

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения

Н.М. Астафьева

Представлены основы теории вейвлет-преобразования — аппарата, хорошо приспособленного для изучения структуры неоднородных процессов. В отличие от преобразования Фурье, анализирующая функция которого покрывает всю временную ось, двухпараметрическая анализирующая функция одномерного вейвлет-преобразования хорошо локализована и во времени, и по частоте. Возможности преобразования показаны на примерах анализа модельных рядов с хорошо известными свойствами (гармонических, с различными особенностями, фрактальных) и данных длительных наблюдений за изменением некоторых метеорологических характеристик (индекс Южного Колебания, глобальные и полушарные температуры). Анализ ряда событий Эль-Ниньо и изменений индекса Южного Колебания выявил периодические компоненты процесса, ряд локальных периодичностей и временные масштабы, на которых данные имеют автомодельную структуру. Похоже, в целом анализируемый процесс демонстрирует комбинированное поведение: есть стохастическая и ряд регулярных компонент. Временные структуры глобальной и полушарных температур качественно схожи. Основное различие состоит в том, что потепление (тренд) слегка значительнее и начинается раньше в Северном полушарии (возможная причина этого — большее количество суши); излом тренда в начале текущего столетия, связываемый обычно с техногенным фактором, не обнаружен.

PACS numbers: 02.30.-f, 02.90.+p, 92.60.-e, 92.60.Ry

Содержание

1. Введение (1145).
 2. От преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию (1146).
2.1. Ряды Фурье. 2.2. Разложение по вейвлетам. 2.3. Обратное вейвлет-преобразование. 2.4. Частотно-временная локализация.
 3. Базисные функции вейвлет-преобразования (1150).
3.1. Определение вейвлета. 3.2. Признаки вейвлета. 3.3. Примеры вейвлетобразующих функций.
 4. Свойства и возможности вейвлет-преобразования (1153).
4.1. Способы представления результатов. 4.2. Свойства вейвлет-преобразования. 4.3. Некоторые возможности вейвлет-анализа.
 5. Применение вейвлет-преобразования к модельным сигналам (1157).
5.1. Гармоническая функция. 5.2. Сигнал с особенностью. 5.3. Фрактальное множество.
 6. Анализ временных метеорологических рядов (1162).
6.1. Процесс Южное Колебание — Эль-Ниньо (ЮКЭН). 6.2. 500 лет из жизни Эль-Ниньо. 6.3. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания. 6.4. Суточные значения индекса Южного Колебания. 6.5. Глобальные температуры и ЮКЭН.
 7. Заключение (1169).
- Список литературы (1170).

1. Введение

Термин "вейвлет" (дословный перевод — маленькая волна) появился сравнительно недавно — его ввели Гроссман и Морле (Grossman & Morlet) в середине 80-х годов в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов [1]. В настоящее время семейство анализаторов, названных вейвлетами¹, начинает широко применяться в задачах распознавания образов; при обработке и синтезе различных сигналов, например, речевых; при анализе изображений самой различной природы (это могут быть изображение радужной оболочки глаза, рентгенограмма почки, спутниковые изображения облаков или поверхности планеты, снимок минерала и т.п.); для изучения свойств турбулентных полей; для свертки (упаковки) больших объемов информации и во многих других случаях.

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную

Н.М. Астафьева. Институт космических исследований РАН,
117810 Москва, Профсоюзная ул. 84/32
Тел. (095) 333-21-45
E-mail: ast@nat.iki.rssi.ru, ast@iki.rssi.ru

Статья поступила 23 мая 1996 г., после доработки 18 июля 1996 г.

¹ В русскоязычной литературе мало статей, в которых упоминаются вейвлеты, и пока не появилась устойчивая терминология. Введенные автором в [17] термины "локализованный спектральный анализ" или "спектральный анализ локальных возмущений" подходят по смыслу, но будучи слишком громоздкими, пока не были использованы другими авторами. (Примеч. автора)

(временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени).

Таким образом, в отличие от традиционно применяемого для анализа сигналов преобразования Фурье вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала, при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время, координата) и в частотном пространствах. Сказанное легко обобщается на неоднородные сигналы или функции.

В зарубежной литературе уже принято спектр Фурье называть *single spectrum* в отличие от спектра, полученного на основе коэффициентов вейвлет-преобразования, — *time-scale spectrum*, или *wavelet spectrum*.

Область использования вейвлетов не ограничивается анализом свойств сигналов и полей различной природы, полученных численно, в эксперименте или при наблюдениях. Вейвлеты начинают применяться и для прямого численного моделирования — как иерархический базис, хорошо приспособленный для описания динамики сложных нелинейных процессов, характеризующихся взаимодействием возмущений в широких диапазонах пространственных и временных частот.

Результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что при больших значениях числа Рейнольдса значительная часть объема турбулентной жидкости остается пассивной относительно диссипации энергии и, следовательно, относительно обратного ее каскада. Вейвлет-анализ оказывается очень удобным для анализа процессов с перемежаемостью. Он позволяет выявить пространственно распределенные свойства изучаемого объекта, определить наличие перемежаемости и распределение областей диссипации, получить локальную высокочастотную и глобальную крупномасштабную информацию об объекте и многое другое достаточно точно и без избыточности.

Известны трудности, встречающиеся при обработке коротких высокочастотных сигналов или сигналов с локализованными частотами. Вейвлет-преобразование оказывается очень удобным инструментом для адекватной расшифровки таких данных, поскольку элементы его базиса хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном.

Далеко не случайно многие исследователи называют вейвлет-анализ "математическим микроскопом" — название прекрасно отражает замечательное свойство метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Способность этого "микроскопа" обнаружить внутреннюю структуру существенно неоднородного объекта и изучить его локальные скейлинговые свойства продемонстрирована на многих примерах, в частности, на таких классических, как фрактальные функции Вейерштрасса и вероятностные меры канторовских рядов. Применение вейвлет-анализа к турбулентному полю скорости в ветровом туннеле при больших числах Рейнольдса впервые дало наглядное подтверждение наличия каскада Ричардсона. Показано сходство энергетического каскадного процесса со структурой мультифрактальных неоднородных канторовских рядов. Еще более эффективным оказалось применение вейвлет-анализа к мультифрактальным инвариантным мерам некоторых хорошо известных динамических

систем, моделирующих наблюдаемые в диссипативных системах ситуации перехода к хаосу.

Таким образом, вейвлеты могут с успехом применяться для решения различных проблем. Однако они еще недостаточно широко известны кругу исследователей, занимающихся анализом экспериментальных и натурных данных. В настоящей работе сделана попытка по возможности наглядно и просто изложить сведения из теории вейвлетов, необходимые при практическом применении вейвлет-преобразования для анализа сигналов различной природы.

В разделе 2 проведена аналогия между рядами Фурье и разложением в ряды по вейвлетам, введены основные определения вейвлет-преобразования. В разделе 3 описаны признаки и свойства функций, с помощью которых формируется базис вейвлет-преобразования, приведены примеры наиболее часто используемых вейвлетов. В разделе 4 перечислены свойства вейвлет-преобразования, введены некоторые физические характеристики и показаны некоторые возможности вейвлет-анализа. Материал основан, главным образом, на сборниках и монографиях [2–4] и прекрасных работах Ингрид Добечи (Ingrid Daubechies) [5] и Мари Фарж (Marie Farge) [6]. В разделе 5 приводятся примеры применения вейвлет-преобразования к модельным сигналам различного характера; в разделе 6 представлены результаты вейвлет-анализа натурных временных метеорологических рядов.

2. От преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию

Интегральное преобразование Фурье и ряды Фурье являются основой гармонического анализа. Получаемые в результате преобразования коэффициенты Фурье поддаются достаточно простой физической интерпретации, причем простота ни в коем случае не умаляет важности последующих выводов о характере исследуемого сигнала. Применение интегрального преобразования и рядов Фурье (в вычислениях, аналитических преобразованиях) очень наглядно, все необходимые свойства и формулы выписываются с помощью всего двух действительных функций $\sin t$, $\cos t$ (или одной комплексной — синусоидальной волны $\exp(it) = \cos t + i \sin t$, $i = \sqrt{-1}$) и достаточно легко доказываются.

Вейвлет-преобразование не так хорошо и широко известно, поскольку применяется сравнительно недавно и математический аппарат находится в стадии активной разработки. Поэтому для большей наглядности будем, следуя [4], вводить необходимые понятия вейвлет-анализа, проводя аналогии и сравнения с анализом Фурье, значимость и привлекательность которого для широкого круга исследователей неоспоримы и проверены временем.

Определения, свойства и их следствия приводятся для одномерных функций, рядов данных. При необходимости все сказанное может быть обобщено на многомерные случаи. Для определенности мы говорим о функциях, зависящих от времени, о временных рядах и, соответственно, о частотах. Однако без нарушения общности независимая координата может быть пространственной (с соответствующими волновыми числами) и любой другой.

2.1. Ряды Фурье

Напомним некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть $L^2(0, 2\pi)$ — пространство квадратично интегрируемых функций с конечной энергией (нормой)

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad t \in (0, 2\pi). \tag{1}$$

Это — определение кусочно-непрерывной функции $f(t)$. Она может быть периодически расширена и определена на всей оси $R(-\infty, \infty)$ так, что

$$f(t) = f(t - 2\pi), \quad t \in R.$$

Любая функция $f(t)$ из пространства 2π -периодических квадратично интегрируемых функций может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(int). \tag{2}$$

Коэффициенты c_n в (2) имеют вид

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt, \tag{3}$$

и ряд (2) равномерно сходится к $f(t)$:

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{-M}^N c_n \exp(int) \right|^2 dt = 0.$$

Отметим, что

$$w_n(t) = \exp(int), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{4}$$

есть ортонормированный базис пространства $L^2(0, 2\pi)$, построенный с помощью масштабного преобразования единственной функции $w(t) = \exp(it)$ таким образом, что $w_n(t) = w(nt)$.

Итак, каждая 2π -периодическая квадратично интегрируемая функция может быть получена суперпозицией масштабных преобразований базисной функции $w(t) = \exp(it) = \cos t + i \sin t$, т.е. является композицией синусоидальных волн с различными частотами (с коэффициентами, зависящими от номера гармоники).

Напомним, что для коэффициентов рядов Фурье выполняется равенство Парсеваля

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{5}$$

2.2. Разложение по вейвлетам

Рассмотрим пространство $L^2(R)$ функций $f(t)$, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и обладающих конечной энергией (нормой)

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \tag{6}$$

Функциональные пространства $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(R)$ существенно различны. В частности, локальное среднее значение каждой функции из $L^2(R)$ должно стремиться к нулю на $\pm\infty$. Синусоидальная волна не принадлежит

$L^2(R)$, и, следовательно, семейство синусоидальных волн w_n не может быть базисом функционального пространства $L^2(R)$. Попробуем найти достаточно простые функции для конструирования базиса пространства $L^2(R)$.

"Волны", образующие пространство $L^2(R)$, должны стремиться к нулю на $\pm\infty$ и для практических целей чем быстрее, тем лучше. Рассмотрим в качестве базисных функций вейвлеты — хорошо локализованные солитоноподобные "маленькие волны" (дословный перевод слова wavelet).

Как и в случае с пространством $L^2(0, 2\pi)$, которое полностью формировалось с помощью одной базисной функции $w(t)$, сконструируем функциональное пространство $L^2(R)$ также с помощью одного вейвлета $\psi(t)$. Отметим, что это может быть вейвлет с одной частотой или с набором частот (frequency bands). Начнем с дискретных преобразований.

Как же с помощью быстро стремящейся к нулю локализованной функции покрыть всю ось $R(-\infty, \infty)$? Наиболее просто это можно сделать, предусмотрев систему сдвигов (переносов) вдоль оси. Пусть для простоты они будут целыми, т.е. $\psi(t - k)$.

Введем аналог синусоидальной частоты. Для простоты и определенности запишем ее через степени двойки: $\psi(2^j t - k)$, здесь j и k — целые числа ($j, k \in I$).

Таким образом, с помощью дискретных масштабных преобразований $(1/2^j)$ и сдвигов $(k/2^j)$ мы можем описать все частоты и покрыть всю ось, имея единственный базисный вейвлет $\psi(t)$.

Напомним определение нормы:

$$\|p\|_2 = \langle p, p \rangle^{1/2},$$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q^*(t) dt$$

(звездочка обозначает комплексное сопряжение). Следовательно,

$$\|\psi(2^j t - k)\|_2 = 2^{-j/2} \|\psi(t)\|_2,$$

т.е. если вейвлет $\psi(t) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то все вейвлеты семейства $\{\psi_{jk}\}$ вида

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in I \tag{7}$$

также нормированы на единицу, т.е. $\|\psi_{jk}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$.

Вейвлет $\psi \in L^2(R)$ называется ортогональным, если определенное соотношением (7) семейство $\{\psi_{jk}\}$ представляет собой ортонормированный базис функционального пространства $L^2(R)$, т.е.

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$$

и каждая функция $f \in L^2(R)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{j, k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t), \tag{8}$$

равномерная сходимость которого в $L^2(R)$ означает, что

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{-M_2}^{N_2} \sum_{-M_1}^{N_1} c_{jk} \psi_{jk} \right\|_2 = 0.$$

Простейшим примером ортогонального вейвлета является НААР-вейвлет, названный так по имени предожившего его Хаара (Наар), и определяемый соотношением

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t < 0, \quad t \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Легко видеть, что любые две функции ψ_{jk}^H, ψ_{lm}^H , полученные из этого вейвлета по формуле (7) с помощью масштабных преобразований $1/2^j, 1/2^l$ и сдвигов $k/2^j, m/2^l$, ортогональны и имеют единичную норму.

Сконструируем базис функционального пространства $L^2(R)$ с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров — масштабного коэффициента a и параметра сдвига b :

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad \psi \in L^2(R). \quad (10)$$

На его основе запишем интегральное вейвлет-преобразование:

$$\begin{aligned} [W_{\psi}f](a, b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Проводя дальнейшую аналогию с преобразованием Фурье, коэффициенты $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$ разложения (8) функции f в ряд по вейвлетам можно определить через интегральное вейвлет-преобразование:

$$c_{jk} = [W_{\psi}f]\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right). \quad (12)$$

В дальнейшем иногда вместо $[W_{\psi}f](a, b)$ для коэффициентов (амплитуд) вейвлет-преобразования используются обозначения $W(a, b)$ или $W_{\psi}f$, или $W[f]$.

Итак, каждая функция из $L^2(R)$ может быть получена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета, т.е. является композицией "вейвлетных волн" (с коэффициентами, зависящими от номера волны (частоты, масштаба) и от параметра сдвига (времени)).

Использование дискретного вейвлет-преобразования (дискретного частотно-временного пространства в виде целых сдвигов и растяжений по степеням двойки) позволяет провести доказательство многих положений теории вейвлетов [2–5], связанных с полнотой и ортогональностью базиса, сходимостью рядов и т.п. Доказательность этих положений необходима, например, при сжатии информации или в задачах численного моделирования, т.е. в случаях, когда важно провести разложение с минимальным числом независимых коэффициентов вейвлет-преобразования и иметь точную формулу обратного преобразования. При применении вейвлетов для анализа сигналов непрерывное вейвлет-преобразование (11) более удобно; его некоторая избыточность, связанная с непрерывным изменением масштабного коэффициента a и параметра сдвига b , становится здесь положительным качеством, так как позволяет более полно и

четко представить и проанализировать содержащуюся в данных информацию.

