Декабрь 1999 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 169, № 12*

ИЗ АРХИВА ЖУРНАЛА УФН

Общий принцип относительности Эйнштейна

В.К. Фредерикс

PACS number: **04.20.–q**

Первой основной работой Эйнштейна о принципе относительности следует считать работу, появившуюся в 1914 году в протоколах заседаний Берлинской Академии Наук, под названием "Die formale Grundlagen der allgemeiner Relativitätstheorie" [1]. Эта работа, несколько исправленная и дополненная, была позднее, в 1916 г., напечатана в *Annalen d. Physik*; отдельные оттиски ее были затем выпущены в продажу, благодаря чему именно эта работа Эйнштейна и пользуется особенной известностью [2]. Lorentz, читавший в Лейдене в 1915–1916 годах лекции по теории относительности, назвал их: "Эйнштейновская теория тяготения" [3]; математик Hilbert назвал свои статьи, появившиеся в 1915–1916 годах, "Die Gründlagen der Physik" [4] (Основы физики), наконец, математик Weyl выпустил в 1918 году книгу, посвященную этим теориям, под названием "Raum, Zeit, Materie" [5]. Уже одни эти названия с достаточной ясностью показывают, что созданная Эйнштейном теория обнимает собой всю физику, а такого рода теория не может не иметь глубокого, захватывающего интереса; что это так, показывает и то обстоятельство, что с момента ее появления ею занялись такие выдающиеся физики и математики, как Lorentz, Hilbert, Weyl. Но теория эта для своего изложения, более или менее полного и обстоятельного, требует очень сложного математического аппарата, почти никому из физиков не доступного. Популярные изложения этой теории, как бы хорошо они не были написаны, не могут дать ничего, кроме неясных, неточных и туманных образов для того, кто желал бы иметь несколько больше, чем "взгляд и нечто" о теории Эйнштейна. Настоящая статья по своей краткости не может претендовать хоть на сколько-нибудь исчерпывающее объяснение теории Эйнштейна. Ее целью является выяснение главных основных положений Эйнштейна и приложение их к решению двух или трех сравнительно простых вопросов, как, например, наделавшие в последнее время много шума вопросы о движении перигелия Меркурия или об отклонении луча в поле тяготения Солнца. Само собой разумеется, на основные положения Эйнштейна не следует смотреть, как на теоремы, которые можно чисто дедуктивным путем вывести из других, уже не подлежавших сомнению основоположений. Разъяснение основ теории сводится к объяснению или, лучше, к перечислению причин, почему именно их следует считать за таковые. Доказательства правильности теории следует искать не *a priori*, а *a posteriori*. Но не экспериментальное подтверждение выводов и не предвидение новых до сих пор неизвестных явлений представляют собой самое важное в теории Эйнштейна. Основы теории Эйнштейна имеют громадное ***принципиальное*** значение; в этом их значении нужно искать главную ценность теории, а не в нескольких опытах, ее подтверждающих, как бы блестящи эти опыты ни были.

Геометрия и физика. До Эйнштейна на геометрию и физику смотрели, как на две науки, по существу совершенно различные. На геометрию в физике смотрели, как на что-то по отношению к физике внешнее; действительное содержание физики давалось опытом и только опытом. Евклидова геометрия трехмерного пространства была лишь рамкой, правда необходимой, — так как всякое физическое явление происходило в этом пространстве, — но во всяком случае ничем с этим явлением не связанной. Правда, в так называемом теперь "специальном" принципе относительности (1905 г.) Minkowski пользовался геометрией 4-мерного пространства, не имевшей всех признаков геометрии Евклида и связанной с физикой через посредство входившей в нее некоторой постоянной, равной скорости света. В этой геометрии элемент длины определялся через $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2$, где x, y, z означают собственно пространственные координаты, t означает время и c — скорость света. Эта геометрия неевклидова, так как в евклидовой геометрии было бы $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}c^2t^2$; кроме того она связана с физикой, так как в ней появляется постоянная c, скорость света; но на геометрию Минковского смотрели как на вещь чисто формального характера, так же как в физике смотрят на $\sqrt{-1}$, и более тесная связь между физикой и геометрией все же еще не существовала.

[1] Berlin. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1914. Т. XLI [Эйнштейн А. "Формальные основы общей теории относительности" *Собрание научных трудов* Т. 1 (Под ред. И.Е. Тамма, Я.А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова) (М.: Наука, 1965) с. 326].

[2] В 1920 году воспроизведена также в книжке, изданной Teubner'ом под названием: H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski: Das Relativitätsprinzip.

[3] Lorentz H.A. *On Einstein Theorie of Gravitation* (Amsterdam, 1916).

[4] Göttingen. Nachrichten der Königl. Gesellchaft der Wissenschaften. 1915, 1916.

[5] Вейль Г. *Пространство, время, материя* (Пер. с нем. В.П. Визгина с 5-го переработ. изд., 1923 г.) (М.: Янус, 1996).

Статья впервые опубликована в журнале
"Успехи физических наук" **2** 162 (1918).

Геометрия была для физики рамкой, чем-то внешним, посторонним по отношению к содержанию физики. Наоборот, для некоторых геометров физика казалась иногда наукой, опытные данные которой были необходимы для утверждения самых основ геометрии. Разбираться в основах геометрии, конечно, выходит за пределы настоящей статьи. В книжке Poincaré "La science et l'hypothese"[6] можно найти превосходнейший общедоступный анализ того, что собственно представляют собой основы геометрии, — как нужно смотреть на аксиомы геометрии Евклида, а также геометрия Лобачевского, Римана и всех других, бесконечных по своему числу неевклидовых геометрий. Мы ограничимся здесь только рассмотрением вопроса о связи между опытом и аксиомами или выведенными с их помощью теоремами геометрии. Выяснение этого пункта важно для понимания точки зрения Эйнштейна на геометрию.

