Список литературы

1. Hoyle C D et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 1418 (2001); hep-ph/0011014; Chiaverini J et al. "New experimental constraints on non-Newtonian forces below 100 microns", hep-ph/0209325; Long J C et al. "New experimental limits on macroscopic forces below 100 microns", hep-ph/0210004
2. Okun L B, Zeldovich Ya B *Phys. Lett. B* **78** 597 (1978); Волошин М Б, Окунь Л Б *Письма в ЖЭТФ* **28** 156 (1978); Ignatiev A Yu, Kuzmin V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **84** 315 (1979); Ignatev A Y, Kuzmin V A, Shaposhnikov M E "On the electric charge nonconservation in gauge theories and electron stability", in *Proc. of the 16th Intern. Cosmic Ray Conf., Kyoto, Japan, 1979* Vol. 7 (Ed. S Miyake) (Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1979) p. 400; "Electron stability and charge fragmentation in gauge theories", Preprint IYaI-P-0142 (Moscow: Institute for Nuclear Research, Academy of Sciences of the USSR, 1980); Mohapatra R N *Phys. Rev. Lett.* **59** 1510 (1987); Suzuki M *Phys. Rev. D* **38** 1544 (1988); Dobroliubov M I, Ignatiev A Yu *Phys. Rev. Lett.* **65** 679 (1990); Maruno M, Takasugi E, Tanaka M *Prog. Theor. Phys.* **86** 907 (1991); Mohapatra R N, Nussinov S *Int. J. Mod. Phys. A* **7** 3817 (1992)
3. Логунов А А *ЭЧАЯ* **29** 1 (1998); Герштейн С С, Логунов А А, Мествиришвили М А *Доклады РАН* **360** 332 (1998); Логунов А А *Теория гравитационного поля* (М.: Наука, 2001); Logunov A A "The theory of gravity" gr-qc/0210005
4. Маршаков А В *УФН* **172** 977 (2002)
5. Riess A G et al. (Supernova Search Team Collab.) *Astron. J.* **116** 1009 (1998); astro-ph/9805201; Perlmutter S et al. (The Supernova Cosmology Project Collab.) *Astrophys. J.* **517** 565 (1999); astro-ph/9812133
6. Sahni V, Starobinsky A *Int. J. Mod. Phys. D* **9** 373 (2000); astro-ph/9904398
7. Высоцкий М И, Невзоров Р Б *УФН* **171** 939 (2001)
8. Dvali G, Gabadadze G, Shifman M "Diluting cosmological constant in infinite volume extra dimensions", hep-th/0202174; "Diluting cosmological constant via large distance modification of gravity", hep-th/0208096
9. Рубаков В А *УФН* **171** 913 (2001)
10. Rubakov V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **125** 136 (1983); Akama K, in *Gauge Theory and Gravitation*: *Proc. of the Intern. Symp., Nara, Japan, 1982* (Lecture Notes in Physics, Vol. 176, Eds K Kikkawa, N Nakanishi, H Nariai) (Berlin: Springer-Verlag, 1983) p. 267
11. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Lett. B* **429** 263 (1998); hep-ph/9803315; Antoniadis I et al. *Phys. Lett. B* **436** 257 (1998); hep-ph/9804398; Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Rev. D* **59** 086004 (1999); hep-ph/9807344
12. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370 (1999); hep-ph/9905221
13. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690 (1999); hep-th/9906064
14. Dvali G, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **485** 208 (2000); hep-th/0005016
15. Kaluza T *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Phys. Kl.* (1) 966 (1921); Klein O *Z. Phys.* **37** 895 (1926); *Surv. High Energy Phys.* **5** 241 (1986)
16. Cheung K, Keung W-Y *Phys. Rev. D* **60** 112003 (1999); hep-ph/9903294
17. Davoudiasl H, Hewett J L, Rizzo T G *Phys. Lett. B* **473** 43 (2000); hep-ph/9911262
18. Kubyshin Yu A "Models with extra dimensions and their phenomenology", hep-ph/0111027
19. Dvali G, Gabadadze G *Phys. Rev. D* **63** 065007 (2001); hep-th/0008054; Dvali G et al. "See-saw modification of gravity", hep-th/0111266
20. Сахаров А Д *ДАН СССР* **177** 70 (1967); *УФН* **161** (5) 64 (1991); Adler S L *Rev. Mod. Phys.* **54** 729 (1982); Erratum: **55** 837 (1983); Zee A *Phys. Rev. Lett.* **48** 295 (1982)
21. Dvali G R et al. *Phys. Rev. D* **65** 024031 (2002); hep-th/0106058
22. Kogan I I et al. *Nucl. Phys. B* **584** 313 (2000); hep-ph/9912552; Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Phys. Rev. Lett.* **84** 5928 (2000); hep-th/0002072
23. Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Class. Quantum Grav.* **17** 4437 (2000); hep-th/0003109; Giddings S B, Katz E *J. Math. Phys.* **42** 3082 (2001); hep-th/0009176
24. Dubovsky S L, Rubakov V A, Tinyakov P G *JHEP* **0008** 041 (2000); hep-ph/0007179; Dubovsky S L, Rubakov V A "On electric charge non-conservation in brane world", hep-th/0204205
25. Deffayet C *Phys. Lett. B* **502** 199 (2001); hep-ph/0010186
26. Gogberashvili M *Europhys. Lett.* **49** 396 (2000); hep-ph/9812365
27. Bowcock P, Charmousis C, Gregory R *Class. Quantum Grav.* **17** 4745 (2000); hep-th/0007177
28. Wands D *Class. Quantum Grav.* **19** 3403 (2002); hep-th/0203107; Langlois D "Brane cosmology: an introduction", hep-th/0209261

PACS numbers: **11.15 – q**, 11.25.Tq, 12.60.Jv

Калибровочная теория высших спинов

М.А. Васильев

1. Стандартные калибровочные теории

Цель настоящего доклада — познакомить с ключевыми идеями и результатами калибровочной теории высших спинов, не вдаваясь в технические подробности конструкции. По сути, речь пойдет о построении модели теории поля, обладающей максимально высокой калибровочной симметрией. Ожидается, что теории этого класса позволят по-новому взглянуть на теорию суперструн, которая в настоящее время считается основным кандидатом на роль теории фундаментальных взаимодействий.

