

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Критические показатели трехмерной слабо разбавленной замороженной модели Изинга

Р. Фольк, Ю. Головач, Т. Яворский

Обзор посвящен проблеме расчета универсальных и неуниверсальных критических показателей трехмерной модели Изинга в присутствии слабого замороженного беспорядка. Приведены данные, полученные в этом направлении в экспериментальных и теоретических исследованиях, а также в компьютерном моделировании. Особое внимание посвящено результатам, полученным в рамках метода теоретико-полевой ренормализационной группы. Рассмотрены различные схемы перенормировки с акцентом на пересуммировании результирующих расходящихся рядов.

PACS numbers: 11.10.Gh, 61.43.-j, 64.60.Ak

Содержание

1. Введение (175).
 2. Слабо разбавленная замороженная модель Изинга (176).
 3. Экспериментальные исследования (178).
 4. Моделирование по методу Монте-Карло (182).
 5. Ренормализационно-групповые разложения (186).
 - 5.1. Перенормировка. 5.2. Ряды теории возмущений и их "наивный" анализ.
 6. Пересуммирование рядов и численные результаты (191).
 - 6.1. Суммируемость расходящихся рядов RIM. 6.2. Паде-Борель-ориентированные методы пересуммирования. 6.3. Пересуммирование, основанное на конформном отображении.
 7. Заключение (197).
- Список литературы (198).

1. Введение

В обзоре рассматриваются свойства трехмерной слабо разбавленной замороженной модели Изинга (рис. 1)¹ вблизи критической точки. Если разбавление немагнит-

¹ Случайную модель Изинга (random Ising model) обозначим RIM.

Р. Фольк. Институт теоретической физики, Университет им. Йоганна Кеплера, А-4040 г. Линц, Австрия
Тел. (43-(0) 372) 24-68-83-99
E-mail: folk@tphys.uni-linz.ac.at

Ю. Головач. Институт физики конденсированных систем Национальной академии наук Украины, UA-79011 г. Львов, Украина
Тел. (38-032) (2) 76-09-08
E-mail: hol@icmp.lviv.ua
Львовский национальный университет им. Ивана Франко, UA-79005 г. Львов, Украина
E-mail: tarasyk@ktf.franko.lviv.ua

Т. Яворский. Львовский национальный университет им. Ивана Франко, UA-79005 г. Львов, Украина
Тел. (38-032) (2) 97-94-43
E-mail: tarasyk@ktf.franko.lviv.ua

Статья поступила 20 июля 2001 г., после доработки 16 мая 2002 г.

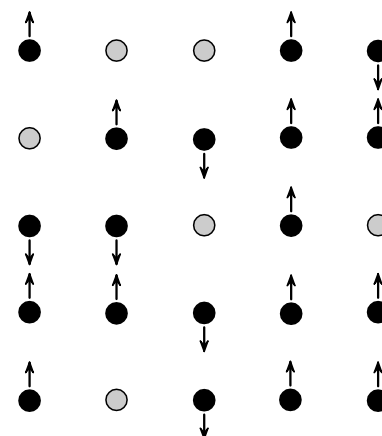


Рис. 1. Слабо разбавленная замороженная ($d = 3$) модель Изинга описывает систему скалярных "спинов", случайно распределенных и фиксированных на узлах трехмерной кубической решетке.

ной компонентой незначительно, т.е. система находится вдали от порога перколяции, в RIM сохраняется магнитный фазовый переход, но с новыми по сравнению с чистой ($d = 3$) моделью Изинга свойствами (см., например, обзор [1] и работу [2]). Статические критические показатели RIM были предметом тщательного экспериментального [4–20], численного [21–41] и теоретического [42–65] анализа на протяжении почти трех десятилетий². Недавно получены новые данные как в экспериментальных измерениях [15–20], так и моделировании по методу Монте-Карло [33–40]. Теоретический прорыв состоялся на протяжении нескольких месяцев 1999–2000 гг., когда ряды теории возмущений RIM

² Далее в обзоре затрагиваются только вопросы статического критического поведения RIM. О последних результатах моделирования по методу Монте-Карло динамического критического поведения RIM, а также для сравнения результатов с теоретическими данными см. работу [3].

были распространены с 4-го порядка [54] через 5-й [63, 64] до 6-го порядка [65, 66]. Поэтому систематизация огромного количества имеющейся в литературе информации о критическом поведении RIM нам кажется весьма своевременной и целесообразной.

Предметом нашего обсуждения в основном будут критические показатели RIM. Асимптотический критический показатель x наблюдаемой физической величины $\mathcal{O}(\tau)$ определяется [67] асимптотически близко к критической точке T_c :

$$x \equiv -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{O}(\tau)}{\ln |\tau|},$$

где $\tau = (T - T_c)/T_c$ — приведенное отклонение от критической точки. Например, магнитная восприимчивость χ расходится согласно

$$\chi \simeq \Gamma_{\pm} |\tau|^{-\gamma}, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (1)$$

где γ является критическим показателем восприимчивости, а Γ_+ и Γ_- обозначают критические амплитуды выше и ниже критической точки соответственно. Степенной закон типа (1) является точным лишь в асимптотическом режиме $\tau \rightarrow 0$. В этом режиме критические показатели и отношения критических амплитуд принимают постоянные значения. Согласно гипотезе универсальности они определяются только глобальными переменными. Для короткодействующего взаимодействия таковыми являются пространственная размерность и тензорные свойства параметра порядка. В неасимптотическом режиме приближение к критичной области характеризуют не универсальными *эффективными критическими показателями*, которые вводят для описания поведения величин в некотором температурном интервале [68, 69]. Эффективный критический показатель восприимчивости γ_{eff} по определению имеет вид

$$\gamma_{\text{eff}}(\tau) = -\frac{d \ln \chi(\tau)}{d \ln \tau}. \quad (2)$$

В асимптотическом пределе $\tau \rightarrow 0$ эффективные и асимптотические показатели совпадают. В промежуточном режиме поведение характеризуют так называемым разложением Вегнера [70]

$$\chi \simeq \Gamma_{\pm} |\tau|^{-\gamma} (1 + \Gamma_{1,\pm} |\tau|^{\omega} + \Gamma_{2,\pm} |\tau|^{2\omega} + \dots), \quad (3)$$

где $\Gamma_{1,\pm}$, $\Gamma_{2,\pm}$ — неуниверсальные амплитуды, ν — критический показатель корреляционной длины, ω — показатель поправки к скейлингу.

Постановка и проведение как экспериментальных измерений, так и теоретических расчетов и компьютерного моделирования, которые позволяют различить режимы (1)–(3), зависят в значительной степени от мастерства исследователя. Ниже будет дан обзор полученных к этому времени данных об эффективных и асимптотических критических показателях RIM. Структура статьи такова. В разделе 2 излагаются общие идеи о влиянии слабого замороженного беспорядка на фазовые переходы второго рода, формулируется модель и рассматриваются главные особенности ее критического поведения. Раздел 3 посвящен обзору опытов над слабо разбавленными одноосными магнетиками. Данные компьютерного моделирования RIM рассматри-

ваются в разделе 4. В разделах 5 и 6 обсуждается метод ренормализационной группы, который оказался наиболее плодотворным теоретическим инструментом при изучении критических свойств RIM. Рассматриваются различные схемы перенормировки. Промежуточным звеном применения метода оказываются расходящиеся ряды, анализу которых уделяется в разделе особое внимание. В заключении обсуждаются главные результаты и возможные направления будущих исследований RIM.

2. Слабо разбавленная замороженная модель Изинга

При изучении влияния слабого беспорядка на магнитные фазовые переходы второго рода центральными являются два вопроса: изменяются ли критические показатели однородного магнетика при разбавлении немагнитной компонентой? Если да, универсальны ли новые критические показатели? Касательно первого вопроса было показано [71], что замороженный беспорядок изменяет критические показатели системы, если соответствующий критический показатель теплоемкости α чистой системы положителен, т.е. теплоемкость в критической точке расходится. Это утверждение известно как критерий Харриса. Позднее для обширного класса d -мерных неупорядоченных систем было доказано, что критический показатель корреляционной длины ν должен удовлетворять соотношению $\nu \geq 2/d$ [72]. Оба утверждения акцентируют внимание на исследованиях $d = 3$ модели Изинга. В отсутствие структурного беспорядка для этой модели стандартные числовые значения упомянутых критических показателей, а также показателей магнитной восприимчивости и параметра порядка получены пересуммированием рядов теории возмущений скалярной $d = 3$ теории ϕ^4 [73]. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,109 \pm 0,004 > 0, \quad \nu = 0,6304 \pm 0,0013 < \frac{2}{3}, \\ \gamma &= 1,2396 \pm 0,0013, \quad \beta = 0,3258 \pm 0,0014. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно приведенным выше неравенствам в случае разбавленной модели Изинга ожидается появление новых критических показателей.

С целью определения точных значений критических показателей сегодня принято полагаться на методы ренормализационной группы. В частности, представленные теоретические оценки (4) получены благодаря глубокому сходству, существующему между крупномасштабными свойствами модели Изинга в окрестности точки фазового перехода второго рода и полевой теорией с эффективным гамильтонианом Гинзбурга–Ландау–Вильсона:

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}}(\phi) = \int d^3 R \left\{ \frac{1}{2} [|\nabla \phi|^2 + m_0^2 \phi^2] + \frac{\tilde{u}_0}{4!} \phi^4 \right\}. \quad (5)$$

Здесь m_0^2 — квадрат голы (неперенормированной) массы, пропорциональный расстоянию от критической точки; $\phi = \phi(R)$, \tilde{u}_0 — (голые) скалярное поле и константа связи.

Один из способов, которым можно ввести в эффективный гамильтониан (5) замороженный беспорядок,

состоит в добавлении к m_0^2 переменной типа случайной температуры [45] $\psi = \psi(R)$:

$$\mathcal{H}_\psi(\varphi) = \int d^3 R \left\{ \frac{1}{2} [|\nabla\varphi|^2 + (m_0^2 + \psi)\varphi^2] + \frac{\tilde{u}_0}{4!} \varphi^4 \right\}. \quad (6)$$

Полагают, что ψ подчиняется распределению Гаусса

$$P(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2w^2}\right) \quad (7)$$

с дисперсией w^2 . Вводя n реплик [74] модели (5) с целью усреднения по замороженному беспорядку [75], приходят [45] к хорошо знакомому эффективному гамильтониану

$$\mathcal{H}_{\text{RIM}}(\varphi) = \int d^3 R \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n [|\nabla\varphi_\alpha|^2 + m_0^2 \varphi_\alpha^2] + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^4 + \frac{v_0}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^2 \right)^2 \right\}. \quad (8)$$

В пределе $n \rightarrow 0$ теория поля (8) описывает критические свойства RIM. Здесь голая константа связи u_0 положительна, поскольку она пропорциональна \tilde{u}_0 . В то же время константа v_0 пропорциональна минус дисперсии случайной величины ψ , а потому отрицательна. Последнее слагаемое в (8) присутствует только при ненулевом разбавлении (при наличии беспорядка): оно непосредственно отвечает за эффективное взаимодействие флуктуаций вследствие наличия примесей.

Часто (например, в моделировании по методу Монте-Карло) микроскопический гамильтониан RIM записывают в виде

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} J(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) S_{\mathbf{R}} S'_{\mathbf{R}'} c_{\mathbf{R}} c_{\mathbf{R}'}, \quad (9)$$

где \mathbf{R} пробегает узлы простой кубической решетки, J — короткодействующее трансляционно-инвариантное взаимодействие между парами $S = \pm 1$ "классических" изинговских спинов, $c_{\mathbf{R}}$ — числа заполнения, равные 0 или 1. Считается, что геометрически вакансии $c_{\mathbf{R}} = 0$ распределены независимо согласно соотношению

$$P(c_{\mathbf{R}}) = (1-p) \delta(c_{\mathbf{R}}) + p \delta(1-c_{\mathbf{R}}) \quad (10)$$

и фиксированы на различных узлах решетки (см. рис. 1). В (10) $p \leq 1$ — концентрация занятых узлов. Если рассчитывать свободную энергию модели (9), используя для выполнения конфигурационного усреднения логарифма конфигурационно-зависимой статистической суммы репличный трюк [74], можно показать, что в результате получается эффективный гамильтониан типа (8) в репличном пределе $n \rightarrow 0$, причем $u_0 \sim p$ и $v_0 \sim p(p-1)$.

С точки зрения динамики можно указать на два противоположных типа беспорядка. Если характерное время динамики примесей соизмеримо с временами релаксации чистой системы, с примесными переменными работают так же, как и с "чистыми" динамическими переменными, так как они являются частью фазового пространства неупорядоченной системы. Соответствующий отоженный беспорядок [75] является предметом специальных исследований. Главный их

результат гласит, что присутствие отоженного беспорядка приводит к тривиальным результатам в критической области. Так называемая перенормировка Фишера [76] устанавливает следующее: если критический показатель теплоемкости неразбавленной системы α_{pure} положителен, то критические показатели x отоженной системы определяются через соответствующие показатели чистой системы (x_{pure}) простой перенормировкой вида

$$x = \frac{x_{\text{pure}}}{1 - \alpha_{\text{pure}}}, \quad \alpha = \frac{-\alpha_{\text{pure}}}{1 - \alpha_{\text{pure}}}. \quad (11)$$

Последнее объясняет, почему преобладающее внимание исследователей посвящено замороженному беспорядку, когда примеси можно рассматривать как фиксированные, и, следовательно, нужно проводить конфигурационное усреднение по ансамблю неупорядоченных систем с различной реализацией беспорядка.

Эффективный гамильтониан (8) представляет критические свойства модели (9) при малой степени неупорядоченности. С другой стороны, свойства масштабно-инвариантного ветвящегося фрактального кластера, возникающего на пороге перколяции, являются отправной точкой подхода сильного беспорядка. В этом случае теоретико-полевое описание начинается с эффективного полевого гамильтониана модели Поттса. Единая теория критического поведения неупорядоченных систем, которая объясняла бы режимы сильного и слабого беспорядка как предельные случаи, все еще отсутствует.

Трансляционно-инвариантный гамильтониан (8) предполагает учет температурных флуктуаций на фоне пространственно-однородного единственного основного состояния в рамках теории возмущений. Такой подход оправдан в случае чистых систем. Для неупорядоченных систем в области, где преобладает беспорядок, существует макроскопическое количество пространственно-неоднородных основных состояний. Они соответствуют решениям на локальный минимум седлового уравнения для эффективного гамильтониана (8) [77, 78]. Физически последние отвечают так называемой фазе Гриффитса [79], которая появляется вследствие существования ферромагнитно-упорядоченных "островов" в интервале температур между критической температурой чистой и неупорядоченной системы. Описание этой фазы вблизи критической точки обеспечивается гамильтонианом с нарушенной репличной симметрией [77], свойства которого нетривиальны [80, 81]. Однако проделанный недавно тщательный анализ проблемы показал устойчивость критического поведения слабо разбавленных систем по отношению к эффектам нарушения репличной симметрии [82]. Предлагаемые в данном обсуждении теоретические результаты основаны на реплично-симметричном гамильтониане (8) (см. раздел 5).

Эффективные гамильтонианы (6) и (8) характеризуются разными глобальными переменными: хотя размерность пространства ($d = 3$) та же, симметрия и число компонент параметра порядка различаются. Поэтому можно ожидать, что после применения ренормализационно-группового подхода они приведут к различным критическим моделям поведения. Одним из центральных понятий формализма ренормализационной группы является понятие неподвижной точки ренормализационно-групповых преобразований. В случае существования и достижимости из начальных значений неподвиж-

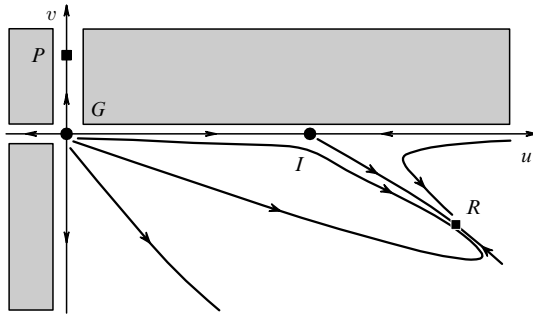


Рис. 2. Качественная структура неподвижных точек RIM. Гауссова неподвижная точка G устойчива при $d > 4$, устойчивая неподвижная точка P недостижима из начальных значений констант связи $u > 0$, $v < 0$ (эта область, а также другие нефизические области RIM обозначены серым тоном). Неподвижная точка чистой модели Изинга I неустойчива. Неподвижная точка R устойчива и достижима (устойчивые неподвижные точки обозначены квадратами).

ная точка соответствует критической точке системы. Применяя преобразования ренормализационной группы к эффективному гамильтониану (6) и начиная с положительных значений u , приходят к устойчивой неподвижной точке u^* , которая соответствует критической точке $d = 3$ чистой модели Изинга. Вычисления в этом случае приводят, в частности, к результатам (4). Структура неподвижных точек эффективного гамильтониана (8) изображена схематически на рис. 2. Наиболее ранний качественный результат о структуре расположения неподвижных точек RIM появился в середине 70-х годов [43–45]. Более поздний анализ подтвердил эту картину [48, 50]. Именно, неподвижная точка I $d = 3$ чистой модели Изинга оказывается неустойчивой, и появляется новая неподвижная точка R (см. рис. 2). Таким образом, общий ответ на основе ренормализационно-группового анализа RIM подтверждает результат работ [71, 72], которые не были основаны на методах теории возмущений: критическое поведение RIM описывается критическими показателями, отличающимися от показателей чистой модели Изинга.

В последующих разделах мы рассмотрим подробнее, как это утверждение прояснялось в экспериментальных исследованиях, моделировании по методу Монте-Карло и теоретических расчетах.

3. Экспериментальные исследования

В опытах на магнетиках модель Изинга реализуется в виде кристаллов дифторида переходного металла, в основном железа или марганца. В FeF_2 , обладающем рутиловой (тетрагональной сингонии) кристаллической структурой с параметрами $a = 4,697 \text{ \AA}$ и $c = 3,309 \text{ \AA}$ при комнатной температуре [83], спины металлических атомов упорядочены вдоль оси c таким образом, что спины объемно-центрированных ионов ориентируются в противоположных направлениях по отношению к спином угловых ионов. Такую систему хорошо описывает спиновый гамильтониан гейзенберговского типа при $S = 2$ с четверным анизотропным одноионным членом. Из спин-волнового дисперсионного соотношения на основе измерений по рассеянию нейтронов [84] следует, что вклад других взаимодействий составляет меньше 6% обменной силовой константы $J = 0,45 \text{ мЭВ}$. Благодаря

доминирующему обменному взаимодействию между подрешетками и большой анизотропии FeF_2 является очень хорошей экспериментальной реализацией изинговского антиферромагнетика с подрешеточной намагниченностью в качестве параметра порядка. Экспериментальные исследования подтверждают, что вещество обладает критическим поведением чистой модели Изинга при $|\tau| < 10^{-1}$ ($\tau \equiv (T - T_N)/T_N$) вблизи температуры Нееля T_N . Другим примером является MnF_2 с подобной кристаллической структурой, но гораздо более слабой в сравнении с FeF_2 одноионной анизотропией. Тем не менее экспериментальные исследования показали, что это вещество также принадлежит к изинговскому классу универсальности [85–87].