До тех пор, пока существовала одна геометрия Евклида, не существовало никаких сомнений в "физической" истинности ее аксиом, хотя еще Гаусс считал необходимым произвести непосредственный опыт проверки положения о равенстве двум прямым суммы углов треугольника. С момента появления геометрии Лобачевского, Римана и других вопрос об опытной проверке геометрии приобрел особое значение. Геометрия Лобачевского, как известно, отрицает постулат Евклида, по которому через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой, и противопоставляет ему постулат прямо противоположный: таких параллельных прямых может быть сколько угодно. Так называемая сферическая геометрия Римана уклоняется от геометрии Евклида в другую сторону и совершенно отрицает возможность существования параллельных прямых. Как Лобачевский, так и Риман (в своей сферической геометрии) принимают все прочие аксиомы Евклида. Как очень хорошо и просто показано в вышеназванной книжке Poincaré, обе геометрии логически вполне возможны и не содержат в себе никаких внутренних противоречий. Для суммы углов треугольника ни Лобачевский, ни Риман уже не находят величины, равной двум прямым. У Лобачевского сумма углов меньше двух прямых, у Римана больше. Гаусс нашел в своем опыте, что в пределах ошибок наблюдений сумма углов треугольника равняется двум прямым. Так как измерения углов можно произвести с большой точностью, то опыт Гаусса, как на первый взгляд кажется, показывает, что действительное "физическое" пространство (так можно назвать пространство, в котором происходят все физические явления, в отличие от тех, которые мы можем себе представить или логически построить) есть обыкновенное евклидово, столь для нас привычное пространство. Но, во-первых, отклонения от евклидовой геометрии могут быть настолько малы, что они, несмотря на свое существование и на сравнительную точность наблюдений Гаусса, все же еще и именно этим опытом обнаружены быть не могут, а во-вторых, даже если бы опыт и дал с абсолютной точностью равенство суммы углов треугольника двум прямым, то и тогда нельзя было бы утверждать, что физическое пространство — евклидово, не оговорив одного принципиально чрезвычайно важного обстоятельства. В самом деле, предположим, что опыт тоже дает сумму меньшую двух прямых. Сделал ли бы физик из этого вывод, что геометрия Евклида неверна? Прежде всего он задал бы вопрос, как было произведено измерение углов. Ему ответили бы: отсчетом по деленному кругу и с помощью зрительной трубы. Применение зрительной трубы означает, что световым лучом пользуются как прямой, соединяющей две вершины треугольника, сумму углов которого измеряют, и отклонение от двух прямых для этой суммы физик, конечно, мог бы, если бы пожелал, объяснить не неверностью евклидовой геометрии, а просто "искривлением" светового луча (наоборот, будь она равна двум прямым, ученый, во что бы то ни стало желающий стоять на точке зрения геометрии Лобачевского, мог бы отклонение от соответствующей теоремы Лобачевского также объяснить "искривлением" луча). Но физик, говорящий об искривлении луча, подразумевает, что он это искривление может каким-нибудь образом обнаружить; для того, чтобы он мог это сделать, ему необходимо иметь какой-нибудь другой "физический" аппарат, который давал бы, ***по его мнению***, "настоящую" прямую линию; сравнив световой луч с этой прямой, он мог бы тогда показать, что луч действительно искривлен и что его новый аппарат дает сумму в два прямых угла. Но его торжество было бы очень поверхностным и кратковременным; ученый, стоящий на точке зрения Лобачевского, попросил бы его ***доказать***, что его новый аппарат представляет прямую, а этого наш физик, не придумав другого нового аппарата, уже никак не мог бы сделать. А так как придумывать такие аппараты до бесконечности нельзя, то ясно, что опыт может дать ответ на наш вопрос лишь постольку, поскольку мы нашему основному аппарату, скажем, световому лучу, приписываем свойства прямой линии. Но приписать именно световому лучу, а не чему-нибудь другому, свойства прямой линии зависит исключительно от нашего произвола. На выяснение этого обстоятельства мы обращаем внимание потому, что та геометрия, которой пользуется Эйнштейн, — неевклидова геометрия, и может показаться, что верность или неверность теории Эйнштейна служит доказательством неправильности или правильности геометрии Евклида. Между тем это не так; желающий считать геометрию Евклида чем-то исключительным может и впредь это делать, не смущаясь эйнштейновскими рассуждениями и теориями, *но тогда он должен отказаться считать прямыми те линии, которые дают нам наши основные измерительные приборы*: *световой луч, край линейки и тому подобное*. Мы увидим, что, если считать световой луч прямой, если принимать, что край линейки — прямая, то наблюдения, более точные, чем те, которые произвел Гаусс, дадут отклонения от геометрии Евклида.

Но, независимо от того, что дают или могут дать действительно произведенные наблюдения, важно ***с принципиальной точки зрения*** установить, что, раз прямая физически определяется, скажем, с помощью светового луча, ***то только опыт может указать нам, какого рода геометрия верна для физического пространства***. Но геометрий существует бесконечное множество; каким образом произвести экспериментальную их проверку, какие выводы и положения геометрий удобнее и лучше всего было бы проверить? Геометрий, в которых возможно перемещение неизменяемых фигур (перенос

[6] Пуанкаре А. *Наука и гипотеза* (Пер. А. Бачинского). Современное издание: Пуанкаре А., в сб. *О науке* (М.: Наука, 1983) с. 5.

фигуры с одного места пространства в другое, перемещение фигур или передвижение, существование твердого тела) очень немного; главные из них: геометрия Лобачевского, Римана, Евклида. Анализ основных положений этих геометрий можно найти у Helmholtz'a, Sophus'a Lie, B. Russel'a и др. Значительно больший класс геометрий охватывают собой так называемые геометрии Римана. Для каждой из своих геометрий Риман кладет в основу определение элементов длины.

Пусть мы имеем пространство n измерений, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n координат, определяющих положение точки в этом пространстве, и пусть $\mathrm{d}s$ — элемент длины дуги. Выражение

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k\,,$$

где a_{ik} представляют собой функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, является характерным для рассматриваемой геометрии. Для каждой данной геометрии функции a_{ik} имеют некоторый вполне определенный вид. Например, для геометрии Евклида, и в трехмерном пространстве

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2\,;$$

для геометрии Лобачевского

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}{1 - (a^2/4)(x^2 + y^2 + z^2)}\,,$$

где a — некоторая постоянная величина.

Полагая вообще $\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, \mathrm{d}x_k$, мы этим самым отбрасываем уже не только евклидову аксиому о параллельных, но и некоторые другие аксиомы; так, в самом общем случае не будут верны аксиомы, допускающие возможность переноса или наложения фигур (эти аксиомы у Евклида явно не формулированы; подробности по этим вопросам можно найти в книге Hilbert'a: "Die Gründlagen der Geometrie") [7].

Это основное для каждой геометрии соотношение, по Эйнштейну, и должно быть проверено на опыте. Конечно, здесь возможен только идеальный мысленный опыт; в действительности проверка происходит не на самом выражении для $\mathrm{d}s^2$, а на тех выводах, которые из него делают. Если опыт дает в трехмерном пространстве $a_{ik} = 0$ для $i \neq k$ и $a_{ik} = 1$ для $i = k$, то мы имеем геометрию Евклида; если a_{ik} оказываются функциями от x_i, то мы имеем геометрию, характер которой зависит от вида этих функций.

В "специальном" принципе относительности Эйнштейну приходится рассматривать время, как величину, с пространственными измерениями тесно связанную, от них неотделимую. Естественно, он кладет в основу своих новых, более общих теорий пространство не трех измерений, а пространство четырех измерений, в котором одна из координат будет временем. Каждое физическое явление определяется местом его нахождения (три протяженных координаты) и моментом, в который оно происходит (координата времени); из приращений этих четырех координат слагается выражение для элемента длины

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k\,, \qquad i,k = 1,2,3,4\,;$$

в этом выражении все четыре координаты играют совершенно одинаковую роль; на самом деле время (скажем x_4) не тождественно с пространственными координатами x_1, x_2, x_3. Hilbert'ом [8] были показаны те условия, которые должны удовлетворять a_{ik} для того, чтобы четвертая координата, время, не потеряла некоторые присущие ему особые признаки, которые оно должно сохранить во всякой теории.

Первое положение Эйнштейна. Итак, первым основным положением теории Эйнштейна будет следующее: элемент длины определяется формулой

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k\,, \qquad i,k = 1,2,3,4\,,$$

и опыт решает, чему равняются функции a_{ik}.

Геометрия и механика. Механика Ньютона приписывает прямолинейному и равномерному движению совершенно исключительное значение. Если мы вместо данной координатной системы возьмем другую координатную систему, двигающуюся по отношению к первой равномерно и прямолинейно, то это прямым физическим опытом обнаружено быть не может. Всякое другое движение может быть обнаружено опытом, так как при этом появляются новые, ранее не существовавшие силы. Рассмотрим весьма простой случай: движение по кругу. Этот случай дает возможность указать на два замечательных факта, один чрезвычайно важного принципиального характера, другой — характера экспериментального.