Как обычно, под калибровочными симметриями понимаются симметрии, параметры которых являются произвольными функциями координат пространства-времени x^{ν}. Исторически первым примером калибровочной теории поля была предложенная Максвеллом теория электромагнетизма. В этом случае калибровочное поле отождествляется с векторным потенциалом A_{ν}, который порождает напряженность поля

$$F_{\nu\mu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu}, \qquad \partial_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

инвариантную относительно калибровочных (градиентных) преобразований

$$\delta A_{\nu} = \partial_{\nu} \varepsilon \tag{2}$$

с произвольным калибровочным параметром $\varepsilon(x)$. Как известно, калибровочно-инвариантное действие Максвелла

$$S = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4 x\, F_{\nu\mu} F^{\nu\mu}, \qquad \delta S = 0 \tag{3}$$

описывает безмассовые частицы спина 1 — фотоны.

Теория Максвелла может быть обобщена до теории Янга – Миллса путем введения системы взаимно заряженных частиц спина 1, описываемых матрично-значным потенциалом $A_{\nu i}^{j}$, принимающем значения в некоторой алгебре Ли h. Соответствующие напряженности, калибровочные преобразования и действие имеют вид

$$G_{\nu\mu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu} + g\,[A_{\nu},\, A_{\mu}]\,, \tag{4}$$

$$\delta A_{\nu} = \partial_{\nu} \varepsilon + g\,[A_{\nu}, \varepsilon]\,, \tag{5}$$

$$S = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{tr}(G_{\nu\mu} G^{\nu\mu})\,, \tag{6}$$

соответственно. Теорию Янга – Миллса можно понимать как теорию взимодействия безмассовых частиц спина 1. Действительно, при наложении естественных условий, ограничивающих степени производных, принцип калибровочной симметрии фиксирует взаимодействия полей спина 1 однозначно с точностью до произвола в выборе калибровочной группы.

На первый взгляд чистая теория Янга – Миллса кажется мало приспособленной для описания реальной физики, поскольку кванты полей Янга – Миллса оказываются безмассовыми, по крайней мере, пертурбативно. В свое время именно это обстоятельство помешало Паули обнародовать полученные им результаты, которые по существу состояли в открытии теории Янга – Миллса. Позднее, благодаря открытию явления Хиггса в фазе спонтанно нарушенной симметрии, выяснилось, что эта трудность кажущаяся. С симметрийной точки зрения характерная особенность этого явления состоит в появлении поля Хиггса Φ^A с законом калибровочного преобразования вида

$$\delta\Phi^A = \varepsilon^A(X) + \ldots\,, \tag{7}$$

где $\varepsilon^A(X)$ есть некоторые комбинации калибровочных параметров $\varepsilon(X)$, а многоточие обозначает члены более высоких порядков. Такой закон преобразования поля Хиггса позволяет частично фиксировать калибровочный произвол, выбрав калибровку $\Phi^A = 0$. Остаточный произвол порождается теми калибровочными параметрами $\varepsilon(X)$, которые не дают вклада в $\varepsilon^A(X)$. В настоящее время теория Янга – Миллса является основой теории сильных и электрослабых взаимодействий. В частности, введение полей Янга – Миллса для калибровочной группы $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ как переносчиков электрослабого взаимодействия позволило преодолеть трудности теории слабых взаимодействий Ферми.

Следующим хрестоматийным примером калибровочной теории является общая теория относительности. Здесь роль калибровочного поля играет метрический тензор $g_{\mu\nu}$, а калибровочные преобразования отождествляются с координатными преобразованиями

$$\delta g_{\nu\mu} = \partial_\nu(\varepsilon^\rho) g_{\rho\mu} + \partial_\mu(\varepsilon^\rho) g_{\rho\nu} + \varepsilon^\rho \partial_\rho(g_{\nu\mu})\,, \tag{8}$$

где $\varepsilon^\rho(x)$ — инфинитезимальные параметры. Принцип калибровочной инвариантности отождествляется с принципом эквивалентности Эйнштейна. Инвариантное действие Эйнштейна – Гильберта

$$S = -\frac{1}{4\kappa^2}\int\sqrt{-\det|g|}\,(R+\Lambda) \tag{9}$$

содержит две независимые константы связи: гравитационную постоянную κ и космологическую постоянную Λ. Чтобы интерпретировать эту теорию в терминах частиц, надо произвести разложение $g_{\nu\mu} = \eta_{\nu\mu} + \kappa h_{\nu\mu}$ в некоторой фиксированной фоновой метрике $\eta_{\nu\mu}$ (плоской для $\Lambda = 0$ или (анти-) де-ситтеровской для $\Lambda \neq 0$), где $h_{\nu\mu}$ описывает динамические флуктуации. Для случая плоского пространства ($\Lambda = 0$) Фирцем и Паули было показано, что линеаризованное действие S описывает свободные безмассовые частицы спина 2 — гравитоны. Снова при наложении некоторых естественных условий действие Эйнштейна – Гильберта оказывается единственным совместным (калибровочно инвариантным) действием для самодействующего безмассового поля спина 2.