Материал, соответствующий RIM, можно получить в виде двухкомпонентной кристаллической смеси на основе матрицы чистой модели Изинга (табл. 1). Соответствующий разбавленный одноосный сплав приготавливают, замещая FeF_2 (MnF_2) немагнитным изоморфом ZnF_2 . Опыты по критическому поведению неупорядоченных систем чрезвычайно чувствительны к качеству образца. В результате макроскопических нестатистических градиентов концентрации в образце появляются колебания T_N , вследствие чего четкий переход размывается. Вместе с тем асимптотическое критическое поведение поддается наблюдению только очень близко к T_N . Следовательно, для обеспечения удовлетворительной реализации случайного замещения магнитных ионов (Fe^{+2} , Mn^{+2}) немагнитными (Zn^{+2}) смешанные кристаллы $\text{Fe}_p\text{Zn}_{1-p}\text{F}_2$ и $\text{Mn}_p\text{Zn}_{1-p}\text{F}_2$ нужно выращивать с очень высокой кристаллической точностью мозаичной структуры, высокой степенью химической однородности, особенно внимательно следя за малостью градиентов концентрации примеси. Последнего можно достичь, выбирая концентрацию примесей [89] из условия $dT_N/dp = 0$ или исходя из геометрических соображений, принимая во внимание, что обычно градиенты параллельны оси роста кристалла. Решающая роль качества образца была доказана еще в ранних экспериментальных исследованиях по критическому поведению неупорядоченных кристаллов [90, 91]; на высококачественных образцах удалось наблюдать резкий фазовый переход и измерить зависимость температуры Нееля T_N от p с помощью метода линейного двойного лучепреломления [92]. Это позволило измерить универсальные критические свойства. Наиболее ранним экспериментальным исследованием критических показателей отчетливого фазового перехода при слабом замороженном разбавлении были измерения намагниченности в $\text{Mn}_{0,864}\text{F}_{0,136}\text{F}_2$ методом ядерного магнитного резонанса [4]. Полученное значение показателя намагниченности β оказалось сильно отличающимся от соответствующего значения в неразбавленном образце (см. табл. 1).

Двумя годами позже исследование работы [4] было подкреплено измерениями восприимчивости и корреляционной длины в кристалле на основе железа с концентрацией $p = 0,5$ (режим высокого разбавления). Эксперимент проводился на двухосном спектрометре техникой рассеяния нейтронов [5]. Эффекты смазывания устранялись экранированием кристалла, в результате чего воздействию радиации подвергалась малая однородная область. Относительный температурный контроль до 0,01 К при температуре Нееля вещества 42,50 К позволил получить для приведенной температуры точность

Таблица 1. Измеряемые в экспериментах критические показатели веществ, соответствующих неупорядоченной модели Изинга *

Работа	Вещество	Метод	$ \tau $	β	γ	ν	α
Dunlap и др., 1981, [4]	$Mn_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,864$	ЯМР	10^{-3}	$0,349 \pm 0,008$			
Birgeneau и др., 1983, [5]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,6; 0,5$	РН; ЛЛ	$10^{-1} - 2 \times 10^{-3}$ $2 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-3}$		$1,44 \pm 0,06$	$0,73 \pm 0,03$	$-0,09 \pm 0,03$
Hastings и др., 1985, [6]	$Dy_3Al_5O_{12}$ + 1% порошок Y	МСК	4×10^{-2}	$0,350 \pm 0,01$		0,73	
Belanger и др., 1986, [7]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,46$	РН	$10^{-1} - 1,5 \times 10^{-3}$		$1,31 \pm 0,03$	$0,69 \pm 0,01$	
Barret, 1986, [8]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,9925 - 0,95$	РН	$10^{-1} - 10^{-3}$	$0,36 \pm 0,01$			
Mitchell и др., 1986, [9]	$Mn_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,75$ $p = 0,5$ $p = 0,5$	РН	$2 \times 10^{-1} - 4 \times 10^{-4}$ $1 \times 10^{-1} - 5 \times 10^{-3}, \tau > 0$ $1 \times 10^{-1} - 5 \times 10^{-3}, \tau < 0$		$1,364 \pm 0,076$ $1,57 \pm 0,16$ $1,56 \pm 0,16$	$0,715 \pm 0,035$ $0,75 \pm 0,05$ $0,76 \pm 0,08$	
Thurston и др., 1988, [10]	$Mn_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,5$	СМРР	$6 \times 10^{-2} - 1 \times 10^{-3}$	$0,33 \pm 0,02$			
Rosov и др., 1988, [11]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,9$	МСК	$1 \times 10^{-1} - 3 \times 10^{-4}$	$0,350 \pm 0,009$			
Ramos и др., 1988, [13]	$Mn_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,40; 0,55;$ 0,83	ЛЛ	$10^{-2} ?$				$-0,09 \pm 0,03$
Ferreira и др., 1991 [14]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $0,31 \leq p \leq 0,84$	ЛЛ	?				$-0,09$
Belanger и др., 1995, [15]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,5$	РН	$< 10^{-1}$	0,35			
Belanger и др., 1996, [16]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,52$	РН	10^{-2}	0,35			
Hill и др., 1997, [17]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,5$	РР	10^{-2}	$0,36 \pm 0,02$			
Slanic и др., 1998, [18]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,93$	ЛЛ	?				$-0,10 \pm 0,02$
Slanic и др., 1998, [19]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,93$	РН	?		$1,35 \pm 0,01$	$0,71 \pm 0,01$	
Slanic и др., 1999, [20]	$Fe_pZn_{1-p}F_2$ $p = 0,93$	РН	$10^{-2} - 1,14 \times 10^{-4}$		$1,34 \pm 0,06$	$0,70 \pm 0,02$	

* Экспериментальные техники обозначены следующим образом: ЯМР — ядерный магнитный резонанс; ЛЛ — линейное двулучепреломление; РН — рассеяние нейтронов; МСК — мёсбауэровская спектроскопия; СМРР — синхротронное магнитное рассеяние рентгеновских лучей; РР — рассеяние рентгеновских лучей. τ означает приведенный температурный интервал, в котором проводилась подгонка параметров степенной зависимости под экспериментальные данные, или же наименьшее значение приведенной температуры, достигнутое в эксперименте.

$\delta|\tau| \sim 5 \times 10^{-4}$. Данные для обратной корреляционной длины и обратной восприимчивости анализировались с помощью степенного анзаца с критическими амплитудами и показателями в качестве подгоночных параметров. Было показано, что эмпирическая степенная зависимость хорошо согласуется с данными при τ от 10^{-1} до 2×10^{-3} , причем значения критических показателей (см. табл. 1) ниже и выше T_c оказались равными между собой, но сильно отличающимися от показателей чистой модели Изинга. Для подкрепления результата изучались также тепловые свойства вещества. Обоснованием применимости экспериментальной техники послужил тот факт, что для дифторидов переходных металлов в интервале $|\tau| < 10^{-1}$ [92, 93] температурная производная

линейного двулучепреломления пропорциональна магнитной теплоемкости. Измерения критического показателя α проводились на образце $Fe_{0,6}Zn_{0,4}F_2$ с $T_N = 47,05$ К. С целью минимизировать эффект концентрационных градиентов луч лазера ориентировали перпендикулярно к градиенту концентрации. Численное значение критического показателя определяли, согласовывая с экспериментальными данными температурный интеграл скейлинговой функции теплоемкости с учетом членов поправки к скейлингу (т.е. первых двух членов в разложении (3)). В отличие от случая чистой модели Изинга из полученных данных следовало $\alpha < 0$ (см. табл. 1). Во всем интервале приведенной температуры τ ни признаки критического поведения чистой модели

Изинга, ни кроссовер от чистой к неупорядоченной неподвижной точке обнаружены не были. На этом основании был сделан вывод, что или кроссовер происходит за пределами критической области, или он очень плавный. В заключение отметим, что данные, полученные в работе [5] на двух различных материалах при помощи разных экспериментальных процедур, подтвердили истинность соотношения скейлинга $dv = 2 - \alpha$ и, следовательно, послужили прямым экспериментальным подтверждением выполнения скейлинга в разбавленных системах.

При типичной энергии нейтронного пучка 10 мэВ эксперименты по рассеянию нейтронов оказались одними из наиболее успешных инструментов изучения критической области. Однако этот метод оказался очень чувствительным к качеству образца, поскольку типичные размеры последнего меньше нескольких миллиметров. Данные по рассеянию включают вклады от поперечных и продольных спиновых флуктуаций, которые при обстоятельной обработке результатов следует разделять. Это объясняет, почему в исследованиях работы [7], выполненных на $Fe_pZn_{1-p}F_2$ при концентрации 0,46, особое внимание уделялось качеству образца. Достиженные в эксперименте отклонения концентрации по всему объему порядка 2×10^{-4} позволили провести измерения в температурных пределах $|\tau| \geq 10^{-3}$. Данные для обратной корреляционной длины были получены в интервале $1,5 \times 10^{-3} \leq |\tau| \leq 10^{-1}$ подгонкой ширины лоренцевского профиля как функции температуры, после чего показатель корреляционной длины определялся подбором параметров степенного закона. С целью вычисления показателя γ из данных для χ , экстраполированных к нулевой длине волнового вектора $q = 0$ (см. табл. 1), подгоняли параметры степенного анзаца, учитывающего фоновый член. Альтернативное вещество на основе Mn ($Mn_pZn_{1-p}F_2$) изучали методом рассеяния нейтронов годом позднее [9]. У образца с $p = 0,75$ малые отклонения по концентрации (0,001) позволили провести измерения до $|\tau| \sim 4 \times 10^{-4}$ (рис. 3). Образец с $p = 0,5$ был немного худшего качества с разбросом концентрации 0,005. Довольно высокое качество образцов и температурный контроль до 0,05 К позволили получить отношение критических амплитуд и показатели с хорошей точностью. Однако более значительными по сравнению со статистическими оказались систематические ошибки, происходившие, по предположению авторов, вследствие поправок на разрешение, квазиэластического приближения, концентрационных флуктуаций и фоновых эффектов. Авторы подчеркнули, что найденные показатели являются эффективными, поскольку поправки к скейлингу учтены не были. Тем не менее у образца с $p = 0,75$ было найдено критическое поведение RIM во всем температурном интервале $4 \times 10^{-4} < |\tau| < 2 \times 10^{-1}$; в случае большего разбавления $p = 0,5$ критические показатели не достигли своих асимптотических значений RIM (см. табл. 1 и рис. 4).

Перечисленные выше результаты, полученные на монокристаллах фторида переходного металла, были подтверждены [6] экспериментами по рассеянию нейтронов на образце, состоявшем из порошка $Du_3Al_5O_{12}$. Порошок из этого неколлинеарного кубического изинговского антиферромагнетика вместе с немагнитным иттрием приготовили с целью преодоления градиентов в композите, где они неизбежно появляются. Критичес-

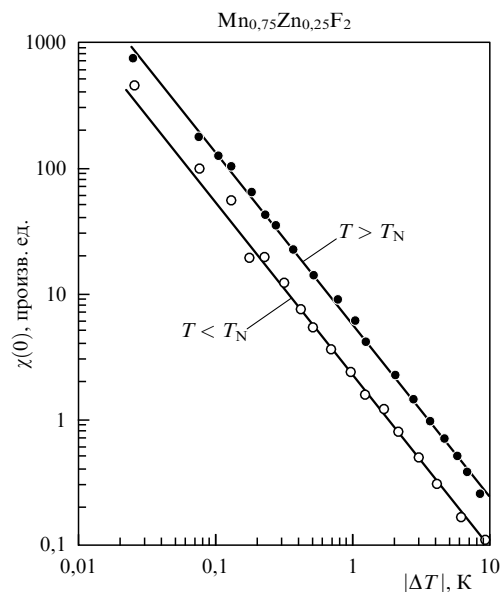


Рис. 3. Измерение $\chi(0)$ методом рассеяния нейтронов в $Mn_{0,75}Zn_{0,25}F_2$ [9]. Сплошные линии отвечают простой степенной зависимости, полученной подгонкой ее параметров к экспериментальным данным с результатом $\gamma \simeq 1,364$ выше и ниже температуры Нееля T_N . Критическое поведение определяется критическими асимптотическими показателями RIM в интервале приведенной температуры $4 \times 10^{-4} < |\tau| < 2 \times 10^{-1}$. Рисунок заимствован из работы [9].

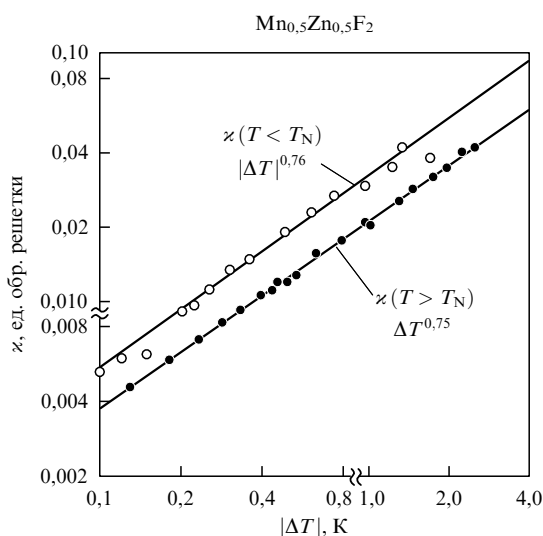


Рис. 4. Измерение продольной обратной корреляционной длины χ в $Mn_{0,5}Zn_{0,5}F_2$ методом рассеяния нейтронов выше и ниже T_N [9]. Сплошные линии отвечают степенной зависимости, полученной подгонкой ее параметров к экспериментальным данным с результатом $\nu' \simeq 0,76$ при $T < T_N$ и $\nu \simeq 0,75$ при $T > T_N$. Данные позволяют заключить, что $\nu' = \nu$ в пределах ошибок (см. табл. 1). Степенной характер зависимости справедлив в температурном интервале $5 \times 10^{-3} < |\tau| < 10^{-1}$. Асимптотическая область еще не достигнута и полученные показатели являются эффективными. Рисунок заимствован из работы [9].

кий показатель β в неупорядоченном образце увеличился по сравнению со значением для чистой модели Изинга (см. табл. 1) и предоставил дополнительное свидетельство о соответствии эксперимента и теоретических предсказаний.

Известно, что статическое критическое поведение разбавленного изинговского магнетика в однородном поле H соответствует свойствам модели Изинга в случайном поле [94, 95]. С недавнего времени эта модель является предметом интенсивных экспериментальных исследований (см. [2, 96]). Две работы по исследованию RIM методом рассеяния нейтронов появились в середине 90-х годов в контексте изучения свойств модели Изинга в случайном поле [15, 16]. В экспериментах проблема насыщения брэгговского рассеяния вследствие эффектов экстинкции частично решалась выращиванием 3,4 мкм эпитаксиальной пленки $\text{Fe}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{F}_2$ на (001) ZnF_2 подкладке. Малая ширина линии рентгеновской кривой качания при отражении в направлении (001) подтвердила очень хорошее качество пленки, что отчасти объясняется почти идентичными параметрами решетки вещества и подложки вдоль a -оси. С другой стороны, поскольку толщина пленки составляла 10^4 периодов решетки, она могла рассматриваться как трехмерный объект. Последнее было доказано в экспериментах на FeF_2 , где было обнаружено критическое поведение чистого $d=3$ изинговского магнетика [97]. Данные сканирования поперечного (100) брэгговского рассеяния хорошо легли на распределения Гаусса с фоновым членом. Подгоняя параметры простого степенного закона под зависимость брэгговской амплитуды от температуры, при $H=0$ получили значение критического показателя намагниченности $\beta = 0,35$. Однако сглаживание ожидаемого критического поведения намагниченности вблизи T_N препятствовало надежному анализу данных. Для выяснения, являлось ли причиной последнего недостаточное качество образца, были проведены измерения на 3,4 мкм пленке $\text{Fe}_{0,52}\text{Zn}_{0,48}\text{F}_2$ [16]. Измеренные при большем разрешении данные подтвердили полученное значение β и показали, что сглаживание имело место только вследствие недостаточного разрешения. Недавно при исследовании тонкого кристалла толщиной 0,44 мм методом рассеяния нейтронов область исследования была расширена от $|\tau| \geq 10^{-2}$ до $|\tau| \geq 10^{-4}$, что позволило получить критические показатели корреляционной длины и восприимчивости [19, 20].

Исследования критического поведения методом мёссбауэровской спектроскопии начались в 1986 г. на классе основанных на Fe материалов с различной концентрацией магнитных атомов [8]. Перед этим метод тестировался на чистом изинговском антиферромагнетике FeF_2 . Было показано, что подрешеточная намагниченность пропорциональна полю h , которое и может измеряться в мёссбауэровской спектроскопии [88]. Для использования метода в случае разбавленного магнетика колебание концентрации Zn было уменьшено до уровня 10^{-4} и достигнута температурная стабильность 0,002 К. При определении критической температуры величина β выбиралась из условия, чтобы график $h(T)^{1/\beta}$ от T превращался в прямую, пересекающую ось абсцисс в T_N . Этот способ оказался нечувствительным к частным значениям β и дал для расположения критической температуры точность 0,05 К. Хотя критический показатель β можно получить по наклону графика в двойном логарифмическом масштабе, прием оказался результативным только после разделения данных по τ на два интервала, которые характеризовались явно различными критическими показателями: один — чистой модели Изинга, другой —

RIM. Кроссовер β происходил в пределах очень узкого интервала и при относительно больших значениях $10^{-1} \geq |\tau| \geq 10^{-3}$ в случае малого разбавления $p \geq 0,95$. Последующие исследования методом мёссбауэровской спектроскопии появились двумя годами позже [11] и отличались очень скрупулезным анализом данных. Преимуществом экспериментов был высококачественный образец, выращенный из стехиометрической смеси порошков FeF_2 и ZnF_2 , каждый из которых был приготовлен реакцией металлической губки с сухим HF при $+900^\circ\text{C}$. В этом эксперименте концентрационные градиенты монокристаллического абсорбера минимизировали, выбирая направление γ -лучей вдоль оси роста, которая перпендикулярна плоскости диска-образца с размерами экспозиции 4 мм \times 5 мм \times 0,1 мм. Были получены 20 спектров постоянного ускорения в пределах $3 \times 10^{-4} < |\tau| < 0,86$. Очень хорошая температурная устойчивость 3 мК день $^{-1}$ и учет поправки к скейлингу позволили получить из данных во всем исследуемом интервале асимптотический показатель намагниченности RIM β (см. табл. 1).