2.3. Обратное вейвлет-преобразование

Синусоидальная волна формирует ортонормированный базис функционального пространства $L^2(0, 2\pi)$, и с обратным преобразованием Фурье проблем не возникает. Ортонормированность же базисов пространства $L^2(R)$, построенных на основе вейвлетов, определяется и выбором базисного вейвлета, и способом построения базиса (значениями базисных параметров a, b).

Конечно же, вейвлет может считаться базисной функцией $L^2(R)$ только в том случае, если построенный с его помощью базис ортонормирован и обратное преобразование существует. Однако строгие доказательства полноты и ортогональности сложны и громоздки, примеры этого можно видеть в [2–5], где разрабатывается теория вейвлет-преобразования. Кроме того, для практических целей часто достаточно бывает устойчивости и "приблизительной" ортогональности системы функций разложения, т.е. достаточно, чтобы она была "почти базисом". Как правило, для анализа сигналов используются такие "почти базисные" вейвлеты.

За подробным изложением и доказательствами отошлем к уже цитированным работам, здесь же выпишем обратное преобразование лишь для тех случаев, что описаны выше: для базиса (7), допускающего расширения и сдвиги $(1/2^j, k/2^j)$, $j, k \in I$, и базиса (10), построенного при произвольных значениях (a, b) , $a, b \in R$.

При базисных параметрах (a, b) , $a, b \in R$ обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса (10), что и прямое:

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \iint [W_{\psi}f](a, b) \psi_{ab}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (13)$$

C_{ψ} — нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту $(2\pi)^{1/2}$, нормализующему преобразование Фурье):

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty$$

(крюшечкой сверху обозначается фурье-образ).

Условие конечности константы C_{ψ} ограничивает класс функций $\psi(t) \in L^2(R)$, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов. В частности, очевидно, что образ Фурье $\hat{\psi}$ должен быть равен нулю в начале координат $\omega = 0$ и, следовательно, должен быть равен нулю по крайней мере нулевой момент:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Чаще всего в приложениях достаточно рассмотреть только положительные частот, т.е. $a > 0$; вейвлет, соответственно, должен удовлетворять условию

$$C_{\psi} = 2 \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \omega^{-1} d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(-\omega)|^2 \omega^{-1} d\omega < \infty.$$

В случае дискретного вейвлет-преобразования устойчивый базис определяется следующим образом.

Функция $\psi \in L^2(R)$ называется R-функцией, если базис $\{\psi_{jk}\}$, определенный выражением (7), является базисом Рисса (Riesz) в том смысле, что существуют две константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$, для которых соотношение

$$A \|\{c_{jk}\}\|_2^2 \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_{jk}\}\|_2^2$$

выполняется при любой (ограниченной, дважды квадратично суммируемой) последовательности $\{c_{jk}\}$:

$$\|\{c_{jk}\}\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{jk}|^2 < \infty.$$

Для любой R-функции существует базис $\{\psi^{jk}\}$ — "двойник" базиса $\{\psi_{jk}\}$ (в том смысле, что $\langle \psi_{jk}, \psi^{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$), с помощью которого можно построить реконструкционную формулу

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi^{jk}(t). \tag{14}$$

Если ψ — ортогональный вейвлет и $\{\psi_{jk}\}$ — ортонормированный базис, то $\{\psi^{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}\}$ совпадают и формула (14) является формулой обратного преобразования. Если ψ — не ортогональный вейвлет, но является двухместным или парным R-вейвлетом (dyadic wavelet), то он имеет двойника ψ^* , с помощью которого двойник семейства $\{\psi_{jk}\}$ строится подобно базису (7):

$$\psi^{jk}(t) = \psi_{jk}^*(t) = 2^{j/2} \psi^*(2^j t - k), \quad j, k \in I. \tag{15}$$

В общем же случае реконструкционная формула (14) даже не обязательно является вейвлет-рядом в том смысле, что ψ не является вейвлетом и $\{\psi^{jk}\}$ может не иметь базиса-двойника, построенного по типу (10).

2.4. Частотно-временная локализация

Преобразование Фурье и ряды Фурье являются прекрасным математическим аппаратом для физической интерпретации процессов при анализе характеризующих их сигналов. Однако иногда они оказываются недостаточно эффективными.

Реальный сигнал всегда (или, как правило) принадлежит пространству $L^2(R)$. Преобразование Фурье сигнала $f(t)$ с конечной энергией, определенной нормой $\|f\|_2$, представляет собой спектр этого сигнала:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

В некоторых случаях физическая интерпретация с помощью этой формулы бывает затруднительна. Так, чтобы получить спектральную информацию на выбранной частоте, необходимо иметь и прошлую, и будущую временную информацию; к тому же формула не учитывает, что частота может эволюционировать со временем. Преобразование Фурье, например, не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид с разными частотами, от сигнала, состоящего из тех же синусоид, включающихся последовательно одна за другой (пример рассмотрен в разделе 5).

Кроме того, известно, что частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности. Поэтому для

получения высокочастотной информации с хорошей точностью важно извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала; и наоборот — низкочастотную спектральную информацию извлекать из относительно широких временных интервалов сигнала.

Часть описанных трудностей снимается при использовании оконного преобразования Фурье. Однако бесконечно осциллирующая базисная функция (синусоидальная волна) не позволяет получать по-настоящему локализованную информацию. Элементом базиса вейвлет-преобразования является хорошо локализованная функция, быстро стремящаяся к нулю вне небольшого интервала, что позволяет провести "локализованный спектральный анализ" — смысл этого несколько странного сочетания слов станет ясен из дальнейшего. Иными словами, вейвлет-преобразование автоматически обладает подвижным частотно-временным окном, узким на малых масштабах и широким на больших.

Каковы же параметры частотно-временного окна вейвлет-преобразования? Поскольку и сам вейвлет ψ , и его фурье-образ $\hat{\psi}$ достаточно быстро спадают, они могут быть использованы как "оконные функции" с "центром" и "шириной", определяемыми следующим образом.

Для нетривиальной оконной функции $z(t) \in L^2(R)$ (необходимо, чтобы функция $tz(t)$ также принадлежала $L^2(R)$), ее центр $\langle t \rangle$ и радиус Δ_z определяются формулами

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\|z\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 dt, \\ \Delta_z = \frac{1}{\|z\|_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |z(t)|^2 dt \right]^{1/2},$$

при этом ширина оконной функции есть $2\Delta_z$.

Пусть $\langle t \rangle$, Δ_ψ , $\langle \omega \rangle$, $\Delta_{\hat{\psi}}$ — определенные по этим формулам центры и радиусы вейвлета ψ и его фурье-образа $\hat{\psi}$ соответственно. Тогда интегральное вейвлет-преобразование (11) ограничено "временным окном"

$$[\text{win}_t] = [b + a\langle t \rangle - 2a\Delta_\psi, b + a\langle t \rangle + 2a\Delta_\psi], \tag{16}$$

т.е. имеет место временная локализация с центром окна в $b + a\langle t \rangle$ и шириной окна $4a\Delta_\psi$.

Введем функцию $\eta(\omega) = \hat{\psi}(\omega + \langle \omega \rangle)$, которая также является оконной функцией с центром в нуле и радиусом $\Delta_{\hat{\psi}}$. Воспользовавшись равенством $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle / 2\pi$, можно записать интегральное вейвлет-преобразование (11) для фурье-образа \hat{f} в виде

$$W(a, b) = |a|^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i b \omega) \eta^* \left(a \left[\omega - \frac{\langle \omega \rangle}{a} \right] \right) d\omega. \tag{17}$$

Если отвлечься от фазового сдвига, то станет очевидным, что преобразование (17) дает и о спектре $\hat{f}(\omega)$ сигнала $f(t)$ локализованную информацию с "частотным окном"

$$[\text{win}_\omega] = \left[\frac{\langle \omega \rangle}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\langle \omega \rangle}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}} \right]. \tag{18}$$

Частотная локализация происходит около центра окна в $\langle \omega \rangle / a$ с шириной окна, равной $2\Delta_{\hat{\psi}} / a$.

Заметим, что отношение центральной частоты к ширине окна,

$$\frac{\langle \omega \rangle}{a} \left(\frac{2\Delta\psi}{a} \right)^{-1} = \frac{\langle \omega \rangle}{2\Delta\psi},$$

не зависит от местоположения центральной частоты, а частотно-временное окно $[\text{win}_t] \cdot [\text{win}_\omega]$, имеющее площадь $4\Delta\psi\Delta\omega$, сужается при высокой центральной частоте $\langle \omega \rangle/a$ и расширяется при низкой (рис. 1а).

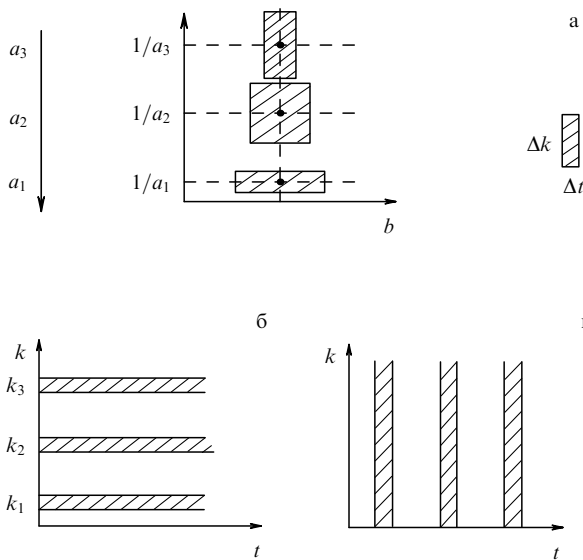


Рис. 1. Частотно-временная локализация преобразований с разными анализаторами: (а) вейвлеты, (б) гармоники Фурье, (в) функции Шеннона.

Для сравнения на рис. 1 показана локализация в частотно-временном пространстве преобразований с другими анализирующими функциями: преобразования Фурье (рис. 1б) и преобразования Шеннона (Shannon), анализирующей функцией которого является функция Дирака (рис. 1в).

Из рисунка 1 видно, что преобразование Фурье хорошо локализует частоту, но без временного разрешения; преобразование Шеннона не обладает частотной локализацией; вейвлет-преобразование имеет подвижное окно, локализованное около выбранного момента времени и расширяющееся с ростом масштаба, что и является наиболее желательным при получении спектральной информации. Определяется это тем, что базисными функциями перечисленных выше преобразований являются соответственно локализующая только частоту синусоидальная волна, локализующая только момент времени функция Дирака и достаточно хорошо локализующий и масштаб, и момент времени солитоноподобный вейвлет.

Для демонстрации преимуществ вейвлет-преобразования как метода локализованного спектрального анализа, проведем сравнение вейвлет-преобразования (11) с часто используемым для анализа сигналов оконным, или коротковременным, преобразованием Фурье

$$F(\omega, b) = \int f(t)z(t-b) \exp(i\omega t) dt$$

— преобразованием сигнала, умноженного предварительно на оконную функцию z . Таким образом, $F(\omega, b)$ есть разложение сигнала по семейству функций $z(t-b) \times \exp(i\omega t)$, образованному из единственной функции $z(t)$ с помощью переносов b во времени и переносов ω по частоте, в то время как результат вейвлет-преобразования $W(a, b)$ есть разложение сигнала по семейству $\psi((t-b)/a)$, образованному из единственной функции $\psi(t)$ с помощью переносов b во времени и растяжений a также во времени. Вейвлет-преобразование представляет собой как бы непрерывный банк оконных преобразований Фурье с различными окнами для каждой частоты.

Таким образом, базисные функции оконного преобразования Фурье имеют одно и то же разрешение по времени и частоте $(z(t), \hat{z}(\omega))$ для всех точек плоскости преобразования, в то время как базисные функции вейвлет-преобразования имеют уменьшающееся с масштабом a разрешение по времени $(\psi(t/a))$ и увеличивающееся с масштабом a разрешение по частоте $(\psi(a\omega))$. Это свойство вейвлет-преобразования дает ему большое преимущество при анализе сигналов, так как быстрые вариации сигналов (высокочастотные характеристики) хорошо локализованы, а для выявления медленно меняющихся характеристик достаточно хорошего низкочастотного разрешения. Вейвлет-преобразование, обладающее подвижным частотно-временным окном, одинаково хорошо выявляет и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов.

Напомним, что преобразование Фурье ряда данных с равномерной дискретизацией по времени Δt не может достичь дискретизации по частоте больше, чем $\Delta\omega = \Delta t/2$ (частота Найквиста, демонстрирующая частный случай принципа неопределенности между временной и частотной локализациями). Аналогичное ограничение для вейвлет-преобразования можно выразить соотношением $\Delta t \Delta\omega \geq (4\pi)^{-1}$.

Легко видеть, что описанные преимущества вейвлетов окажутся чрезвычайно полезными не только для анализа сложных сигналов, но и при решении уравнений, описывающих процессы со взаимодействиями возмущений разных масштабов.

3. Базисные функции вейвлет-преобразования

До сих пор термином "вейвлет" без определения обозначалась некая солитоноподобная функция, вводились связанные с нею понятия и описывались некоторые ее свойства. В литературе мы не встретили общепринятого удачного определения вейвлета. Для примера приведем наиболее простое [3], на наш взгляд, и опирающееся на уже введенные выше понятия.

3.1. Определение вейвлета

Любая локализованная R -функция $\psi \in L^2(R)$ называется R -вейвлетом (или просто вейвлетом), если для нее существует функция $\check{\psi} \in L^2(R)$ (ее пара, двойник) такая, что семейства $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\check{\psi}_{jk}\}$, построенные согласно (7) и (15), являются парными базисами функционального пространства $L^2(R)$.

Каждый таким образом определенный вейвлет ψ , независимо от того, ортогональный он или нет, позволяет любую функцию $f \in L^2(R)$ представить в виде ряда (8), коэффициенты которого определяются интегральным вейвлет-преобразованием f относительно $\check{\psi}$.

Вейвлет-двойник ψ^* — единственный и сам является R-вейвлетом. Пара (ψ, ψ^*) симметрична в том смысле, что ψ в свою очередь является двойником для ψ^* .

Если R-вейвлет ψ обладает свойством ортогональности, то $\psi^* \equiv \psi$, и $\{\psi_{jk}^*\} \equiv \{\psi_{jk}\}$ — ортогональный базис.

Для многих практических целей достаточно, чтобы вейвлет ψ обладал свойством полуортогональности, т.е. чтобы его базис Рисса $\{\psi_{jk}\}$ удовлетворял условию $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = 0$ при $j = l, j, k, l, m \in I$.

R-вейвлет называется неортогональным, если он не является полуортогональным вейвлетом. Однако, будучи R-вейвлетом, он имеет двойника, и пара (ψ, ψ^*) дает возможность сформировать семейства $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}^*\}$, удовлетворяющие условию биортогональности $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm}^* \rangle = \delta_{jl}\delta_{km}$, $j, k, l, m \in I$ и позволяющие построить полноценные ряд по вейвлетам и реконструкционную формулу.

С необходимостью иметь обратное вейвлет-преобразование (или реконструкционную формулу) связано большинство ограничений, накладываемых на вейвлет.

3.2. Признаки вейвлета

Для практического применения важно знать признаки, которыми обязательно должна обладать функция, чтобы быть вейвлетом; приведем их здесь, а также рассмотрим в качестве примеров некоторые хорошо известные функции и их соответствие этим необходимым признакам.