В четырех измерениях единственной нетривиальной модификацией калибровочной теории спина 1 и спина 2 является супергравитация — теория, в которой кроме калибровочных полей спина 1 и спина 2 появляются безмассовые калибровочные поля спина $3/2$ — гравитино, отвечающие за локальные суперсимметричные преобразования со спинорными калибровочными параметрами $\varepsilon_\alpha(x)$. Новая черта, присущая суперсимметрии, состоит в том, что она объединяет частицы, несущие различные спины, в частности бозоны и фермионы, в единые супермультиплеты.

Таким образом, обычные калибровочные теории базируются на калибровочных полях спина 1 со скалярными калибровочными параметрами $\varepsilon(x)$, спина $3/2$ со спинорными калибровочными параметрами $\varepsilon_\alpha(x)$ и спина 2 с векторными калибровочными параметрами $\varepsilon^\rho(x)$. Излишне напоминать, насколько велико значение всех этих теорий. Стоит также отметить, что в рамках супергравитации более высокие суперсимметрии теории обеспечивают более мягкое квантовое поведение за счет сокращения расходимостей. Возникает естественный вопрос: существуют ли другие возможности, связанные с калибровочными полями высших спинов ($s > 2$) и с высшими тензорами в качестве калибровочных параметров, также приводящие к плодотворным физическим моделям и позволяющие рассчитывать на создание квантовой теории гравитации?

2. Свободные безмассовые поля высших спинов

Теория свободных безмассовых полей всех спинов в четырехмерном пространстве-времени детально развита к настоящему времени благодаря усилиям многих авторов (см., например, [1, 2]). Было обнаружено, что все свободные безмассовые поля с $s \geqslant 1$ являются абелевыми калибровочными полями. В частности, безмассовые калибровочные поля целого спина s могут быть описаны полностью симметричными тензорами $\varphi_{\nu_1\ldots\nu_s}$, подчиненными условию двойной бесследовости [1] $\varphi^\rho{}_\rho{}^\eta{}_{\eta\nu_5\ldots\nu_s} = 0$, которое становится нетривиальным при $s \geqslant 4$. Квадратичное действие S_s для свободных полей высших спинов [1] фиксируется однозначно требованием калибровочной инвариантности при абелевых преобразованиях

$$\delta\varphi_{\nu_1\ldots\nu_s} = \partial_{\{\nu_1}\varepsilon_{\nu_2\ldots\nu_s\}_\nu} \tag{10}$$

с параметрами $\varepsilon_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}}$, являющимися полностью симметричными бесследовыми тензорами ранга $(s-1)$, $\varepsilon^\rho{}_{\rho\nu_3\ldots\nu_{s-1}} = 0$

$$\begin{aligned} S_s = \frac{1}{2}(-1)^s \int \mathrm{d}^4x\, \{ &\partial_\nu\varphi_{\mu_1\ldots\mu_s}\partial^\nu\varphi^{\mu_1\ldots\mu_s} - \\ &-\frac{1}{2}\, s(s-1)\,\partial_\nu\varphi^\rho{}_{\rho\mu_1\ldots\mu_{s-2}}\partial^\nu\varphi^\sigma{}_\sigma{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-2}} + \\ &+ s(s-1)\,\partial_\nu\varphi^\rho_{\rho\mu_1\ldots\mu_{s-2}}\partial_\sigma\varphi^{\nu\sigma\mu_1\ldots\mu_{s-2}} - \\ &- s\,\partial_\nu\varphi^\nu_{\mu_1\ldots\mu_{s-1}}\partial_\rho\,\varphi^{\rho\mu_1\ldots\mu_{s-1}} - \\ &-\frac{1}{4}\, s(s-1)(s-2)\,\partial_\nu\varphi^\rho{}_\rho{}^\nu{}_{\mu_1\ldots\mu_{s-3}}\partial_\sigma\varphi^\eta{}_\eta{}^{\sigma\mu_1\ldots\mu_{s-3}} \}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Для $s \geqslant 1$ это действие описывает безмассовые частицы спина s, имеющие две независимые степени свободы в $d = 3 + 1$. Квантование этого действия приводит к унитарной теории, свободной от состояний с отрицательной нормой. Для $s = 0, 1, 2$ S_s сводится к стандартным действиям полей низших спинов.

Безмассовые калибровочные поля полуцелого спина описываются аналогично в терминах полностью симметричных спин-тензоров ранга $s - 1/2$ [1].

3. Мотивация

После того как показано, что теория свободных калибровочных полей высших спинов хорошо определена, следующий вопрос — как построить их совместные взаимодействия? Совместность калибровочных теорий высших спинов означает, что они редуцируются до некоторой комбинации свободных систем высших спинов на линеаризованном уровне и что число калибровочных симметрий остается неизменным для свободных и взаимодействующих теорий, т.е. взаимодействиям позволяется деформировать абелевы калибровочные симметрии свободных теорий, подобно тому, как это происходит в теориях Янга – Миллса и Эйнштейна, но не уменьшать их число. Анализ этой проблемы представляет интерес с нескольких точек зрения.

Известный факт, что теории супергравитации обладают не более чем 32 суперсимметриями, выражает то обстоятельство, что эти теории не содержат полей со спинами выше двух [1]. Тем самым анализ существования калибровочных полей высших спинов может интерпретироваться как анализ возможности выхода за рамки максимальной одиннадцатимерной модели супергравитации.