Метод оптического линейного двулучепреломления, предложенный в работе [5] для изучения критического поведения магнитной части теплоемкости c_m неупорядоченных магнетиков, получил развитие в работах [13, 14, 18]. Для оптически прозрачных материалов предполагается пропорциональность c_m и температурной производной $d(\Delta n)/dT$ оптического двулучепреломления Δn . Хотя калорические свойства в критической области можно измерять также техникой тепловых импульсов, метод имеет ряд преимуществ. Во-первых, в отличие от термальных техник, где немагнитный фон большой и трудно устранимый, немагнитный вклад в температурную производную оптического двулучепреломления несуществен. Во-вторых, можно минимизировать эффекты концентрационных флуктуаций, направляя лазерный луч перпендикулярно к концентрационным градиентам. В первом эксперименте [13] на классе монокристаллов с различными концентрациями примесей было показано, что показатель α не зависит от концент-

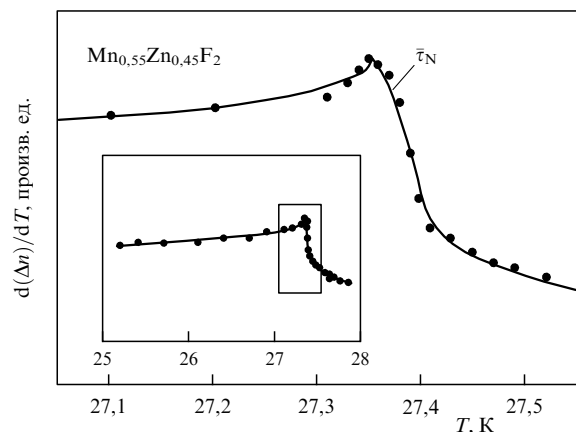


Рис. 5. Температурная производная оптического двулучепреломления в $\text{Mn}_{0,55}\text{Zn}_{0,45}\text{F}_2$ в нулевом магнитном поле. Основную часть рисунка занимают данные для $d(\Delta n)/dT$ в критической области (обозначена прямоугольником на вставке). Данные эксперимента свидетельствуют о пикообразном поведении теплоемкости RIM с критическим показателем $\alpha = -0,99 \pm 0,033$. Рисунок заимствован из работы [13].

рации и находится в хорошем согласии с теоретическими предсказаниями (см. рис. 5, а также раздел 4). В двух последующих исследованиях [14, 18] показана равноценность метода прямым измерениям техникой тепловых импульсов. Магнитное рассеяние рентгеновских лучей, с успехом примененное к чистому изинговскому кристаллу [98], к неупорядоченному изинговскому кристаллу применялось при высоком разбавлении в работе [10]. Для образцов с размерами $5,7 \text{ мм} \times 6,4 \text{ мм} \times 8,9 \text{ мм}$ и хорошим кристаллографическим и мозаичным качеством было найдено среднеполюсное значение критического показателя β вплоть до $|\tau| \leq 0,06$, тогда как ближе к T_N получен показатель β , согласующийся с RIM.

4. Моделирование по методу Монте-Карло

Степенные сингулярности физических величин (см. уравнение (1)) появляются только в термодинамическом пределе, когда объем системы и количество частиц стремятся к бесконечности. Таким образом, очевидное препятствие в компьютерных "экспериментах" состоит в том, что моделировать можно только системы ограниченных размеров. Более того, в компьютерных "экспериментах" невозможно достигнуть асимптотической температурной области, так как T_c как таковая не существует для конечных систем. В то же время положение критической температуры имеет решающее значение для определения критических показателей. Данные можно экстраполировать к термодинамическому пределу, предполагая, что режим постоянного критического показателя устанавливается, начиная с некоторого конечного размера системы, в пределах некоторого ненулевого интервала вокруг T_c . Последнее предположение, используемое в компьютерном моделировании, ведет к чрезвычайно узкому температурному интервалу ниже и выше T_c , поставляющему надежные данные. Ограничения сверху определяются температурой, когда вступает в игру поправка к скейлингу. Нижняя граница следует из эффектов ограниченного размера системы и имеет порядок 10^{-3} для типичных размеров систем, достигаемых сегодня в моделировании по методу Монте-Карло. Поэтому показатели, получаемые описанным способом, часто оказываются эффективными критическими показателями, характеризующими критическое поведение в наблюдаемом температурном интервале. С другой стороны, динамика чистых и неупорядоченных спиновых систем обуславливается различными временными масштабами. Поэтому в случае последних только очень длительное моделирование позволяет получить надежные данные. Время релаксации сильно увеличивается не только при приближении к T_c . В ранних компьютерных экспериментах оно также увеличивалось с ростом разбавления, в результате чего на протяжении нескольких десятилетий получали, переходя от чистой $p = 1$ системы к разбавленной $p = 0,6$, большие времена релаксации. Однако применение более совершенных техник моделирования имело следствием противоположный эффект — уменьшение времени релаксации для некоторых неупорядоченных образцов с увеличением концентрации p [99]. Суммарное увеличение вычислительного времени происходит именно благодаря конфигурационному усреднению. Статистические ошибки термодинамических наблюдаемых происходят в основном от дисперсии в конфигурационном пространстве и

имеют большие значения, чем обыкновенные статистические ошибки при моделировании в ограниченном объеме с обычной сегодня статистикой 10^6 ШМК (шагов Монте-Карло на спин). В результате точность ограничена имеющимся в распоряжении временем процессора, с одной стороны, и количеством образцов, по которому проводится конфигурационное усреднение, — с другой [75]. Эффективные алгоритмы вместе с высокоскоростными компьютерами отчасти решают задачу.

Несмотря на сложность ситуации, исследования методом Монте-Карло (МК) углубили понимание природы фазового перехода в RIM и предоставили надежные значения ее критических показателей. Моделирование по методу Монте-Карло трехмерной RIM проводили на протяжении последних двух десятилетий [21–40]. Первый анализ [21] универсальных критических характеристик RIM был выполнен на простой кубической решетке размера 30^3 с использованием метода Монте-Карло и выборки по значимости [100]. Расположение пиков теплоемкости, соответствующих псевдокритическим температурам ограниченной решетки, экстраполировалось к T_c с помощью теории конечномерного скейлинга. Достигнутая точность 500–5000 ШМК на каждую точку данных и усреднение по нескольким различным стартовым конфигурациям примесей не позволили выяснить, существует ли несущественно беспорядок для критических свойств модели. Анализ данных показал, что значения критического показателя параметра порядка β и восприимчивости γ RIM неразличимы в пределах ошибки от соответствующих показателей чистой системы при любой степени разбавления (см. табл. 2, работу [21]). В качестве возможного объяснения утверждалось, что размеры исследованной решетки были слишком малы для достижения критической области. Следовательно, "неупорядоченное" критическое поведение наблюдается только для систем с более широкой критической областью (большими значениями α_{pure}). Это предположение было опровергнуто при МК моделировании RIM на решетках больших размеров, улучшенной статистикой 5000–11000 ШМК, большим числом усредняемых образцов и более подробным анализом данных моделирования, но в более узком интервале разбавления [22]. Положение температуры фазового перехода T_c определялось по данным для теплоемкости и численной производной энергии. Этим способом точность определения критической температуры была улучшена до 0,004. В конечном счете обработка данных намагниченности позволила сделать вывод о существенности беспорядка для универсальных критических свойств RIM. Вместе с тем критический показатель β оказался непрерывно изменяющимся с концентрацией магнитных узлов. Было также обнаружено, что не существует температурного интервала с постоянным значением β . Как и в [21], авторы работы [22] подчеркнули, что, хотя они и не могут исключить существования очень узкой критической "неупорядоченной" области, она не наблюдается при слабом разбавлении как экспериментально, так и методом Монте-Карло. В результате всегда будут наблюдаться эффективные критические показатели, изменяющиеся непрерывно с разбавлением согласно сценарию двух неподвижных точек (см. рис. 2). Возможно существование даже линии неподвижных точек, по одной для каждой концентрации разбавления (ср. зависимость критического показателя намагничен-

Таблица 2. Критические показатели RIM, полученные моделированием по методу Монте-Карло (звездочка у значения концентрации показывает, что беспорядок был реализован каноническим способом)

Работа	Максимальный размер	Интервал концентрации	p	β	γ	ν
Landau, 1980, [21]	30	$0,4 < p \leq 1$	все	0,31	1,25	
Marro и др., 1986, [22]	40	$0,8 \leq p \leq 1$	1	$0,30 \pm 0,02$		
			0,985	$0,31 \pm 0,02$		
			0,95	$0,32 \pm 0,03$		
			0,9	$0,355 \pm 0,010$		
			0,8	$0,385 \pm 0,015$		
Chowdhury и др., 1986, [23]	90	$0,8 \leq p \leq 1$	1	$0,29 \pm 0,02$		
			0,95	$0,28 \pm 0,02$		
			0,90	$0,31 \pm 0,02$		
			0,80	$0,37 \pm 0,02$		
Braun и др., 1988, [24]	40		0,80	$0,392 \pm 0,03$		
Wang и др., 1989, [26]	100	$0,4 \leq p \leq 0,8$	все		$1,52 \pm 0,07$	$0,77 \pm 0,04$
Wang и др., 1990, [27]	300		0,8		$1,36 \pm 0,04$	
Holey и др., 1990, [28]	64	$0,8 < p \leq 1$	1			$0,629(4)$
			0,9			$< 2/3$
			0,8			$0,688(13)$
Heuer, 1990, [29]	60	$0,5 < p \leq 1$	1	$0,305 \pm 0,01$	$1,24 \pm 0,01$	
			0,9	$0,315 \pm 0,01$	$1,30 \pm 0,01$	
			0,8	$0,330 \pm 0,01$	$1,35 \pm 0,01$	
			0,6	$0,330 \pm 0,01$	$1,48 \pm 0,02$	
			0,5	$0,335 \pm 0,01$	$1,49 \pm 0,02$	
Heuer, 1993, [30]	60	$0,6 < p \leq 1$	1	$0,33 \pm 0,01$	$1,22 \pm 0,02$	$0,624 \pm 0,010$
			0,95	$0,31 \pm 0,02$	$1,28 \pm 0,03$	$0,64 \pm 0,02$
			0,9	$0,31 \pm 0,02$	$1,31 \pm 0,03$	$0,65 \pm 0,02$
			0,8	$0,35 \pm 0,02$	$1,35 \pm 0,03$	$0,68 \pm 0,02$
			0,6	$0,33 \pm 0,02$	$1,51 \pm 0,03$	$0,72 \pm 0,02$
Hennecke и др., 1993, [32]	90		0,6	$0,42 \pm 0,04$		$0,78 \pm 0,01$
Wiseman и др., 1998, [34]	64		0,8	$0,344 \pm 0,003$	$1,357 \pm 0,008$	$0,682 \pm 0,003$
Wiseman и др., 1998, [35]	90		0,6*	$0,316 \pm 0,013$	$1,522 \pm 0,031$	$0,722 \pm 0,008$
	80		0,6	$0,313 \pm 0,012$	$1,508 \pm 0,028$	$0,717 \pm 0,007$
Ballesteros и др., 1998, [33]	128	$0,4 \leq p \leq 0,9$	все	$0,3546 \pm 0,0028$	$1,342 \pm 0,010$	$0,6837 \pm 0,0053$
Marques и др., 2000, [38]	60	$0,8 \leq p \leq 0,9975$	все	0,3546	1,342	
Marques и др., 2000, [39]	100	0,5				0,6837

ности β от концентрации магнитных узлов в табл. 2, работа [22]).

Указанные результаты оказались в хорошем согласии с данными Монте-Карло, полученными в работе [23] на основе программы мультиспинового кодирования. Хотя использовались системы вдвое большего размера при статистике 8000 ШМК для данной концентрации и температуры, было найдено, что эффективный критический показатель β также непрерывно увеличивается с разбавлением. Такое поведение β объяснялось тем, что равновесная намагниченность вычислялась слишком

далеко от критической точки. Два годами позже в работе [24] был сделан вывод, что надежные значения критических показателей нельзя получить моделированием систем с размерами $l \leq 20$. Причиной тому служат статистические ошибки при определении критической температуры на основе данных восприимчивости и/или теплоемкости, а также экстраполяция методом конечного скейлинга. В частности, следует принимать во внимание поправку к скейлингу [101]. Вместо этого при моделировании со статистикой 5000 – 11000 ШМК, но без конфигурационного усреднения оказалось возможным

определить показатель β . Полученное значение оказалось явно больше значения показателя в "чистом" случае. В то же время в связи с большим разбросом данных определение показателя γ проведено не было. Повторный анализ результатов предыдущих моделирований по методу Монте-Карло [21–23] привел авторов к выводу, что в большей части критической области доминирует кроссовер от показателей чистой модели Изинга к показателям RIM: результат работы [21] может соответствовать величине эффективного критического показателя в области плато, обусловленного неподвижной точкой чистой модели Изинга. Вместе с тем более обстоятельно обработанные результаты [22, 23] соответствуют промежуточному режиму вблизи T_c перед недостижимой асимптотической областью. Используя понятие эффективного критического показателя [68, 69] (см. уравнение (2)), авторы заявили, что найденные ими критические показатели находятся в качественном согласии с ренормализационно-групповыми потоками (см. рис. 2).

В скором времени стало ясно, что наблюдавшаяся ранее в методе Монте-Карло концентрационная зависимость критических показателей возникает вследствие больших релаксационных времен в критической области. Применение алгоритма Сведсена – Ванга к моделированию RIM [26] позволило сделать вывод, что анализ данных восприимчивости методом конечного скейлинга не позволяет адекватно ответить на вопрос, появляются ли в RIM новые критические показатели. Основой послужило наблюдение, что отношение γ/v не изменяется с размером системы. С другой стороны, определение T_c из максимума восприимчивости на основе метода пересечения четвертого кумулянта позволило рассчитать эффективный критический показатель γ , анализируя данные в следующих один за другим временных интервалах. Этим способом было найдено, что критические показатели восприимчивости и корреляционной длины не зависят от концентрации в широком интервале разбавления (см. табл. 2, работу [24]). Из наблюдений работы [26] следовало, что показатель γ больше теоретического асимптотического значения. Таким образом было найдено, что γ_{eff} является немонотонной функцией приведенной температуры с максимальным значением тем большим, чем выше разбавление. Для частного случая концентрации магнитных узлов 0,8 поведение эффективных критических показателей исследовалось [27] на довольно больших системах с использованием алгоритма Сведсена – Ванга и однокластерного обобщения Вольфа. В то время как отношение γ/v повторяло результат работы [26], не было обнаружено максимума эффективного критического показателя γ при монотонном стремлении к T_c .

Предположение, что взаимодействие между блоками в разбавленных системах можно представить перенормированными константами связи чистой системы, использовалось в ренормализационно-групповом подходе Монте-Карло при исследовании RIM в случае слабого разбавления ($p \geq 0,8$) [28]. Было найдено, что значения критического показателя корреляционной длины v зависят от концентрации магнитных узлов. При $p = 0,8$ показатель v удовлетворял точному неравенству $v > 2/d$ для разбавленной системы [72]. Это привело авторов работы [28] к предположению, что ими получено асимптотическое значение критического показателя.

При оговоренной концентрации магнитных узлов авторы оценили ширину асимптотической критической области ($|\tau|_c \leq 3 \times 10^{-4}$), в которой не наблюдается влияния неподвижной точки чистой модели Изинга. С другой стороны, при концентрации $p = 0,9$ неравенство для v [72] не выполнялось. Таким образом, либо не была достигнута критическая область $|\tau|_c \leq 1,3 \times 10^{-4}$ и наблюдалось критическое поведение чистой модели, либо кроссовер к асимптотическому критическому поведению RIM при $p = 0,9$ наблюдаем только в больших системах. При $p = 0,4$ точность полученных данных была слишком низкой, чтобы сделать какие-либо выводы.

Надежные данные, полученные методом Монте-Карло в работе [29], стали возможными после применения нового кластерного алгоритма [102] и более продуманной векторизованной реализации локальных алгоритмов [103]. Метод Монте-Карло в исследовании RIM достиг значительных успехов после появления улучшенной версии мультиспиновой кодирующей программы [29, 103]. Ее применение позволило удостовериться в истинности всех полученных ранее данных моделирования RIM при беспрецедентной статистике до 3×10^5 ШМК и 10 усреднениях по конфигурациям для систем с $p \geq 0,8$, а также статистике $1,2 \times 10^6$ ШМК при большем разбавлении. Например, в тестовом моделировании указанная статистика позволила получить критические показатели восприимчивости и намагниченности двумерной чистой модели Изинга с точностью 1 % и 3 % соответственно. В случае RIM полученные эффективные показатели γ , β и $\zeta = 1 - \beta$ (последний описывает расходимость корреляционной функции намагниченность – энергия) [29] оказались концентрационно-зависимыми в интервале $0,5 \leq p < 1$ (см. табл. 2). Значение T_c так же, как и γ , было получено подгонкой параметров простого степенного закона к данным восприимчивости; затем положение T_c проверялось четвертым и шестым кумулянтам намагниченности. Исследование корреляционной функции намагниченность – энергия позволило контролировать выполнение соотношений скейлинга; критические показатели ζ и β были получены подгонкой простого степенного закона к данным со значением T_c из анализа восприимчивости. Все данные продемонстрировали степенное поведение в пределах избранного температурного интервала, хотя значения критических показателей изменялись с разбавлением (рис. 6). Например, величины γ и β увеличивались от значения чистой модели Изинга и плавно изменялись с разбавлением, достигая плато при $p = 0,5$. При этом величина ζ уменьшалась таким образом, что сумма ζ и β составляла 1 в пределах ошибок. В заключении работы [29] утверждалось, что, хотя наблюдались новые изменяющиеся с разбавлением критические показатели, линии неподвижных устойчивых точек, как предполагалось, в частности, в работе [22], не существует. Было высказано предположение, что такое поведение объясняется кроссовером от чистого режима к разбавленному, а также от перколяционного режима к разбавленному с эффективными критическими показателями при всех концентрациях.

Признаки существования кроссовера послужили стимулом предпринять более систематические исследования. Данные [29] были пересмотрены тремя годами позже в работе [30], где для определения T_c использовался кумулянтный метод. Для термодинамического усреднения выполнялось до 40000 ШМК, а для конфигу-

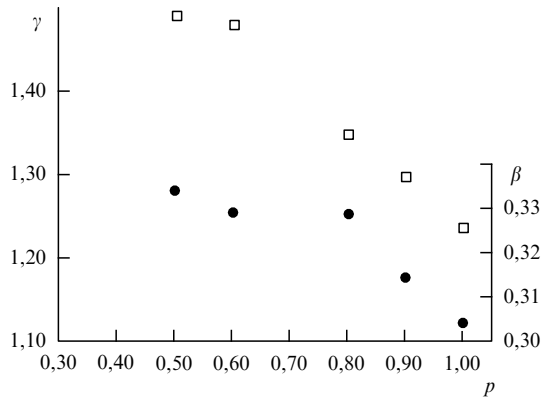


Рис. 6. Эффективные критические показатели β (круги) и γ (квадраты) при различной степени разбавления p , полученные моделированием по методу Монте-Карло для RIM [29]. Все показатели непрерывно изменяются с разбавлением и явно отличаются от значений чистой модели Изинга. Рисунок заимствован из работы [29].

рационного усреднения использовалось до 32 конфигураций (ср. с 5000 ШМК и несколькими образцами при конфигурационном усреднении в работе [21]). Было показано, что критические показатели ζ , β и γ изменяются при слабом разбавлении согласно сценарию двух неподвижных точек. При сильном разбавлении ($p = 0,5; 0,6$) было сделано предположение о влиянии иной "перколяционной" неподвижной точки. Работа [30] в основном посвящена скейлинговой функции намагниченность–энергия. Оказалось, что разбавленные системы демонстрируют сложное кроссоверное поведение прежде, чем достигнуть асимптотической критической области со значениями показателей в слабо неупорядоченной неподвижной точке, в то время как чистые системы достигают своего асимптотического предела при малых размерах. В слабо разбавленных системах ($p \geq 0,8$) показатели гладко приближаются к асимптотическим значениям снизу, тогда как в сильно разбавленных — сверху. Асимптотические значения показателей достигаются при некотором характерном размере системы λ_p , зависящем от концентрации p . Согласно сделанным оценкам для чистых систем λ_p имеет величину 20–30 параметров решетки, 50 при $p = 0,95; 0,9$ и 100–150 при $p = 0,6$; в точке перколяции λ_p расходится. Таким образом, более неупорядоченные системы требуют значительно более подробного анализа, должным образом учитывающего перколяционные структурные эффекты, существенные для неасимптотических размеров и корреляционных длин. По неизвестным пока причинам кроссоверная функция меняет знак при $p \sim 0,8$, так что при этой концентрации оказывается возможным достичь асимптотических значений показателей уже для малых систем (ср. [27, 29]).