Локализация. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во временном пространстве, и по частоте.

Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \tag{19}$$

Часто для приложений оказывается необходимым, чтобы не только нулевой, но и все первые m моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0. \tag{20}$$

Такой вейвлет называется вейвлетом m -го порядка. Обладающие большим числом нулевых моментов вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

Ограниченность:

$$\int |\psi(t)|^2 dt < \infty. \tag{21}$$

Оценка хорошей локализации и ограниченности может быть записана в виде

$$|\psi(t)| < (1 + |t|^n)^{-1} \quad \text{или} \quad |\hat{\psi}(\omega)| < (1 + |k - \omega_0|^n)^{-1},$$

здесь ω_0 — доминантная частота вейвлета, число n должно быть возможно большим.

Автомодельность базиса. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты данного семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют то же

число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и сдвигов. Благодаря этому вейвлет-преобразование с успехом применяется для анализа фрактальных сигналов (см., например, [7]).

Сказанное выше можно проиллюстрировать примерами из [6], где приведен ряд функций и их образов Фурье. Для сравнения среди приведенных функций есть и вейвлеты, и функции, которые по тем или иным причинам вейвлетами быть не могут.

Например, δ -функция и синус не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временном пространстве и в пространстве частот: хорошо локализованная в t -пространстве δ -функция не обладает этим свойством в k -пространстве; наоборот, хорошо локализованный в k -пространстве синус не обладает этим свойством в t -пространстве.

Функция Габора

$$G(t) = \exp[i\Omega(t - t_0) - i\vartheta] \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}}$$

представляет собой модулированную функцию Гаусса с четырьмя параметрами: сдвиг t_0 , стандартное (среднеквадратичное) отклонение σ , частота модуляции Ω и фазовый сдвиг ϑ . Разложение по функциям Габора является разложением по модулированным фрагментам синусоид. Длина фрагментов для всех частот постоянна, что дает различное число осцилляций для разных гармоник. Отсюда следует, что достаточно хорошо локализованная и в t -, и в k -пространстве функция Габора не может быть базисной функцией вейвлет-преобразования, поскольку построенный на ее основе базис не обладает свойством самоподобия.

НААР-вейвлет (см. формулу (9)) — пример ортогонального дискретного вейвлета, порождающего ортонормированный базис. Недостатками этого вейвлета являются негладкость — резкие границы в t -пространстве, вследствие чего возникают бесконечные (убывающие как k^{-1}) "хвосты" в k -пространстве, а также несимметрия формы. Для некоторых приложений эти недостатки несущественны, а иногда односторонность вейвлета даже становится достоинством. Часто применяется очень похожий, также дискретный, но симметричный ФНАТ-вейвлет, более известный под названием "Французская шляпа" (French hat — похож на цилиндр):

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(k) = 3\Theta(k) \left(\frac{\sin k}{k} - \frac{\sin 3k}{3k} \right),$$

здесь $\Theta(k)$ — функция Хевисайда ($\Theta(k) = 1$ при $k > 0$ и $\Theta(k) = 0$ при $k \leq 0$).

ФНАТ-вейвлет, нерегулярный во временном пространстве и недостаточно быстро спадающий в пространстве частот, и LP-вейвлет (вейвлет Литтлвуда – Пели (Littlewood & Paley, см. [6])), наоборот, имеющий резко очерченные границы в k -пространстве и плохо спадающий в t -пространстве, можно считать предельными случаями, между которыми находятся практически все вейвлеты.

3.3. Примеры вейлетобразующих функций

Поскольку вейлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейлета на заданном масштабе и анализируемого сигнала, коэффициенты $W(a, b)$ содержат комбинированную информацию об анализирующем вейлете и анализируемом сигнале (как и коэффициенты преобразования Фурье, которые содержат информацию о сигнале и о синусоидальной волне).

Выбор анализирующего вейлета, как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейлет имеет характерные особенности во временном и в частотном пространстве, поэтому иногда с помощью разных вейлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала.

Если продолжить уже упоминавшуюся аналогию с математическим "микроскопом", то параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a — увеличение и, наконец, выбором базисного вейлета ψ определяются оптические качества микроскопа.

Вещественные базисы часто конструируются на основе производных функции Гаусса:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right],$$

$$\hat{\psi}_m(k) = m(ik)^m \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$$

(здесь $\partial_t^m = \partial^m[\dots]/\partial t^m$, $m \geq 1$). Более высокие производные имеют больше нулевых моментов и позволяют извлечь информацию об особенностях более высокого порядка, содержащихся в сигнале.

На рисунке 2а, б показаны вейлеты, полученные при $m = 1$ и $m = 2$ соответственно. Из-за их формы первый называют обычно WAVE-вейлет, второй — МНАТ-вейлет, или "Мексиканская шляпа" (Mexican hat — похож на сомbrero).

МНАТ-вейлет, имеющий узкий энергетический спектр и два равных нулю момента (нулевой и первый), хорошо приспособлен для анализа сложных сигналов. Обобщенный на двумерный случай МНАТ-вейлет часто используется для анализа изотропных полей. Если же производная берется лишь в одном направлении, получается неизотропный базис с хорошей угловой избирательностью [6]. Для построения такого базиса к масштабным преобразованиям и сдвигам базисного вейлета необходимо добавить его вращение. При этом математический микроскоп (вейлет-преобразование) приобретает еще и качества поляризатора с углом поляризации, пропорциональным углу поворота вейлета.

На основе функции Гаусса строится также хорошо известный DOG-вейлет (Difference of Gaussians):

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{|t|^2}{2}\right) - 0,5 \exp\left(-\frac{|t|^2}{8}\right),$$

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\exp\left(-\frac{|k|^2}{2}\right) - \exp(-2|k|^2) \right].$$

Примеры комплексных вейлетов приведены на рис. 2в, г (показаны их действительные составляющие). Наиболее часто используемый комплексный базис

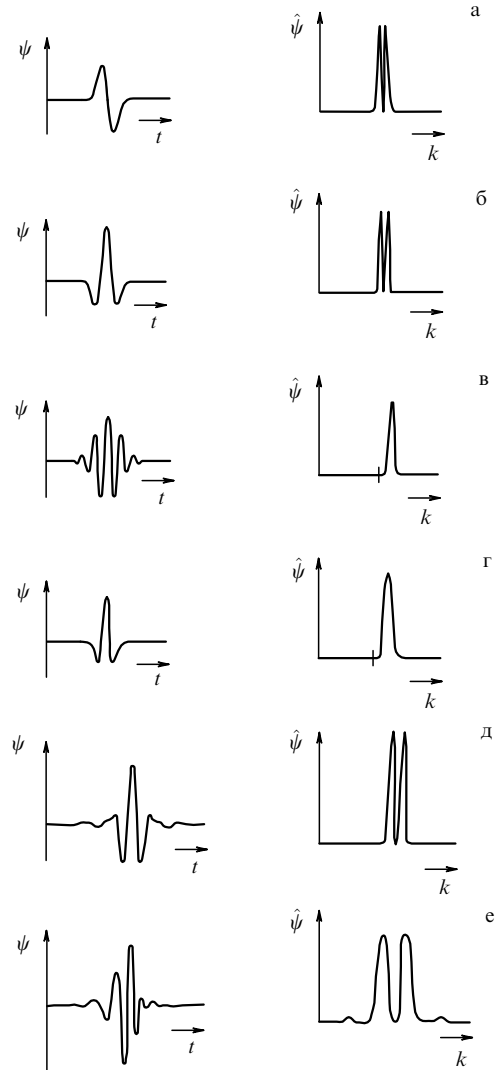


Рис. 2. Примеры часто используемых вейлетов: (а) WAVE, (б) МНАТ, (в) Morlet, (г) Paul, (д) LMB, (е) Daubechies. Показаны вейлеты в зависимости от времени (левая колонка) и их образы Фурье (правая колонка).

строится на основе хорошо локализованного в k - и r -пространстве вейлета Морле (Morlet) [1]:

$$\psi(r) = \exp(ik_0 r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right),$$

$$\hat{\psi}(k) = \Theta(k) \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{2}\right],$$

плоская волна, модулированная гауссианом единичной ширины. На рисунке 2в вейлет Морле показан для $k_0 = 6$. С увеличением k_0 возрастает угловая избирательность базиса, но ухудшается пространственная.

Часто применяемый в квантовой механике вейлет Пауля (Paul) [8]

$$\psi(t) = \Gamma(m + 1) \frac{i^m}{(1 - it)^{m+1}},$$

$$\hat{\psi}_m(k) = \Theta(k)(k)^m \exp(-k)$$

показан на рис. 2г для $m = 4$ (чем больше m , тем больше нулевых моментов имеет вейлет).

Представленные комплексные вейвлеты являются прогрессивными. Так называются вейвлеты, имеющие нулевые коэффициенты Фурье при отрицательных значениях волновых чисел. Они хорошо приспособлены для анализа сигналов, для которых важен принцип причинности: эти вейвлеты сохраняют направление времени и не создают паразитной интерференции между прошлым и будущим.

Отметим, что при анализе комплексного одномерного сигнала или при использовании комплексного анализирующего вейвлета в результате вейвлет-преобразования получаются двумерные массивы значений модуля коэффициентов и фазы:

$$W(a, b) = |W(a, b)| \exp[i\Phi(a, b)].$$

На рисунке 2д,е приведены примеры вейвлетов, которые часто служат основой для построения ортогональных дискретных базисов (типа (7)) с помощью процедуры Малла (Mallat) [9]: LMB-вейвлет, предложенный Лемарье, Мейером и Бэтлом (Lemarie, Meyer, Battle) [10, 11] и один из вейвлетов Добечи [5]. Это биортогональные вейвлеты, имеющие пару (двойника), необходимую для получения реконструкционной формулы. В цитированных работах представлены другие примеры таких вейвлетов и способы их конструирования.

4. Свойства и возможности вейвлет-преобразования

Одномерное преобразование Фурье дает также одномерную информацию об относительном вкладе (амплитудах) разных временных масштабов (частот). Результатом вейвлет-преобразования одномерного ряда является двумерный массив амплитуд вейвлет-преобразования — значений коэффициентов $W(a, b)$. Распределение этих значений в пространстве (a, b) = (временной масштаб, временная локализация) дает информацию об эволюции относительного вклада компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, (частотно-) масштабно-временным спектром или вейвлет-спектром (time-scale spectrum, или wavelet spectrum в отличие от single spectrum преобразования Фурье).

4.1. Способы представления результатов

Спектр $W(a, b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации этой информации могут быть различными. Вместо изображения поверхностей часто представляют их проекции на плоскость ab с изолиниями или изоуровнями, позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах и во времени, а также картины линий локальных экстремумов этих поверхностей (так называемый "skeleton"), четко выявляющие структуру анализируемого процесса. Термин "скелет" или "скелетон" хорошо отражает характер картин линий локальных экстремумов (см. примеры), и мы будем использовать его для краткости.

В тех случаях, когда необходимо показать очень широкий диапазон масштабов, визуализация результатов в логарифмических координатах, например, $(\log a, b)$ предпочтительнее, чем в линейных.

Продемонстрируем сказанное на примере преобразования конкретного сигнала, не касаясь физической интерпретации. На рисунке 3 представлены результаты вейвлет-преобразования временного ряда потока ионов солнечного ветра (данные получены с помощью прибора МОНИТОР [12] на спутнике Прогноз-8; результаты их анализа частично опубликованы в [12]). В вычислениях использовался МНАТ-вейвлет.

На рисунке 3а–в показаны анализируемый ряд, картина значений коэффициентов вейвлет-преобразования и скелетон в проекциях на плоскость ab (временной масштаб, время); по оси абсцисс отложено время (или параметр сдвига), по оси ординат — временной масштаб.

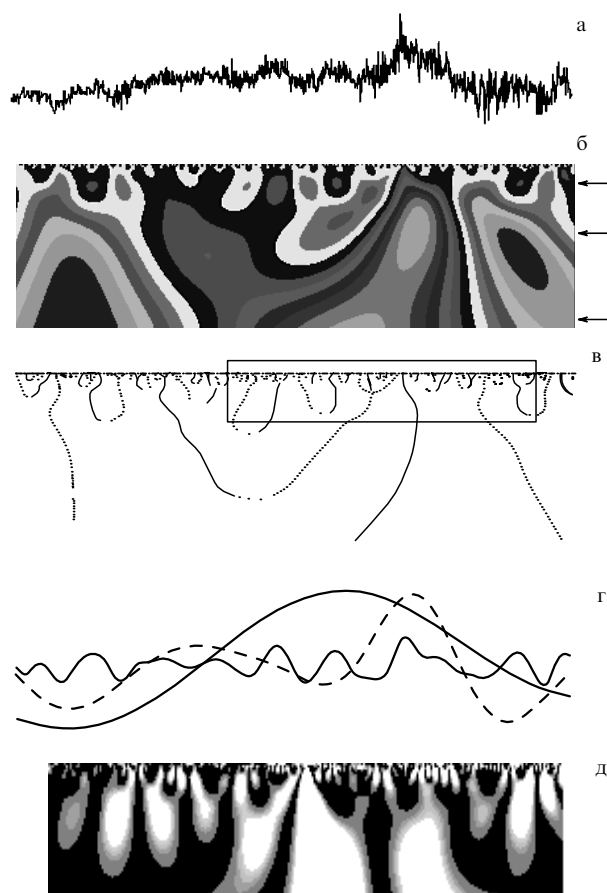


Рис. 3. Пример вейвлет-преобразования реального сигнала — потока ионов солнечного ветра: (а) анализируемый сигнал, (б) картина коэффициентов $W(a, b)$, (в) картина линий локальных экстремумов, (г) зависимость коэффициентов $W(a, b)$ от времени при значениях масштаба, отмеченных стрелками на (б), (д) распределение плотности энергии $E_W(a, b)$ для фрагмента, взятого в рамку на (в).

На рисунке 3б темные области соответствуют положительным, а светлые — отрицательным значениям $W(a, b)$, оттенками серого цвета в каждой из областей выделены диапазоны значений $W(a, b)$. Ясно, что значения амплитуды вейвлет-преобразования в точке (a_0, b_0) тем больше (по абсолютной величине), чем сильнее коррелиция между вейвлетом данного масштаба и поведением сигнала в окрестности $t = b_0$. Картина коэффициентов демонстрирует, что процесс составляют компоненты разных масштабов: экстремумы $W(a, b)$ наблюдаются на разных масштабах, интенсивность их меняется и со временем, и с масштабом.

На рисунке 3в показана соответствующая картина линий локальных экстремумов — линий, от масштаба к масштабу соединяющих экстремумы каждой детали поверхности ("холма" или "впадины") отдельно. Многие авторы полагают, что скелетон не только четко и без лишних деталей визуализирует структуру анализируемого процесса, но *de facto* содержит всю информацию о нем. Сплошные линии на рисунке отмечают положение локальных максимумов $W(a, b)$, точечные — минимумов.

Мы уже говорили, что вейвлет-преобразование разлагает анализируемый процесс на составляющие его волны, компоненты разного масштаба и, кроме того, дает "локализованную" во времени информацию о процессе. Горизонтальное сечение картины, приведенной на рис. 3б, при заданном масштабе a демонстрирует изменение компоненты выбранного масштаба со временем; на рис. 3г показано поведение трех компонент вблизи отмеченных на рис. 3б значений масштаба a . Вертикальное сечение картины коэффициентов в некоторый момент времени t_0 демонстрирует поведение процесса в окрестности выбранного момента времени (можно определить наличие и порядок особенности, набор задействованных масштабов, см. анализ локальной регулярности в разделе 4.3).