Теория суперструн содержит бесконечные системы состояний всех спинов. Исключая некоторые поля со спинами $s \leqslant 2$, все поля высших спинов в этой теории обладают большими массами, превышающими энергетические масштабы современных ускорителей. Можно ожидать, что так же, как $\mathrm{W}^{\pm}$- и Z-бозоны в электрослабой теории, они приобретают массу за счет спонтанного нарушения симметрии. На это указывает струнная теория поля, формулировка которой основана на так называемых симметриях Штюкельберга, имеющих следующую структуру:

$$\delta\varphi_{\nu_1,\nu_2,\nu_3\ldots}(x) = \partial_{\nu_1}\varepsilon_{\nu_2,\nu_3\ldots}(x) + \ldots\,, \tag{12}$$

$$\delta\Phi_{\nu_1,\nu_2,\ldots}(x) = \varepsilon_{\nu_1,\nu_2\ldots}(x) + \ldots\,, \tag{13}$$

где $\varepsilon_{\nu_1,\nu_2\ldots}(x)$ — калибровочные параметры симметрий Штюкельберга, являющиеся, как и калибровочные параметры высших спинов, лоренцевыми тензорами высших рангов. Поля $\delta\varphi_{\nu_1,\nu_2,\nu_3\ldots}(x)$ преобразуются как поля высших спинов, а поля Штюкельберга $\Phi_{\nu_1,\nu_2,\ldots}(x)$ преобразуются как соответствующие поля Хиггса, аналогичные (7). Подобная структура отвечает некоторым нарушенным симметриям высших спинов. Иными словами, полевая формулировка теории суперструн недвусмысленно указывает на то, что эта теория является спонтанно нарушенной фазой некоторой теории высших спинов.

[1] Это следует из анализа супермультиплетов. Если число суперсимметрий превышает 32, то любой супермультиплет содержит состояния со спином выше двух.

4. Препятствия

Независимо от конкретной мотивации, проблема высших спинов сводится к нахождению нетривиальной нелинейной теории, описывающей взаимодействующие безмассовые поля со спинами $s > 2$. Может показаться, что такая постановка задачи не слишком ограничительна. В действительности это не так. На протяжении десятилетий доминировало мнение, что проблема высших спинов вообще не допускает решения. Оно основывалось на аргументах двух типов.

S-матричные аргументы Коулмена – Мандулы и Хаага – Лопушанского – Сониуса [3] гласили, что если симметрии S-матрицы той или иной релятивистской теории в пространстве Минковского выходят за рамки обычных внутренних (изотопических) симметрий, ассоциированных с калибровочными полями спина 1, пространственно-временны́х симметрий, ассоциированных с калибровочными полями спина 2 (гравитация), а также, быть может, суперсимметрий, ассоциированных с калибровочными полями спина 3/2 (гравитино), то S-матрица такой теории тривиальна. Иными словами, если симметрии высших спинов являются симметриями S-матрицы, то рассеяние, а значит, и реальное взаимодействие отсутствует.

Не менее обескураживающим оказался анализ гравитационного взаимодействия калибровочных полей высших спинов, впервые выполненный Арагоном и Дезером в 1979 г. [4] для поля спина 5/2. Технически задача достаточно проста: чтобы ввести взаимодействие с гравитацией, обладающее общекоординатной инвариантностью, необходимо заменить обычные производные на ковариантные: $\partial \to \mathrm{D} = \partial - \Gamma$. Это нарушает инвариантность относительно калибровочных преобразований высших спинов, так как оказывается, что при доказательстве инвариантности действия S_s необходимо коммутировать производные, а коммутатор ковариантных производных пропорционален тензору Римана $[\mathrm{D}\ldots, \mathrm{D}\ldots] = R\ldots$ В результате калибровочная вариация ковариантизованного действия S_s^{cov} относительно ковариантизованных преобразований высших спинов имеет следующую структуру:

$$\delta S_s^{\mathrm{cov}} = R_{\ldots}(\varepsilon_{\ldots}\mathrm{D}\varphi_{\ldots}) \neq 0\,. \tag{14}$$

Для спинов $s > 2$ эта вариация содержит бесследовую часть тензора Римана (тензор Вейля), не позволяющую скомпенсировать подобные члены каким-либо изменением действия и/или законов преобразования, как это было возможно для случая $s = 3/2$, что открыло дорогу супергравитации. Поэтому казалось, что неутешительный вывод [4] состоит в том, что калибровочные поля высших спинов не допускают последовательного описания в рамках эйнштейновской гравитации. В силу универсальной роли гравитации вопрос о существовании совместного гравитационного взаимодействия калибровочных полей высших спинов имеет принципиальное значение.

Неудивительно, что все это препятствовало конструктивному отношению к теории калибровочных полей высших спинов.

5. Токи высших спинов

Тем не менее существенным указанием на то, что калибровочные теории высших спинов существуют, были построенные впервые в [5] совместные кубические взаимодействия высших спинов. Хотя эти взаимодействия не содержали гравитационного взаимодействия безмассовых полей, сам факт их существования в высшей степени примечателен. В частности, к взаимодействиям этого вида относятся взаимодействия с сохраняющимися токами, хорошо известные из теории электромагнетизма и (супер)гравитации.

Обычные внутренние симметрии связаны посредством теоремы Нётер с сохраняющимся током спина 1, который может быть построен из различных материальных полей. Например, электрический ток

$$J^{\nu} = \bar{\phi}\partial^{\nu}\phi - \partial^{\nu}\bar{\phi}\phi\,, \tag{15}$$

построенный из комплексного скалярного поля, сохраняется на решениях уравнений скалярного поля

$$\partial_{\nu}J^{\nu} = \bar{\phi}(\Box + m^2)\,\phi - (\Box + m^2)\,\bar{\phi}\phi\,. \tag{16}$$

Трансляционная симметрия связана с током $T^{\mu\nu}$ спина 2, называемым тензором энергии-импульса. Для скалярного материального поля он имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi - \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\big(\partial_{\rho}\phi\,\partial^{\rho}\phi - m^2\phi^2\big)\,. \tag{17}$$

Суперсимметрия связана с сохраняющимся током, называемым супертоком. Он имеет фермионную статистику и строится из бозонов и фермионов. Для безмассовых скаляров ϕ и безмассовых спиноров ψ_{α} он имеет вид

$$J^{\nu}{}_{\alpha} = \partial_{\mu}\phi(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi)_{\alpha}\,, \tag{18}$$

где $\gamma^{\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta}$ — матрицы Дирака в d измерениях.