Возьмем физическое тело, имеющее форму шара, и предположим, что во всем пространстве оно одно только у нас и имеется. Можем ли мы решить вопрос о том, вращается этот шар или нет? ***Вне*** шара нет ни одного физического тела, ни одной физической точки, которая могла бы нам помочь в этом отношении. Мы должны обратиться к тому, что происходит на самой поверхности шара или внутри него. Предположим, что мы на поверхности обнаружили присутствие некоторой центробежной силы, заметили, что шар несколько сжат у полюсов, что плоскость колебания маятника Фуко вращается. Это заставит нас предположить, что шар наш вращается, мы даже вычислим скорость его вращения. Но затем возникает вопрос: ***по отношению к чему же он вращается***, ибо ведь внешних физических тел, по отношению к которым он мог бы вращаться, не существует. Очевидно, должно существовать какое-то пространство, которое ничем само по себе не отмечено, в котором нет ни одного физического тела и которое поэтому недоступно само по себе наблюдению, и вот по отношению к этому "абсолютному" нефизическому пространству вращение и происходит. Но все, что не имеет физической реальности и поэтому недоступно физическому наблюдению, относится уже, если угодно, к метафизике, но никак не к физике. В такое абсолютное пространство можно верить или не верить, но пользоваться им, как реально физически существующим объектом для объяснения физических явлений, нельзя. Но тогда приходится сказать, что ***ньютонова механика может дать ответы на вопросы, на которые по суще-***

[7] Hilbert D. "Die Gründlagen d. Physik Zweite Mitteilung" (Göttingen Nachrichten, 1916). Перевод на русский язык: "Основания геометрии" (М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948).

[8] См. также новый перевод на русский язык Ю.А. Данилова, Д.В. Жаркова: Д. Гильберт *Избранные труды* Т. 2 *Анализ, физика, проблемы, Personalia* (Под ред. А.Н. Паршина) (М.: Факториал, 1998).

ству "физически" ответить нельзя. Это — парадокс, на который впервые обратил свое внимание Mach; Einstein вывел этот парадокс из забвения, в котором он находился, и дал на него ответ: ньютонова механика, вообще говоря, неверна. Настоящая механика не дает для такого шара ни центробежной силы, ни перемещения плоскости качания маятника Фуко и т.п., — все эти силы и явления появятся только тогда, когда вращение будет совершаться по отношению к какому-нибудь другому "физическому" пространству, которое можно обнаружить на физических телах, находящихся в нем. Прямолинейное и равномерное движение никакой исключительной роли не играет, равным образом, как и движение по кругу или какое-нибудь другое движение; все координатные системы и все возможные перемещения их равноценны между собой. Если имеется один только шар и больше ничего, то мы можем утверждать, что он вертится или находится в покое, скачет или передвигается, как ему угодно. Никакие физические явления не обнаружат этого, потому что все эти скачки, вращения и тому подобное происходят не по отношению к "физическому" пространству, а только ***мыслимы*** по отношению к другим, не существующим реально пространствам. Показать, что такого рода механика возможна, и составляет величайшую заслугу Эйнштейна.

Другой замечательный факт, следующий из наблюдений над вращением, — это то обстоятельство, что центробежная сила всегда пропорциональна массе вращающегося тела. Сила тяготения по закону Ньютона также пропорциональна массе, но в выражении закона Ньютона масса имеет значение причины, вызывающей тяготение; между тем, как в выражении центробежной силы, вызываемой вращением, она играет совершенно пассивную роль; масса, активно создающая силу, и масса инертная или пассивная, — простой численный коэффициент, — оказываются при проверке опытом с огромной степенью точности равными между собой [9]. Этот факт не может быть случайного характера, а ньютонова механика не дает ему объяснения. Ньютон во втором своем законе просто выставляет, как постулат, требование, чтобы инертная масса, умноженная на ускорение, равнялась бы силе, — в частности силе, вызванной той же массой, той же по количеству, но уже действующей активно.

Тождество масс — активной, тяготеющей и пассивной, инертной — Эйнштейн возводит в принцип и называет его ***принципом эквивалентности***.

Представим себе одну координатную систему K, покоящуюся, и другую K', находящуюся в состоянии равномерно ускоренного и прямолинейного движения по отношению к первой. Материальная точка, двигающаяся по прямой в K, будет двигаться по параболе в K'. Если направление движения K' или ось параболы взять за x-ось, то в системе K'

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = g = \text{постоянной}.$$

Если m — масса точки, то каждое уравнение, написанное в виде $m\,\mathrm{d}^2x'/\mathrm{d}t^2 = mg$, можно рассматривать как выражение равенства между произведением инертной массы на ускорение и силой mg. Силу mg можно рассматривать на основании принципа эквивалентности, как силу тяготения, причем m имеет уже тогда значение не массы инертной, а массы активной, возбуждающей силу mg, так же как возбуждается сила mg активной массой m какого-нибудь тяжелого тела на поверхности Земли (mg означает в последнем случае mM/r^2, где m — масса тяжелого тела, M — масса Земли, r — радиус Земли; ясно, что m является здесь возбудителем силы).

Таким образом, ускоренное и прямолинейное движение системы может и не быть замечено наблюдателем в ней находящимся, если допустить, что такое ускоренное движение эквивалентно присутствию тяготеющего поля и что наблюдатель объясняет все совершающиеся кругом него явления именно этим тяготением. Центробежную силу, на основании принципа эквивалентности, также можем рассматривать как силу, по природе своей совпадающую с силой тяготения и ничем от нее по существу не отличную; наконец, то же можно сказать про все силы, возникающие кинематически, в координатной системе, связанной с двигающимся телом.

В природе существуют массы, создающие вокруг себя так называемое тяготеющее поле; если мы возьмем какую-нибудь координатную систему K^*, то характер тяготеющего поля будет зависеть от того, какую именно координатную систему мы выбрали; в другой координатной системе $K^{*\prime}$, двигающейся по отношению к первой, будет существовать другое тяготеющее поле. Двигаясь вместе с $K^{*\prime}$, мы можем приписать все, что происходит в $K^{*\prime}$, не движению $K^{*\prime}$ по отношению K^*, а тому тяготеющему полю, которое имеется в $K^{*\prime}$ и которое отличается от поля в K^*.

Но переход от одной координатной системы к другой, произвольно взятой, координатной системе, влечет за собой изменение вида тех функций a_{ik}, которые определяют собой свойства геометрии физического пространства; если в одной координатной системе имеем

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} a_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k\,, \qquad i,k = 1,2,3,4\,,$$

то в $K^{*\prime}$ получим

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} a'_{ik}\,\mathrm{d}x'_i\,\mathrm{d}x'_k$$

и, очевидно, что $a'_{ik} \neq a_{ik}$, так как зависимость между x_i и x'_i произвольна.

Приходится допустить, что переход от одной координатной системы к другой меняет не только тяготеющее поле, но и геометрию физического пространства, а это показывает, что между тяготеющим полем и a_{ik}, т.е. геометрией, должна быть связь.

На этом основании Эйнштейн называет величины a_{ik} потенциалами тяготения и обозначает их по аналогии с земным ускорением через g_{ik}, но это название ничего кроме только что указанной параллельности между геометрией и тяготением в себе не содержит.

Второе основное положение Эйнштейна. Таким образом, рассматривая парадокс Маха, Эйнштейн приходит к выводу *о допустимости* не только перехода от одной равномерно и прямолинейно движущейся системы координат к другой такой же системе координат, но ***всех***

[9] По последним данным (1921 г.) с точностью до $1/(3\times10^7)$. Данные 1999 г. см. Новости физики в сети Internet на с. 1324 данного номера.

координатных преобразований вообще (так как сюда включено и движение, то это означает, что новые координаты x'_i, $i = 1, 2, 3, 4$, могут быть произвольными функциями четырех координат x_i, $i = 1, 2, 3, 4$).

Третье основное положение Эйнштейна. Рассматривая же принцип эквивалентности, Эйнштейн приходит к выводу, что ***элемент дуги, определяющий свойства физического пространства***, т.е.

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4\,,$$

включает в себя 10 функций g_{ik}, от которых зависит не только форма геометрии, но и тяготеющее поле в данной координатной системе.