Обратим внимание на то, что значение анализируемой функции в точке t_0 влияет на значения коэффициентов преобразования в растущих с масштабом временных диапазонах, в так называемом углу влияния (рис. 4а). Ясно, что угол влияния выглядит иначе, если масштаб меняется не линейно, а по другому закону (логарифмическому, степенному).

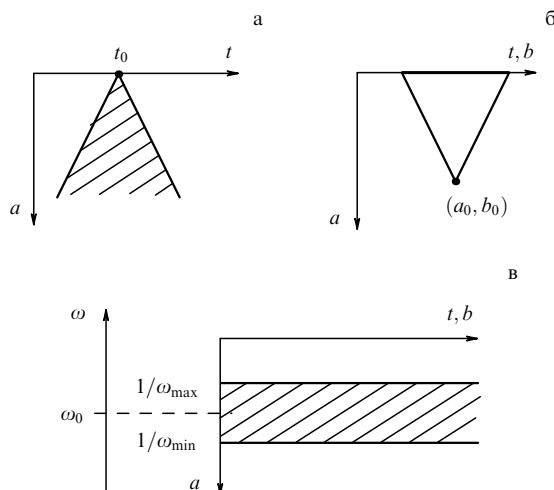


Рис. 4. Угол влияния (а, б) и полоса влияния (в).

В свою очередь, коэффициент $W(a, b)$ в точке (a_0, b_0) зависит от значений части ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона (диапазона интегрирования) около b_0 (рис. 4б), и диапазон этот тем больше, чем больше масштаб a_0 , т.е. высокочастотная (или мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых отрезков ряда, а низкочастотная — на основе больших.

Максимальный угол влияния (угол достоверности) отмечает область достоверности — область, вне которой коэффициенты $W(a, b)$ вычисляются уже по отрез-

кам, выходящим за границы ряда (по дополненному ряду). Поскольку анализируемый ряд всегда конечен и необходимо получить максимум информации, полученные вне максимального угла влияния (с некоторой ошибкой) приближенные значения коэффициентов часто сохраняются. Для уменьшения ошибки ряд дополняется с учетом его поведения (средним значением, известным временным ходом и т.д.).

Вейвлет-преобразование может быть записано также через образы Фурье сигнала $\hat{f}(\omega)$ и вейвлета $\hat{\psi}(\omega)$. Легко показать, что влияние компоненты Фурье $\hat{f}(\omega_0)$ испытывают коэффициенты $W(a, b)$, находящиеся в горизонтальной полосе $\omega_{\min} < a\omega_0 < \omega_{\max}$ (рис. 4в); в свою очередь, на коэффициент $W(a, b)$ в точке (a_0, b_0) влияют все компоненты Фурье $\hat{f}(\omega)$ сигнала, для которых $\omega_{\min} < a_0\omega < \omega_{\max}$.

Раствор угла влияния и ширина полосы влияния зависят от базисного вейвлета. Так, например, используемый МНАТ-вейвлет (рис. 2б) хорошо локализован во времени и имеет узкий энергетический спектр. Это удачное качество означает, в частности, что коэффициенты $W(a, b)$ зависят от малого интервала области частот вейвлета, т.е. ширина полосы влияния $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ невелика.

Вопросы, связанные с численными алгоритмами остаются за рамками работы. Приведем лишь несколько коротких и полезных, на наш взгляд, практических рекомендаций.

Дискретное вейвлет-преобразование очень хорошо приспособлено для быстрого численного алгоритма (см., например, [13]), использующего широко применяемую процедуру быстрого преобразования Фурье (FFT).

Непрерывное преобразование выполняется, как правило, прямым численным интегрированием. Самая простая (и быстрая) проверка численного алгоритма заключается в вычислении вейвлет-преобразования функции Дирака (в результате на каждом масштабе должен быть получен анализирующий вейвлет) или функции Гаусса (результат легко можно получить аналитически). Проверить достаточную плотность дискретизации по масштабу можно, вычислив вейвлет-преобразование самого анализирующего вейвлета и убедившись в отсутствии паразитных деталей.

Для дальнейшего анализа коэффициентов нам понадобится знание свойств вейвлет-преобразования. Все они следуют из изложенного уже в разделе 3 материала.

4.2. Свойства вейвлет-преобразования

Мы уже говорили, что коэффициенты вейвлет-преобразования содержат комбинированную информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале. Несмотря на это, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об анализируемом сигнале, так как некоторые свойства вейвлет-преобразования не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от анализатора делает эти простые свойства преобразования очень важными.

Выпишем основные элементарные свойства вейвлет-преобразования функции $f(t)$. Будем использовать обозначение $W[f] = W(a, b)$.

Линейность:

$$\begin{aligned} W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] &= \alpha W[f_1] + \beta W[f_2] = \\ &= \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b). \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда, в частности, следует, что вейвлет-преобразование векторной функции есть вектор с компонентами, представляющими собой вейвлет-преобразование каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

Инвариантность относительно сдвига:

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0). \tag{23}$$

Из этого свойства следует коммутативность дифференцирования, в частности, $\partial_t W[f] = W[\partial_t f]$ (здесь $\partial_t = \partial/\partial t$). Вместе с первым свойством это означает перестановочность и для производных векторного анализа.

Инвариантность относительно растяжения (сжатия):

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \tag{24}$$

Это свойство позволяет, в частности, определять наличие и характер особенностей анализируемой функции (см. раздел 4.3.1).

Кроме трех выписанных не зависящих от выбора анализирующего вейвлета элементарных свойств вейвлет-преобразование обладает еще несколькими. Наиболее важными и полезными из них, на наш взгляд, являются следующие.

Частотно-временная локализация и наличие частотно-временного окна и угла влияния (правильнее было бы говорить о масштабнo-временной локализации). Параметры частотно-временного окна выписаны в разделе 2.4.

Дифференцирование:

$$W[\partial_t^m f] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t^m [(\psi_{ab}^*(t))] dt. \tag{25}$$

Таким образом, чтобы проигнорировать, например, крупномасштабные полиномиальные составляющие и проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации функции f , безразлично, дифференцировать ли нужное число раз анализирующий вейвлет или саму функцию. Это очень полезное свойство, если учесть, что часто функция f представляет собой ряд чисел, а анализирующий вейвлет задан формулой.

Для вейвлет-преобразования существует **аналог теоремы Парсеваля** и выполняется равенство

$$\int f_1(t) f_2^*(t) dt = C_{\psi}^{-1} \iint W_1(a, b) W_2^*(a, b) \frac{da db}{a^2}, \tag{26}$$

откуда следует, что энергия сигнала может быть вычислена через амплитуды (коэффициенты) вейвлет-преобразования подобно тому, как она вычисляется через амплитуды преобразования Фурье:

$$E_f = \int f^2(t) dt = \int |A(\omega) - iB(\omega)|^2 d\omega.$$

Определения и свойства одномерного непрерывного вейвлет-преобразования обобщаются на многомерный и на дискретный случаи. Каждый из них имеет свои особенности. Здесь мы не будем о них говорить, поскольку для дальнейшего нам понадобится непрерывное вейвлет-преобразование одномерных функций.

4.3. Некоторые возможности вейвлет-анализа

Имея вейвлет-спектры, можно вычислить полезные характеристики изучаемого процесса и проанализировать многие его свойства. Опишем более подробно возможности анализа особенностей сигнала и его энергетических характеристик.

4.3.1. Анализ локальной регулярности [6, 13]. Рассмотрим некоторые следствия свойства масштабной инвариантности (24).

Если $f \in C^m(t_0)$, т.е. анализируемая функция в точке t_0 непрерывно дифференцируема вплоть до производной порядка m , то коэффициенты ее вейвлет-преобразования при $b = t_0$ должны подчиняться неравенству

$$W(a, t_0) \leq a^{m+3/2}$$

при $a \rightarrow 0$.

Если $f \in L^\alpha(t_0)$, т.е. анализируемая функция принадлежит пространству холдеровских функций с показателем α (напомним, что это означает: f непрерывна, не обязательно дифференцируема в t_0 , но такая, что $|f(t + t_0) - f(t)| = c|t_0|^\alpha$, $\alpha < 1$, $c = \text{const} > 0$), то коэффициенты ее вейвлет-преобразования при $b = t_0$ должны подчиняться соотношению

$$W(a, t_0) \simeq ca^{\alpha+1/2}$$

при $a \rightarrow 0$.

Вейвлет-преобразование так устроено, что $W(a, t)$ — регулярная функция даже при нерегулярной $f(t)$. Вся информация о возможной особенности $f(t)$ (локализация t_0 , интенсивность c , показатель α) заключена в асимптотическом поведении коэффициентов $W(a, t_0)$ при малых a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то f имеет особенность в t_0 и показатель сингулярности α определяется наклоном зависимости $\log|W(a, t_0)|$ к $\log a$. Если они, напротив, близки к нулю в окрестности t_0 на малых масштабах, то f в точке t_0 регулярна.

Описанное свойство часто и с успехом используется при анализе фрактальных и мультифрактальных сигналов [14, 15]. Типичным свойством фрактальных множеств является их асимптотическое самоподобие. Так, разглядывая f вблизи точки t_0 с разным увеличением, мы на разных масштабах увидим практически ее же:

$$f(\lambda t + \lambda t_0) - f(\lambda t) \simeq \lambda^{\alpha(t_0)} [f(t + t_0) - f(t)].$$

Базис преобразования самоподобен; легко показать, что и коэффициенты преобразования масштабируются с тем же показателем, что и анализируемая функция:

$$W(\lambda a, t_0 + \lambda b) \simeq \lambda^{\alpha(t_0)} W(a, t_0).$$

Отсюда легко получить скейлинговый показатель $a(t_0)$, который, как известно, тесно связан с фрактальной размерностью множества. Анализ мультифрактального множества позволяет определить спектр показателей и спектр размерностей.

Особо отметим, что анализ локальной регулярности в некотором смысле универсален — он не зависит от выбора анализирующего вейвлета.

4.3.2. Энергетические характеристики [6, 16]. Рассмотрим некоторые следствия равенства (26). Из существования для вейвлет-преобразования аналога равенства Парсеваля следует, что в пространстве действительных функций полная энергия сигнала f может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_\psi^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{da db}{a^2}. \quad (27)$$

Плотность энергии сигнала $E_W(a, b) = W^2(a, b)$ характеризует энергетические уровни (уровни возбуждения) исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве $(a, b) =$ (масштаб, время).

На рисунке 3д представлена картина распределения плотности энергии, полученная для части ряда потока ионов солнечного ветра. На картине наиболее светлые места соответствуют наибольшим значениям $E_W(a, b)$, сгущение цвета до черного соответствует уменьшению $E_W(a, b)$ до нуля. Чтобы лучше были видны детали, распределение плотности энергии показано для части ряда и для верхней трети диапазона масштабов (соответствующий фрагмент выделен рамкой на рис. 3в).

Показанный фрагмент демонстрирует, что энергия неравномерно распределена по масштабам — есть выделенные масштабы. Обе картины демонстрируют нестационарную структуру анализируемого процесса с элементами квазипериодичности, с эволюционирующими частотами и с диапазонами локальных периодичностей на разных масштабах.

Локальный спектр энергии. Одной из основных особенностей вейвлет-преобразования является возможность получать локализованные характеристики и изучать локальные свойства процессов. Как ни парадоксально звучат слова "локальный энергетический спектр", однако природа вейвлет-преобразования такова, что термин имеет право на существование. Поясним сказанное.

Зная плотность энергии $E_W(a, b)$, можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке b_0 (или t_0):

$$E_\xi(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi\left(\frac{b - t_0}{a}\right) db.$$

Оконная функция ξ "поддерживает" диапазон около t_0 и удовлетворяет равенству

$$\int \xi(b) db = 1.$$

Если в качестве ξ выбрать функцию Дирака, то локальный спектр энергии примет вид

$$E_\delta(a, t_0) = W^2(a, t_0).$$

Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам — обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени.

Глобальный спектр энергии. Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии коэффициентов вейвлет-преобразования

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db. \quad (28)$$

Его называют также скалограммой (scalogram) или дисперсией вейвлет-преобразования (wavelet variance).

На рисунке 5а представлены спектр мощности $E_F(\omega)$ потока ионов солнечного ветра (рис. 3а) и скалограмма E_W — глобальный спектр энергии коэффициентов вейвлет-преобразования того же сигнала. Спектры достаточно хорошо согласуются, но спектр, вычисленный по коэффициентам вейвлет-преобразования, — гораздо более гладкая кривая. Причина заключается в том, что вейвлет-спектр энергии сигнала E_W соответствует сглаженному спектру мощности E_F . Это можно показать, выразив спектр энергии $E_W(a)$ через спектр энергии сигнала в пространстве Фурье $E_F(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$:

$$E_W(a) = \int E_F(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega.$$

Легко видеть, что скалограмма E_W соответствует спектру мощности E_F , сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета.

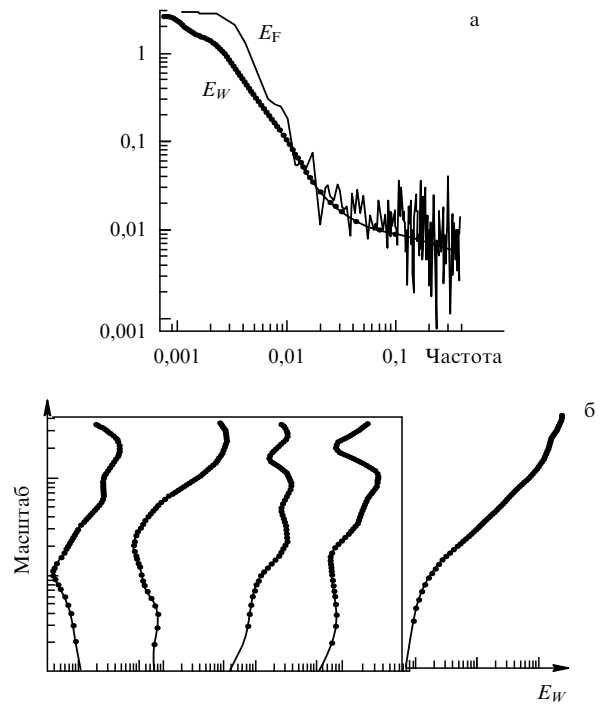


Рис. 5. Энергетические спектры потока ионов солнечного ветра: (а) спектр мощности E_F и скалограмма E_W в зависимости от частоты, (б) скалограммы для четырех временных диапазонов (в рамке) и полная в зависимости от масштаба (он растет вверх). Графики даны в двойном логарифмическом масштабе.

Вейвлет-преобразование, предоставляющее нам как бы временную развертку спектра, позволяет получить и более локализованную энергетическую информацию. На рисунке 5б представлены четыре скалограммы $E_W(a)$, полученные сверткой не по всей длине ряда (рис. 3а), а отдельно для каждой четвертой его части. На том же рисунке для сравнения приведен глобальный спектр (на рис. 5а он показан в зависимости от частоты, на рис. 5б скалограммы показаны в зависимости от масштаба, который здесь растет вверх). Скалограммы, полученные по диапазонам, позволяют проследить эволюцию распределения энергии по масштабам.