Сохраняющиеся токи, ассоциированные с лоренцевыми поворотами, могут быть построены из симметричного тензора энергии-импульса:

$$S^{\nu;\mu\rho} = T^{\nu\mu}\,x^{\rho} - T^{\nu\rho}\,x^{\mu}\,, \qquad T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}\,. \tag{19}$$

Менее известно, что аналогично можно построить сохраняющиеся токи произвольного спина. Например, токи произвольного целого спина, построенные из безмассового скалярного поля $\Box\phi^i = 0$, могут быть выбраны в виде [6]

$$\begin{aligned} T^{\nu_1\ldots\nu_{2k}} &= \partial^{\nu_1}\ldots\partial^{\nu_k}\phi\,\partial^{\nu_{k+1}}\ldots\partial^{\nu_{2k}}\phi - \\ &\quad - \frac{k}{2}\,\eta^{\nu_1\nu_2}\,\partial^{\nu_3\ldots\nu_{k+1}}\,\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\nu_{k+2}}\ldots\partial^{\nu_{2k}}\,\partial^{\mu}\phi \end{aligned} \tag{20}$$

для четных спинов и

$$T^{\nu_1\ldots\nu_{2k+1}} = \partial^{\nu_1}\ldots\partial^{\nu_{k+1}}\bar{\phi}\,\partial^{\nu_{k+2}}\ldots\partial^{\nu_{2k+1}}\phi - \bar{\phi}\leftrightarrow\phi \tag{21}$$

для нечетных спинов. Тот факт, что токи высших спинов сохраняются,

$$\partial_{\nu_1}T^{\nu_1\ldots\nu_s} \sim 0 \tag{22}$$

(~ 0 означает равенство нулю на уравнениях движения полей материи), позволяет строить так называемые нётеровские взаимодействия высших спинов в виде

$$\int \mathrm{d}^4 x\,\phi_{\nu_1\ldots\nu_s}T^{\nu_1\ldots\nu_s}\,, \tag{23}$$

оказывающиеся инвариантными относительно преобразований высших спинов (10), по крайней мере, с точностью до членов старших порядков по полям. Поскольку токи высших спинов содержат высшие производные, взаимодействия полей высших спинов также содержат высшие производные, причем степень производных пропорциональна спину.

6. Роль геометрии анти-де-Ситтера

Все эти результаты, несомненно, указывали на существование какой-то нетривиальной теории калибровочных полей высших спинов, хотя и не разрешали проблемы с их гравитационным взаимодействием. Решение этой проблемы, найденное в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН [7], оказалось достаточно неожиданным. Было показано, что совместное кубическое гравитационное взаимодействие высших спинов может быть построено, если рассмотреть задачу в рамках разложения около фона (анти-) де Ситтера. Другими словами, калибровочно-инвариантные и общекоординатно-ковариантные гравитационные взаимодействия высших спинов содержат некоторые члены, пропорциональные отрицательным степеням космологической постоянной, расходящиеся в плоском пределе. Схематически модификация действия, приводящая к желаемому результату, имеет следующий вид:

$$S \to S + \Delta S\,, \tag{24}$$

$$\Delta S = \sum_{p,q} \Lambda^{(2-p-q)/2}\mathrm{D}^p\phi\mathrm{D}^q\phi\mathcal{R}\,, \tag{25}$$

где ϕ обозначают поля высших спинов, а $\mathcal{R}$ описывает отклонения тензора Римана от фоновой кривизны пространства анти-де-Ситтера (АдС):

$$R_{\mu\nu,\,\rho\sigma} = -\Lambda(g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\,g_{\mu\sigma}) + \mathcal{R}_{\mu\nu,\,\rho\sigma}\,. \tag{26}$$

Члены с отрицательными степенями Λ обезразмеривают в (25) члены с высшими производными полей, вариация которых позволяет в конечном счете "чудесным образом" добиться сокращения членов в вариации исходного действия S. (Заметим, что порядок производных полей с фиксированными спинами конечен и пропорционален спину.)

Важно, что этот результат находится в согласии с выводами [4], где неявно предполагалось, что проблема допускает анализ в рамках разложения по степеням тензора Римана. Суть дела в том, что такие разложения допустимы, только если тензор Римана достаточно мал, т.е. геометрия почти плоская, в то время как действие (24) явно содержит отрицательные степени Λ и не допускает плоского предела.

Одновременно удалось обойти и теоремы запрета Коулмена – Мандулы – Хаага – Лопушанского – Сониуса [3], поскольку анализ S-матрицы в пространстве АдС не имеет смысла, так как в этом пространстве-времени S-матрицы не существует.

Калибровочные теории высших спинов требуют, чтобы космологическая постоянная была ненулевой и даже большой, поскольку эти теории предсказывают следующую простую связь между калибровочной константой g, гравитационной постоянной κ и космологической постоянной Λ:

$$g^2 \sim \Lambda \kappa^2 \,. \tag{27}$$

На первый взгляд это обстоятельство могло бы восприниматься как трудность теории. Однако это свойство является следствием требования, чтобы калибровочные симметрии высших спинов были не нарушены, и, по-видимому, имеет столь же отдаленное отношение к фазе теории, описывающей окружающую нас реальность, как безмассовость полей Янга–Миллса к теории электрослабых взаимодействий. Ожидается, что калибровочные симметрии высших спинов будут нарушены в физической фазе, что сделает массивными изначально безмассовые поля и одновременно изменит величину космологической постоянной.