Четвертое основное положение Эйнштейна. Чтобы построить на этих основаниях механику и физику, нужно сделать еще одно существенное замечание. Если выбор координатной системы произволен, — то как описывать с ее помощью природу? Каким образом получить результаты, не зависящие от допущенного произвола? Ведь совершенно ясно, что законы природы от него не зависят. Ответ напрашивается сам собой: ***раз законы природы не зависят от нашего произвола, они должны быть независимы от избранной нами координатной системы. Выражаясь математически, законы природы должны быть инвариантны по отношению к любым координатным преобразованиям***. Гению Эйнштейна удалось найти и сформулировать законы механики и физики именно в такой инвариантной и не зависящей от избранной координатной системы форме. К изложению основных уравнений механики и физики мы сейчас и перейдем. Сказанное до сих пор объясняет лишь тот путь, по которому шел Эйнштейн, но не может служить еще доказательством правильности его положений, хотя с принципиальной стороны его утверждения имеют ***очевидное*** преимущество перед соответствующими утверждениями механики Ньютона.

Основные уравнения Эйнштейна. Мы не будем следовать в дальнейшем пути, по которому шел Эйнштейн, но последуем за Hilbert'ом, изложившим его теорию в более доступном и простом виде. Эйнштейн исходит в своих первоначальных работах из уравнения Poisson'a $\Delta\varphi = 4\pi\varrho$, где φ — обыкновенный потенциал тяготения, а ϱ — плотность материи. Обобщение этого уравнения путем введения вместо φ 10 потенциалов g_{ik} и вместо ϱ 10 других величин, определяющих состояние материи, дает Эйнштейну возможность получить желаемые уравнения и показать их правильность. Но процесс обобщения уравнения не настолько прост и не настолько однозначен, чтобы можно было легко произвести оценку всего значения получаемых таким способом результатов.

Допустим вместе с Hilbert'ом [10], что все события, совершающиеся в природе, зависят от некоторой "мировой" функции H; эта функция H зависит от четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4; первые три координаты чисто пространственные, четвертая x_4 в данной координатной системе означает время. Функция H не зависит от избранной нами координатной системы, поэтому, как можно показать, она не будет явно зависеть от x_1, x_2, x_3, x_4; она будет зависеть от них через посредство следующих величин.

1. 10 функций g_{ik} и их производных по x_i; мы могли бы допустить зависимость H от производных любого порядка: но по аналогии с уравнением Poisson'a мы принимаем, что H зависит только от g_{ik}, и их первых и вторых производных. Мы принимаем также, что эти g_{ik} равно как и их производные, повсюду однозначны и непрерывны.

2. Тех параметров, которые определяют собой состояние материи. Такими параметрами будут, например, плотность материи, плотность электричества, электрические потенциалы (вектор-потенциал и скалярный потенциал); если теория материи одними этими параметрами обойтись не может, то сюда нужно включить еще и другие необходимые параметры; если стать на точку зрения электромагнитной теории материи, то достаточно было бы включить в число этих параметров одну лишь электрическую плотность и потенциалы векторный и скалярный. Если, наконец, стать на точку зрения Mie, то достаточно для создания теории материи знание вектора-потенциала и скалярного потенциала, а так как первый имеет 3 слагаемых, то всего-навсего, значит, знание четырех параметров q_1, q_2, q_3, q_4, как функций от x_1, x_2, x_3, x_4. Hilbert на основании теории Mie принимает, что H зависит от q_1, q_2, q_3, q_4 и их первых производных по x_i. Но это допущение для очень многих вопросов, решенных теорией Эйнштейна, вовсе несущественно.

Итак, положим, что имеется "мировая функция":

$$H = H\left(g_{ik},\, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}\,,\, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l\, \partial x_m}\,,\, q_i\,,\, \frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right),$$

где $i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int H\sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\,, \tag{1}$$

в котором $dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ — элемент объема, g — детерминант, образованный из всех g_{ik} и H по определению — инвариант. Можно показать, что $\sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ также будет инвариантом, т.е. от координатной системы не зависит. Очевидно, что J — тоже инвариант, равно как и всякая вариация этого интеграла.

Все события совершаются в природе так, что вариация этого интеграла δJ равна нулю:

$$\delta J = 0\,. \tag{2}$$

Это — основной закон физики Эйнштейна. Он должен заменить собой все другие законы физики: закон всемирного тяготения, уравнения Максвелла, законы взаимодействия между массами и все тому подобное.

Для того, чтобы этот закон имел практическое значение, нужно знать, конечно, выражение функции H. Предположим, что оно нам известно. В выражение для H входят 10 неизвестных функций g_{ik} и четыре неизвестных функции q_i, но из условия $\delta J = 0$ вытекают 14 дифференциальных уравнений; первые 10 из них получаются

[10] Эйнштейн, Лоренц и другие пользуются также этим же способом изложения. Мы приводим Hilbert'а как первого, применившего этот метод.

вариацией функций g_{ik}; мы их обозначаем кратко через

$$G_{ik} = 0\,^{11}\,; \quad i,k = 1,2,3,4\,, \tag{3}$$

последние четыре уравнения получаются вариацией функций q_i; обозначим их через

$$Q_i = 0\,. \tag{4}$$

Система уравнений (3) и (4) позволяет нам определить g_{ik} и q_i в заданной координатной системе.

Уравнения (3) и (4), выведенные из инварианта $\delta J = 0$, сами будут инвариантами (более точный смысл этого утверждения за неимением места в настоящей статье мы не объясняем) и от координатной системы, избранной нами, не зависят. Произвольность избранной координатной системы выразится здесь в том, что эти 14 уравнений друг от друга не независимы, но связаны между собой четырьмя тождествами. Это означает, что 4 из 14 функций g_{ik} и q_i могут быть выбраны произвольно и из уравнений (3) и (4) не определятся. Произвольными значениями 4 из 14 функций и фиксируется выбранная координатная система.

На первый взгляд кажется, что для нахождения вида "мировой" функции H должны явиться непреодолимые затруднения. А между тем выбор этой функции H для очень большого класса явлений почти однозначен. В самом деле, рассмотрим случай, — мы предполагаем, что такой случай возможен, а результаты, даваемые теорией, показывают, что он действительно и наблюдается, — когда параметры q_1, q_2, q_3, q_4 — величины малые; вместо них введем тогда параметры εq_1, εq_2, εq_3, εq_4, причем ε будет некоторое малое число, а q_1, q_2, q_3, q_4 имеют уже конечные значения. Разложим затем H по возрастающим степеням ε, тогда

$$H = K' + \varepsilon L + \varepsilon^2 M + \ldots$$

Рассмотрим только первые члены этого разложения K' и εL. K' зависит только от g_{ik} и первых, и вторых производных этих функций по x_i, L зависит от g_{ik}, их производных, q_i и их производных. H является инвариантом; $K, L, M, \ldots$ тоже должны быть инвариантами. Оказывается, что ***инвариантов K', зависящих от g_{ik}, их первых и вторых производных и содержащих вторые производные только линейно, существует всего-навсего только один***; этот факт замечателен. Единственный инвариант этот будет так называемая римановская кривизна четырехмерного пространства. Обозначим ее через K. Очевидно, K' может равняться K или $K + \lambda$, где λ — некоторое постоянное, не зависящее от x_i число. Мы положим $\lambda = 0$; в более поздних работах Einstein и Weyl выяснили, какое огромное значение имеет эта постоянная λ; за неимением места в настоящей статье мы должны этот вопрос оставить и положим

$$K' = K\,.$$

Пусть $D_{\mu\nu}$ — минор детерминанта g, образованного из g_{ik}, соответствующий члену детерминанта $g_{\mu\nu}$; обозначим $D_{\mu\nu}/g$ через $g^{\mu\nu}$; введем еще следующие обозначения.

[11] Мы имеем 10 уравнений, а не 16 по той причине, что g_{ik}, равно как и G_{ik}, симметричны относительно индексов i и k.