Энергия сигнала определяется через спектр энергии равенством

$$E_f = C_\psi^{-1} \int E_W(a) \frac{da}{a^2}. \quad (29)$$

Таким образом, величина E_f пропорциональна площади под кривой $E_W(a)/a^2$, а скалограмма отражает относительный вклад различных масштабов в полную энергию и выявляет распределение энергии процесса по масштабам.

Анализируемая функция имеет конечную энергию, а анализирующий вейвлет — нулевое среднее значение, вследствие чего спектр энергии $E_W(a)$ должен стремиться к нулю на обоих концах шкалы масштабов и должен иметь по крайней мере один максимум. Положение подобных максимумов (пиков) спектра Фурье $E_F(\omega)$ привычно связывается с частотами и соответствующими характерными модами анализируемого сигнала, несущими в себе основную энергию процесса. Максимумы энергетического спектра $E_W(a)$ интерпретируются аналогично — они определяют масштабы процесса, вносящие основной вклад в полную энергию E_f .

Покажем на простом примере связь между выявленным в результате вейвлет-преобразования масштабом и характерным масштабом, полученным из спектра Фурье. Пусть

$$f(t) = \sin(\omega_0 t) = \sin \frac{2\pi t}{T_0}$$

— синусоида; ее вейвлет-преобразование, записанное через образы Фурье (см., например, формулу (17)), есть

$$W(a, b) = \frac{i}{2} [\exp(i\omega_0 b) \hat{\psi}(a\omega_0) + \exp(-i\omega_0 b) \hat{\psi}(-a\omega_0)],$$

а спектр — $E_W(a) = |\hat{\psi}(a\omega_0)|^2$. Необходимым и достаточным условием наличия пика на масштабе $a = a_0$ является равенство нулю производной $d\hat{\psi}(a\omega_0)/da$ при $a = a_0$. Условие выполняется при $a_0\omega_0 = \omega_\psi$, где ω_ψ — зависящая от вейвлета ψ константа с размерностью частоты. Для многих вейвлетов константа ω_ψ вычисляется аналитически; так, для НААР- и МНАТ-вейвлетов она равна $1,484\pi$ и $\sqrt{2}$ соответственно.

На практике, если скалограмма $E_W(a)$ имеет пик при $a = a_0$, характерный временной масштаб определяется как $d = T_0/2 = a_0\pi/\omega_\psi$. Множитель $1/2$ появился из-за того, что определяется не период, а масштаб элементарного события, детали. В этом смысле синус, например, имеет две элементарные детали на периоде.

Константа ω_ψ получена для простой функции. Распространяя результат на произвольный сигнал, даже негармонический, мы предполагаем, что положение максимума спектра $E_W(a)$ (т.е. выявленный масштаб) можно интерпретировать как среднюю продолжительность элементарного события (событий), вносящего основной вклад в энергию анализируемого процесса. Этот факт проверен на многих известных сигналах с разными вейвлетами и признан очень хорошим приближением (см., например, [16]).

Выпишем еще две характеристики, определяемые через плотность энергии, — меру локальной перемежаемости и меру контрастности анализируемого сигнала.

Мера локальной перемежаемости:

$$I_W(a, t) = \frac{E_W(a, t)}{\langle E_W(a, t) \rangle_t}$$

— мера локальных отклонений от среднего поля спектров на каждом масштабе; она позволяет определить степень неравномерности распределения энергии по масштабам (угловыми скобками здесь обозначено усреднение).

Равенство $I_W(a, t) = 1$ при всех a и t означает, что энергия распределена равномерно и все локальные спектры энергии одинаковы; $I_W(a, t_0) = \alpha$ означает, что вклад компоненты масштаба a в точке t_0 в α раз превосходит усредненный по всем t .

Мера контрастности

$$C_W(a, t) = \frac{E_W(a, t)}{E'_W(a, t)}, \quad E'_W(a, t) = \int_{a'=0}^{a'=a} E_W(a', t) da'$$

позволяет определять даже малые изменения в сигнале, когда необходимо, например, выявить структурированность слабого сигнала или слабые вариации на фоне крупной структуры (встроенные структуры).

5. Применение вейвлет-преобразования к модельным сигналам

В этом разделе показаны некоторые возможности вейвлет-преобразования в выявлении различных особенностей сигналов. Вейвлет-преобразование применяется к модельным сигналам, построенным на основе функций с хорошо известными свойствами (см. также [17]).

Для каждого примера приведен график анализируемого ряда. Коэффициенты $W(a, b)$ показаны в виде проекций на плоскость ab (временной масштаб, время); по оси абсцисс отложено время, по оси ординат — временной масштаб (он линейно растет вниз). Как и на рис. 3б, светлые области соответствуют положительным, а темные — отрицательным значениям $W(a, b)$, оттенками серого цвета в каждой области выделены диапазоны значений $W(a, b)$. Картины линий локальных экстремумов или локальных максимумов представлены в тех же координатах.

Приведенные результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета. Вычисления проводились в прямоугольной области значений параметров a, b . Ряды данных для этого продлевались; способ дополнения показан на графиках анализируемых функций. На картинах линий локальных максимумов показан треугольник достоверности, или максимальный угол влияния.

5.1. Гармоническая функция

Вейвлет-преобразование применялось к рядам синусоид

$$f(t) = \sin \frac{2\pi t}{T_1} + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T_2}.$$

Результаты вейвлет-преобразования такой функции легко сравнить с теми, что дает привычное преобразование Фурье. Значения периодов T_1, T_2 и постоянной α анализируемых сигналов приведены в табл. 1. В нее занесены также номер соответствующего рисунка и

номер сигнала. По коэффициентам вейвлет-преобразования должны быть получены масштабы $D_1 = T_1/2$, $D_2 = T_2/2$.

Таблица 1. Параметры гармонических функций

T_1	T_2	α	Номер рисунка	Номер сигнала
200	10	0,4	6	1
200	10	0,4	—	2
50	—	—	—	3
25	—	—	8	4
25	50	1	9а	5
25	50	1	9а	6
25	23	1	10а	7
25	23	1	10б	8

Сигнал 1. На рисунке 6а показан сигнал — сумма синусоид с заметно отличающимися частотами (как видно из графика, ряд продолжен средним значением).

На картине значений коэффициентов (рис. 6б) легко различаются многочисленные периодически повторяющиеся детали в верхней части картины (при малых значениях масштаба a), являющиеся результатом резонанса высокочастотной составляющей сигнала с мелкомасштабными вейвлетами; а также три темные и две светлые области на крупных масштабах (положительные и отрицательные значения $W(a, b)$ соответственно),

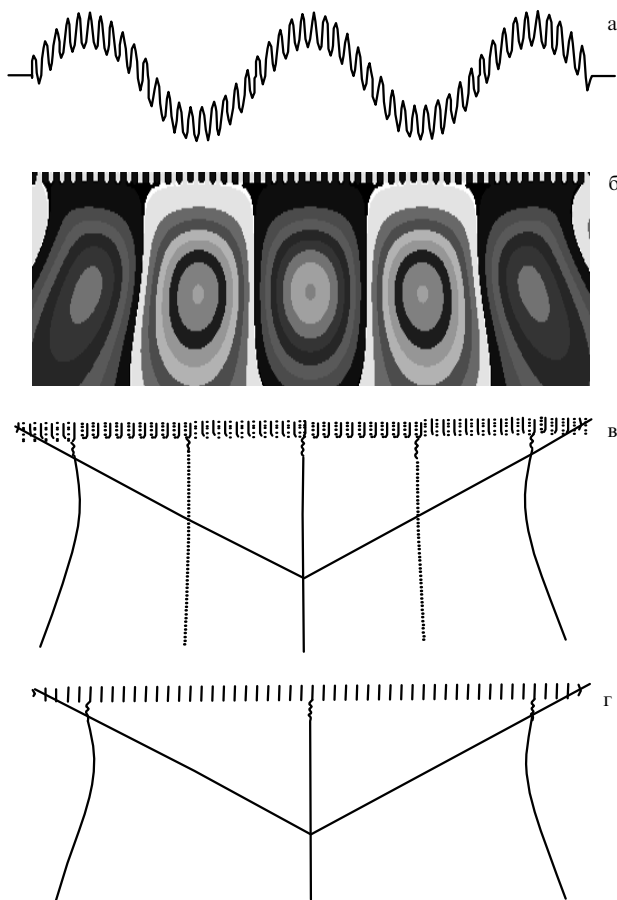


Рис. 6. Сигнал 1 (а) и результаты его вейвлет-преобразования: картины коэффициентов (б), линий локальных экстремумов (в) и линий локальных максимумов (г).

являющиеся результатом сильной корреляции между крупномасштабными вейвлетами и низкочастотной составляющей сигнала, представленной всего двумя с половиной периодами.

На рисунке 6в представлены линии локальных экстремумов; сплошные линии отмечают локальные максимумы, точечные — локальные минимумы. На картине локальных максимумов (рис. 6г) показаны только линии, относящиеся к положительным экстремумам. Обе картины выявляют периодическую структуру анализируемого сигнала и представляют собой масштабно-временной скелет описываемого сигналом процесса. Линии, отмечающие положение локальных экстремумов коэффициентов вейвлет-преобразования, соответствуют экстремумам анализируемой функции — точкам смены знака ее производной.

В дальнейшем будет демонстрироваться лишь один из скелетов; если линии локальных минимумов не несут смысловой нагрузки и лишь усложняют рисунок, как для сигнала 1, то будет представлена только картина линий локальных максимумов.

Сигнал 2 представляет собой часть сигнала 1. Картина коэффициентов вейвлет-преобразования позволяет говорить о крупномасштабной составляющей в сигнале, даже если на длине сигнала уложился всего один период крупномасштабной составляющей сигнала 1.

Энергетический спектр $E_W(a)$ позволяет в этом простом случае определить даже масштаб крупномасштабной составляющей сигнала, хотя она и представлена всего одним периодом. На рисунке 7 показан спектр энергии $E_W(d)$; напомним, что для МНАТ-вейвлета характерный временной масштаб d связан с масштабом вейвлет-преобразования a соотношением $d = a\pi/\sqrt{2}$. Сплошной линией на рисунке показан энергетический спектр сигнала 2, штриховой — сигнала 1. В обоих случаях легко выделяются пики, соответствующие масштабам 5 и 100; мелкомасштабная часть спектра более подробно показана в правом верхнем углу рисунка. С помощью спектров Фурье в обоих случаях удается выявить только высокочастотную составляющую.

Сигналы 3 и 4 представляют собой синусоиды с периодами равными 50 и 25 соответственно. На рисунке 8 показаны сигнал 4 и полученные картины коэффи-

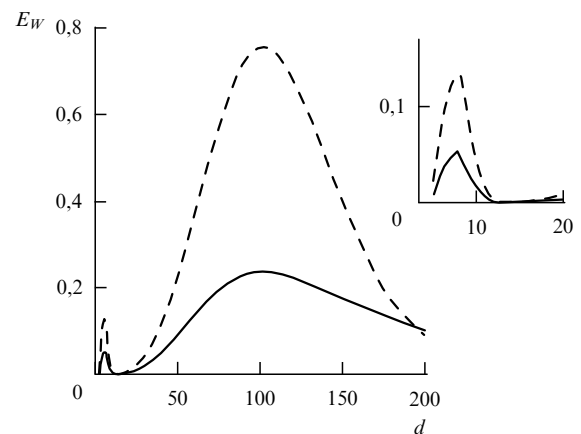


Рис. 7. Энергетические спектры $E_W(d)$ сигналов 1 (штриховая линия) и 2 (сплошная линия); в верхнем углу справа более крупно показана мелкомасштабная часть спектра.

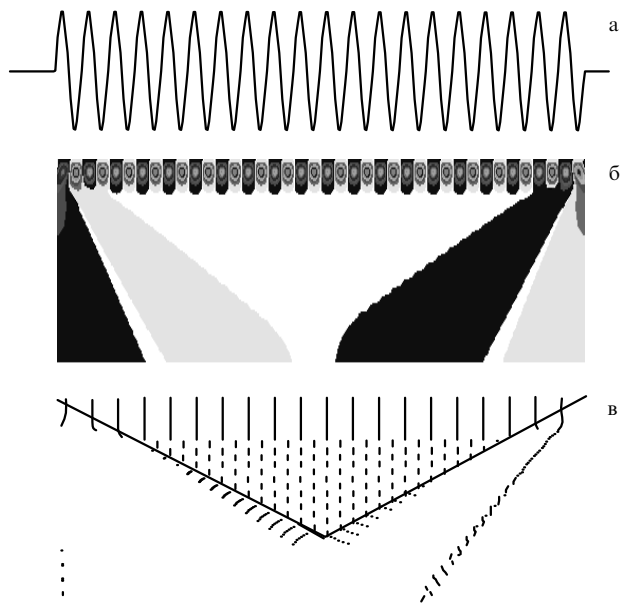


Рис. 8. Сигнал 4 и картины коэффициентов и линий локальных максимумов.

циентов вейвлет-преобразования и линий локальных максимумов. Верхние части картин демонстрируют периодический характер сигнала. Темные и светлые крупномасштабные детали в нижней части картины коэффициентов связаны с граничными эффектами и очень малоинтенсивны; на рисунках это проявляется в том, что эти крупномасштабные области имеют заметно меньше цветовых уровней, чем основные периодические детали (здесь — один цветовой уровень), и волнистые линии локальных экстремумов.

Одинаковая длина линий локальных максимумов (внутри треугольника достоверности) и периодичность

их появления указывают на единственную характерную частоту сигнала и постоянство периода. Об этом свидетельствует также своеобразная "штриховая" структура скелетона в нижней части треугольника достоверности; в случае наличия нескольких частот (см. результаты для сигналов 6 и 8) она станет "интерференционной".

Такая своеобразная интерференционная (или штриховая, как для сигнала 4) структура скелета возникает в тех случаях, когда длина ряда оказывается достаточной, чтобы внутри треугольника достоверности реализовались все присущие сигналу масштабы (это выполняется для всех рассмотренных сигналов, кроме первого), и из-за того, что коэффициенты $W(a, b)$ после реализации всех масштабов резко уменьшаются, становятся очень малыми и стремятся к нулю колебательным образом (отсюда и волнистые линии локальных максимумов).

Вычисленные по значениям коэффициентов вейвлет-преобразования сигналов 3 и 4 спектры $E_W(d)$ имеют характерные пики на масштабах 25 и 12,5 соответственно.

Сигналы 5 и 6 представляют собой разные комбинации сигналов 3 и 4: сигнал 5 составлен из последовательно включающихся сигналов 3 и 4, а сигнал 6 представляет собой их сумму. Сигналы 5 и 6 интересны тем, что они неразличимы для преобразования Фурье: легко удостовериться, что их спектры Фурье $E_F(\omega)$ практически одинаковы. Для вейвлет-преобразования эти сигналы очень разные, см. соответствующие сигналам 5 и 6 картины коэффициентов и линий локальных максимумов на рис. 9а и рис. 9б.