Благодаря работам [26, 27] и особенно [29, 30] стало ясно, что наблюдаемые в моделировании по методу Монте-Карло концентрационно-зависимые критические показатели являются эффективными показателями, характеризующими приближение к асимптотической области. Эта точка зрения нашла подкрепление в гипотезе о ступенчатой универсальности трехмерных разбавленных магнетиков [31]. Попытка изучения разбавленной модели при $p = 0,6$ посредством получения МК данных из

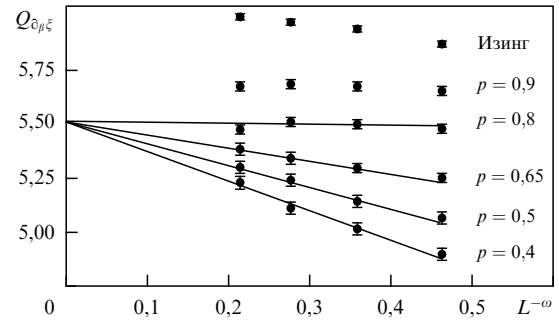


Рис. 7. Определение показателя поправки к скейлингу ω в моделировании по методу Монте-Карло [33]. Величина $Q_{d_{p,c}} = 2^{1+1/\nu}$ изображена при различных концентрациях $0,4 \leq p \leq 1$ и размерах решеток $8 \leq L \leq 128$. Видно, что для $p = 0,9$ система переходит от режима неподвижной точки чистой модели Изинга к точке неупорядоченной модели даже при $L = 128$. Сплошные линии соответствуют оценке $\omega = 0,37$, которая обеспечивает одинаковые экстраполяции к бесконечному объему для всех $p \leq 0,8$. Рисунок заимствован из работы [33].

различных подсистем одной большой системы была предпринята в работе [32]. Было сделано заключение, что на результирующие значения критических показателей сильно влияет размер системы. Недавно критическое поведение RIM было пересмотрено с использованием метода Монте-Карло в работе [33] при $0,4 \leq p \leq 0,9$ и в работах [34, 35] при концентрации $p = 0,8; 0,6$. В частности, в [35] обнаружено, что беспорядок, реализованный каноническим способом (фиксацией доли магнитных узлов) ведет к результатам, отличным от случая, когда беспорядок реализовался способом большого канонического типа (см. табл. 2). Исследования работы [33] основаны на учете ведущего члена поправки к скейлингу при экстраполяции МК данных к пределу бесконечного объема, и поэтому результаты такого анализа не согласуются с данными работы [35]. Результаты моделирования при концентрациях $p = 0,9; 0,8; 0,6; 0,4$ были экстраполированы к пределу бесконечного размера системы (рис. 7) и привели к доказательству универсальности критического поведения разбавленной модели Изинга в широком диапазоне концентраций. В частности, найденная величина показателя поправки к скейлингу $\omega = 0,37 \pm 0,06$ составляет почти половину соответствующей величины $\omega = 0,799 \pm 0,011$ [73] чистой $d = 3$ модели Изинга. Чем меньше значение ω , тем больше интервал, в котором нужно ее учитывать (ср. формулу (3)). Таким образом, малая величина показателя ω в случае разбавленной модели объясняет важность учета поправки к скейлингу при анализе асимптотического критического поведения.

Другим важным вопросом, рассмотренным в работах [34, 35], была проблема самоусреднения в RIM. Гиббсовский подход к статическим коллективным явлениям предполагает статистическую независимость макроскопических образцов согласно короткодействующей природе взаимодействия между частицами. В согласии с этим подходом любая термодинамическая экстенсивная величина M является (сильно) самоусредняющейся. Это значит, что квадрат относительной средней квадратичной флуктуации R_M величин подсистем ведет себя согласно $R_M \sim 1/n \sim l^{-d}$, где n — число подсистем и l — линейный размер системы. Однако в окрестности

критической точки статистическая независимость не имеет места, поскольку корреляционная длина системы ξ может принимать произвольно большие значения $\xi \sim l$, и, таким образом, подсистемы нельзя рассматривать как независимые. Понятие слабого самоусреднения отвечает случаю, когда существует число x_1 ($0 < x_1 < d$) такое, что R_M в критической области масштабируется как l^{-x_1} . Наоборот, если $R_M \rightarrow \text{const} \neq 0$, величина M называется несамоусредняющейся. На основе эвристических аргументов предполагалось, что для неупорядоченных моделей далеко от критической области все экстенсивные переменные являются самоусредняющимися. Тем не менее для величины M , масштабирующейся вблизи критической точки как l^p , сильное самоусреднение должно не выполняться. Тогда ожидается, что квадрат средней флуктуации будет масштабироваться как $l^{2\rho+z/\nu}$ для $\alpha_{\text{random}} < 0$ в предположении $R_M \sim l^{z/\nu}$ или слабого самоусреднения [104].

Отсутствие самоусреднения в RIM имеет не только большое теоретический интерес. Надежность МК моделирования зависит от ответа на вопрос, улучшает ли статистику моделирования увеличение размера решетки. Если величина не самоусредняется, данные моделирования ненадежны. Теоретические исследования, основанные на подходе ренормализационной группы, подтвердили сильное самоусреднение для $l \gg \xi$. В отличие от этого, в специальных МК исследованиях было найдено отсутствие самоусреднения в ограниченных системах в случае существенного беспорядка $\alpha_{\text{pure}} > 0$. Оказалось, что слабое самоусреднение реализуется только для несущественного беспорядка [105], что не согласуется с [104]. МК моделирование, выполненное в работах [34, 35], имело целью решить эту проблему. Было показано, что относительная флуктуация R_M стремится к постоянной величине при больших значениях l , которые не зависят от степени разбавления большого канонического типа. При каноническом типе разбавления [34] это не имеет места. Последний результат, однако, можно объяснить, предполагая очень медленное приближение R_M к своему универсальному асимптотическому значению, которое оценивается как $l^{z/\nu}$, в случае канонической реализации $d = 3$ неупорядоченной модели Изинга [36].

С целью определения переходной зоны между классами универсальности чистой и разбавленной модели Изинга недавно изучали эволюцию самоусреднения от чистой модели к RIM [37]. Было показано, что переходная зона гладко зависит от концентрации магнитных узлов и не зависит от размера решетки. Наоборот, величины критических показателей не зависят от концентрации и совпадают с данными работы [33]. Была сделана оценка универсального значения относительной флуктуации восприимчивости в пределе бесконечного объема: $R_\chi(\infty) = 0,155$.

Обособленно от нескоррелированного разбавленного беспорядка в последнее время предметом изучения методом Монте-Карло стали другие реализации беспорядка. В качестве обобщения RIM исследовалась термически разбавленная модель Изинга [38, 39]. В этом случае реализация распределения вакансий определялась из локального распределения спинов чистой модели Изинга в критической точке. Оказалось, что критические свойства модели, в частности, класс универсальности, сильно отличаются от RIM и более соответствуют

теоретическим предсказаниям для скоррелированного на больших расстояниях беспорядка³.

Вопрос о том, описывает ли неподвижная точка RIM также фазовый переход в модели Изинга со случайными связями, специально исследовался в работах [40, 41]. Применяя количественный ренормализационно-групповой анализ, авторы этих работ получили потоки ренормализационной группы (РГ) для неупорядоченных моделей Изинга. Показано существование неподвижной точки, характеризующей неупорядоченную модель Изинга независимо от типа беспорядка [40].

5. Ренормализационно-групповые разложения

В разделах 5 и 6 мы дадим обзор результатов для критических показателей RIM, полученных применением методов ренормализационной группы (РГ). В разделе 5 мы представим основные соотношения теоретико-полевого РГ подхода и подробно остановимся на полученных к этому времени рядах теории возмущений. В разделе 6 рассмотрим вопрос о методах пересуммирования РГ рядов и обсудим результаты, полученные на их основе.

5.1. Перенормировка

При теоретическом описании крупномасштабных свойств различных систем вблизи точки фазового перехода второго рода стандартным в настоящее время является применение теоретико-полевого РГ подхода [108, 109]. Перенормировка используется для устранения расходимостей, появляющихся при расчете голых вершинных функций в асимптотическом пределе. В случае RIM одночастично неприводимые голые вершинные функции определяются так:

$$\begin{aligned} \delta(q_1 + \dots + q_N) \Gamma_0^N(q_1, \dots, q_N; m_0, u_0, v_0; A_0) &= \\ &= \int \exp \{i(q_1 r_1 + \dots + q_N r_N)\} \times \\ &\times \langle \varphi(r_1) \dots \varphi(r_N) \rangle_{\text{PI}}^{\text{RIM}} dr_1 \dots dr_N, \end{aligned} \quad (12)$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение по гиббсовскому распределению с эффективным гамильтонианом (8) в репличном пределе $n \rightarrow 0$, а нижний индекс PI указывает, что учитываются только одночастично неприводимые диаграммы. Функции зависят от набора импульсов q_1, \dots, q_N (с обрезанием A_0) и голых параметров m_0, u_0, v_0 гамильтониана (8). Расходимости в (12) появляются в асимптотическом пределе $A_0 \rightarrow \infty$. Их устранение достигается посредством контролируемой перегруппировки рядов для вершинных функций. Этой цели отвечают несколько асимптотически эквивалентных процедур. Мы будем использовать два взаимно дополнительных подхода: (а) размерную регуляризацию и схему минимального вычитания [110], а также (б) перенормировку при фиксированной размер-

³ В настоящее время обсуждаются два возможных сценария влияния скоррелированного на больших расстояниях беспорядка на критическое поведение (ср. работы [106] и [107]). Хотя оба подтверждают существование крупномасштабно-скоррелированного беспорядка для универсальных критических свойств, они приводят к различным количественным предсказаниям для значений критических показателей.

ности пространства, нулевых внешних импульсах и ненулевой массе (массивную схему РГ) [111].

Дадим формулировку соотношений перенормированной теории. Перенормированные поля, масса и константы связи ϕ , m , u , v вводятся согласно уравнениям

$$\varphi = Z_\phi^{1/2} \phi, \quad (13)$$

$$m_0^2 = Z_{m^2} m^2, \quad (14)$$

$$u_0 = \mu^\varepsilon \frac{Z_{4,u}}{Z_\phi^2} u, \quad (15)$$

$$v_0 = \mu^\varepsilon \frac{Z_{4,v}}{Z_\phi^2} v. \quad (16)$$

Здесь $\varepsilon = 4 - d$, μ — масштабный параметр, равный перенормированной массе, при которой проводятся вычисления массивной схемы [111], или определяющий масштаб внешних импульсов в схеме минимального вычитания [110]; Z_ϕ , Z_{m^2} , $Z_{4,u}$, $Z_{4,v}$ обозначают множители перенормировки. Перенормированные вершинные функции Γ_R^N , выраженные в терминах голых вершинных функций:

$$\Gamma_R^N(q_1, \dots, q_N; m, u, v) = Z_\phi^{N/2} \Gamma_0^N(q_1, \dots, q_N; m_0, u_0, v_0), \quad (17)$$

ограничены. Это утверждение является основным содержанием мультипликативной перенормируемости полевой теории, определенной гамильтонианом (8).

Рассмотрим сначала схему минимального вычитания. Здесь множители перенормировки Z (13)–(16) определяются из условия устранения всех полюсов перенормированных вершинных функций при $\varepsilon = 0$. Уравнения РГ записываются с учетом того, что голые вершинные функции Γ_0^N (12) не зависят от масштаба μ , и, следовательно, их производные по μ при фиксированных голых параметрах равны нулю. Таким образом, получаем

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_0^N|_0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_\phi^{-N/2} \Gamma_R^N|_0 = 0, \quad (18)$$

где индекс нуль обозначает дифференцирование при фиксированных голых параметрах. Уравнение РГ для перенормированных вершинных функций Γ_R^N имеет вид

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_u \frac{\partial}{\partial u} + \beta_v \frac{\partial}{\partial v} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - \frac{N}{2} \gamma_\phi \right) \times \Gamma_R^N(m, u, v, \mu) = 0, \quad (19)$$

а РГ функции даются соотношениями

$$\beta_u(u, v) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_0, \quad (20)$$

$$\beta_v(u, v) = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial \mu} \right|_0, \quad (21)$$

$$\gamma_\phi = \mu \left. \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu} \right|_0, \quad (22)$$

$$\gamma_m(u, v) = \mu \left. \frac{\partial \ln m}{\partial \mu} \right|_0 = \frac{1}{2} \mu \left. \frac{\partial \ln Z_{m^2}^{-1}}{\partial \mu} \right|_0. \quad (23)$$

Используя метод характеристик [112], формальное решение дифференциального уравнения (19) записывают в виде

$$\Gamma_R^N(m, u, v, \mu) = X(\ell)^{N/2} \Gamma_R^N(Y(\ell) m, u(\ell), v(\ell), \mu \ell), \quad (24)$$

где характеристики являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений потоков)

$$\ell \frac{d}{d\ell} \ln X(\ell) = \gamma_\phi(u(\ell), v(\ell)), \quad \ell \frac{d}{d\ell} \ln Y(\ell) = \gamma_m(u(\ell), v(\ell)),$$

$$\ell \frac{d}{d\ell} u(\ell) = \beta_u(u(\ell), v(\ell)), \quad \ell \frac{d}{d\ell} v(\ell) = \beta_v(u(\ell), v(\ell)) \quad (25)$$

с

$$X(1) = Y(1) = 1, \quad u(1) = u, \quad v(1) = v. \quad (26)$$

Для малых значений ℓ уравнение (24) отображает большие масштабы длин (критическую область) в некритическую точку $\ell = 1$. В этом пределе масштабно-зависимые константы $u(\ell)$, $v(\ell)$ достигают устойчивой неподвижной точки при условии ее существования. Неподвижные точки u^* , v^* дифференциальных уравнений (25) даются решением системы уравнений

$$\beta_u(u^*, v^*) = 0, \quad \beta_v(u^*, v^*) = 0. \quad (27)$$

Устойчивая неподвижная точка определяется как неподвижная точка, в которой матрица устойчивости

$$B_{ij} = \frac{\partial \beta_{u_i}}{\partial u_j}, \quad u_i = \{u, v\}, \quad (28)$$

обладает собственными значениями ω_1 , ω_2 с положительной действительной частью. Устойчивая неподвижная точка, которая достигается при начальных значениях ℓ_0 в пределе $\ell \rightarrow 0$, отвечает критической точке системы. В пределе $\ell \rightarrow 0$ (соответствующем пределу бесконечной корреляционной длины) перенормированные константы достигают значений, отвечающих неподвижной точке, и критические показатели η и ν определяются уравнениями

$$\eta = \gamma_\phi(u^*, v^*), \quad (29)$$

$$\frac{1}{\nu} = 2(1 - \gamma_m(u^*, v^*)). \quad (30)$$

В неасимптотической области, но вблизи неподвижной точки, отклонения от степенных законов со значениями критических показателей, вычисленных в критической точке, обуславливаются показателем поправки к скейлингу

$$\omega = \min(\omega_1, \omega_2) \quad (31)$$

в согласии с разложением Вегнера (3) (см. [70]). Остальные критические показатели получают на основе простых соотношений скейлинга [67, 108]

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad \beta = \frac{\nu}{2} (d - 2 + \eta), \quad \gamma = \nu(2 - \eta), \quad (32)$$

справедливость которых следует из решений (24).

Уравнения потоков (25) можно использовать для описания приближения к критической области в более широком интервале, где учета поправки к скейлингу недостаточно. Как упоминалось в разделе 1, за пределами асимптотической области физические наблюдаемые характеризуются эффективными показателями, применяемыми для описания кроссовера от фонового поведения к асимптотическому критическому. В терминах РГ они зависят от параметра потока $\ell(\tau)$ посредством зависимости от ℓ констант связи. В частности, согласно определению (см. формулу (2)) для эффективного показателя магнитной восприимчивости γ_{eff} имеем

$$\gamma_{\text{eff}}(\tau) = -\frac{d \ln \chi(\tau)}{d \ln \tau} = \gamma(u(\ell(\tau)), v(\ell(\tau))) + \dots, \quad (33)$$

где вторая часть пропорциональна β -функциям и происходит от изменения амплитудной части восприимчивости. Этой частью вблизи неподвижной точки естественно пренебречь. Более того, вклад амплитудной функции в кроссовер действительно представляется малым [113, 114]. С этим ограничением эффективные показатели просто даются выражениями для асимптотических показателей (29), (30), но с заменой значений констант в неподвижной точке u^* , v^* на решения уравнений потоков (25):

$$\eta_{\text{eff}}(\ell) = \gamma_\phi(u(\ell), v(\ell)), \quad \frac{1}{v_{\text{eff}}(\ell)} = 2(1 - \gamma_m(u(\ell), v(\ell))). \quad (34)$$

В массивной РГ схеме Z -множители (13)–(16) вычисляются из вершинных функций (12) при нулевых внешних импульсах q_1, \dots, q_N и ненулевой массе при фиксированной размерности пространства в пределе $L_0 \rightarrow \infty$. Эти условия перенормировки приводят к уравнению для перенормированных вершинных функций, известному как *уравнение Каллана–Симанзика*. Беря производную от соответствующей голой вершинной функции Γ_0^N по перенормированной массе (ср. уравнение (18)), получаем

$$m \frac{\partial}{\partial m} \Gamma_0^N \Big|_0 = m \frac{\partial m_0^2}{\partial m} \Big|_0 \Gamma_0^{(1, N)}, \quad (35)$$

где индекс нуль снова означает, что производная берется при фиксированных голых параметрах. Появляется новая вершинная функция

$$\Gamma_0^{(1, N)} = \frac{\partial \Gamma_0^N}{\partial m_0^2}. \quad (36)$$

Она отличается от Γ_0^N добавочным членом $\varphi^2(R)$ внутри усреднения $\langle \dots \rangle$ в (12). Как результат для перенормированных вершинных функций Γ_R^N получают неоднородное уравнение Каллана–Симанзика, содержащее $\Gamma_R^{(1, N)}$ в правой части. Однако вблизи критической точки $m = 0$ правой частью по сравнению с левой можно пренебречь, вследствие чего приходят к однородному уравнению Каллана–Симанзика, которое повторяет структуру уравнения РГ (19):

$$\left(m \frac{\partial}{\partial m} + \beta_u \frac{\partial}{\partial u} + \beta_v \frac{\partial}{\partial v} - \frac{N}{2} \gamma_\phi \right) \Gamma_R^N(m, u, v) = 0, \quad (37)$$

где коэффициенты β_u , β_v , γ_ϕ определяются соотношениями (20)–(22), а под параметром μ здесь нужно понимать перенормированную массу m . Уравнение в частных производных (37) решается методом характеристик, применение которого показано в общих чертах уравнениями (24)–(26), и ведет к соотношениям на неподвижную точку (27)–(31).