Пусть

$$\begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(g_{imk} + g_{mki} - g_{ikm})$$

и пусть

$$\begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} = \sum_m g^{nm} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}; \quad i,k,m,n = 1,2,3,4\,.$$

Можно показать, что

$$K = -\frac{1}{2}\sum_{ik} g^{ik} K_{ik}\,,$$

причем

$$K_{ik} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} kl \\ l \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} + \\ + \sum_{lm}\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} mi \\ l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ml \\ l \end{Bmatrix}.$$

K_{ik} носит название римановского тензора кривизны: вывод этой формулы можно найти в дифференциальной геометрии Bianchi. Мы видим, что выражение для K в общем случае будет чрезвычайно сложным, но при решении некоторых специальных задач оно чрезвычайно упростится.

Выражение для L требует особого рассмотрения. Однако, если следовать теории Mie, и его найти нетрудно. Еще Шварцшильд показал, что уравнения Максвелла могут быть выведены из своего рода гамильтонова принципа. Мы обозначим слагаемые вектора-потенциала $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ через q_1, q_2, q_3, скалярный потенциал φ — через q_4; пусть вектор r_1, r_2, r_3 означает электрический ток переноса ϱv_1, ϱv_2, ϱv_3, причем ϱ — электрическая плотность, $\mathbf{v}$ — обыкновенная скорость; r_4 равняется ϱ; пусть, наконец,

$$M_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k}\,. \tag{a}$$

Рассмотрим интеграл

$$L' = \int \left(\sum_{ik} M_{ik}^2 - \sum_i r_i q_i \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4$$

и положим $\delta L' = 0$.

Вариация этого интеграла дает нам уравнения Максвелла

$$\sum_i \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_i} = -r_k\,, \tag{b}$$

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial M_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{li}}{\partial x_k} = 0\,. \tag{c}$$

(В обычных обозначениях, вместо (a) пишут

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = \frac{\partial q_4}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial x_4} = M_{14}\,;$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial x_3} = M_{32} \quad \text{и т.д.};$$

вместо (b) и (c) пишут:

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varrho\mathbf{v}\,,$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \varrho\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,.)$$

В пространстве, не содержащем электричества, второй член в L_1 отпадает, и мы получаем уравнение Максвелла для пустоты.

Mie в своей теории также рассматривает такую функцию L, но заменяет второй член $\sum_i r_i q_i$ через некоторую функцию f от q_i; таким образом, у него электрическая плотность оказывается функцией потенциала q_i. Но Mie написал свою теорию не для общего принципа относительности; он руководствовался в своих работах первым "специальным" принципом относительности, поэтому его L' не может быть непосредственно перенесено в выражение H для "мировой" функции Hilbert'a. Для того, чтобы воспользоваться функцией Mie в общем принципе относительности, его надо соответствующим образом обобщить, и в теории инвариантов легко доказывается, что таким обобщенным и, значит, инвариантным по отношению к любым преобразованиям выражением будет

$$L = \int\left[\sum_{iklm} M_{ik} M_{lm}\, g^{il} g^{km} - f\left(\sum_{ik} g^{ik} q_i\, q_k\right)\right] \times \times \sqrt{g}\; \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_4\,. \qquad (5)$$

Это выражение Hilbert и вставляет как второй член в выражение функции H. Это выражение не имеет размерности выражения K; для того, чтобы размерности были одинаковы, L нужно еще умножить на некоторый численный коэффициент ε. Оказывается, что это $\varepsilon = 8\pi k/c^2$, где k — постоянная тяготения, c — скорость света, т.е. $\varepsilon = 1{,}87 \times 10^{-27}$ — величина чрезвычайно малая, что как раз и соответствует нашему разложению мировой функции H в бесконечный ряд [12].

Весьма замечателен тот факт, что таких инвариантов L, получаемых с помощью q_i и их первых производных, имеется также весьма ограниченное количество. Mie насчитывает их всего четыре, но выбирает из них тот, который дает ему сразу уравнения Максвелла.

Если не стать на точку зрения электрической теории материи Mie, то выражению для L можно дать и другую форму. Для некоторых задач, например, задач астрономических, de Sitter, Einstein и другие так и поступают; но, как мы вскоре покажем, для решения наиболее простых и самых интересных астрономических задач форма функции L не будет играть никакой роли.

Итак, мы положим, что

$$H = K + \varepsilon L\,,$$

где K — кривизна 4-мерного пространства и L — выражение (5).

[12] Доказать, что $\varepsilon = 8\pi k/c^2$ можно с помощью некоторых очень простых примеров; за неимением места доказательство здесь мы опускаем.

Примеры. Теперь мы можем приступить к решению некоторых отдельных задач, которые и должны показать, что в состоянии дать теория Эйнштейна и каким образом она приводит к решению механических и физических задач.

1-й пример. Предположим, что пространство лишено материи, тогда $L = 0$ и у нас остается

$$J = \int K\sqrt{g}\; \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_4\,.$$

Из $\delta J = 0$ следует теперь 10 уравнений

$$G_{ik} = 0\,.$$

Если допустить, что по существу теории и следует сделать, что g_{ik} — непрерывные и однозначные функции, то решением этих дифференциальных уравнений будут

$$g_{ik} = 0\,, \quad \text{если} \quad i \neq k\,, \quad \text{и}$$

$$g_{ii} = 1\,, \quad \text{если} \quad i = 1, 2, 3\,, \quad \text{и}$$

$$g_{44} = -1$$

(значение для g_{44} -1, а не $+1$ вытекает из тех требований, которым должны удовлетворять g_{ik} для того, чтобы x_4 означало время). Мы получим таким образом

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 - \mathrm{d}x_4^2\,,$$

т.е. то самое выражение для $\mathrm{d}s^2$, которое мы имеем в "специальном" принципе относительности Эйнштейна. Скорость света сюда не входит, так как мы положили ее равной единице, что, очевидно, влияет только на выбор единицы для x_4, т.е. времени.

В отсутствие материи мы имеем, значит, обычное выражение для $\mathrm{d}s^2$*, т.е. евклидову геометрию в трехмерно протяженном пространстве* [13].

2-й пример. Предположим, что мы рассматриваем пространство, находящееся внутри некоторой очень малой сферы, описанной из некоторой точки x_1, x_2, x_3, x_4; если радиус ее достаточно мал, то внутри этой сферы величины g_{ik} можно рассматривать, как постоянные. В этом случае, как легко показать, выражение $\mathrm{d}s^2$ всегда можно привести к виду

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 - \mathrm{d}x_4^2\,,$$

достаточно для этого произвести некоторые координатные преобразования. Отсюда выводим, что в бесконечно малом всегда верен "маленький" принцип относительности. В этом случае "мировая" функция обратится в

$$H = \varepsilon \int L\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_4$$

и, варьируя ее, мы получим обыкновенные уравнения Максвелла, так как все g_{ik} или равны единице $(i = k)$ или нулю $(i \neq k)$: если скорость света положить не равной

[13] В позднейшем своем развитии теория Эйнштейна приходит к выводу, что в отсутствие материи все $g^{\mu\nu}$ равны нулю, т.е. без материи вообще никакого физического пространства не существует. С принципиальной точки зрения это, конечно, единственно правильный вывод.

единице, то

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - g_{44}\, dx_4^2\,;$$

очевидно $g_{44} = c^2$; это же самое g_{44}, как видно из выражений (5) для L, будет стоять и в уравнениях Максвелла; нам понятно теперь, почему в специальном принципе относительности величина "физическая" входит в геометрическое выражение для ds^2; нам понятно также и утверждение, что c — скорость света есть величина постоянная. Она будет постоянной постольку, поскольку мы имеем право считать g_{ik} независимым от координат x_i.