Энергетические вейвлет-спектры этих сигналов, как и их спектры Фурье, очень похожи, поскольку получены сверткой по всей длине ряда. Они имеют широкие максимумы, поглощающие оба масштаба. Заметим, что нестационарные свойства сигналов, например, эволюционирующие частоты (масштабы), хорошо выявляются с помощью локализованного спектрального

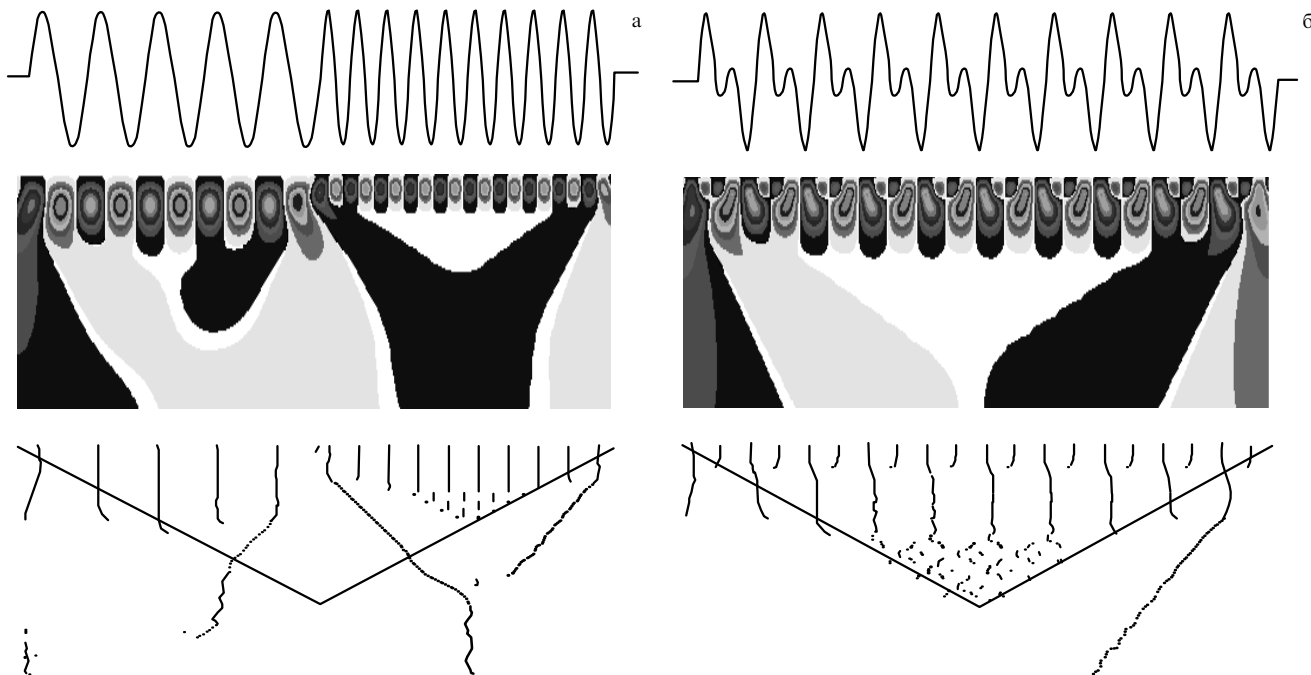


Рис. 9. Сигналы 5 (а) и 6 (б) — то же, что на рис. 8.

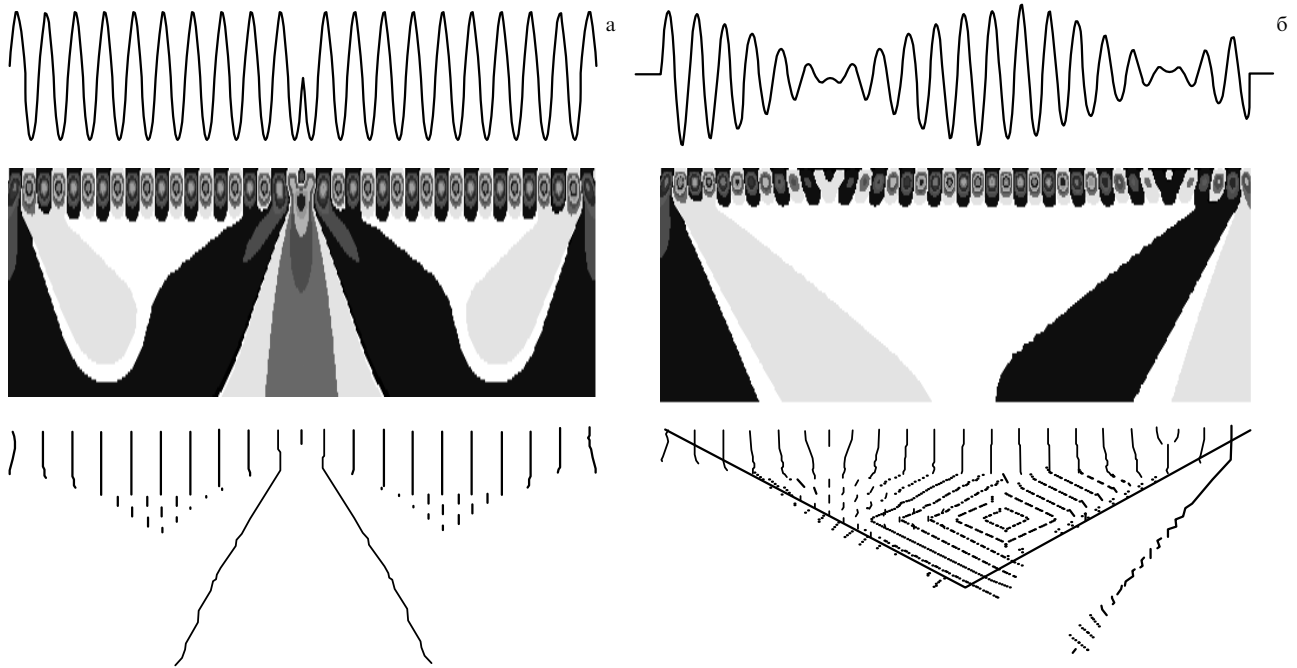


Рис. 10. Сигналы 7 (а) и 8 (б) — то же, что на рис. 8.

анализа, когда при вычислении спектров $E_W(d)$ свертка коэффициентов вейвлет-преобразования ведется не по всей длине ряда, а по его отрезкам.

Сигнал 7. На рисунке 10а представлены результаты для сигнала, отличающегося от сигнала 4 лишь фазовым сдвигом на π в середине ряда. Ясно, что спектр Фурье такого сигнала отличается от спектра Фурье сигнала без фазового сдвига наличием дополнительных пиков. Причина в том, что любая деталь сигнала в любой части ряда оказывает влияние на все коэффициенты Фурье и все частоты.

Присутствие деталей такого рода в сигнале с учетом прямой связи между частотами в спектре и характерными масштабами процесса может заметно исказить интерпретацию результата. Обычно наличие дополнительных пиков в спектре связывается с наличием нескольких масштабов, которых в приведенном примере на самом деле нет — масштаб один.

Вейвлет-преобразование прекрасно справляется с такого рода особенностью, локализуя ее (см. картины коэффициентов и линий локальных максимумов на рис. 10а).

Сигнал 8. На рисунке 10б приведены результаты для сигнала, представляющего собой сумму двух синусоид с очень близкими частотами; наличие второй частоты проявляется лишь наклоненными линиями локальных максимумов. Подобные наклоны могут появиться и в результате низкочастотной модуляции, однако в таком случае не было бы характерной интерференционной картины скелетона, говорящей о реализации всех масштабов, присутствующих в сигнале.

5.2. Сигнал с особенностью

В сигналах часто встречаются изолированные особенности типа импульса, ступеньки, степенные особенности и т.п. Это могут быть как присущие описываемому сигналом процессу детали, так и паразитные детали, например, сбои аппаратуры. Преобразование Фурье сигнала,

регулярного везде за исключением одной сбойной точки, несет информацию о ней во всех своих коэффициентах. Изолированные особенности практически не фильтруются, искажая спектр и реконструированный сигнал.

Вейвлет-преобразование применялось к сигналам с особенностями некоторых из перечисленных типов. На рисунке 11 кроме сигналов представлены картины линий локальных экстремумов (они более характерны) и схематически изображены несколько линий уровня значений коэффициентов $W(a, b)$ (сплошные линии относятся к положительным, штриховые — к отрицательным значениям).

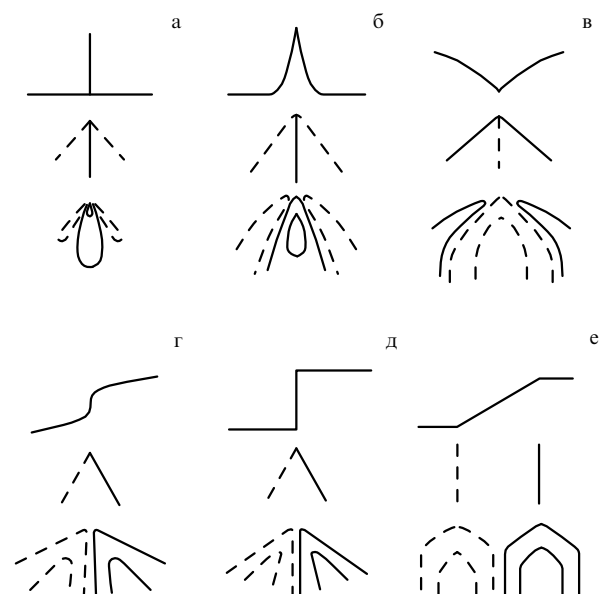


Рис. 11. Вейвлет-преобразование сигнала с особенностями: δ -функция, $|t^5|$, $t^{2/3}$, $t^{1/3}$, скачок, излом (слева направо).

Все точечные особенности, содержащиеся в сигналах, сопровождаются линиями локальных максимумов, исходящими из этих точек. Количество их определяется характером особенности сигнала и анализирующим вейвлетом.

Примеры в разделе 5.1 показали, что смена знака производной анализируемой функции отмечается линией локальных экстремумов распределения $W(a, b)$.

На рисунке 11а показано преобразование сигнала с особенностью типа δ -функции. Следующие два примера (рис. 11б, в) содержат особенности, при которых смена знака производной сопровождается разрывом функции (степенные особенности вида $|t^5|$ и $t^{2/3}$ соответственно). В этом случае точка локализации особенности сигнала отмечена тремя линиями скелетона. Центральная линия является линией максимумов или минимумов в зависимости от того, имеет ли сигнал в этой точке максимум или минимум. Аналогично выглядят результаты вейвлет-преобразования δ -функции.

Особенности менее высокого порядка, такие, как перегиб функции $t^{1/3}$ (рис. 11г) или скачок (рис. 11д), отмечаются двумя линиями локальных экстремумов, излом (рис. 11е) — одной.

Таким образом, вейвлет-преобразование способно выявить положение особенности — коэффициенты вейвлет-преобразования гладкой функции малы и резко возрастают при появлении особенности, отмечая ее локализацию линиями локальных экстремумов. Характер особенности в точке определяется из асимптотического поведения коэффициентов вейвлет-преобразования при стремлении масштаба к нулю. Например, значения коэффициентов вейвлет-преобразования δ -функции максимальны на малых масштабах, а с ростом масштаба резко убывают, повторяя характер особенности. Изолированная особенность локальным образом влияет на коэффициенты вейвлет-преобразования и при необходимости может быть легко удалена из сигнала или скорректирована.

Приведенные результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета, имеющего два равных нулю момента (нулевой и первый). Вейвлеты же, имеющие только один нулевой момент, неспособны различать особенности производных. Распределение коэффициентов вейвлет-преобразования, полученное с помощью такого вейвлета, имеет меньше линий локальных экстремумов. Например, для первых трех сигналов, отсутствует центральная линия экстремумов; особенность производной сигнала с перегибом (рис. 11г) не отмечена вообще, а скачок (рис. 11в) сигнала отмечен одной линией экстремума.

Чем выше порядок анализирующего вейвлета, чем больше нулевых моментов он имеет, тем лучше вейвлет-преобразование дифференцирует особенности.

Отметим, что вейвлет-преобразование с вейвлетами разного порядка с успехом может быть использовано для выявления наличия и характера наиболее крупномасштабной составляющей сигнала — так называемого тренда. Применяв к коэффициентам реконструкционную формулу и вычтя реконструированный сигнал из исходного, можно выделить ту самую крупномасштабную составляющую, которая обращается в нуль вследствие наличия нулевых моментов у вейвлета: постоянная составляющая, линейный или полиномиальный тренд и т.п. Таким образом, устраняется элемент субъективизма,

который почти всегда присутствует при определении тренда другими способами.

5.3. Фрактальное множество

Вейвлет-преобразование с его иерархическим базисом хорошо приспособлено для анализа каскадных процессов, турбулентных сигналов, фрактальных и мультифрактальных множеств, имеющих иерархическую природу.

Приведем пример анализа фрактального множества, построенного на основе однородного триадного канторовского ряда. Как известно, при построении первого поколения этого ряда отрезок делится на три части, средняя из которых выбрасывается; при построении второго поколения такая же процедура продлевается с двумя оставшимися отрезками и так на каждом последующем этапе до бесконечности. На рисунке 12а показаны первые этапы построения ряда.

На основе получившегося множества — канторовской пыли — строится числовая последовательность, состоящая из нулей и единиц (нули соответствуют выбрасываемым при построении ряда частям отрезка).

На рисунке 12б показаны фрагменты картин коэффициентов и линий локальных максимумов. Они достаточно подробны, однако линейное изменение масштаба

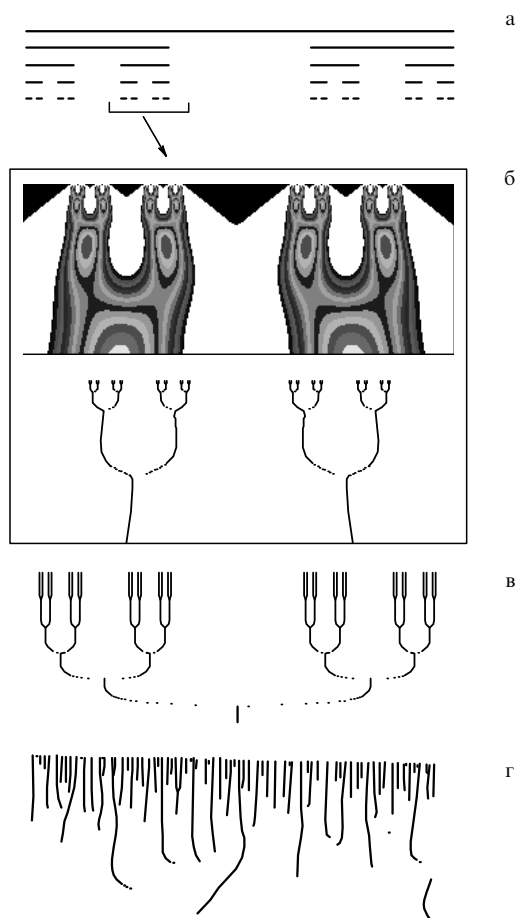


Рис. 12. Первые поколения однородного триадного канторовского ряда (а), фрагменты картин коэффициентов и линий локальных максимумов (б); картины линий локальных максимумов триадного однородного канторовского ряда (в) и случайного процесса (г) в логарифмическом масштабе.

не позволяет охватить большой диапазон масштабов. Чтобы продемонстрировать общий характер процесса, на рис. 12в скелетон показан в логарифмическом масштабе.

Картина коэффициентов демонстрирует иерархическую структуру анализируемого множества. Еще более ясно она видна на картинах линий локальных максимумов. Скелетон выявляет не только иерархическую структуру анализируемого множества, но и способ построения фрактальной меры, на которой оно сформировано.