Для полноты заметим, что конечность перенормированной вершинной функции $\Gamma_R^{(1, 2)}$ с одной вставкой ϕ^2 достигается с помощью множителя перенормировки \bar{Z}_{ϕ^2} :

$$\Gamma_R^{(1, 2)}(k; q, -q; m, u, v) = \bar{Z}_{\phi^2} \Gamma_0^{(1, 2)}(k; q, -q, m_0, u_0, v_0). \quad (38)$$

Тогда формулу (30) для критического показателя корреляционной длины ν можно переписать в терминах \bar{Z}_{ϕ^2} посредством подстановки $2\gamma_m = \gamma_\phi + \bar{\gamma}_{\phi^2}$, которая следует из соотношений $Z_{m^2} = \bar{Z}_{\phi^2} Z_\phi^{-1}$ и $\bar{\gamma}_{\phi^2} = \mu \partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}^{-1} / \partial \mu|_0$. Это приводит к соотношению

$$\frac{1}{\nu} = 2 - \gamma_\phi(u^*, v^*) - \bar{\gamma}_{\phi^2}(u^*, v^*). \quad (39)$$

Явные выражения для РГ β - и γ -функций зависят от схемы: они в самом деле отличаются в различных схемах перенормировки. Следовательно, координаты неподвижной точки также зависят от схемы перенормировки. Однако РГ функции в различных схемах совпадают, если только они рассчитаны в неподвижной точке. Последнее приводит к тем же самым величинам критических показателей: они универсальны и не зависят от схемы перенормировки [108, 109]. В разделе 6 мы приведем известные из литературы РГ разложения функций RIM.

5.2. Ряды теории возмущений и их "наивный" анализ

Выражения для РГ функций RIM получают как ряды по перенормированным константам u и v . Теория возмущений по степеням u , v является фактически теорией возмущений по числу интегрирований в k -пространстве. Это, с другой стороны, отвечает числу петель в фейнмановских диаграммах при диаграммном представлении вершинных функций [108]. К настоящему времени РГ функции RIM известны до пятипетлевого порядка в схеме минимального вычитания [115] и с рекордной шестипетлевой точностью при расчете непосредственно в пространстве $d = 3$ в массивной схеме [66].

Записанные в схеме минимального вычитания функции имеют вид

$$\beta_u = -u \left(\varepsilon - u - \frac{3}{2} v + \frac{17}{27} u^2 + \frac{23}{12} uv + \frac{41}{32} v^2 + \dots + \beta_u^{(5LA)} \right), \quad (40)$$

$$\beta_v = -v \left(\varepsilon - v - \frac{2}{3} u + \frac{21}{32} v^2 + \frac{11}{12} uv + \frac{5}{27} u^2 \right), \quad (41)$$

$$\gamma_\phi = \frac{1}{54} u^2 + \frac{1}{24} uv + \frac{1}{64} v^2 + \dots + \gamma_\phi^{(5LA)}, \quad (42)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2} = \frac{1}{3} u + \frac{1}{4} v - \frac{1}{9} u^2 - \frac{1}{4} uv - \frac{3}{32} v^2 + \dots + \bar{\gamma}_{\phi^2}^{(5LA)}. \quad (43)$$

Мы приводим здесь функции двухпетлевого приближения (two loop approximation — 2LA), ссылаясь на статью

[57], где они были получены в трехпетлевом приближении (3LA). Четырех- и пятипетлевые поправки можно извлечь из РГ функций анизотропной кубической модели, которые получены в работе [115].

Заметим, что в рамках схемы минимального вычитания зависимость от пространственной размерности d тривиальна и входит в выражения (40)–(43) через единственный член, пропорциональный $\varepsilon = 4 - d$, явно записанный в β -функциях (40), (41). Наоборот, в массивной схеме пространственная размерность d присутствует в выражениях для петлевых интегралов, соответствующих каждой фейнмановской диаграмме теории возмущений. Как результат теория рассчитывается непосредственно в пространстве интересующей размерности. Значения петлевых интегралов при фиксированной размерности пространства $d = 2, d = 3$ приведены в [116]. Ряды для РГ функций RIM при $d = 3$ имеют вид

$$\beta_u = -u \left(1 - u - \frac{3}{2}v + \frac{308}{729}u^2 + \frac{104}{81}uv + \frac{185}{216}v^2 + \dots + \beta_u^{(6LA)} \right), \quad (44)$$

$$\beta_v = -v \left(1 - v - \frac{2}{3}u + \frac{95}{216}v^2 + \frac{50}{81}vu + \frac{92}{792}u^2 + \dots + \beta_v^{(6LA)} \right), \quad (45)$$

$$\gamma_\phi = \frac{8}{729}u^2 + \frac{2}{81}uv + \frac{1}{108}v^2 + \dots + \gamma_\phi^{(6LA)}, \quad (46)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2} = \frac{1}{3}u + \frac{1}{4}v - \frac{2}{27}u^2 - \frac{1}{6}uv - \frac{1}{16}v^2 + \dots + \bar{\gamma}_{\phi^2}^{(6LA)}. \quad (47)$$

Мы снова приводим только двухпетлевые функции. В рамках ε -разложения эти функции были впервые получены в работе [45]. Трехпетлевые поправки впервые сообщены в работе [48], которая содержала некоторые ошибки, отчасти исправленные в [49]. Наконец, свободные от ошибок трехпетлевые выражения были опубликованы в работе [53]. Позже были получены четырехпетлевые функции [54] и лишь недавно стали доступными пятипетлевые [64] и рекордные шестипетлевые [66] разложения. Универсальные отношения критических амплитуд при $d = 3$ впервые получены в трехпетлевом приближении [117] и известны к этому времени с пятипетлевой точностью [118].

Как упоминалось выше, массивная РГ схема не обязательно подразумевает вычисления при $d = 3$. На возможность применения схемы с целью получить РГ функции RIM при произвольной нецелой пространственной размерности было указано в работе [56]. Для двухпетлевых РГ функций тогда получают [56]

$$\beta_u = -(4-d)u \left\{ 1 - u - \frac{3}{2}v + \frac{8}{27} \left[9 \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + i_2 \right] u^2 + \frac{2}{3} \left[12 \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + i_2 \right] uv + \frac{1}{4} \left[21 \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + i_2 \right] v^2 \right\}, \quad (48)$$

$$\beta_v = -(4-d)v \left\{ 1 - v - \frac{2}{3}u + \frac{1}{4} \left[11 \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + i_2 \right] v^2 + \frac{2}{3} \left[6 \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + i_2 \right] vu + \frac{8}{27} \left[3 \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + i_2 \right] u^2 \right\},$$

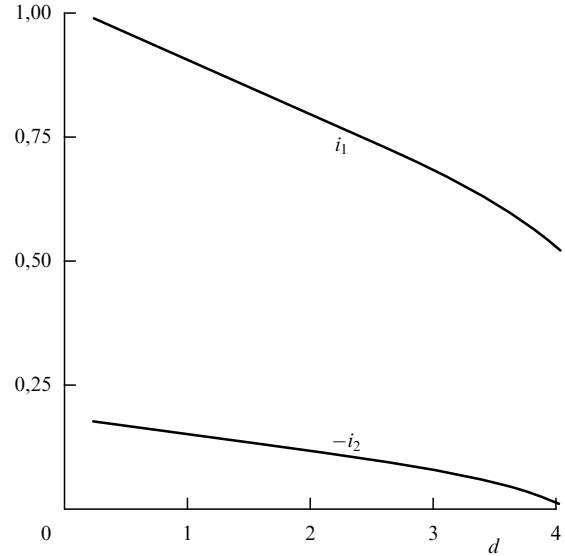


Рис. 8. Двухпетлевые интегралы РГ функций массивной схемы (формулы (48), (49)) как функции размерности пространства d . Рисунок заимствован из работы [56].

$$\gamma_\phi = -2(4-d) \left\{ \left[\frac{2}{27}u^2 + \frac{1}{6}uv + \frac{1}{16}v^2 \right] i_2 \right\}, \quad (49)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2} = (4-d) \left\{ \frac{1}{3}u + \frac{1}{4}v - 12 \left[\frac{1}{27}u^2 + \frac{1}{12}uv + \frac{1}{32}v^2 \right] \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Пространственная размерность d входит в выражения (48), (49) также через зависящие от d двухпетлевые интегралы $i_1(d), i_2(d)$. Их зависимость от d показана на рис. 8. Вычисляя интегралы [118] при $d = 3$: $i_1(3) = 2/3$, $i_2(3) = -2/27$, снова возвращаемся к двухпетлевым поправкам выражений (44)–(47). В следующем порядке теории возмущений для нецелой размерности d РГ функции RIM выведены в работе [60], величины соответствующих петлевых интегралов получены в [119].

Имея явные выражения для рядов РГ функций, можно следовать двумя различными путями в рамках каждого из двух РГ подходов: (40)–(43) или (44)–(47). В результате приходим к четырем различным схемам анализа. Действительно, схему минимального вычитания можно реализовать посредством известного ε -разложения [120] или непосредственно при $d = 3$ [121]. Подобным образом уравнения для РГ функций, полученные в массивной схеме, можно решать для нахождения неподвижной точки прямо или посредством псевдо- ε -разложения. Последний метод предложен Б.Г. Никелем (не опубликовано; см. ссылку [19] в работе [122]). Однако, как мы увидим ниже, только две из этих четырех схем ведут к надежным результатам для критического поведения RIM. Перед тем как двигаться дальше, обсудим эту ситуацию подробнее.

1. Рассмотрим сначала функции (40)–(43) и выполним ε -разложение. Для этого нужно (а) решить уравнения (27) с ε как малым параметром и (б) сделать подстановку координат $u^*(\varepsilon), v^*(\varepsilon)$ в форме рядов по ε в ренормализационно-групповые γ -функции для критических показателей.

Решая уравнение для поиска неподвижной точки в однопетлевом приближении (т.е. оставляя в скобках в (40), (41) только члены, линейные по u , v), находим три неподвижные точки (см. рис. 2): гауссову неподвижную точку G , $u^* = v^* = 0$, неподвижную точку чистой модели Изинга I , $u^* \neq 0$, $v^* = 0$ (которая описывает n не взаимодействующих моделей Изинга; ср. гамильтониан (8) с $v = 0$), и "полимерную" неподвижную точку P , $u^* = 0$, $v^* \neq 0$ (полагая $u^* = 0$ в (8), получают $O(n=0)$ -модель, описывающую масштабные свойства блужданий без самопересечений). Легко непосредственно убедиться, что неподвижные точки G и I неустойчивы, а точка P устойчива. Вместе с тем, поскольку $v^* > 0$, она недостижима из начальных значений констант рассматриваемой модели. В однопетлевом приближении точка R с ненулевыми обеими координатами $u^* \neq 0$, $v^* \neq 0$ не существует; происходит это по причине вырождения на однопетлевом уровне системы уравнений на неподвижную точку [42, 44, 45]. Эта неподвижная точка появляется в следующем двухпетлевом приближении и приводит к качественной картине, показанной на рис. 2. Однако из-за вырождения однопетлевых уравнений вместо ε -разложения нужно проводить разложение по $\sqrt{\varepsilon}$ [43, 45]. Продолжая, как обычно, получаем $\sqrt{\varepsilon}$ -разложения для критических показателей и собственных значений (28) матрицы устойчивости [58, 61]:

$$v = 0,5 + 0,08411582 \varepsilon^{1/2} - 0,01663203 \varepsilon + 0,04775351 \varepsilon^{3/2} + 0,27258431 \varepsilon^2, \quad (50)$$

$$\eta = -0,00943396 \varepsilon + 0,03494350 \varepsilon^{3/2} - 0,04486498 \varepsilon^2 + 0,02157321 \varepsilon^{5/2}, \quad (51)$$

$$\gamma = 1 + 0,16823164 \varepsilon^{1/2} - 0,02854708 \varepsilon + 0,07882881 \varepsilon^{3/2} + 0,56450490 \varepsilon^2, \quad (52)$$

$$\omega_1 = 2 \varepsilon + 3,704011194 \varepsilon^{3/2} + 11,30873837 \varepsilon^2, \quad (53)$$

$$\omega_2 = 0,6729265850 \varepsilon^{1/2} - 1,925509085 \varepsilon - 0,5725251806 \varepsilon^{3/2} - 13,93125952 \varepsilon^2. \quad (54)$$

Двухпетлевые выражения для показателей были получены в работе [45], трехпетлевые представлены независимо в работах [46] и [47]. Выражения $\sqrt{\varepsilon}$ -разложения для отношения амплитуд RIM [123] тоже получены с трехпетлевой точностью [124]. Благодаря пятипетлевым результатам для анизотропной кубической модели [115] стало возможным получить четырех- и пятипетлевые $\sqrt{\varepsilon}$ -разложения для критических показателей (50)–(52) (см. [58]) и собственных значений матрицы устойчивости (53), (54) RIM (см. [61]).

2. Другой путь вычислений, которым можно воспользоваться в рамках схемы минимального вычитания РГ подхода, — это $d = 3$ техника [121]. Она состоит в (а) фиксировании величины $\varepsilon = 1$ в (40), (41), (б) численном решении системы уравнений на неподвижную точку (27) и (в) подстановке численных значений координат неподвижной точки в ряды для критических показателей. β -функции RIM показаны на рис. 9 в двухпетлевом приближении. Видно, что они вообще не позволяют получить нетривиальную неподвижную точку. Однако такое поведение не удивительно и не является особой

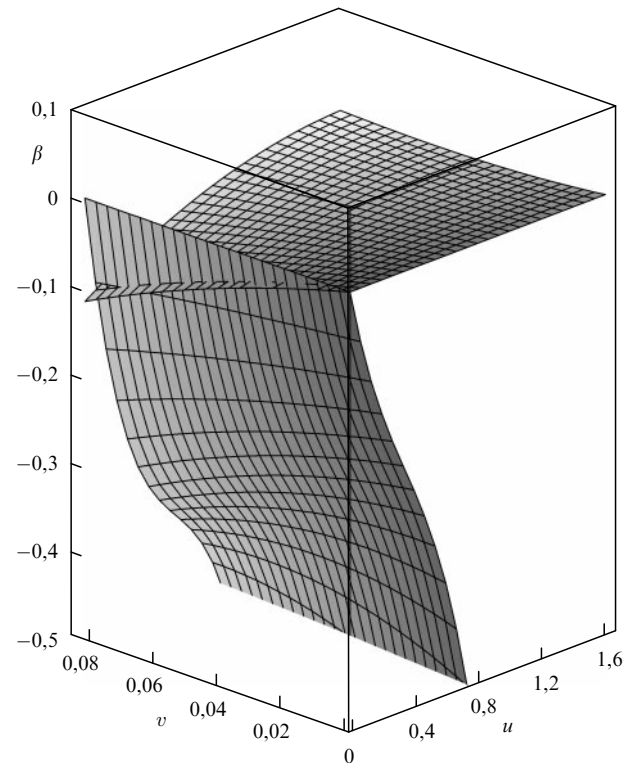


Рис. 9. β -функции RIM $\beta_u(u, v)$, $\beta_v(u, v)$, рассчитанные в двухпетлевом приближении в рамках схемы $d = 3$ минимального вычитания без пересуммирования. "Выживает" только гауссова неподвижная точка $u^* = v^* = 0$. Рисунок заимствован из работы [126].

приметой RIM. Хорошо известно, что ряды для РГ функций в пределе слабой константы связи в лучшем случае асимптотические и должны анализироваться при помощи особых техник пересуммирования. Последние будут предметом обсуждения в разделе 6. Здесь же для полноты перечня возможных вычислительных схем сошлемся еще на два подхода в рамках массивной РГ.

3. Массивная схема РГ, осуществляемая (а) численным решением системы уравнений на неподвижную точку (27) и последующей (б) подстановкой численных значений координат неподвижной точки в ряды для критических показателей. Именно этому способу посвящена большая часть работ по РГ анализу RIM (подробнее см. раздел 6).

4. Массивная схема РГ осуществляется также методом псевдо- ε -разложения [122, 125]. Эта схема основана на наблюдении, что с целью анализа рядов (44)–(47) можно подражать ε -разложению, введя вместо 1 (члена нулевого порядка β -функций (44), (45) массивной схемы) вспомогательный параметр τ . Тогда точка неподвижная и критические показатели получают в виде рядов по τ ; для вычисления их окончательных значений полагают $\tau = 1$. Описанное псевдо- ε -разложение позволяет обойти накопление ошибок для критических показателей, происходящих от неточностей при вычислении координат неподвижной точки и γ -функций. Этот способ доказал свою высокую эффективность в случае чистой $d = 3$ модели Изинга [73, 122]. По тем же причинам, по которым ε -разложение для RIM превращается в $\sqrt{\varepsilon}$ -разложение, разложение по τ превращается в $\sqrt{\tau}$ -разложение. На основании шестипетлевых разложений (44)–

(47) мы получаем следующее $\sqrt{\tau}$ -разложение для критических показателей и собственных значений матрицы устойчивости RIM:

$$v = 0,5 + 0,10291260 \tau^{1/2} + 0,01251853 \tau + 0,01270178 \tau^{3/2} + 0,05663757 \tau^2 + 0,03694322 \tau^{5/2}, \quad (55)$$

$$\eta = -0,00836820 \tau + 0,02173733 \tau^{3/2} - 0,01487714 \tau^2 + 0,01733771 \tau^{5/2}, \quad (56)$$

$$\gamma = 1 + 0,20582521 \tau^{1/2} + 0,02922117 \tau + 0,01539608 \tau^{3/2} + 0,11858141 \tau^2 + 0,06658280 \tau^{5/2}, \quad (57)$$

$$\omega_1 = 2 \tau + 2,59761132 \tau^{3/2} + 7,51800557 \tau^2 + 39,86825804 \tau^{5/2}, \quad (58)$$

$$\omega_2 = 0,82330084 \tau^{1/2} - 1,74713206 \tau - 1,26569350 \tau^{3/2} - 8,75074159 \tau^2 - 40,98838378 \tau^{5/2}.$$

Эти разложения следует сравнить с формулами (50)–(54).

6. Пересуммирование рядов и численные результаты

6.1. Суммируемость расходящихся рядов RIM

Основная идея теории возмущений — это последовательный учет поправок в разложениях по малому параметру. Такой подход, однако, не обязательно приводит к улучшению точности вычислений "наивным" суммированием последовательных членов ряда теории возмущений. В настоящее время хорошо известно, что разложения РГ функций по малой константе связи обладают нулевым радиусом сходимости и являются в лучшем случае асимптотическими [109]. Для надлежащего обращения с рядами к ним нужно применять процедуры пересуммирования. Ранние исследования критических явлений техникой ε -разложения привели к понятию "оптимального обрезания" ряда как максимального числа слагаемых, обладающих сходящимся поведением. Такое поведение типично для асимптотических рядов [127], в которых коэффициенты разложений растут факториально. Например, было показано, что коэффициенты разложения РГ функции $f(u)$ чистой модели Изинга по степеням единственной перенормированной константы связи u :

$$f(u) = \sum_k A_k u^k, \quad (59)$$

обладают поведением

$$A_k = ck^{b_0} (-a)^k k! \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad k \rightarrow \infty, \quad (60)$$

с известными значениями [128–131] констант c , b_0 , a . Свойство (60) указывает на суммируемость ряда (59) по Борелю. В процедуре пересуммирования по Борелю учитывается асимптотическое поведение коэффициен-

тов (60), в результате чего асимптотический ряд (59) отображается в сходящийся с тем же асимптотическим пределом. Детально эту процедуру мы опишем в разделах 6.2 и 6.3.