3-й пример. Рассмотрим так называемую задачу одного тела, т.е. то гравитационное поле, которое создается одной тяготеющей массой. Поместим эту массу в начале координатной системы и предположим, что она имеет вид шара. Гравитационное поле, ею создаваемое, должно тогда иметь симметрию шара, но, конечно, при том только предположении, что шар неподвижен и что все находится в стационарном состоянии, т.е. все g_{ik} от t не зависят. Введем условия шаровой симметрии в выражение для ds^2. По Шварцшильду самым общим выражением для ds^2, удовлетворяющим этому условию, если ввести полярные координаты

$$x_1 = r\cos\vartheta\,,$$

$$x_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi\,,$$

$$x_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

и положить

$$x_4 = t\,,$$

будет выражение [14]

$$ds^2 = F(r)\, dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + H(r)\, dt^2\,,$$

но вместо r мы можем взять

$$r' = \sqrt{G(r)}\,,$$

тогда

$$ds^2 = M(r)\, dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - W(r)\, dt^2$$

(значок $'$ над r мы опускаем).

Две произвольные функции от r, т.е. $M(r)$ и $W(r)$ должны быть определены из вариации интеграла J. Для нахождения этой вариации мы должны знать не только K, но и функцию L, но мы можем поступить здесь так же, как поступают в теории потенциала, решая уравнения Poisson'а $\Delta\Psi = 4\pi\varrho$; вместо того, чтобы искать непрерывные и однозначные функции Ψ, удовлетворяющие этому уравнению, рассматривается уравнение $\Delta\Psi = 0$, находятся его решения и допускается, что особые точки представляют собой место концентрации материи ϱ; точно также мы поступаем и здесь. Мы отбросим функцию L, но зато при решении оставшихся уравнений мы допустим решения с особенными точками и предположим, что масса сконцентрирована в этих точках.

Мы должны, значит, решить задачу

$$\delta\int K\sqrt{g}\; dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dt = 0\,.$$

Для этого мы должны вычислить кривизну K, исходя из тех значений для g_{ik}, которые стоят в выражении для ds^2. Вычисления эти довольно длинные и в конце концов приводят к такому выражению для $K\sqrt{g}$:

$$K\sqrt{g} = \left\{\left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}}\right) - 2\,\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{3/2}} - - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}}\right\}\sin\vartheta\,,$$

вместо функции M и W введем функции $m(r)$ и $w(r)$ так, чтобы

$$M = \frac{r}{r-m} \quad \text{и} \quad W = w^2\,\frac{r-m}{r}\,.$$

Это дает

$$K\sqrt{g} = \iint\left\{\left(\frac{rW'}{\sqrt{MW}}\right)' - 2m'w\right\}\sin\vartheta\,.$$

Значок $'$ означает здесь всюду дифференцирование по r. Производя все возможные интегрирования, у нас в конце концов остается

$$\delta\int K\sqrt{g}\; dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dt = -\delta\int 2m'w\, dr = 0\,,$$

а это дает два дифференциальных уравнения

$$m' = 0 \quad \text{и} \quad w' = 0\,,$$

т.е. m = постоянной и w = постоянной. Положим $m = \alpha$ и $w = 1$; последнее не будет ограничением нашей задачи, так как со значением w, очевидно, связан только выбор единицы времени.

Это дает нам для ds^2 такое выражение:

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}\; dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \frac{r-\alpha}{r}\; dt^2\,. \quad (6)$$

Мы видим, что решение нашей задачи приводит нас к функциям g_{ik}, имеющим особую поверхность — сферу радиусом α; на этой сфере находятся массы, вызывающие гравитационное поле с шаровой симметрией. Если положить $\alpha = 0$, т.е. принять, что особенной поверхности не существует, то функции g_{ik} становятся непрерывными и однозначными, не имеющими особых точек функциями, но в то же время они принимают то самое значение, которое имеют в евклидовой геометрии и которое, как мы видим, соответствует отсутствию материи.

Итак, гравитационное поле найдено, и нам нужно теперь рассмотреть законы движения материальных частиц, находящихся в таком поле и не возмущающих его. Для того, чтобы найти эти законы, мы допустим, что движение их происходит так же, как оно происходит у Ньютона, когда на них не действует никакая сила, т.е. мы предположим, что ***они движутся по линиям кратчайшего расстояния или геодезическим линиям***: это

[14] См. также Hilbert: *loc. cit.*

означает, что

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0\,,$$

и нам нужно решить новую вариационную проблему.

Рассмотрим r, φ, ϑ, t как функции какого-нибудь параметра p; нашей задачей будет решить систему дифференциальных уравнений, получаемую из условия

$$\delta \int \left\{ \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right)^2\right] - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}\right)^2 \right\}^{1/2} \mathrm{d}p = 0\,.$$

Легко показать, что геодезические кривые, таким образом полученные, будут плоскими. Но тогда можно ограничиться теми кривыми кратчайшего расстояния, которые лежат в плоскости экватора, и положить $\vartheta = \pi/2$. Предыдущее выражение перепишется тогда в виде

$$\delta \int \sqrt{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}\right)^2}\,\mathrm{d}p = 0\,.$$

Отсюда следуют три дифференциальных уравнения второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 - 2r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right) + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}\right)^2 = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\, r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\frac{r-\alpha}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = 0\,. \tag{7}$$

Три первых интеграла их будут:

$$\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}\right)^2 = A\,,$$

$$r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = B\,, \qquad \frac{r-\alpha}{r}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = C\,, \tag{7$'$}$$

где A, B, C — постоянные интегрирования. Значение постоянной C определяет собой лишь выбор единиц параметра, поэтому положим $C = 1$.

Если исключим из этих уравнений p и t, то получим уравнение для траектории движения; получив его, произведем еще подстановку $1/r = \rho$ и тогда, в конце концов, получим:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2}\,\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3\,. \tag{8}$$

Это выражение очень похоже на уравнение Кеплера для движения планет. Последнее выводится и пишется таким образом.

Закон сохранения энергии дает

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] - k\,\frac{Mm}{r} = a\,,$$

где a — энергия, m — масса планеты, которую в дальнейшем положим равной 1, M — масса Солнца, k — постоянная тяготения.

Закон сохранения площадей дает

$$r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = b\,,$$

исключая t и вводя $\rho = 1/r$, получим

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{a}{b^2} - \frac{kM}{b^2}\,\rho - \rho^2\,.$$

В выражение (8) вместо постоянных A и B введем новые постоянные a и b так, чтобы

$$\frac{A\alpha}{B^2} = \frac{kM}{b^2}\,, \qquad 1 + A = \frac{\alpha A}{kM}\,,$$

тогда оно перейдет в выражение

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{a}{b^2} + \frac{kM}{b^2}\,\rho - \rho^2 - \alpha\rho^3\,.$$

Очевидно, что последнее выражение в пределе при $\lim \alpha = 0$ переходит в кеплерово уравнение для движения планет. Если α очень мало, то последний член уравнения только тогда можно откинуть, когда ρ не может стать очень большим, т.е. в том случае, когда планета не проходит слишком близко около Солнца.

Найдем физическое значение величины α. Для этого рассмотрим движение по кругу. Можно показать, что $r =$ постоянной будет интегралом дифференциальных уравнений (7) и что, следовательно, движение по кругу возможно, но тогда уравнение (7) дает

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\alpha}{2r}$$

выражение, в котором единица времени выбрана так, что $c = 1$; если $c \neq 1$, то

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\alpha}{2r}\,c^2\,.$$

Но из уравнения Кеплера следует, что для кругового движения

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k\,\frac{M}{r^2}\,.$$

Сравнивая последние две формулы, получим

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{kM}{c^2}\,(= 1{,}5 \times 10^5 \text{ см для Солнца})\,.$$

Значит, постоянная α играет у нас роль массы Солнца и выражается в сантиметрах. Для Солнца она равна 1,5 км.