Каждый этап каскадного процесса, каждое дробление масштаба отмечено на картине локальных максимумов ветвлением, появлением характерной "вилочки" — линия, отмечающая положение локального максимума, раздваивается, расходясь на два независимых локальных максимума. Это неизменно повторяется, так как мера обладает свойством самоподобия и монофрактальна.

Известно, что фрактальная размерность или размерность подобия однородного канторовского ряда $D_f = \ln m / \ln s$, где m — скорость ветвления, s — масштабный множитель. В случае триадного ряда $D_f = \ln 2 / \ln 3$. Аналогично размерность вычисляется по коэффициентам вейвлет-преобразования как предел (при стремлении к нулю масштаба) отношения $\ln N(a) / \ln a$; здесь $N(a)$ — число локальных максимумов. Чем более высокого порядка поколение канторовского ряда используется, тем точнее определяется его размерность; для 10-го, 11-го поколения вычисленное по коэффициентам вейвлет-преобразования значение размерности практически совпадает с теоретическим.

Для сравнения на рис. 12г представлены линии локальных максимумов случайного процесса. Видно, насколько даже качественно различаются "древовидная" структура скелетона каскадного процесса и "травовидный" скелетон случайного (можно сравнить с периодическими скелетами гармонических функций и "кустами" линий, отмечающими особенности сигналов).

6. Анализ временных метеорологических рядов

В этом разделе представлены результаты анализа реальных данных — долговременных рядов наблюдений за изменениями некоторых метеорологических параметров.

6.1. Процесс Южное Колебание — Эль-Ниньо

Южное Колебание — крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана. Южное Колебание тесно связано с явлением Эль-Ниньо — резким потеплением океанических вод вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки. Этот глобальный процесс планетарного масштаба в системе атмосфера — океан, Южное Колебание и Эль-Ниньо (ЮКЭН или ENSO — El-Nino and Southern Oscillation), оказывает заметное влияние на динамику всей климатической системы планеты, воздействуя на циркуляции Гадля и Уокера и на расположение областей активной конвекции в приэкваториальной зоне.

Процессы в тропической зоне, как предполагается, играют важную роль в формировании динамики климата в масштабах десятилетия и более. Опишем коротко это чрезвычайно интересное и важное явление ЮКЭН — своеобразные "диалоги ветра и моря".

Рождественское дитя — El-Nino (испанское для Christ Child), — так издавна называли рыбаки Эквадора и Перу теплое течение в океане, появлявшееся чаще всего к Рождеству и существовавшее в течение некоторого времени. В этот период рыба не ловилась (прекращался прибрежный апвеллинг). Теплое течение (и каникулы) могло появиться в мае или даже в июне, однако термин Эль-Ниньо за ним и связанными с ним явлениями с годами закрепился.

В 1920-х годах известный английский ученый Уокер (Gilbert Walker) работал в Индии над проблемой предсказания муссонов, приносящих иногда катастрофические ливни. Изучая, в частности, показания барометров, он обнаружил зависимость между данными, полученными на станциях в западной и восточной частях Тихого океана. Термин Южное Колебание был введен им для обозначения аномалий приземного атмосферного давления вдоль тропической зоны. Чередование знаков аномалий напоминает гигантские качели, перекачивающие массы воздуха между Восточным и Западным полушариями.

Вблизи центров действия Южного Колебания противоположного знака находятся станции, расположенные на острове Таити (17° ю.ш., 150° з.д.) и в городе Дарвин (12° ю.ш., 150° в.д.). Считается, что временной ряд разностей нормализованных аномалий давления этих станций (индекс Южного Колебания $C(t)$) является наиболее обоснованной характеристикой временной динамики Южного Колебания.

Связь между этими двумя явлениями, Эль-Ниньо (в океане) и Южное Колебание (в атмосфере), была осознана гораздо позже — после сильного Эль-Ниньо в 1957 г. Долгое время общепринятой являлась интерпретация этой связи, основанная на гипотезе Виртки (Wyrtki) [18], хорошо проиллюстрированная в [19] и состоящая в следующем.

При нормальных условиях, $C \cong 0$, северо-восточные и юго-восточные пассатные ветры нагоняют теплую воду в западную часть Тихого океана; уровень моря здесь на 40 см превышает уровень моря в восточной части. Сгон воды сопровождается апвеллингом — подъемом глубинной холодной богатой питательными веществами воды у тихоокеанского побережья Южной Америки. При $C > 0$ описанные явления выражены сильнее.

Когда индекс C уменьшается и становится отрицательным, градиент давления между восточной и западной частями Тихого океана заметно уменьшается. Не испытывая сопротивления ветра, теплая вода устремляется на восток, достигает берегов Южной Америки и затем движется к северу, к югу и в виде отраженной волны — на запад. Область теплой воды быстро расширяется.

Повышение температуры поверхности в восточной и центральной частях Тихого океана меняет расположение областей конвекции в атмосфере. Обычно конвекция активна над Индонезией и в западной части Тихого океана. С уменьшением индекса Южного Колебания в окрестностях австралийско-индонезийского центра действия наступает период очень сухой погоды, а в центральных и восточных частях Тихого океана, где дождей обычно не бывает, начинаются проливные дожди. Население прибрежных стран Южной Америки страдает от наводнений и шквалов; из-за прекращения прибрежного апвеллинга и выноса питательных веществ мигрируют или гибнут рыбы, птицы, животные. Такие периоды

бывают длительными, и это становится настоящим экологическим бедствием.

Меняется расположение областей конвекции в атмосфере не только над Тихим океаном, но и во всей приэкваториальной зоне. Сухая погода приходит на западные побережья Африки и Южной Америки, где обычно выпадает нормальное количество осадков. Наблюдается смещение путей распространения тропических циклонов. В Атлантике при Эль-Ниньо заметно уменьшается, а во Французской Полинезии увеличивается число дней с тропическими циклонами.

Хорошей иллюстрацией связи Южного Колебания и Эль-Ниньо являются результаты работы [20], где, в частности, представлены долго- и коротко-временной разрез аномалий поверхностной температуры на экваторе и синхронный ход индекса Южного Колебания за 1979–1988 гг. Изотермы строились по данным Вашингтонского центра климатических анализов. В рассматриваемый отрезок времени попали три теплых и три холодных эпизода.

Сравнение долго- и коротко-временного разреза аномалий поверхностной температуры на экваторе и синхронного хода индекса Южного Колебания $C(t)$ позволяет выявить некоторые закономерности. Отметим по крайней мере три характерных момента. Имеется отрицательная корреляция между C и температурой поверхности океана: чем больше C , тем ниже температура, и чем больше по модулю отрицательное значение C , тем выше температура. Положительные аномалии температуры сохраняются дольше, чем отрицательные значения индекса C : во время развития Эль-Ниньо уменьшение C начинается одновременно с появлением положительной аномалии температуры в восточной части Тихого океана, увеличение же C после минимума начинается на 3–4 месяца раньше, чем падение температуры. Температура в экваториальной зоне Атлантического океана изменяется независимо от аномалий в Тихом океане, а колебания температуры в западной части экваториальной зоны Индийского океана и в восточной части Тихого океана коррелируют.

Аномальный нагрев вод в Тихом и Индийском океанах приводит к нагреву экваториальной атмосферы и обостряет контраст температур на экваторе и полюсах, что в свою очередь ведет к увеличению интенсивности зональной циркуляции.

Необычное расположение областей повышенной конвекции при Эль-Ниньо возмущает атмосферную циркуляцию не только в приэкваториальной зоне, но и на всем земном шаре. Связанные с этим аномалии погоды обнаруживаются в зонах умеренных широт. Так, сильное Эль-Ниньо 1982–1983 гг. привело к тому, что зимой 1982–1983 гг. с Северной Атлантики через Скандинавию двигались на восток необычайно интенсивные циклоны. Напомним, что вызванные ими штормы размыли Куршскую косу. Многие природные явления, происходящие во время действия Эль-Ниньо, имеют тяжелые экологические и экономические последствия.

Неудивительно, что процесс Южное Колебание–Эль-Ниньо и его последствия являются предметом неугасающего уже многие годы внимания исследователей. Последнее десятилетие было посвящено его пристальному изучению (программа TOGA). Получены новые данные, интерпретация связи Южного Колебания с Эль-Ниньо, основанная на гипотезе Виртки, претерпела

некоторые изменения. Выяснилось, что периодичность и сценарии ЮКЭН заметно меняются во времени. Так, аномалия поверхностной температуры может мигрировать не только на восток, но и на запад; пятно теплой воды может не достигать берегов Экватора и Перу, а ограничиваться центральной частью Тихого океана и т.п.

Явлениям Эль-Ниньо и Южное Колебание посвящено много публикаций, однако многие детали изучены недостаточно, особенно на масштабах более десятилетий и менее месяцев.

Объектом анализа являются следующие временные ряды: данные, свидетельствующие о динамике событий Эль-Ниньо за последние 500 лет из [21] (раздел 6.2), среднемесячные значения индекса Южного Колебания $C(t)$ за период с 1882-го по 1990 гг. из [20] (раздел 6.3) и суточные значения индекса $C(t)$ за период с 1981-го по 1990 гг. (раздел 6.4), полученные сотрудниками Д.М. Сонечкина (Гидрометеоцентр); частично результаты анализа динамики индекса Южного Колебания опубликованы в [22].

Для выявления связи между глобальным потеплением и Эль-Ниньо проведен анализ рядов Джонса (Jones) [23] — рядов аномалий среднегодовых значений приповерхностной температуры воздуха (глобальной и полушарной) за период 1850–1990 гг. (см. раздел 6.5).

6.2. 500 лет из жизни Эль-Ниньо

Данные об аномалиях давления и поверхностной температуры охватывают чуть более столетия, поскольку систематические наблюдения начались не очень давно. Существуют многочисленные попытки реконструкции более чем тысячелетней истории ЮКЭН. При реконструкции используются косвенные свидетельства, которые могут говорить о событиях Эль-Ниньо (ископаемые остатки, хроники и т.д.). Например, свидетельства о засухах и наводнениях, состоянии снега и льда на горных вершинах, составе ископаемой микрофлоры, скорости роста скелета кораллов, кольцах роста деревьев и др.

Наиболее достоверными нам представляются данные из [21] о частоте событий Эль-Ниньо за последние 500 лет. Данные основаны на свидетельствах о количестве тайфунов в Южном Китае, холодных зимах в Восточной Азии, засухах в Австралии, наводнениях на Ниле и в Перу, причиной которых могли явиться события Эль-Ниньо, и представлены в табл. 2 [21].

Анализируемый ряд состоит из нулей (в годы, когда, по мнению автора работы [21], весь комплекс косвенных данных свидетельствует об отсутствии событий Эль-Ниньо) и единиц (в годы с Эль-Ниньо). За период с 1470-го по 1987 гг. обнаружено 114 событий Эль-Ниньо со средним интервалом между ними около 4,5 лет (в табл. 2 перечислены годы, когда они происходили). Автор [21] отмечает возможность существования 70-летнего цикла и в качестве иллюстрации приводит усредненные по 10 годам данные, расположенные в порядке, представленном в табл. 3.

На рисунке 13а представлен график зависимости числа событий Эль-Ниньо от времени. Для удобства показаны усредненные по десяти годам значения — видно, что за десятилетие происходило от одного до четырех событий Эль-Ниньо. Картина коэффициентов вейвлет-преобразования усредненных данных, состоящих из ряда нулей и единиц, показана на рис. 13б. Шкала времени здесь совпадает с осью абсцисс графика, шкала

Таблица 2. События Эль-Ниньо с 1470-го по 1989 гг. [21]

Годы	События	Сумма	Годы	События	Сумма
1470-е	73-74, 79	2	1730-е	36	1
1480-е	84, 87-88	2	1740-е	40, 42, 44, 47	4
1490-е	90, 93, 96-97, 99	4	1750-е	54, 56	2
1500-е	09-10	1	1760-е	61, 63, 65-66, 69	4
1510-е	17-18	1	1770-е	71, 73, 75, 78-79	4
1520-е	20-21, 25-26, 29-30	3	1780-е	82-83, 86-87	2
1530-е	32-33, 39	2	1790-е	91, 98	2
1540-е	41, 45, 47	3	1800-е	03-04, 06-07	2
1550-е	52-53, 59-60	2	1810-е	12-13, 15, 17	3
1560-е	65, 67-68	2	1820-е	21, 24-25, 28	3
1570-е	78	1	1830-е	31-32, 36-37	2
1580-е	85-86	1	1840-е	44-45	1
1590-е	90-91, 95-96	2	1850-е	50, 54-55, 57-58	3
1600-е	00, 04, 07	3	1860-е	64, 66, 68	3
1610-е	10, 14-15, 18-19	3	1870-е	77-78	1
1620-е	24-25	1	1880-е	80-81, 84, 88	3
1630-е	34-35, 37-38	2	1890-е	91, 96, 99-00	3
1640-е	40-41, 47	2	1900-е	02, 04-05	2
1650-е	50	1	1910-е	11, 13-14, 18-19	3
1660-е	60-61	1	1920-е	25-26	1
1670-е	71, 74	2	1930-е	30	1
1680-е	80-81, 84, 87-88	3	1940-е	40-41, 44-45	2
1690-е	92, 96	2	1950-е	51, 53, 57-58	3
1700-е	01, 04, 07	3	1960-е	63, 65, 68-69	3
1710-е	15-16	1	1970-е	72, 76	2
1720-е	20-21, 23, 25	3	1980-е	82-83, 86-87	2

масштабов линейно растет вниз до 300 лет (чтобы показать все крупномасштабные детали, которые можно получить при анализе имеющегося конечного ряда).