Стоит заметить, что доказательства суммируемости по Борелю ε -разложения чистой модели Изинга пока не найдено. Доказано, что этим свойством обладает только разложение по константе связи (59) (см. [128]). Тем не менее большое количество числовых оценок, полученных на основе пересуммированного ε -разложения в случае чистой модели Изинга (см., например, [109]), убеждает в его надежности. Однако дело обстоит иначе в случае $\sqrt{\varepsilon}$ -разложения RIM. Тот факт, что из ε -разложения нельзя получить информацию о критических показателях в системе с замороженным беспорядком, был предсказан еще в работах [132, 133] на основе исследования RIM при размерности пространства $d = 0$. Оказалось, что ряды теории возмущений этой "игрушечной" модели не суммируемы по Борелю. Более того, было показано [133], что такие свойства являются прямым следствием существования сингулярностей типа Гриффитса [79], связанных с нулями статистической суммы чистой системы. Хотя $\sqrt{\varepsilon}$ -разложение позволило на качественном уровне предсказать новое критическое поведение RIM [43, 45], оно, по-видимому, бесполезно для численного анализа. Более того, прямое суммирование последовательных вкладов $\sqrt{\varepsilon}$ -разложения для собственных значений матрицы устойчивости RIM (53), (54) показывает, что уже в трехпетлевом приближении ($\sim \varepsilon$) ω_2 становится отрицательным. Следовательно, в прямом $\sqrt{\varepsilon}$ -разложении вообще не существует устойчивой неподвижной точки [61]. Эту картину не изменяет даже использование процедур пересуммирования [63]. То, что свойства сходимости разложений для чистой $d = 3$ модели Изинга и RIM различны, можно увидеть уже после применения простого анализа Паде, как это было показано в работах [59, 63].

Вышеупомянутые свойства расходимости $\sqrt{\varepsilon}$ -разложения относятся также к псевдо- $\sqrt{\varepsilon}$ -разложению (55)–(58), введенному в разделе 5. Таким образом, из четырех остаются только два различных способа количественного анализа РГ функций RIM. В разделе 5 они обозначены как 2 и 3. Оба основаны на анализе РГ рядов по двум константам связи. Вопрос о природе разложений РГ функций RIM по константам u , v остается открытым. Тем не менее процедуры пересуммирования, используемые в различных модификациях при анализе асимптотических рядов, были с успехом применены также и к рядам РГ функций RIM [51–57, 59–65]. При пересуммировании рядов РГ функций RIM преобладающей техникой являются обобщения техники пересуммирования Паде–Бореля [134] на случай двух переменных. В следующем разделе 6.2 мы дадим обзор результатов, полученных таким пересуммированием.

Недавно было показано, что разложения для разбавленной замороженной модели Изинга в $d = 0$ пространстве суммируемы по Борелю при условии применения специфического способа суммирования [135]. Это позволило авторам работы [65] как восстановить асимптотическое поведение коэффициентов разложения, так и применить к шестипетлевым массивным РГ функциям RIM [66] технику пересуммирования, улучшенную конформным отображением. Этот метод будет рассмотрен в последнем разделе 6.3.

6.2. Паде – Борель-ориентированные методы пересуммирования

Для выполнения пересуммирования Паде – Бореля обрезанного (асимптотического) ряда по одной переменной (например, ряда (59) при L имеющихся членах) сначала строят изображение Бореля – Леруа исходной суммы $S = \sum_{i=0}^L a_i u^i$:

$$S^B(u) = \sum_{i=0}^L \frac{a_i u^i}{\Gamma(i+q+1)}, \tag{61}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера и q — произвольное неотрицательное число, которое будет служить в качестве подгоночного параметра. Результат (61) экстраполируется при помощи рациональной аппроксиманты $[M/N](u)$, являющейся частным двух полиномов по u порядка M в числителе и N в знаменателе (аппроксиманты Паде [136]). В конце пересуммированную функцию S^{res} получают в виде

$$S^{\text{res}}(u) = \int_0^\infty dt \exp(-t) t^q [M/N](ut). \tag{62}$$

В случае анализа РГ функций одной переменной эта процедура была впервые предложена в работах [134].

Существует несколько способов обобщить аппроксимации Паде для одной переменной на случай двух переменных (u, v) [136] и соответственно обобщить процедуру пересуммирования (61), (62). Одна возможность состоит в конструировании ряда по одной вспомогательной (фиктивной) переменной x (конструировании так называемого резольвентного ряда [137]). Переменную вводят подстановкой $u \rightarrow ux, v \rightarrow vx$ и полагают $x = 1$ в итоговых выражениях. Соответственно изображение Бореля – Леруа обрезанного ряда $S = \sum_{0 \leq i+j \leq L} a_{i,j} u^i v^j$ определяется так:

$$S^B(x) = \sum_{0 \leq i+j \leq L} \frac{a_{i,j}(ux)^i (vx)^j}{\Gamma(i+j+q+1)}. \tag{63}$$

После этого ряд по x пересуммируется при помощи формулы (62) и вычисляется при $x = 1$. Далее мы будем ссылаться на этот метод как на метод пересуммирования Паде – Бореля, подобно случаю одной переменной.

Другая возможность использует аппроксиманты Чисгольма [136, 138], являющиеся обобщениями аппроксимант Паде на случай многих переменных. Аппроксиманту Чисгольма можно определить как такое частное двух полиномов по переменным u и v порядков M и N , что первые члены его разложения равны членам разложения аппроксимируемой функции. Снова пересуммирование выполняется посредством формулы (62), но с аппроксимантой Чисгольма вместо аппроксиманты Паде. На этот метод мы будем ссылаться как на метод Чисгольма – Бореля.

При заданном изображении Бореля – Леруа можно построить много аппроксимант — как Паде, так и Чисгольма. Впрочем, здесь появляются естественные ограничения. Во-первых, аппроксиманту следует выбирать в виде, воспроизводящем чередование знаков высоких порядков общего члена β - и γ -функций [66]. Аппроксиманту, порождающую знакопеременный ряд, можно выбрать в виде $[M/1]$ с положительными коэффициентами при x (или u и v). Однако наилучшую сходи-

мость анализа Паде обеспечивают диагональные аппроксиманты [136] (см. также [63] о примере с игрушечной моделью). С другой стороны, высокий порядок полинома в знаменателе часто ведет к появлению полюсов на положительной полуоси. Для работы с сингулярностями можно применять аналитическое продолжение и вычислять главное значение интеграла (62), но практические расчеты вынуждают отказаться от такого обобщения. Причиной является как неожиданное смещение расположения неподвижной точки, так и различная топологическая структура линий нулей пересуммированных β -функций. Выбор аппроксиманты Чисгольма еще более

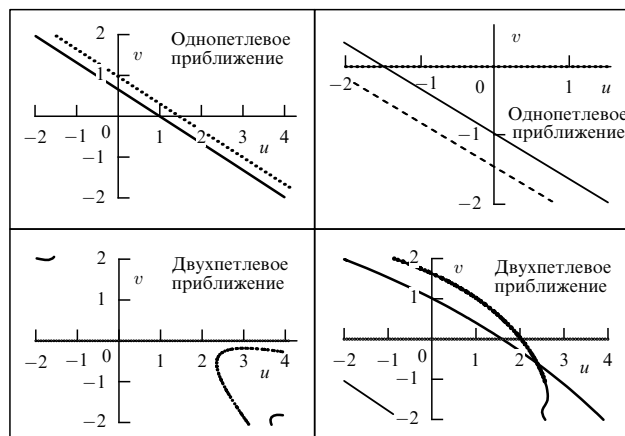


Рис. 10. Линии нулей нересуммированных (левых столбцов) и пересуммированных методом Чисгольма – Бореля (правый столбец) массивных β -функций RIM в различных порядках теории возмущений: одно- и двухпетлевое приближение. Круги отвечают $\beta_u = 0$, жирные линии обозначают $\beta_v = 0$. Тонкие сплошная и штриховая линии показывают нули аналитически продолженных функций β_u и β_v соответственно. Видно появление неупорядоченной неподвижной точки $u > 0, v < 0$ в двухпетлевом приближении для пересуммированных β -функций. Рисунок заимствован из работы [60].

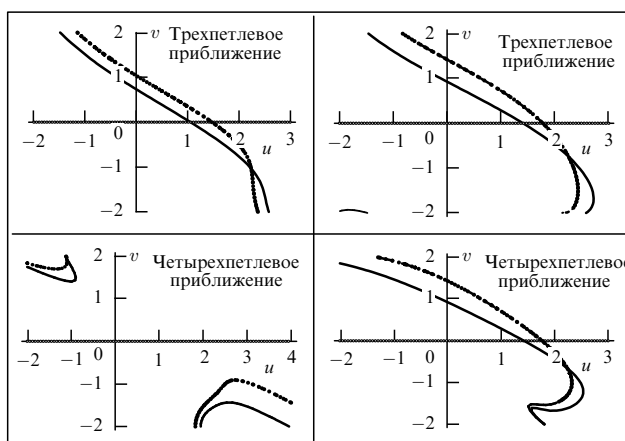


Рис. 11. Линии нулей нересуммированных (левый столбец) и пересуммированных методом Чисгольма – Бореля (правый столбец) массивных β -функций RIM в различных порядках теории возмущений: трех- и четырехпетлевое приближение. Обозначения те же, что на рис. 10. В окрестности неупорядоченной неподвижной точки поведение пересуммированных функций топологически подобно при увеличении порядка теории возмущений. Для нересуммированных функций это не так. Рисунок заимствован из работы [60].

усложнен, поскольку часто ее коэффициенты недоопределены. Например, уже построение нетривиальной аппроксиманты для полинома второго порядка по двум переменным требует наложения двух добавочных условий. Обычно их выбирают из условия сохранения определенных симметричных свойств. Если константы u_0 и v_0 входят в гамильтониан (8) симметрично, для того, чтобы не вносить новой симметрии, аппроксиманты должны быть выбраны симметрично по переменным u и v . Другим моментом является то, что после подстановки $v = 0$ все уравнения, описывающие критическое поведение разбавленной модели, обращаются в соответствующие уравнения чистой модели. Однако при независимом рассмотрении чистой модели употребляют технику пересуммирования с использованием аппроксимант Паде. Таким образом, аппроксиманту Чисгольма следует выбрать так, чтобы, полагая u или v равными нулю, воспроизвести хорошо известные результаты для случая одной переменной. Последнее также налагает ограничения на выбор дополнительных условий.

Больше всего количественных результатов об универсальных характеристиках RIM в критической области получено в рамках массивной схемы перенормировки посредством численного решения уравнения на неподвижную точку (27) для пересуммированных β -функций (44), (45) и пересуммирования γ -функций (46), (47) в неподвижной устойчивой точке (схема 3 в разделе 5.2). Исследования массивных β -функций RIM, пересуммированных этим способом, обнаружили, что начиная с двухпетлевого приближения неупорядоченная неподвижная точка RIM (точка R на рис. 2) устойчива и присутствует во всех порядках теории возмущений [51 – 56, 60, 62, 64, 139]. Как пример на рис. 10, 11 нами показаны линии нулей функций $\beta_u(u, v)$, $\beta_v(u, v)$ в различных порядках теории возмущений без пересуммирования и с применением метода пересуммирования Чисгольма – Бореля. Видно, что без пересуммирования все нетривиальные неподвижные точки можно получить только в трехпетлевом приближении. Пересуммирование восстанавливает наличие нетривиальных неподвижных точек.

Таблица 3. Теоретические значения асимптотических критических показателей RIM *

Работа	Схема РГ	Порядок	Суммирование	ν	η	γ	ω
Sokolov и др., 1981, [49]	масс	3LA	Нет		0,009	1,31	
Newman и др., 1982, [50]	МП	Нет		0,70	0,015	1,39	0,41
Jug, 1983, [51]	масс	2LA	ЧБ	0,678	0,031	1,336	0,450 ^c
Mayer и др., 1984 [52]	масс	2LA 3LA	ЧБ ЧБ		0,031 0,022	1,337 1,325	
Mayer и др., 1989, [54]	масс	4LA	ЧБ	0,670	0,034	1,326	
Mayer, 1989, [55]	масс	4LA 4LA	АВ ПБ	0,6680 0,6714		1,318 1,321	
Shpot, 1989, [53]	масс	3LA	ЧБ	0,671	0,021	1,328	0,359
Janssen и др., 1995, [57]	МВ, $d = 3$	3LA	ПБ	0,666		1,313	0,366
Holovatch и др., 1997, [60]	масс	3LA	ЧБ	0,671	0,019	1,328	0,376
Folk и др., 1998, [59]	МВ, $d = 3$	2LA 3LA 4LA	ЧБ	0,665 0,654 0,675	0,032 0,022 0,049	1,308 1,293 1,318	0,162 0,430 0,390 ^c
Folk и др., 1999, [61]	МВ, $d = 3$ масс	4LA 4LA	ЧБ ЧБ				0,39(4) ^c 0,372(5)
Pakhnin и др., 2000, [64]	масс	5LA	ПБ	0,671(5)	0,025(10)	1,325(3)	0,32(6)
Varnashev, 2000, [62]	масс	4LA	ПБ ПБ	0,681(12) 0,672(4)	0,040(11) 0,034(10)	1,336(20) 1,323(10)	0,330
Pelissetto и др., 2000, [65]	масс	6LA	ПБ – КМ ПБ – ПБ	0,678(10) 0,668(6)	0,030(3) 0,0327(19)	1,330(17) 1,313(14)	0,25(10) 0,25(10)

* n LA обозначает n -й порядок теории возмущений при петлевом разложении в рамках массивной (масс) схемы и схемы $d = 3$ минимального вычитания (МВ) теоретико-полевого ренормализационно-группового подхода. Процедуры пересуммирования даны в следующих обозначениях: ЧБ — Чисгольм–Борель; ПБ — Паде–Борель; АВ — ϵ -алгоритм Винна, КМ — преобразование Бореля с конформным отображением. МП символизирует подход масштабных полей Голнера–Риделя, верхний индекс "с" у показателя поправки к скейлингу ω указывает, что приведена действительная часть соответствующего комплексного числа.

	0	1	2	3	4	5	6
0	—	—	—	—	—	—	—
1	—	—	±	—	—	—	
2	—	—	[62]	~	~		
3	[48, 49]	[55, 62]	[64]	~			
4	—	[64]	±	Аппроксиманта не определена			
5	—	~					
6	—						

Рис. 12. Результативность пересуммирования массивных β -функций RIM методом Паде–Бореля. Номера строк M и столбцов N соответствуют аппроксимантам Паде $[M/N]$, представляющим $(M+N)$ -петлевое приближение. Символ — означает, что, используя данную аппроксиманту, неподвижную точку получить не удается; \pm и \sim указывают либо на использование аналитического продолжения (вследствие наличия полюсов на положительной полуоси), либо на то, что полученные координаты неподвижной точки расположены далеко от ожидаемых. Результативные аппроксиманты обозначены темным оттенком и/или соответствующим цитированием. Хотя работающие аппроксиманты распределены скорее хаотично, количественные результаты на их основе обладают очевидной сходимостью (см. табл. 3).

Массивная схема теоретико-полевой ренормализационной группы была основой первых количественных оценок критических показателей RIM. Вместе с тем для исследования критического поведения RIM при решении уравнения ренормализационной группы Вильсона в работе [50] использовался также непертурбативный подход масштабных полей. Он, подобно ε -разложению, позволяет изучать модель в пространстве непрерывной размерности d . В результате были найдены критические показатели RIM для $2,8 \leq d \leq 4$. Подход масштабных полей [50] не был улучшен более точными вычислениями.

Уже исследования двухпетлевых массивных РГ функций RIM, пересуммированных процедурой Чисгольма–Бореля [51], обнаружили отсутствие трудностей, связанных с вырождением β -функций. Было найдено, что критические показатели, вычисленные из значений пересуммированных γ -функций в устойчивой неподвижной точке, явно превосходят по величине показатели чистой модели (см. табл. 3). Как отмечалось выше, на трехпетлевом уровне координаты неподвижной точки и критические показатели получены прямым анализом β -функций [48, 49] без пересуммирования, но достигнутая точность не позволила оценить, в частности, критическое поведение теплоемкости. С другой стороны, применение техники Паде–Бореля также натолкнулось на трудности на трехпетлевом уровне (см. диаграмму на рис. 12). Здесь аппроксиманта с линейным знаменателем не позволяет получить неподвижную точку, тогда как другая аппроксиманта с побочной диагонали $[1/2]$ ненадежна, поскольку позволяет найти неподвижную точку только

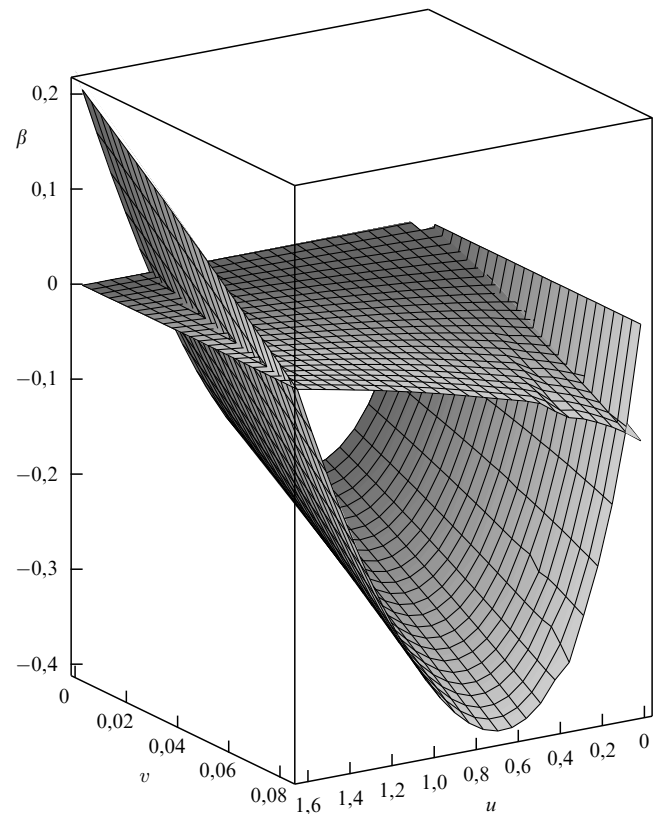


Рис. 13. Применение техники пересуммирования Паде–Бореля к β -функциям из рис. 9. Пересуммирование сохраняет неподвижную точку $u^* \neq 0, v^* = 0$ и позволяет получить новую устойчивую неподвижную точку $u^* \neq 0, v^* \neq 0$. Рисунок заимствован из работы [126]. (Заметим, что авторы [126] использовали другую по сравнению с формулами (40)–(43) нормировку констант $u \rightarrow (3/2)u$ и $v \rightarrow -4v$.)

после вычисления соответствующего интеграла в смысле главного значения посредством аналитического продолжения. Те же выражения, но после обработки техникой Чисгольма–Бореля позволили получить асимптотические критические показатели RIM [52, 53].