Для всех планет величина α, действительно, очень мала по сравнению с радиусом-вектором их орбит, и уравнение Кеплера должно быть верно в очень и очень большой степени точности. Тем не менее добавочный член $\alpha\rho^3$, не входящий в классическое уравнение, может в некоторых особых случаях оказать свое влияние. Так как величина α для всех известных нам планет действительно мала по сравнению с радиусами-векторами их орбит, то для того, чтобы учесть влияние α, мы можем при решении дифференциальных уравнений (8) воспользоваться разложением по степеням α, пусть e_1, e_2, e_3 —

корни выражения

$$f(\rho)=\frac{\alpha}{b^2}+\frac{kM}{b^2}\,\rho-\rho^2+\alpha\rho^3=0\,.$$

Очевидно,

$$e_1+e_2+e_3=+\frac{1}{\alpha}$$

и

$$f(\rho)=(\rho-e_1)(t_2-\rho)\big[1-\alpha(\rho+e_1+e_2)\big]\,.$$

Уравнение движения будет

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(\rho-e_1)(e_2-\rho)\big[1-\alpha(\rho+e_1+e_2)\big]}}\,. \qquad (9)$$

Движение происходит, очевидно, между $\rho=e_1$ и $\rho=e_2$. Разлагая в ряд по степеням α, получим [15]

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(\rho-e_1)(e_2-\rho)}}\left[1+\frac{\alpha}{2}(e_1+e_2)+\frac{\alpha}{2}\,\rho\right],$$

и интегрируя

$$\varphi-\varphi_0=-\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\rho-e_1)(e_2-\rho)}+ \\ +\left[1+\frac{3}{4}\,\alpha(e_1+e_2)\right]\arcsin\frac{(e_1+e_2)/2-\rho}{(e_1-e_2)/2}\,.$$

Эта формула позволяет вычислить угол Φ между радиусами-векторами точек наибольшего и наименьшего удаления от Солнца, т.е. между $\rho=e_1$ и $\rho=e_2$. Очевидно,

$$\Phi=\pi\left[1+\frac{3}{4}\,\alpha(e_1+e_2)\right].$$

Когда планета вернется к месту наибольшего удаления (перигелию), то, значит, она повернется на угол

$$2\Phi=2\pi\left[1+\frac{3}{4}\,\alpha(e_1+e_2)\right].$$

Для кеплерова движения мы имеем соответствующий угол $2\Phi k=2\pi$; мы видим, таким образом, что по теории Эйнштейна перигелий орбиты при одном обороте планеты около Солнца перемещается на угол

$$\omega=\frac{3}{2}\,\alpha(e_1+e_2)\pi\,.$$

Пусть T — период обращения планеты, a — большая полуось орбиты, ε — эксцентриситет орбиты. Имеем

$$\alpha=\frac{kM}{c^2}=\frac{(2\pi)^2a^2}{T^2c^2}\,,$$

$$e_1+e_2=\frac{2}{a(1-\varepsilon^2)}\,.$$

Подставляя, найдем:

$$\omega=24\pi^3\,\frac{a^2}{T^2c^2(1-\varepsilon^2)}\,;$$

[15] Выражение, содержащее α^2, отбрасываем.

эта величина очень малая; для планеты Меркурий и за сто лет, т.е. для величины $\Omega=(100/T')\omega$, где T' — период обращения Меркурия, выраженный в земных годах, получим

$$\Omega=43''\,.$$

Величина, которая превосходно согласуется с опытом и которую ни одна другая теория, не вводя новых гипотез, специально для этого построенных, объяснить не может [16]!

Для других планет величина Ω значительно меньше, и проверка опытом не может иметь такого решающего значения, как для Меркурия.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки, падающей прямо на Солнце; можно показать, что геодезические линии, соответствующие такому движению, возможны. Тогда $\varphi=$ постоянной, и зависимость r от t определяется из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}\,.$$

В этом выражении обычная скорость света принята за единицу; мы видим, что если

$$\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|<\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{r-\alpha}{r}=\frac{c_r}{\sqrt{3}}\,,$$

то ускорение будет положительное; если же

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>\frac{c_r}{\sqrt{3}}\,,$$

то ускорение будет отрицательное; величина c_r, как мы далее увидим, имеет значение скорости света в точке r.

Массу движущейся планеты мы приняли в наших расчетах равной единице. Поэтому, с точки зрения обычной механики, мы можем считать выражение для $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ за выражение силы, действующей на единицу массы. Мы видим, что теория Эйнштейна обходится без понятия о силе, но может возникнуть вопрос, не может ли соответствующее изменение закона Ньютона дать те же результаты, что и теория Эйнштейна. Ответ на это отрицательный. В самом деле, для прямолинейного движения, выражение для ньютоновой силы должно иметь вид

$$F_{\mathrm{d}}=-\frac{\alpha}{2r^2}+\frac{\alpha^2}{2r^3}+\frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2;$$

это выражение в пределе, для очень маленьких α, переходит в классическое выражение

$$F=-\frac{kM}{r^2}\,.$$

Но мы видели, что для движения по кругу по теории Эйнштейна сила должна была бы быть равной

$$F_c=-\frac{\alpha}{2r^2}\,.$$

[16] Действительно наблюдаемое движение перигелия Меркурия несколько больше, но разница между наблюденным и этим углом в 43″ объясняется возмущающим влиянием других планет; именно этот остаток в 43″ не поддается удовлетворительному объяснению в классической теории.

Очевидно, что F_c и F_d не могут быть частными случаями одного и того же общего закона. Если в выражении для F_d отбросить члены, содержащие радиальную скорость, т.е. $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ и равные нулю при движении по кругу, то все оставшееся выражение будет F_c. Выражение для силы по теории Эйнштейна (если настаивать на введении термина "сила" и придавать ему значение величины, равной массе, умноженной на ускорение) будет зависеть от траектории материальной точки, т.е. не имеет значения универсального закона в том смысле, в каком его имеет закон всемирного тяготения Ньютона. В пределе, т.е. для очень малых α, F_c и F_d, конечно, совпадают и дают F.

4-й пример. Обратимся теперь к рассмотрению движения света. Свет, как материальная точка, движется по геодезическим линиям, но в отличие от нее и совершенно так же, как и в специальном принципе относительности, длина этих геодезических линий равна нулю, и мы имеем для них

$$\mathrm{d}s^2 = 0\,.$$

Соответственно с этим в интегралах уравнений (7) мы должны положить $A = 0$, и траекториями световых лучей будут кривые, определенные интегрированием выражения

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \rho^2 - \alpha\rho^3$$

в пределе для $\lim a = 0$ выражение интегрируется чрезвычайно просто; мы получаем

$$B\rho = \sin(\varphi - \varphi_0)\,,$$

где φ_0 — постоянная интегрирования, т.е. попросту прямую

$$r = \frac{B}{\sin(\varphi - \varphi_0)}\,.$$

Величина B имеет здесь значение кратчайшего расстояния луча от Солнца.

Рассмотрим не предельный случай $\alpha = 0$, но положим только, что α достаточно мало по сравнению с наиболее близкой к Солнцу точкой траектории. Пусть e_1, e_2, e_3 — корни уравнения

$$\frac{1}{B^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3 = 0$$

и пусть e_1 и e_2 переходят в пределе при $\lim \alpha = 0$ в корни предельного уравнения

$$\frac{1}{B^2} - \rho^2 = 0\,,$$

т.е. пусть

$$\lim e_1 = \frac{1}{B} \quad \text{и} \quad \lim e_2 = -\frac{1}{B}\,.$$

Выражение

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1/B^2 - \rho^2 + \alpha\rho^3}} = \mathrm{d}\varphi \tag{10}$$

интегрируется приближенно совершенно так же, как и выражение (9) на с. 1349. Очевидно, мы получим

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)} + \\ + \left[1 + \frac{3}{4}\,\alpha(e_1 + e_2)\right] \arcsin \frac{(e_1 + e_2)/2 - \rho}{(e_1 - e_2)/2}\,, \tag{9$'$}$$

приближенные значения для e_1 и e_2 легко вычислить; мы получим

$$e_1 = \frac{1}{B} - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{B^2}\,; \qquad e_2 = -\frac{1}{B} - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{B^2}\,.$$

Если написать выражение (9$'$) в виде

$$r = \frac{2}{e_1 + e_2} \times \\ \times \left\{1 - \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \sin\left[\varphi - \varphi_0 + \frac{\alpha}{2}\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)}\right]\right\}^{-1},$$

то сразу видно, что имеем дело с кривой, очень похожей на гиперболу, эксцентриситет которой

$$\varepsilon = \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} = \frac{2B}{\alpha}\,;$$

B приближенно означает ближайшее расстояние траектории от Солнца, т.е. по предположению очень велико по сравнению с α; гипербола эта, таким образом, имеет очень большой эксцентриситет и мало отличается от прямой.