Заметим, что то обстоятельство, что ненарушенные симметрии высших спинов требуют ненулевой космологической постоянной, может служить объяснением того, почему до сих пор не удается найти симметричную фазу теории суперструн. Дело в том, что формулировка квантовой теории суперструн в пространстве АдС представляет собой нетривиальную задачу, остающуюся до сих пор нерешенной.

Тем не менее тот факт, что калибровочные теории высших спинов требуют ненулевой космологической постоянной, до недавнего времени воспринимался лишь как странная особенность теории. Ситуация существенно изменилась, однако, после открытия так называемого "АдС/КТП соответствия" (КТП — конформная теория поля).

7. АдС/КТП соответствие

Напомним, что d-мерные пространства де Ситтера и анти-де-Ситтера могут быть реализованы как d-мерные гиперболоиды,

$$X^A X^B \eta_{AB} = \omega R^2 \,, \tag{28}$$

вложенные в $d+1$-мерные пространства с координатами X^A и метрикой η_{AB}, обладающей сигнатурой $+ - - \cdots - \omega$, где $\omega = 1$ в случае пространства анти-де-Ситтера и $\omega = -1$ в случае пространства де Ситтера. Параметр R называется радиусом пространства (анти-) де Ситтера. Космологическая постоянная Λ пропорциональна R^{-2}, так что плоский предел пространства Минковского соответствует $\Lambda \to 0$ ($R \to \infty$).

Из этой реализации немедленно следует, что пространство анти-де-Ситтера AdS_d обладает группой симметрии $\mathrm{O}(d-1,2)$, а пространство де Ситтера dS_d обладает группой симметрии $\mathrm{O}(d,1)$. В плоском пределе каждая из этих групп переходит в группу движений пространства-времени Минковского, называемую обычно группой Пуанкаре. Важное обстоятельство состоит в том, что группа движений $d+1$-мерного пространства АдС $\mathrm{O}(d,2)$ совпадает с конформной группой d-мерного пространства Минковского. (Напомним, что конформная группа является расширением группы Пуанкаре и действует на определенных, масштабно инвариантных системах, таких, как системы безмассовых полей.)

Пространство АдС не имеет границы. Однако можно проанализировать, что происходит с полями в пространстве АдС в асимптотическом режиме, когда координаты и время стремятся к бесконечности. Например, в качестве таких координат можно выбрать

$$t = X^0 \,, \qquad x^i = X^i \,, \quad i = 1, \ldots, d-1 \,. \tag{29}$$

При $t, x^i \to \infty$ поведение полей приобретает асимптотический характер:

$$\phi(\mu t, \mu x^i) = \mu^{\Delta} \phi(t, x^i) \,, \tag{30}$$

где параметр Δ характеризует поле ϕ. Поэтому асимптотические значения полей ϕ в d-мерном пространстве АдС характеризуются функцией $d-1$ координат. Отождествляя конформную бесконечность AdS_5 с четырехмерным пространством Минковского, гипотеза, предложенная впервые Малдасеной [8], устанавливает соответствие корреляторов полей в пространстве АдС с корреляторами токов конформной теории на его границе. Более точно, речь идет о соответствии суперструны типа IIB в пространстве $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N)$ в четырехмерном пространстве Минковского при следующем отождествлении параметров теории:

$$\frac{1}{(l_{\mathrm{str}})^4 \Lambda^2} = g^2_{\mathrm{YM}} N \,, \tag{31}$$

где l_{str} есть струнный масштаб длины, Λ — космологическая постоянная AdS_5 и g^2_{YM} — константа связи теории Янга–Миллса на границе.

Предел, первоначально рассмотренный Малдасеной [8],

$$g^2_{\mathrm{YM}} N \to \infty \,, \qquad \Lambda \to 0 \,, \tag{32}$$

связывает режим сильной связи в теории Янга–Миллса с низкоэнергетическим пределом суперструны в $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, описываемом классической теорией IIB супергравитации. В этом случае вычисления со стороны $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ относительно просты и могут быть использованы для анализа режима сильной связи в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Однако недавно Сандборг и Виттен [9] предложили рассмотреть противоположный предел

$$g^2_{\mathrm{YM}} N \to 0 \,, \qquad (l_{\mathrm{str}})^2 \Lambda \to \infty \,, \tag{33}$$

связывающий режим слабой связи в теории $\mathcal{N} = 4$ "супер-Янга–Миллса" с весьма нетривиальным пределом суперструны в $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в этом пределе теория $\mathcal{N} = 4$ "супер-Янга–Миллса" становится свободной и, следовательно, обладает бесконечномерной симметрией, которую следует отождествить с определенной (конформной) симметрией высших спинов (соответствующие заряды получаются путем построения сохраняющихся токов, аналогичных токам высших спинов (20) и (21), построенных из свободного скалярного поля). Значит, той же самой симметрией должна обладать и теория суперструны в $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ в пределе (33). В таком случае она должна быть некоторой калибровочной теорией высших спинов в

$AdS_5 \times S^5$. Поскольку о теории суперструн в $AdS_5 \times S^5$ известно немного, значение этого результата состоит в надежде на получение явного описания суперструны в ее максимально симметричной (на языке теории высших спинов) фазе, что делает проблему высших спинов еще более актуальной. Алгебра симметрии высших спинов, отвечающая пределу Сандборга – Виттена, была явно построена в [10].