Четырехпетлевые разложения [54] были пересуммированы при помощи методов Чисгольма–Бореля [54], первой конфлюэнтной формы ϵ -алгоритма Винна [55], а также метода Паде–Бореля [55, 62], и при этом получились близкие результаты (см. табл. 3 и диаграмму на рис. 12). Тогда как в вычислениях методом Паде–Бореля [55] использовалась аппроксиманта Паде $[3/1]$, в работе [62] применяли обобщенный метод пересуммирования Паде–Бореля–Леруа. Последний основан на использовании всех возможных аппроксимант Паде в технике пересуммирования Бореля–Леруа (61)–(62), когда для каждой из них выбирается оптимальное значение параметра Леруа q и потом результат усредняется по всем значениям, полученным из аппроксимант [62].

Анализ выражений пятипетлевого приближения с применением подгоночного параметра q потребовал несколько искусственного отбрасывания многих аппроксимант [64]. Например, на основе того, что рабочими являются только те аппроксиманты, которые обеспечивают максимальную устойчивость по отношению к изменению q , для оценки u^* была избрана аппроксиманта $[2/2]$, а для v^* — аппроксиманта $[3/1]$. Анализ

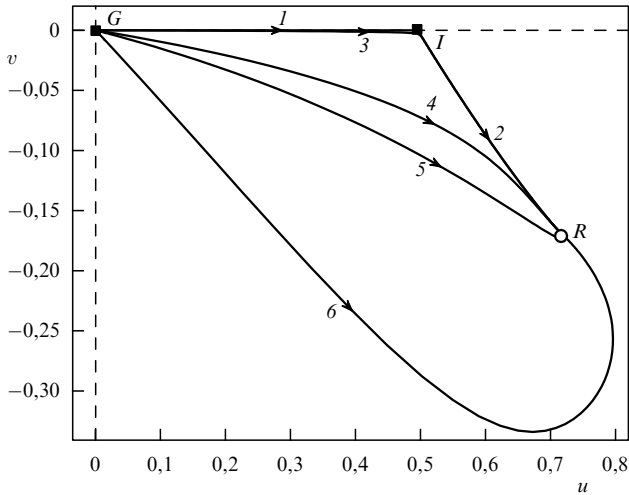


Рис. 14. Линии потоков RIM. Неподвижные точки G, I неустойчивы, неподвижная точка R устойчива. Рисунок заимствован из работы [63]. (Заметим, что авторы работы [63] использовали другую по сравнению с формулами (40)–(43) нормировку констант $u \rightarrow 3u$ и $v \rightarrow (8/3)v$.)

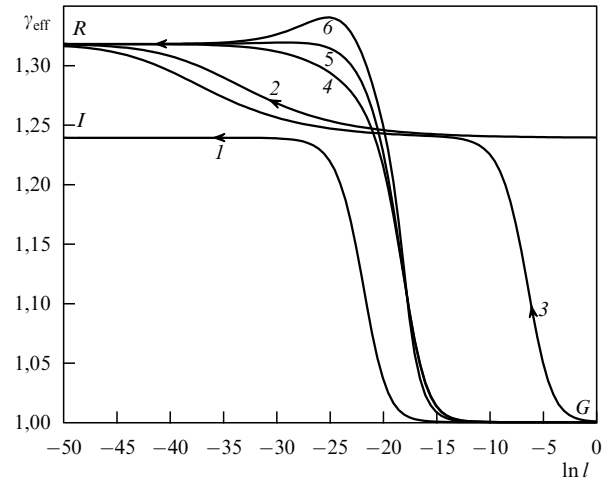


Рис. 16. Эффективный показатель γ_{eff} как функция логарифма параметра потока l для потоков, приведенных на рис. 14. Рисунок заимствован из работы [63].

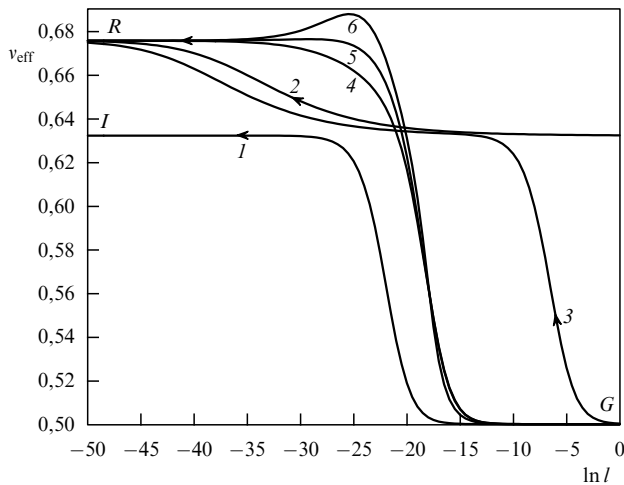


Рис. 15. Эффективный показатель ν_{eff} как функция логарифма параметра потока l для потоков, приведенных на рис. 14. Рисунок заимствован из работы [63].

позволил авторам работ [64] получить пятипетлевые оценки критических показателей RIM (см. табл. 3). Однако обобщение до шестипетлевого порядка обнаружило большой разрыв между пяти- и шестипетлевыми координатами неподвижной точки [139] с соответственной несовместимостью шестипетлевых величин критических показателей по сравнению с пятипетлевыми результатами работ [64]. Это может служить непрямым доказательством возможной неасимптотической природы рассматриваемых рядов.

Похожая техника пересуммирования была также применена к РГ функциям схемы минимального вычитания (40)–(43) непосредственно при $d = 3$ (схема 2 в разделе 5.2) [57, 59, 61, 63]. В этих работах изучалось как асимптотическое, так и эффективное критическое поведение. Подобно массивной схеме РГ пересуммирование здесь снова восстанавливает наличие нетривиальной

неподвижной точки в двухпетлевом приближении (см. рис. 13) и сохраняет ее в трех [57] и четырех петлях [59, 63]. Однако в пятипетлевом порядке примененная схема пересуммирования Чисгольма–Бореля не привела к действительному решению для неупорядоченной неподвижной точки [59, 63]. Одной из причин такого поведения может служить возможная несуммируемость по Борелю рассматриваемых рядов. В этом случае четырехпетлевое приближение будет порядком "оптимального обрезания" для пересуммированных рядов теории возмущений в схеме минимального вычитания, подобно непересуммированным асимптотическим рядам. Известно, что в ϵ -разложении $O(n)$ -симметрической модели ϕ^4 "наивная" интерпретация ряда, обрезанного на члене ϵ^2 , ведет к наилучшему (оптимальному) результату.

Полученные в трехпетлевых [57] и четырехпетлевых [59, 61, 63] приближениях величины асимптотических критических показателей приведены в табл. 3; эффективные показатели были вычислены [57, 63] пересуммированием формул (34). На рисунке 14 показаны решения $u(l), v(l)$ уравнений потоков (25), рассчитанные пересуммированием Чисгольма–Бореля четырехпетлевых β -функций (40), (41) (см. [63]). Показанные на рис. 14 потоки предусматривают несколько различных сценариев для поведения величин эффективных критических показателей (рис. 15, 16). Как в эксперименте, так и в компьютерном моделировании (см. табл. 1, 2) сообщенные результаты отличаются и даже превосходят известные асимптотические величины. Это неуниверсальное поведение может быть связано с возможным неасимптотическим поведением, найденным в различных потоках, как предполагалось в работах [30, 57]. Различие может быть обусловлено (а) различными температурными областями эксперимента и/или (б) различными концентрациями. Начальные значения констант в уравнениях потоков зависят от величины концентрации, в частности, для малого разбавления ожидается, что v пропорциональна концентрации немагнитной компоненты. Если это действительно так, ожидается монотонное увеличение значений эффективных показателей к асимптотическим значениям. Типичное поведение представлено кривой 3 рис. 14–16. В этом случае в сравнительно

широком интервале температур можно обнаружить эффективные показатели, равные критическим показателям чистой модели. Потом, по мере ослабления области притяжения неподвижной точки I , возможно "перестреливание", при котором можно обнаружить эффективные показатели, превосходящие их асимптотические значения. Это поведение предсказывается для большего разбавления и изображено кривой b на рис. 14–16. Кривые $4, 5$ соответствуют ситуации, когда кроссовер от среднеполового к неупорядоченному поведению не подвергается влиянию чистой неподвижной точки I .

6.3. Пересуммирование, основанное на конформном отображении

Основанная на конформном отображении процедура пересуммирования широко используется при анализе асимптотических рядов, возникающих в исследованиях моделей с одной константой связи, в частности в случае чистой $d = 3$ модели Изинга (скалярная теория ϕ^4 , см., например, [73, 109, 122]). Применение подхода предполагает, что известна асимптотика поведения общего члена разложения. В случае RIM такая асимптотика неизвестна. Это объясняет, почему при исследовании RIM использовалась техника пересуммирования типа Паде–Бореля, как описано в разделе 6.2. Однако недавно на основе исследования $d = 0$ замороженной разбавленной модели Изинга было показано аналитически [135], что пертурбативные разложения свободной энергии суммируемы по Борелю, если только проводить пересуммирование специальным образом. Основной результат работы [135] гласит: если двойное разложение функций RIM по степеням u, v записать в виде

$$f(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(v)u^i, \tag{64}$$

$$c_i(v) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}v^j, \tag{65}$$

то разложение (65) так же, как и разложение (64) при фиксированном v , суммируемо по Борелю. Эти результаты позволили авторам [65] выполнить пересуммирование шестипетлевых разложений (44)–(47) (см. [66]). Более того, заметив, что асимптотическое поведение общего члена ряда (65) можно вывести из известной асимптотики (60) (см. [129–131]) для ряда по v (65), авторы сумели применить пересуммирование, основанное на конформном отображении. Вследствие этого для коэффициентов $c_i(v)$ были получены сходящиеся результаты.

Процедура пересуммирования ряда по одной переменной u , основанная на использовании конформного отображения, стандартна [122, 140]. Для известного изображения Бореля–Леруа $S^B(u)$ (61) исходный ряд можно восстановить из

$$S^{\text{res}}(u) = \int_0^{\infty} dt t^b \exp(-t) S^B(ut). \tag{66}$$

Полагая асимптотическое поведение общего члена ряда в виде (60), делают заключение, что наиболее близкая к началу координат сингулярность преобразованного ряда $S^B(u)$ находится в точке $(-1/a)$. Конформно отображая разрезанную плоскость u на единичный круг и оставляя

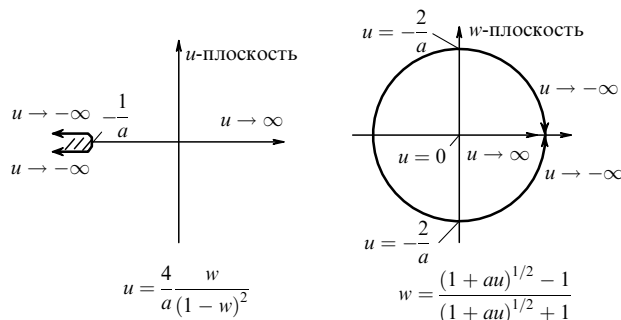


Рис. 17. Конформное отображение плоскости с разрезом на отрицательной полуоси на единичный круг. Начало координат остается неизменным в соответствии с формулами (67). Детали приведены в тексте. Рисунок заимствован из работы [141].

начало координат неизменным (рис. 17):

$$w = \frac{(1+au)^{1/2} - 1}{(1+au)^{1/2} + 1}, \quad u = \frac{4}{a} \frac{w}{(1-w)^2}, \tag{67}$$

подставляя результат в $S^B(u)$ и переразлагая по w , получают ряд, определенный в круге единичного радиуса в плоскости w . Этот ряд снова подставляется в выражение (66). С целью ослабить возможную сингулярность в плоскости w соответствующее выражение умножают на $(1-w)^\rho$, вследствие чего появляется еще один параметр ρ [140].

Однако поскольку асимптотическое поведение общего члена (60) можно установить только для ряда по v (65) (см. [65]), вышеописанная процедура применима лишь к коэффициентам c_i РГ рядов RIM (65). Асимптотика результирующего ряда по u (64) все еще неизвестна. Это заставляет применять для их анализа технику пересуммирования Паде–Бореля. Последнюю можно применить также к ряду (65). Все это, вместе взятое, ведет к различным способам пересуммирования ряда: 1) применению метода Паде–Бореля к обоим рядам (64) и (65) (в работе [65] этот способ именовался "двойным методом Паде–Бореля") и 2) применению конформного метода к ряду (65) и метода Паде–Бореля к ряду (64) ("конформный метод Паде–Бореля"). Оба способа реализованы в работе [65], причем специальное внимание уделялось выбору различных аппроксимант Паде, а также оптимизации результатов с помощью подгоночных параметров. В таблице 3 нами приведены данные о критических показателях RIM, предложенные авторами на основе анализа шестипетлевых РГ функций, содержащие в себе оценки на основе и двойного метода Паде–Бореля, и конформного метода Паде–Бореля (они обозначены ПБ–КМ). Отдельно нами показаны результаты анализа двойным методом Паде–Бореля (ПБ–ПБ). Заметим, что, как оказалось, техника с применением конформного отображения дает более устойчивые результаты, даже если пересуммировать ряды РГ при фиксированном v^*/u^* . Применяя процедуру пересуммирования работы [66], основанную на конформном отображении, авторы [65] получили на основе шестипетлевых РГ рядов значения критических показателей, находящиеся в хорошем согласии с другими оценками (см. табл. 3). Однако оценки координат неподвижной точки существенно различаются в различных вычислительных

схемах. Это приводит к заключению [65], что, вероятно, оптимальное обрезание β -функций RIM соответствует более короткому, чем шестипетлевой, ряду.

7. Заключение

В настоящей работе нами дан обзор результатов, полученных к настоящему времени при описании критических свойств трехмерной слабо разбавленной замороженной модели Изинга (RIM). Следуя основной массе экспериментальных, численных и теоретических исследований, мы сосредоточили внимание на критических показателях модели. Огромное количество работ, посвященных точному определению показателей, несомненно, указывает на большой интерес к рассматриваемой проблематике. Причина тому двоякая: (1) RIM позволяет на уровне простой модели включить в рассмотрение макроскопические эффекты беспорядка, всегда присутствующего в реальных материалах; (2) исследование влияния беспорядка на универсальные свойства критического поведения помимо практических нужд имеет большой академический интерес. Именно в области, очень близкой к критической температуре, даже очень малое количество примесей может сильно изменить свойства вещества по сравнению с идеальным магнетиком. В соответствии с эвристическим критерием Харриса [71] неупорядоченный магнетик характеризуется новыми критическими показателями, только когда теплоемкость идеальной системы в критической точке расходится. Изменение критических показателей RIM хорошо установлено в экспериментах, а также в моделировании по методу Монте-Карло и теоретических исследованиях. Однако полученные количественные оценки значительно хуже согласованы между собой, чем в ситуации, возникающей при исследованиях чистых изинговских магнетиков. Происходит это вследствие как технических, так и принципиальных трудностей. Более того, при определении показателей RIM технические трудности часто вызваны трудностями принципиальными.

Хотя принято считать, что в экспериментальных образцах различные дефекты неизбежны, количество экспериментальных исследований RIM значительно меньше числа работ, посвященных определению критических показателей модели Изинга. В качестве объяснения следует сказать, что класс универсальности модели Изинга включает не только магнетики, но и простые флюиды, ферроэлектрики, бинарные сплавы и т.д. Более того, RIM сама может демонстрировать эффективное критическое поведение класса универсальности модели Изинга. Данные о критических показателях RIM, полученные в экспериментах, собраны в табл. 1. Особенностью является то, что уже в ранних исследованиях [4] наблюдалось различие критического поведения RIM и чистой модели Изинга. Интересно заметить, что после этой работы не возросла экспериментальная точность определения критических показателей и не был достигнут более узкий температурный интервал вокруг критической точки. Объяснением этого может служить тот факт, что, начиная с середины 80-х годов, внимание исследователей переместилось к модели Изинга в случайном поле, а данные для RIM получали как побочный продукт. Стоит отметить, что предсказанные в теоретических работах значения критических показателей в случаях в замороженного беспорядка [65] ($\nu \simeq 0,678$, $\gamma \simeq 1,330$)

и отоженного беспорядка⁴ ($\nu \simeq 0,708$, $\gamma \simeq 1,391$) различаются, но весьма незначительно. Наиболее вероятным представляется сценарий, согласно которому в реальных образцах наблюдается промежуточная ситуация, и тогда точного соответствия между экспериментальными исследованиями разбавленных кристаллических антиферромагнетиков и теоретическими вычислениями вряд ли можно ожидать.

Тогда как существование нового класса универсальности для RIM наблюдалось уже в ранних экспериментальных исследованиях, в моделированиях по методу Монте-Карло этого не было. Ввиду отсутствия надлежащего конечномерного анализа наблюдалась непрерывная зависимость критических показателей от концентрации. Такое поведение интерпретировали с помощью эффективных критических показателей [68, 69]. В последующем при анализе данных моделирования критическим оказалось осознание роли показателя поправки к скейлингу [33–35]. Последнее на основе количественных данных позволило сделать вывод о независимости асимптотических критических показателей от концентрации [33]. Как можно заметить из табл. 2, увеличение быстродействия компьютеров, как и улучшение вычислительных алгоритмов, позволило улучшить точность оценки критических показателей. Недавно в моделировании RIM методом Монте-Карло стали обращать внимание также на исследование проблем самоусреднения в разбавленных системах [37, 38].

Результаты экспериментальных исследований, а также моделирования по методу Монте-Карло подтверждаются теоретическими вычислениями. Количественные значения критических показателей, полученные различными теоретическими методами, собраны в табл. 3. Заметим, что все теоретические результаты получены в рамках ренормализационно-группового подхода, а большинство из них — в теоретико-полевого формализме на основе эффективного гамильтониана Ландау–Гинзбурга–Вильсона (8). Хотя последний подход наталкивается на внутренние трудности (такие, как проблемы нарушения репличной симметрии и возможного существования фазы Гриффитса [79]), он остается единственным методом, дающим возможность вычислить асимптотические значения показателей. В случае чистой модели Изинга многие результаты основаны также на других методах, в частности на высоко- и низкотемпературных разложениях.

Другое явное отличие RIM от модели Изинга проявляется в применимости одних схем вычислений в рамках теоретико-полевого ренормализационно-группового формализма и неприменимости других. В случае модели Изинга и массивная схема, и схема минимального вычитания с последующим ϵ -разложением обеспечивают согласующиеся и надежные результаты. А для RIM ϵ -разложение вырождается в $\sqrt{\epsilon}$ -разложение [43, 45, 58, 61], которое, как оказалось, бесполезно при количественных расчетах [59, 63]. Более того, исходные ряды по константам связи как в массивной, так и в схеме минимального вычитания оказываются несуммируемыми по Борелю [132, 133, 135]. Тем не менее использованное здесь пересуммирование процедурами типа

⁴ Эти оценки следуют из перенормировки Фишера (11), примененной к показателям чистой ($d = 3$) модели Изинга (4).

Паде – Бореля позволило получить сходящуюся последовательность критических показателей из рядов в низких порядках теории возмущений. Это очевидно в силу согласия теоретических результатов, полученных в различных порядках теории возмущений (табл. 3), с данными экспериментальных исследований (табл. 1) и исследований по методу Монте-Карло (табл. 2). Однако пересуммирование отказало в высоких порядках, вследствие чего было высказано предположение, что существует оптимальное обрезание ряда теории возмущений для РГ функций RIM [63].