Для асимптот этой гиперболы $r = \infty$ и $\rho = 0$; значит, φ определяется из условия:

$$1 - \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \sin\left(\varphi - \varphi_0 + \frac{\alpha}{2}\sqrt{-e_1 e_2}\right) = 0\,.$$

Подставим сюда значение e_1 и e_2 и возьмем произвольную постоянную $\varphi_0 = (\alpha/2)\sqrt{-e_1 e_2}$; угол φ, измеряемый от этого произвольного направления, будет определяться из условия

$$\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi) = \frac{e_2 + e_1}{e_2 - e_1} = \frac{\alpha}{2B}\,.$$

Углы, образуемые асимптотами с направлением φ_0, будут, значит, очень малы и равны

$$\varphi = \pm\frac{\alpha}{2B}\,,$$

угол между ними будет

$$\Psi = \frac{\alpha}{B}\,.$$

Если луч света идет по такой гиперболе, то Солнце будет находиться в ее фокусе. Для достаточно удаленных от Солнца частей движение по гиперболе можно отождествить с движением по асимптоте. Таким образом, мы приходим к выводу, что ***луч света, проходящий около Солнца, отклоняется им на угол***:

$$\Psi = \frac{\alpha}{B} = \frac{kM}{c^2 B}\,,$$

где B — кратчайшее расстояние луча от Солнца. Эйнштейн вычислил этот угол для луча, касающегося солнечной поверхности, и нашел $\Psi = 1{,}7''$; опыты, произведенные в 1919 году английской экспедицией в Бразилии, блестяще подтвердили этот результат, предсказанный Эйнштейном заранее.

Исследование уравнения (10), дающего движение света, представляет собой много любопытного; за неимением места мы не можем поместить здесь этого исследования; укажем только на некоторые интересные случаи. Если луч света подходит достаточно близко к поверхности $r = 3\alpha/2$, то он вокруг этой поверхности закручивается и уже отойти от нее не может. Через поверхность $r = \alpha$ ни один луч проникнуть не может. Если луч идет по прямой по направлению к центру Солнца, то его скорость определяется из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c_r = 1 - \frac{\alpha}{r}\,^{17},$$

ускорение его все время отрицательное и к поверхности $r = \alpha$ он подходит через бесконечно большое время со скоростью $c_r = 0$.

Планеты, вращающиеся вокруг Солнца по кругам, имеют тем большую скорость, чем ближе они к солнцу; планета, вращающаяся по кругу радиусом $r = 3\alpha/2$, имеет скорость света, но эта скорость света равна не c, а $c/\sqrt{3}$; внутри круга $r = 3\alpha/2$ движение по кругу невозможно.

Мы видим, что для Солнца $\alpha = 1{,}5 \times 10^5$ см, по сравнению с радиусом Солнца эта величина очень малая и поэтому практического значения особенные свойства поверхности $r = \alpha$ и $r = 3\alpha/2$ не имеют. Для молекулы водорода приблизительно $\alpha = 10^{-49}$.

5-й пример. Специальный принцип относительности учил нас, что время, измеряемое наблюдателем движущимся, и наблюдателем, находящимся в покое, не совпадает друг с другом. Пусть x_1, y_1, z_1 — три функции от времени t, дающие нам движение какой-нибудь точки. Элемент времени, измеренный наблюдателем, находящимся в покое, будет $\mathrm{d}t$, тогда как элемент времени $\mathrm{d}\tau$, измеренный наблюдателем, двигающимся вместе с точкой, определяется из выражения

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2,$$

τ — это так называемое "собственное" время точки. В общем принципе относительности мы тоже должны отличать приращение четвертой координаты $\mathrm{d}t$ от "собственного" времени $\mathrm{d}\tau$ какой-нибудь точки. Разница между "общим" и "специальным" принципом относительности лишь в том, что в специальном для покоящейся точки $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$, т.е. "собственное" время совпадает с приращением четвертой координаты — времени, а в общем принципе относительности этого уже не будет. Возьмем, например, гравитационное поле, рассмотренное в 3-м примере. Если точка покоится, то $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ равны нулю (или в полярных координатах $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\vartheta$ равны нулю) и "собственное" время определяется для каждой покоящейся точки через

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\mathrm{d}t^2,$$

т.е., другими словами, приращение четвертой координаты–времени не равно приращению "собственного" времени, но зависит от r и α, т.е. от расстояния от Солнца и от массы.

Рассмотрим какой-нибудь периодический молекулярный процесс, скажем, процесс излучения. Естественно предположить, что для молекулы или для колеблющейся в молекуле частицы, периодом излучения, характерным для данной молекулы и вытекающим из ее внутренних свойств, будет период, определяемый из его "собственного" времени и не зависящий от произвольно наложенной координатной системы x, y, z, t и, значит, от произвольно наложенной координаты — времени t; таким образом, для самой молекулы период всюду будет одинаков; предположим, что этот период настолько мал, что его можно обозначить через $\mathrm{d}\tau$, и предположим, что скорость колебаний настолько мала, что в выражении для $\mathrm{d}\tau$ мы можем положить $\mathrm{d}r = \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\vartheta = 0$. Но наши наблюдения мы производим в избранной нами координатной системе; тот период, который мы измеряем, будет не $\mathrm{d}\tau$, а $\mathrm{d}t$; напишем теперь условие, что $\mathrm{d}\tau$ всюду одинаково, взяв один раз $\mathrm{d}\tau$ на поверхности Солнца, т.е. положим $r = d$ (радиус Солнца), а другой раз $r = D$ (полупоперечнику земной орбиты). Очевидно

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{d}\right)\mathrm{d}t_d^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{D}\right)\mathrm{d}t_D^2,$$

где $\mathrm{d}t_d$ и $\mathrm{d}t_D$ — периоды, измеряемые соответственно на Солнце и на Земле. Но α/D — величина очень малая по сравнению с α/d: ею можно пренебречь. С другой стороны, если $\mathrm{d}t_d$ и $\mathrm{d}t_D$ — периоды, то обратные им величины будут частоты ν_d и ν_D, и наше условие можно написать в виде

$$\nu_d = \nu_D\left(1 - \frac{\alpha}{d}\right)\frac{1}{2} = \nu_D\left(1 - \frac{\alpha}{2d}\right).$$

Обозначим ν_D просто через ν и $\nu_d - \nu_D$ через $\mathrm{d}\nu$; очевидно

$$\mathrm{d}\nu = -\frac{\alpha}{2d}\,\nu \quad \text{или, если} \quad \nu = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathrm{d}\lambda = +\frac{\alpha}{2d}\,\lambda.$$

Свет, испускаемый каким-нибудь светящимся газом, как раз имеет характер рассмотренного периодического движения. Мы видим, что ***гравитационный потенциал Солнца $\alpha/2\mathbf{d}$ должен вызвать смещение линий, излучаемых газом, в красную сторону*** ($\mathrm{d}\lambda > 0$). Эйнштейн вычислил это смещение, и опыты, по-видимому, подтвердили и этот результат, предсказанный теорией.

[17] В выражение $(7')$ надо подставить $A = 0$.