8. Симметрии высших спинов

Основные свойства теории калибровочных полей высших спинов определяются алгеброй глобальной симметрии высших спинов, которая имеет структуру алгебры осцилляторов $\hat{y}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, M$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta] = 2C_{\alpha\beta}\,, \tag{34}$$

где $C_{\alpha\beta}$ — некоторая невырожденная матрица [2]. Рассмотрим всевозможные функции от осцилляторов:

$$\hat{P}(\hat{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\,n!}\, P^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\, \hat{y}_{\alpha_1}\ldots\hat{y}_{\alpha_n} \tag{35}$$

(удобно договориться, что коэффициенты $P^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ полностью симметричны относительно перестановок индексов). Ясно, что произведение двух операторных функций этого вида снова будет допускать такое представление. Простейшие (супер)алгебры высших спинов получаются как результат (анти)коммутирования элементов (35). Излишне говорить, что с этими алгебрами сталкивался всякий, кому приходилось проводить вычисления с гармоническим осциллятором в формализме вторичного квантования. Стоит отметить, что первоначально алгебры высших спинов были найдены в [11] без использования удобной осцилляторной реализации (34), (35), которая была позднее обнаружена в [12].

Индексы осцилляторов $\alpha, \beta, \ldots$ интерпретируются как спинорные. В частности, в случае четырехмерного пространства-времени спиноры четырехкомпонентны ($M = 4$). Динамика полей высших спинов описывается в терминах калибровочных полей алгебры высших спинов $\hat{\omega}_\nu(\hat{y}|x)$. Спин поля определяется степенью по операторным переменным

$$\hat{\omega}_\nu(\mu\hat{y}|x) = \mu^{2(s-1)}\hat{\omega}_\nu(\hat{y}|x)\,. \tag{36}$$

Гравитационное поле, обладающее спином 2, описывается полями $\hat{\omega}_\nu(\hat{y}|x)$, билинейными по спинорным переменным, которые отвечают формулировке эйнштейновской гравитации в формализме Картана. Калибровочные поля спина 1 описываются потенциалами $\hat{\omega}_\nu(0|x)$, не зависящими от вспомогательных операторных переменных. Чтобы включить в игру неабелевы группы Янга – Миллса, достаточно навесить на поля $\hat{\omega}_\nu(\hat{y}|x)$ матричные индексы. Как показано в [13], это позволяет построить калибровочные теории высших спинов с калибровочными группами Янга – Миллса в секторе спина 1 $U(n) \times U(m)$, $O(n) \times O(m)$ и $USp(n) \times USp(m)$ с различными n и m. Из формулы (36) немедленно следует также, что присутствие в теории какого-либо калибровочного поля спина $s > 2$ влечет за собой присутствие бесконечной башни полей с неограниченно растущими спинами. Действительно, коммутатор двух полиномов от осцилляторов степеней n_1 и n_2 дает полином степени $n_1 + n_2 - 2$. Иными словами, коммутатор симметрий спина 3 дает симметрию спина 4, коммутатор симметрий спина 4 дает симметрию спина 6 и т.д. Обычные симметрии, появляющиеся в моделях теорий поля со спинами $s \leqslant 2$ и находящиеся в согласии с S-матричными теоремами запрета, оказываются конечномерными подалгебрами симметрий высших спинов, порождаемыми не более чем билинейными комбинациями осцилляторов $\hat{y}_\alpha$ (или их пределами — по аналогии с тем, как группа Пуанкаре является предельным случаем группы АдС).

Отметим, что полные калибровочные теории высших спинов содержат также и поля с низшими спинами $s = 0$ и $1/2$, для описания которых используются другие производящие функции. Минимальная калибровочная теория высших спинов содержит поля всех четных спинов (каждое в единственном экземпляре).

Что касается теорий в различном числе пространственных измерений, то список полученных к настоящему времени результатов содержит полное описание нелинейной динамики высших спинов в четырехмерном пространстве АдС на уровне уравнений движения [14], а также частичные результаты на уровне действия, решающие проблему гравитационного взаимодействия высших спинов [7]. Наиболее интересный с точки зрения АдС/КТП-соответствия случай AdS_5 был недавно рассмотрен вне рамок свободной теории в [15], где были построены кубические вершины взаимодействия высших спинов с гравитацией. Следует также упомянуть интересные результаты по описанию свободных полей в AdS_7, полученные в [16] и указывающие на то, что общий подход, применявшийся в четырехмерном и пятимерном случаях, обещает успех и в случае AdS_7. Можно также отметить построение полных нелинейных инвариантных уравнений, обладающих симметриями высших спинов, в трехмерном пространстве АдС [17], хотя трехмерная теория высших спинов динамически менее интересна, поскольку калибровочные поля высших спинов в трех измерениях не несут своих степеней свободы. Подробности формализма, используемого для формулировки теории высших спинов, и более полный список литературы можно найти в [6].

9. Геометрия высших спинов

Исходная постановка проблемы высших спинов опирается на стандартную концепцию пространства-времени. Одно из наиболее замечательных следствий этой теории состоит в том [18], что геометрия, адекватная теориям высших спинов и, возможно, теории фундаментальных взаимодействий, может оказаться более интересной. Следует подчеркнуть, что речь идет не об отмене идей теории относительности, а о некотором более общем подходе, обещающем более высокую степень унификации различных физических явлений на уровне фундаментальной теории. Ближайшая аналогия состоит в переходе к геометрии пространства-времени Минковского как следствие инвариантности уравнений Мак-

[2] Канонический выбор матрицы $C_{\alpha\beta}$ отвечает явному разбиению осцилляторов $\hat{y}_\alpha$ на операторы рождения и уничтожения. В четырехмерной теории $C_{\alpha\beta}$ совпадает с матрицей зарядового сопряжения.

свелла относительно преобразований Лоренца. По отношению к преобразованиям Лоренца электрическое и магнитное поля образуют различные компоненты единого релятивистского тензора напряженности (1).

