожденными неподвижными точками (рис. 12). Несложно показать, что здесь наблюдаются экспоненциально малые эффекты, обусловливающие существование почти инвариантного многообразия, содержащего возмущенные траектории. Отметим, что более изученным является гиперболический случай, т.е. случай, когда в невозмущенной ситуации имеется гиперболическое многообразие (например, множество, заполненное неподвижными гиперболическими точками), в отличие от эллиптического случая, представленного на рис. 10в. По теореме

Хирша–Пью–Шуба при возмущении это гиперболическое многообразие сохраняется, хотя неподвижные точки на нем становятся изолированными или исчезают вовсе.

Для этой ситуации также характерно появление сложных атTRACTоров, а общая динамика является еще менее изученной. Отметим также, что вообще трехмерные отображения (как с мерой, так и без нее), к сожалению, пока очень слабо изучены, а задачи неголономной механики, рассмотренные в этой работе, представляют целый полигон, на котором могут быть опробованы новые математические методы.

После подготовки окончательного варианта статьи авторы узнали об интересной работе H. Broer, C. Simó, R. Vitolo "Bifurcations and strong attractors in the Lorentz-84 climate model with seasoned forcing" [20]. В ней разбирается неавтономная модель долгопериодических климатических изменений в атмосфере, предложенная

Лоренцом в 1984 г. и описываемая уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - y^2 - z^2 + aF(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \\ \dot{y} = -y + xy - bxy + G(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \\ \dot{z} = -z + bxy + xz, \end{cases} \quad (18)$$

$a, b, \varepsilon, \omega = \text{const.}$

где F, G являются периодическими функциями с периодом $T = 2\pi/\omega$. Исследование системы также сводится к изучению трехмерного отображения. В работе [20] были обнаружены странные аттракторы и родственные сценарии перехода к ним при разрушении инвариантных циклов.

8. Заключение

Таким образом, в работе приведены новые свойства движения кельтских камней, устанавливаемые при помощи компьютерных методов. Они тесно связаны с хаотическим поведением системы и возникновением странных аттракторов в трехмерных точечных отображениях. Однако следует отметить, что мы указали только некоторые отдельные черты глобальной динамики системы, которая требует дополнительного изучения как со стороны общих математических методов (например, стоит привести более строгое "доказательство" наличия странного аттрактора), так и со стороны усложнения физической модели (желательно учитывать влияние сухого и вязкого трения и пр.).

Авторы благодарны В.В. Козлову, А.В. Карапетяну, В.В. Трещеву за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке программы "Поддержка ведущих научных школ" (грант 00-15-96146).

Список литературы

1. Walker J *Sci. Am.* **241** (10) 144 (1979)
2. Маркеев А П *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью* (М.: Наука, 1992)
3. Астапов И С *Вестн. МГУ. Сер. I, мат., механ.* (2) 97 (1980)
4. Карапетян А В *ПММ* **45** (1) 42 (1981)
5. Карапетян А В *Изв. АН СССР. Механ. тв. тела* (2) 19 (1985)
6. Маркеев А П *ПММ* **47** 575 (1983)
7. Lindberg R E, Longman R W *Acta Mech.* **49** 81 (1983)
8. *Неголономные динамические системы* (Под ред. А В Борисова, И С Мамаева) (М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002); <http://ics.org.ru/cgi/getfile.cgi?id=22>
9. Kane T R, Levinson D A *Int. J. Non-Linear Mech.* **17** 175 (1982)
10. Паскаль М *ПММ* **47** 321 (1983)
11. Козлов В В *Успехи механ.* **8** (3) 85 (1985)
12. Карапетян А В *Устойчивость стационарных движений* (М.: Эдиториал УРСС, 1998)
13. Борисов А В, Мамаев И С *Динамика твердого тела* (М.–Ижевск: РХД, 2001)
14. Борисов А В, Мамаев И С *Доклады РАН* **387** 764 (2002)
15. Borisov A V, Mamaev I S *Reg. Chaot. Dyn.* **7** 177 (2002)
16. Borisov A V, Mamaev I S, Kilin A A *Reg. Chaot. Dyn.* **7** 201 (2002)
17. Борисов А В, Мамаев И С, Килин А А *ПММ* (2003) (в печати)
18. Борисов А В, Мамаев И С, Килин А А *ДАН* **385** 338 (2002)
19. Sevryuk M B *Reversible Systems* (Lecture Notes in Mathematics, 1211) (Berlin: Springer-Verlag, 1986)
20. Broer H, Simó C, Vitolo R, Preprint No. 21 (Barcelona: UB-UPC Dynamical Systems Group, 2001); <http://www.maia.ub.es/dsg/2001/index.html>

Strange attractors in rattleback dynamics

A.V. Borisov, I.S. Mamaev

*Institute of Computer Science,
Universitetskaya ul. 1, 426034 Izhevsk, Russian Federation
Tel. (7-3412) 76-8295
E-mail: borisov@rcd.ru; mamaev@rcd.ru*

This review concerns the dynamics of the rattleback, an example of a nonholonomic mechanical system exhibiting curious physical properties. All known analytical results are compiled, and new computer analysis results obtained by the authors are presented. In particular, three-dimensional, point Poincare maps generated by a dynamic system are explored analytically for the first time. For a three-dimensional map associated with rattleback dynamics it is shown that periodic and quasiperiodic solutions typically lose stability thus leading to the formation of strange attractors. This explains some new aspects in rattleback behaviour, associated with the existence of parameters for which regular solutions are replaced by chaotic ones.

PACS numbers: **05.45.-a, 45.10.-b, 45.40.-f**

Bibliography — 20 references

Received 24 June 2002, revised 4 December 2002