На основе шестипетлевых РГ функций массивной схемы результат можно получить [65] посредством только очень усложненной процедуры пересуммирования [135]. В рамках этой схемы оценки критических показателей характеризуются тем же порядком точности, что и в случае модели Изинга, где они основаны [73] на шестипетлевых разложениях РГ для β -функций и семипетлевых — для γ -функций. Однако определение пределов точности при теоретических вычислениях является трудной проблемой, которую решают различными способами [62, 65]. При теоретических расчетах ошибки скорее определяют неточность конкретных теоретических процедур, чем доверительные интервалы истинных значений.

Для сравнения теоретических предсказаний с экспериментальными данными и данными моделирования нужно использовать эффективные критические показатели, которые также были вычислены для RIM в рамках РГ подхода [57, 63].

В конце обзора мы хотим снова привлечь внимание к тому факту, что новое критическое поведение, соответствующее классу универсальности RIM, наблюдалось к настоящему времени только в магнитных системах, таких, как (анти)ферромагнетики (см. табл. 1). Вызовом для исследователей пока остается постановка эксперимента, который продемонстрировал бы поведение типа RIM в других конденсированных системах. Многообещающим примером может служить жидкость вблизи критической точки жидкость – газ в пористой среде. Следует, однако, заметить, что жидкости в пористой среде служат примером разбавленной модели Изинга только при специальных обстоятельствах, когда они не являются примерами моделей в случайном поле (см., например, [142]). Недавно тщательные эксперименты по критическому поведению жидкого гелия-4 вблизи перехода в сверхтекучее состояние в пористой среде [143] подтвердили несущественность замороженного беспорядка. Этого следовало ожидать из критерия Харриса, поскольку измеренное экспериментально значение критического показателя теплоемкости при λ -переходе в гелии-4 равно $\alpha = -0,01056 \pm 0,00038$ [144], что в пределах ошибок меньше нуля. Таким образом, исследование простой жидкости в пористой среде может предоставить первое наблюдение критического поведения RIM в немагнитной системе.

Благодарности. При написании этого обзора и при исследованиях RIM огромную пользу и радость нам принесли обсуждения и контакты со многими нашими коллегами. Мы очень признательны за полезные обсуждения Дэвиду Беланжэ, Бертрану Бершу, Кристиану фон Ферберу, Хагену Кляйнерту, Виктору Мартин-Мейору, Алану МакКейну, Верене Шюльте-Фролинде, Миколе

Шпоту, Александру Соколову. Представленные здесь материалы частично использовались во время лекций, прочитанных одним из нас в летнем семестре 2001 г. в Университете Анри Пуанкаре, Нанси 1 (Франция). Ю. Головач выражает благодарность Бертрану Бершу, а также коллегам из Лаборатории физики материалов (Университет Нанси 1) за гостеприимство, поддержку и многочисленные полезные комментарии.

Работа выполнена при частичной поддержке Österreichische Nationalbank Jubiläumsfonds (грант № 7694).

Примечание при корректуре. Недавно критические свойства RIM были исследованы в рамках непертурбативного РГ подхода, основанного на понятии эффективного усредненного действия [145]. Значения критических показателей RIM, полученные в этой работе, находятся в хорошем согласии с результатами последних теоретических и экспериментальных исследований. Таким образом, работы [50, 145] остаются единственными теоретическими исследованиями, в которых критические показатели были получены не методом теоретико-полевой РГ.

Список литературы

1. Stinchcombe R B, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 7 (Eds C Domb, J L Lebowitz) (New York: Academic Press, 1983) p. 151
2. Belanger D P *Braz. J. Phys.* **30** 682 (2000)
3. Parisi G, Ricci-Tersenghi F, Ruiz-Lorenzo J J *Phys. Rev. E* **60** 5198 (1999)
4. Dunlap R A, Gottlieb A M *Phys. Rev. B* **23** 6106 (1981)
5. Birgeneau R J et al. *Phys. Rev. B* **27** 6747 (1983)
6. Hastings J M, Corliss L M, Kunmann W *Phys. Rev. B* **31** 2902 (1985)
7. Belanger D P, King A R, Jaccarino V *Phys. Rev. B* **34** 452 (1986)
8. Barrett P H *Phys. Rev. B* **34** 3513 (1986)
9. Mitchell P W et al. *Phys. Rev. B* **34** 4719 (1986)
10. Thurston T R et al. *Phys. Rev. B* **37** 9559 (1988)
11. Rosov N et al. *Phys. Rev. B* **37** 3265 (1988)
12. Belanger D P et al. *Phys. Rev. B* **37** 226 (1988)
13. Ramos C A, King A R, Jaccarino V *Phys. Rev. B* **37** 5483 (1988)
14. Ferreira I B, King A R, Jaccarino V *Phys. Rev. B* **43** 10797 (1991)
15. Belanger D P et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **140–144** 1549 (1995)
16. Belanger D P et al. *Phys. Rev. B* **54** 3420 (1996)
17. Hill J P et al. *Phys. Rev. B* **55** 356 (1997)
18. Slanić Z, Belanger D P *J. Magn. Magn. Mater.* **186** 65 (1998)
19. Belanger D P, Slanić Z, Fernandez-Baca J A *J. Magn. Magn. Mater.* **177–181** 171 (1998)
20. Slanić Z, Belanger D P, Fernandez-Baca J A *Phys. Rev. Lett.* **82** 426 (1999)
21. Landau D P *Phys. Rev. B* **22** 2450 (1980)
22. Marro J, Labarta A, Tejada J *Phys. Rev. B* **34** 347 (1986)
23. Chowdhury D, Stauffer D *J. Stat. Phys.* **44** 203 (1986)
24. Braun P, Föhnle M *J. Stat. Phys.* **52** 775 (1988)
25. Braun P et al. *Int. J. Mod. Phys. B* **3** 1343 (1989)
26. Wang J-S, Chowdhury D *J. Phys. (Paris)* **50** 2905 (1989)
27. Wang J-S et al. *Physica A* **166** 173 (1990)
28. Holey T, Föhnle M *Phys. Rev. B* **41** 11709 (1990); Föhnle M, Holey T, Eckert J *J. Magn. Magn. Mater.* **104–107** 195 (1992)
29. Heuer H-O *Europhys. Lett.* **12** 551 (1990); Heuer H-O *Phys. Rev. B* **42** 6476 (1990)
30. Heuer H-O *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L333 (1993)
31. Прудников В В, Вакилов А Н *ЖЭТФ* **103** 962 (1993)
32. Hennecke M *Phys. Rev. B* **48** 6271 (1993)
33. Ballesteros H G et al. *Phys. Rev. B* **58** 2740 (1998)
34. Wiseman S, Domany E *Phys. Rev. Lett.* **81** 22 (1998)
35. Wiseman S, Domany E *Phys. Rev. E* **58** 2938 (1998)
36. Aharony A, Harris A B, Wiseman S *Phys. Rev. Lett.* **81** 252 (1998)

37. Marqués M I, Gonzalo J A *Physica A* **284** 187 (2000)
38. Marqués M I, Gonzalo J A *Phys. Rev. E* **60** 2394 (1999)
39. Marqués M I, Gonzalo J A, Íñiguez J *Phys. Rev. E* **62** 191 (2000)
40. Hukushima K *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** 631 (2000)
41. Berche P E et al., in *MECO25, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Pont-à-Mousson, France, 9–11 March, 2000*, p. 51; Berche P E et al. *Comput. Phys. Commun.* **147** 427 (2002)
42. Harris A B, Lubensky T C *Phys. Rev. Lett.* **33** 1540 (1974)
43. Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **68** 1960 (1975)
44. Lubensky T C *Phys. Rev. B* **11** 3573 (1975)
45. Grinstein G, Luther A *Phys. Rev. B* **13** 1329 (1976)
46. Jayaprakash C, Katz H J *Phys. Rev. B* **16** 3987 (1977)
47. Шалаев Б Н *ЖЭТФ* **73** 2301 (1977)
48. Соколов А И *ФТТ* **19** 748 (1977)
49. Соколов А И, Шалаев Б Н *ФТТ* **23** 2058 (1981)
50. Newman K E, Riedel E K *Phys. Rev. B* **25** 264 (1982)
51. Jug G *Phys. Rev. B* **27** 609 (1983)
52. Майер И О, Соколов А И *ФТТ* **26** 3454 (1984)
53. Shpot N A *Phys. Lett. A* **142** 474 (1989)
54. Mayer I O, Sokolov A I, Shalaev B N *Ferroelectrics* **95** 93 (1989)
55. Mayer I O *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 2815 (1989)
56. Holovatch Yu, Shpot M *J. Stat. Phys.* **66** 867 (1992)
57. Janssen H K, Oerding K, Sengespeick E *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 6073 (1995)
58. Shalaev B N, Antonenko S A, Sokolov A I *Phys. Lett. A* **230** 105 (1997)
59. Folk R, Holovatch Yu, Yavors'kii T *J. Phys. Stud.* **2** 213 (1998)
60. Holovatch Yu, Yavors'kii T *J. Stat. Phys.* **93** 785 (1998); *Condens. Mater. Phys.* (11) 87 (1997)
61. Folk R, Holovatch Yu, Yavors'kii T *Письма в ЖЭТФ* **69** 698 (1999)
62. Varnashev K B *Phys. Rev. B* **61** 14660 (2000)
63. Folk R, Holovatch Yu, Yavors'kii T *Phys. Rev. B* **61** 15114 (2000)
64. Pakhnin D V, Sokolov A I *Письма в ЖЭТФ* **71** 600 (2000); *Phys. Rev. B* **61** 15130 (2000)
65. Pelissetto A, Vicari E *Phys. Rev. B* **62** 6393 (2000)
66. Carmona J M, Pelissetto A, Vicari E *Phys. Rev. B* **61** 15136 (2000)
67. Stanley H E *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 1971)
68. Kouvel J S, Fisher M E *Phys. Rev.* **136** A1626 (1964)
69. Riedel E K, Wegner F J *Phys. Rev. B* **9** 294 (1974)
70. Wegner F J *Phys. Rev. B* **5** 4529 (1972)
71. Harris A B *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1671 (1974)
72. Chayes J T et al. *Phys. Rev. Lett.* **57** 2999 (1986)
73. Guida R, Zinn-Justin J *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 8103 (1998)
74. Emery V J *Phys. Rev. B* **11** 239 (1975); Edwards S F, Anderson P W *J. Phys. F: Met. Phys.* **5** 965 (1975)
75. Brout R *Phys. Rev.* **115** 824 (1959)
76. Fisher M E *Phys. Rev.* **176** 257 (1968)
77. Dotsenko V et al. *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 3093 (1995)
78. Dotsenko Vik S *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 2949 (1999)
79. Griffiths R B *Phys. Rev. Lett.* **23** 17 (1969)
80. Dotsenko V, Feldman D E *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 5183 (1995)
81. Wu X *Physica A* **251** 309 (1998)
82. Prudnikov V V, Prudnikov P V, Fedorenko A A *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** L145 (2001)
83. Hutchings M T, Schulhof M P, Guggenheim H J *Phys. Rev. B* **5** 154 (1972)
84. Hutchings M T, Rainford B D, Guggenheim H J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **3** 307 (1970)
85. Heller P *Phys. Rev.* **146** 403 (1966)
86. Dietrich O W *J. Phys. C: Solid State Phys.* **2** 2022 (1969)
87. Schullhof M P et al. *Phys. Rev. B* **1** 2304 (1969)
88. Wertheim G K, Buchanan D N E *Phys. Rev.* **161** 478 (1967)
89. Belanger D P, King A R, Jaccarino V *J. Appl. Phys.* **53** 2704 (1982)
90. Meyer G M, Dietrich O W *J. Phys. C: Solid State Phys.* **11** 1451 (1978)
91. Cowley R S, Carneiro K *J. Phys. C: Solid State Phys.* **13** 3281 (1980)
92. Belanger D P et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **15–18** 807 (1980)
93. Gehring G A *J. Phys. C: Solid State Phys.* **10** 531 (1977)
94. Fishman S, Aharony A *J. Phys. C: Solid State Phys.* **12** L729 (1979)
95. Cardy J L *Phys. Rev. B* **29** 505 (1984)
96. Belanger D P, Young A P *J. Magn. Magn. Mater.* **100** 272 (1991)
97. Belanger D P, Lui M, Erwin R W, in *Magnetic Ultrathin Films: Symp., San Francisco, CA, USA, April 12–16, 1993* (Mater. Res. Symp. Proc., Vol. 313, Eds B T Jonker et al.) (Pittsburgh, Pa.: Materials Research Society, 1993) p. 755
98. Goldman A I et al. *Phys. Rev. B* **36** 5609 (1987)
99. Berche B, unpublished
100. Binder K (Ed.) *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* (Topics in Current Physics, Vol. 7) (Berlin: Springer-Verlag, 1979)
101. Barber M N et al. *Phys. Rev. B* **32** 1720 (1985)
102. Swendsen R H, Wang J-S *Phys. Rev. Lett.* **58** 86 (1987); Wolff U *Phys. Lett. B* **228** 379 (1989)
103. Heuer H-O *Comput. Phys. Commun.* **59** 387 (1990)
104. Wiseman S, Domany E *Phys. Rev. E* **52** 3469 (1995)
105. Aharony A, Harris A B *Phys. Rev. Lett.* **77** 3700 (1996)
106. Weinrib A, Halperin B I *Phys. Rev. B* **27** 413 (1983)
107. Prudnikov V V, Fedorenko A A *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** L399 (1999); Prudnikov V V, Prudnikov P V, Fedorenko A A *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 8587 (1999); *Phys. Rev. B* **62** 8777 (2000); Blavats'ka V, von Ferber C, Holovatch Yu *J. Mol. Liq.* **92** 77 (2001); *Phys. Rev. E* **64** 041102 (2001)
108. Brézin E, Le Guillou J C, Zinn-Justin J, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 6 (Eds C Domb, M S Green) (London: Academic Press, 1976); Amit D J *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* 2nd ed. (Singapore: World Scientific, 1989)
109. Zinn-Justin J *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Intern. Ser. of Monographs on Phys., 92) (Oxford: Clarendon Press, 1996); Kleinert H, Schulte-Frohlinde V *Critical Properties of ϕ^4 -Theories* (River Edge, NJ: World Scientific, 2001); Pelissetto A, Vicari E *Phys. Rep.* **368** 549 (2002)
110. 't Hooft G, Veltman M *Nucl. Phys. B* **44** 189 (1972); 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **61** 455 (1973)
111. Parisi G, in *Proc. of the Cargrè Summer School, 1997* (unpublished); Parisi G *J. Stat. Phys.* **23** 49 (1980)
112. Владимиров В С *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1976)
113. Nasser I, Folk R *Phys. Rev. B* **52** 15799 (1995)
114. Frey E, Schwabl F *Phys. Rev. B* **42** 8261 (1990)
115. Kleinert H, Schulte-Frohlinde V *Phys. Lett. B* **342** 284 (1995)
116. Nickel B G, Meiron D I, Baker G A "Compilation of 2pt and 4pt graphs for continuous spin model", Report (Ontario: University of Guelph, 1977)
117. Bervillier C, Shpot M *Phys. Rev. B* **46** 955 (1992)
118. Mayer I *Physica A* **252** 450 (1998)
119. Holovatch Yu, Krokhmal'skii T *J. Math. Phys.* **35** 3866 (1994)
120. Wilson K G, Fisher M E *Phys. Rev. Lett.* **28** 240 (1972)
121. Schloms R, Dohm V *Europhys. Lett.* **3** 413 (1987); *Nucl. Phys. B* **328** 639 (1989)
122. Le Guillou J C, Zinn-Justin J *Phys. Rev. B* **21** 3976 (1980)
123. Newlove S A *J. Phys. C: Solid State Phys.* **16** L423 (1983)
124. Шпот Н А *ЖЭТФ* **98** 1762 (1990)
125. von Ferber C, Holovatch Yu *Europhys. Lett.* **39** 31 (1997); *Phys. Rev. E* **56** 6370 (1997); **59** 6914 (1999); Folk R, Holovatch Yu, Yavors'kii T *Phys. Rev. B* **62** 12195 (2000)
126. Folk R, Holovatch Yu, in *Correlations, Coherence, and Order* (Eds D V Shopova, D I Uzunov) (New York: Kluwer Acad./Plenum Publ., 1999) p. 83
127. Hardy G H *Divergent Series* (Oxford: Clarendon Press, 1949)
128. Eckmann J-P, Magnen J, Seneor R *Commun. Math. Phys.* **39** 251 (1975)
129. Липатов Л Н *ЖЭТФ* **72** 411 (1977)
130. Brézin E, Le Guillou J C, Zinn-Justin J *Phys. Rev. D* **15** 1544 (1977)
131. Brézin E, Parisi G *J. Stat. Phys.* **19** 269 (1978)
132. Bray A J et al. *Phys. Rev. B* **36** 2212 (1987)
133. McKane A J *Phys. Rev. B* **49** 12003 (1994)

134. Baker G A (Jr) et al. *Phys. Rev. Lett.* **36** 1351 (1976); Baker G A (Jr), Nickel B G, Meiron D I *Phys. Rev. B* **17** 1365 (1978)
135. Álvarez G, Martín-Mayor V, Ruiz-Lorenzo J J *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 841 (2000)
136. Baker G A (Jr) Graves-Morris P *Padé Approximants* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1981)
137. Watson P J S *J. Phys. A: Math. Gen.* **7** L167 (1974)
138. Chisholm J S R *Math. Comp.* **27** 841 (1973)
139. Folk R, Holovatch Yu, Yavors'kii T, unpublished
140. Zinn-Justin J *Phys. Rep.* **70** 109 (1981)
141. Holovatch Yu *Lectures on Critical Phenomena: Polymers, Diluted Systems, Magnets* (Linz, 1996) (unpublished)
142. Pitard E et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 4361 (1995)
143. Yoon J, Chan M H W *Phys. Rev. Lett.* **78** 4801 (1997); Zassenhaus G M, Reppy J D *Phys. Rev. Lett.* **83** 4800 (1999)
144. Lipa J A et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 4894 (2000)
145. Tissier M T et al. *Phys. Rev. B* **65** 140402(R) (2002)

Critical exponents of a three-dimensional weakly diluted quenched Ising model

R. Folk

*Institut für Theoretische Physik, Johannes Kepler Universität Linz,
A-4040 Linz, Austria
Tel. (43-(0) 372) 24-68-83 99
E-mail: folk@tphys.uni-linz.ac.at*

Yu. Holovatch

*Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine, UA-79011, Lviv, Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv,
UA-79005, Lviv, Ukraine
Tel. (38-032) (2) 76-09 08
E-mail: hol@icmp.lviv.ua*

T. Yavors'kii

*Ivan Franko National University of Lviv,
UA-79005, Lviv, Ukraine
Tel. (38-032) (2) 97-94 43
E-mail: tarasyk@ktf.franko.lviv.ua*

Universal and non-universal critical exponents of a three-dimensional Ising system with weak quenched disorder are discussed. Experimental, computational, and theoretical results are reviewed. Particular attention is given to field theoretical renormalization group results. Different renormalization schemes are considered with emphasis on the analysis of divergent series obtained.

PACS numbers: 11.10.Gh, **61.43.-j**, 64.60.Ak

Bibliography — 145 references

Received 20 July 2001, revised 16 May 2002