Ключевое наблюдение состоит в том, что бесконечные системы безмассовых полей, появляющиеся в четырехмерной теории высших спинов, преобразуются относительно расширения обычных релятивистских симметрий до группы $\mathrm{Sp}(8|R)$. Аналогично тому, как электрическое и магнитное поля преобразуются независимо под действием пространственных вращений, но перемешиваются лоренцевыми бустами, каждое из безмассовых полей преобразуется через себя под действием релятивистских преобразований (конформной группы $\mathrm{SU}(2,2)$), но различные безмассовые поля преобразуются друг через друга под действием остальных симметрий из $\mathrm{Sp}(8|R)$. Это наблюдение поднимает вопрос о природе геометрии, обеспечивающей геометрический характер действия этой более широкой симметрии, и о том, как описывается динамика безмассовых полей на языке этой геометрии. Ответ оказывается следующим [10]. Подходящее обобщенное пространство-время $\mathcal{M}_M$ описывается координатами $X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}$, которые являются симметричными биспинорами. В случае четырехмерного пространства-времени $M = 4$ обобщенное пространство-время оказывается десятимерным. Уравнения движения безмассовых полей приобретают замечательно простой вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^{\alpha\beta}\partial X^{\gamma\delta}} - \frac{\partial^2}{\partial X^{\alpha\gamma}\partial X^{\beta\delta}}\right) b(X) = 0 \tag{37}$$

для скалярного поля $b(X)$ и

$$\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}}\, f_\gamma(X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}}\, f_\beta(X) = 0 \tag{38}$$

для фермионного поля $f_\alpha(X)$. При этом все безмассовые поля целых спинов в четырехмерном пространстве Минковского описываются одним скалярным полем $b(X)$, а все безмассовые поля полуцелых спинов в четырехмерном пространстве Минковского описываются одним фермионным полем $f_\alpha(X)$ в обобщенном пространстве-времени $\mathcal{M}_4$.

Исходное пространство-время Минковского возникает как подпространство $\mathcal{M}_4$, в котором возможно описание на языке локальных событий. Именно аккуратный анализ понятия локальных событий в пространстве-времени $\mathcal{M}_4$ имеет решающее значение для установления связи с геометрией в пространстве-времени Минковского. Можно сказать, что динамика релятивистских систем в $\mathcal{M}_4$ такова, что пространство-время Минковского оказывается визуализацией $\mathcal{M}_4$ посредством сигналов, описывающихся уравнениями (37) и (38), которые удается сфокусировать (т.е. сформировать дельтаобразные начальные условия) не более чем в трех направлениях. С другой стороны, любая визуализация $\mathcal{M}_4$ разрушает явный характер некоторых из $\mathrm{Sp}(8)$ симметрий. Подробный анализ особенностей релятивистской динамики в $\mathcal{M}_4$ приведен в [18], где показано, что ее описание в $\mathcal{M}_4$ оказывается совместным с принципами классической и квантовой теории поля. Отметим, что этот подход позволяет, в частности, дать геометрическую интерпретацию преобразования электромагнитной дуальности как специфического $\mathrm{Sp}(8)$ преобразования.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-02-17067) и ИНТАС (грант 00-1-254).

Список литературы

1. Fronsdal C *Phys. Rev. D* **18** 3624 (1978); **20** 848 (1979); Fang J, Fronsdal C *Phys. Rev. D* **18** 3630 (1978); **22** 1361 (1980); de Wit B, Freedman D Z *Phys. Rev. D* **21** 358 (1980)
2. Васильев М А *ЯФ* **32** 855 (1980); Aragone C, Deser S *Nucl. Phys. B* **170** 329 (1980)
3. Coleman S, Mandula J *Phys. Rev.* **159** 1251 (1967); Haag R, Łopuszański J T, Sohnius M *Nucl. Phys. B* **88** 257 (1975)
4. Aragone C, Deser S *Phys. Lett. B* **86** 161 (1979)
5. Bengtsson A K H, Bengtsson I, Brink L *Nucl. Phys. B* **227** 31 (1983); **227** 41 (1983); Berends F A, Burgers G J H, van Dam H *Z. Phys. C* **24** 247 (1984); *Nucl. Phys. B* **260** 295 (1985); **271** 429 (1986)
6. Vasiliev M *Int. J. Mod. Phys. D* **5** 763 (1996); hep-th/9611024; in *The Many Faces of the Superworld*: *Yuri Golfand Memorial Volume* (Ed. M Shifman) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 533; hep-th/9910096
7. Fradkin E S, Vasiliev M A *Phys. Lett. B* **189** 89 (1987); *Nucl. Phys. B* **291** 141 (1987)
8. Maldacena J *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998); *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113 (1999); hep-th/9711200
9. Sundborg B *Nucl. Phys. B*: *Proc. Suppl.* **102 – 103** 113 (2001); hep-th/0103247; Witten E, in *JHS/60*: *Conf. in Honor of John Schwarz's 60th Birthday, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, Nov. 3 – 4, 2001*; http://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html
10. Vasiliev M A *Phys. Rev. D* **66** 066006 (2002); hep-th/0106149
11. Fradkin E S, Vasiliev M A *Ann. Phys.* (New York) **177** 63 (1987)
12. Vasiliev M A *Fortschr. Phys.* **36** 33 (1988)
13. Konstein S E, Vasiliev M A *Nucl. Phys. B* **331** 475 (1990)
14. Vasiliev M A *Phys. Lett. B* **243** 378 (1990); **285** 225 (1992)
15. Vasiliev M A *Nucl. Phys. B* **616** 106 (2001); Alkalaev K B, Vasiliev M A *Nucl. Phys. B* (to appear); hep-th/0206068
16. Sezgin E, Sundell P *Nucl. Phys. B* **644** 303 (2002); hep-th/0205131
17. Prokushkin S F, Vasiliev M A *Nucl. Phys. B* **545** 385 (1999)
18. Vasiliev M A, hep-th/0111119; in *Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry*: *Michael Marinov Memorial Volume* (Eds M Olshanetsky, A Vainshtein) (Singapore: World Scientific, 2002)