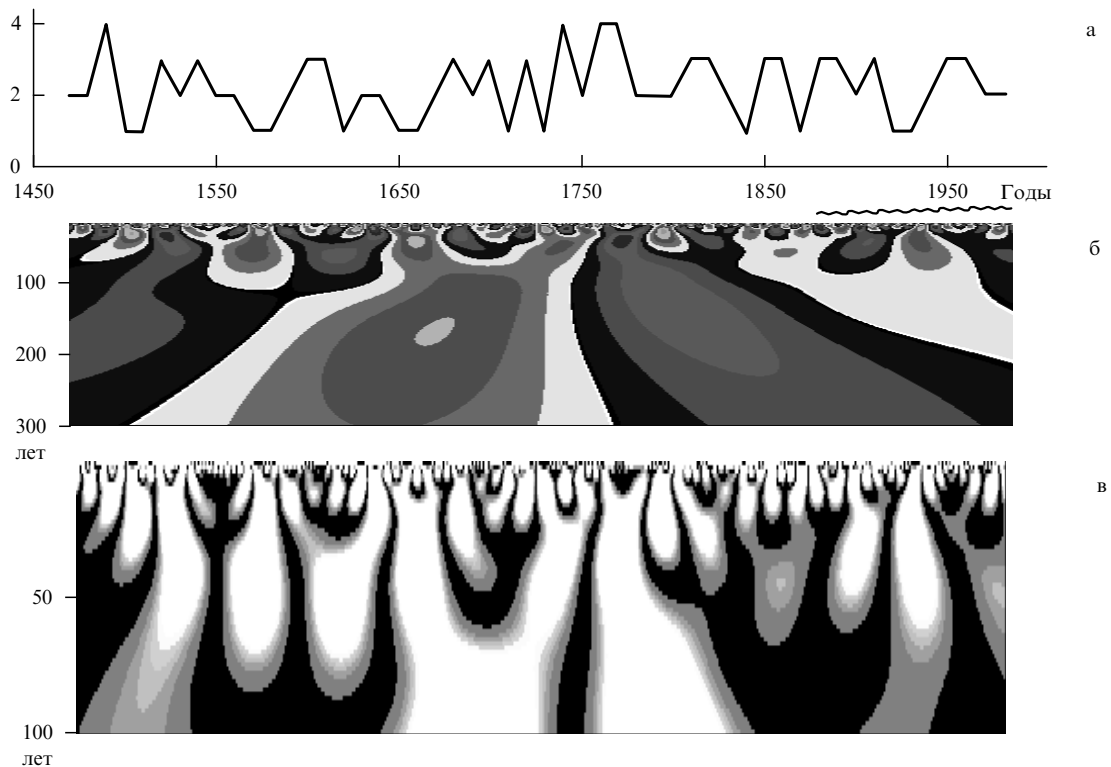
На рисунке 13б обращает на себя внимание тот факт, что масштаб около сотни лет разделяет картину коэффициентов на две заметно различающиеся области. В

Таблица 3. Количество событий Эль-Ниньо за десятилетия — демонстрация 70-летнего цикла [21]

Годы, события	1500-е	1510-е	1520-е	1530-е	1540-е	1550-е	1560-е
	1	1	3	2	3	2	2
1570-е	1580-е	1590-е	1600-е	1610-е	1620-е	1630-е	
1	1	2	3	3	1	2	
1640-е	1650-е	1660-е	1670-е	1680-е	1690-е	1700-е	
2	1	1	2	3	2	3	
1710-е	1720-е	1730-е	1740-е	1750-е	1760-е	1770-е	
1	3	1	4	2	4	4	
1780-е	1790-е	1800-е	1810-е	1820-е	1830-е	1840-е	
2	2	2	3	3	2	1	
1850-е	1860-е	1870-е	1880-е	1890-е	1900-е	1910-е	
3	3	1	3	3	2	3	
1920-е	1930-е	1940-е	1950-е	1960-е	1970-е	1980-е	
1	1	2	3	3	2	2	
Сумма	11	12	12	20	20	15	17

нижней части картины видны всего лишь две с небольшим крупномасштабные (с масштабом более 150 лет) детали. Совершенно отличная структура наблюдается в верхней части картины: практически вся временная динамика анализируемого процесса сосредоточена на масштабах до 100 лет.

Распределение плотности энергии $E_W(a, b)$, показанное на рис. 13в для верхней трети диапазона масштабов (до 100 лет), позволяет более детально изучить временную структуру процесса. Несмотря на явную нестационарность, вблизи некоторых масштабов видна похожая на периодическую структура. Так, в начале и в конце анализируемого временного отрезка выделяются по три

**Рис. 13.** Динамика количества событий Эль-Ниньо за 500 лет (а), картины коэффициентов (б) и распределения плотности энергии (в).

детали с масштабами около 40 лет (в конце ряда они менее интенсивны). В середине рисунка эта 40-летняя периодичность прерывается — здесь видны несколько деталей с масштабами около 25–30 лет, которые формируют две крупномасштабные детали (приблизительно 85–90 лет). Кроме того, можно отметить несколько диапазонов локальных периодичностей с масштабами от 8 до 11 лет (и с еще меньшими).

Масштаб 9–10 лет обычно связывают с 18,6-летним лунным циклом, который присутствует в динамике засух, наводнений и в ходе температуры в Северной Америке [24]. Масштаб около 40 лет может быть связан с 70–80-летним циклом событий Эль-Ниньо, отмеченным в [20, 25]; причины генерации этого цикла пока неясны. Попытки связать его с вулканической деятельностью [26] не представляются обоснованными. Третий характерный масштаб, около 150 лет (ему соответствуют три самые крупномасштабные детали на рис. 13б), находится на границе точности из-за конечной длины анализируемого ряда и может быть признан недостоверным.

Таким образом, вейвлет-преобразование, одна из сильных сторон которого состоит в возможности анализа структуры неоднородных процессов, показало следующее. Существуют локальные периодичности событий Эль-Ниньо с масштабами от 8 до 11 лет; необходимо дополнительное изучение вопроса, связаны ли они с 18,6-летним лунным циклом или 22-летним циклом солнечной активности. О масштабах меньше 7–8 лет при годовых данных говорить не имеет смысла.

Вейвлет-анализ не показывает устойчивого 70–80-летнего цикла событий Эль-Ниньо: существует несколько продолжительных эпох повторяющейся длительности (около 40 лет), периодичность которых прерывается в середине ряда. Причины этого прерывания пока неясны. Оно может быть обусловлено и объективными физическими причинами, и субъективными: анализируемые данные реконструированы автором работы [21] по большому набору косвенных свидетельств, и отсутствие некоторых из них (за соответствующий середине ряда период времени) могло привести к искажению картины. Некоторые признаки (например, сохранение фазы колебания) указывают на возможность существования устойчивого 70–80-летнего цикла событий Эль-Ниньо. О более длительных эпохах не позволяет говорить конечная длина ряда.

При интерпретации результатов необходимо помнить, что анализируемые данные реконструированы по косвенным свидетельствам и, кроме того, не содержат информации ни о длительности, ни об интенсивности процесса (они отражают только наличие или отсутствие события Эль-Ниньо в течение года) и не содержат информации об анти-Эль-Ниньо, или Ла-Нинья, являющегося неотъемлемой частью процесса ЮКЭН. Много больше и гораздо более достоверной информации содержат данные наблюдений за изменениями индекса Южного Колебания за последнее столетие.

6.3. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания

Напомним, что индекс Южного Колебания $C(t)$ — это определенным образом нормированная разность атмосферного давления, измеряемого на уровне моря на станциях, расположенных вблизи центров действия

Южного Колебания. Обычно он вычисляется следующим образом. Берутся временные ряды давления станций Таити и Дарвина $p_{y,m}$ (индексы y, m обозначают год и месяц). По ним вычисляются ряды нормализованного давления станций $P_{y,m} = (p_{y,m} - \langle p_m \rangle) / \varepsilon$, здесь $\langle p_m \rangle$ — среднее многолетнее значение (норма), вычисленное по среднемесячным данным за период 1951–1980 гг.; ε — стандартное отклонение, вычисленное по всем значениям аномалий давления за период 1951–1980 гг. Затем вычисляются нормализованные аномалии давления станций Таити (индекс T) и Дарвина (индекс D) $\delta_{y,m} = P_{y,m}^T - P_{y,m}^D$. И, наконец, вычисляются значения индекса Южного Колебания: $C_{y,m} = \delta_{y,m} / \delta$ (δ — стандартное отклонение всех разностей $\delta_{y,m}$ за тот же базовый период времени с 1951-го по 1980 гг.). Отрицательные значения этого индекса тесно связаны с событиями Эль-Ниньо, положительные, соответственно, с Ла-Нинья.

На рисунке 14 представлены изменение среднемесячных значений индекса $C(t)$ за последние 108 лет (рис. 14а) и картина коэффициентов вейвлет-преобразования (рис. 14б) в таком диапазоне масштабов, чтобы охватить по возможности все крупномасштабные детали процесса, описываемые этим конечным рядом (масштаб линейно растет вниз до 97 лет). На рисунке 14в представлено распределение плотности энергии среднемесячных значений индекса $C(t)$ в более мелкомасштабной области, масштаб меняется до 10,5 лет.

Обращают на себя внимание два крупномасштабных минимума почти на границах ряда и ветвящееся "дерево"

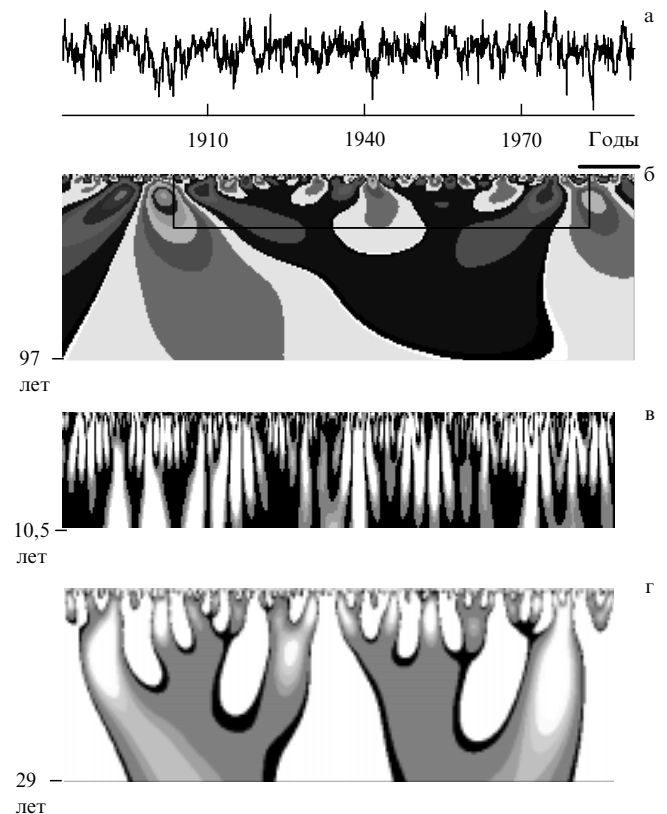


Рис. 14. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания (а), картина коэффициентов (б), картина распределения плотности энергии (в), а также картина коэффициентов (г) для фрагмента, взятого в рамку на рис. 6.

положительных экстремумов между ними. Ствол дерева и две его почти одновременно начинающиеся ветви выделяют два практически одинаковых периода — между Эль-Ниньо на границах дерева и в его середине по 39,8 лет (что согласуется с масштабом около 40 лет для 500-летних данных и свидетельствует в пользу существования 75–80-летнего цикла).

Распределение плотности энергии (рис. 14в) показывает, что мелкомасштабная часть процесса демонстрирует наличие диапазонов локальных периодичностей и, кроме того, качественное отличие структуры процесса в отрезки времени, принадлежащие и не принадлежащие дереву. Внутренняя часть дерева содержит, в основном, детали с характерными масштабами около 30 и 12 месяцев, а внешние части дерева составлены, в основном, из деталей с масштабом около 18 месяцев.

Возможно, наличием эпох с разной временной структурой можно объяснить отмечаемое многими авторами изменение характера сценариев Эль-Ниньо после середины 70-х годов. В этой связи следует сказать, что при изучении процесса ЮКЭН (и, возможно, не только ЮКЭН) не следует делать слишком категорических выводов, опираясь в анализе на наблюдения в течение последних нескольких десятилетий. Необходим анализ гораздо более представительных данных (в нашем случае, например, ряды наблюдений за последние 30 лет оказались бы недостаточными).

Однако вернемся к структуре картины коэффициентов. Два крупномасштабных минимума на границах дерева и один между его ветвями соответствуют интенсивным и продолжительным явлениям Эль-Ниньо 1899–1902, 1940–1941 и 1982–1983 годов. При сравнении с 500-летними данными можно убедиться, что эти сильнейшие за последнее столетие Эль-Ниньо являются вполне ординарными событиями. Несмотря на то что 500-летние данные не содержат информации об интенсивности процесса и усреднены по 12 месяцам, детали картин хорошо согласуются. Можно считать, что реконструированная за последние 500 лет хронология событий Эль-Ниньо неплохо описывает динамику Южного Колебания на больших временах (порядка нескольких десятилетий).

Более подробно ветви дерева показаны на рис. 14г: здесь масштаб растет до 29 лет. Картины коэффициентов (и линий локальных максимумов) демонстрируют простую иерархическую структуру. Если в основании дерева мы отметили укрупнение масштаба в виде удвоения периода, то уже две главные ветви дерева ветвятся поразному — левая на три, а правая на две ветви. На более мелких масштабах продолжается, как кажется, нерегулярное чередование удвоения и утроения линий локальных максимумов. Встречаются и ветвления типа водораздела, когда в главную линию локальных максимумов по мере роста масштаба вливаются последовательно несколько побочных.

Внешне похожие ветвления можно смоделировать канторовским множеством, когда из единичного отрезка (у нас это примерно 80 лет) удаляется средняя треть, из оставшихся частей также удаляются средние трети и т.д. (модель удвоения линий локальных максимумов); или удаляются две из пяти частей единичного отрезка и т.д. в каждом следующем поколении из каждой части (модель утроения).

В нашем случае процесс сложнее по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, встречаются чередую-

щиеся нерегулярным образом ветвления двух (или даже более) типов — так устроены неоднородные или мультифрактальные множества. Во-вторых, в отличие от стандартной процедуры построения канторовского множества, где раз удаленная часть отрезка не восстанавливается ни в какой своей части, здесь продолжают ветвления линий локальных экстремумов обоих знаков, т.е. в удаленном отрезке на следующих этапах как бы восстанавливаются некоторые его части. Будет ли результатом такого каскадного процесса канторовская пыль или иное фрактальное множество, зависит от совокупности правил ветвления, выяснить которые по ограниченному ряду данных затруднительно.

Таким образом, вейвлет-анализ ряда среднемесячных значений индекса Южного Колебания выявил автомодельную структуру данных и наличие подобного каскадному процессу на масштабах от месяца до нескольких десятилетий (до 70–80 лет). Является ли полученная древовидная картина линий локальных максимумов свидетельством того, что система демонстрирует каскад увеличений (удвоений, утроений и т.д.) периода, квазипериодическое или иное поведение, является ли продолжающееся на малых временных масштабах ветвление линий локальных экстремумов обоих знаков свидетельством наличия каскадного процесса на масштабах порядка месяца и менее, покажут дальнейшие исследования; для этого необходимо, в частности, анализ рядов с более мелким разрешением.

6.4. Суточные значения индекса Южного Колебания

Анализируемый ряд суточных значений индекса $C(t)$ охватывает десятилетний отрезок времени (к сожалению, не принадлежащий дереву, описанному в разделе 6.3). На рисунке 15а,б представлены ряд суточных значений индекса $C(t)$ и картина коэффициентов его вейвлет-преобразования (масштаб растет до 3 лет).

Сравнение показывает, что среднемесячные значения очень хорошо описывают межгодовую изменчивость

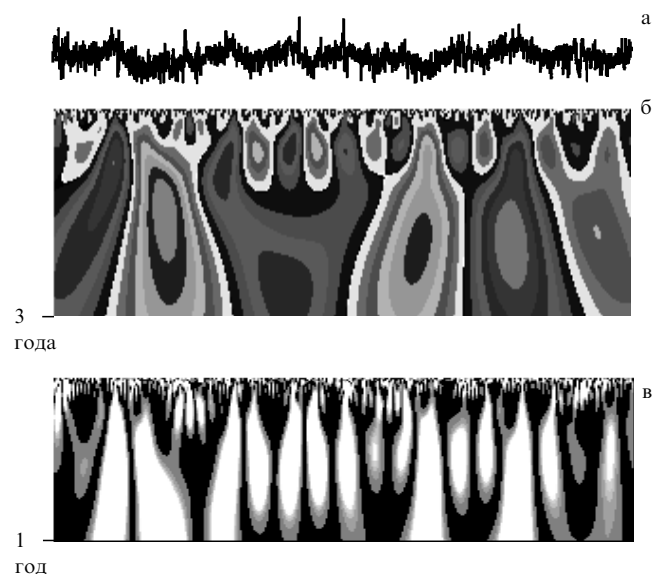


Рис. 15. Суточные значения индекса Южного Колебания за отмеченный линией на рис. 14б период, картина коэффициентов и распределение плотности энергии.

процесса и достаточно хорошо — годовой ход. Внутри-годовая изменчивость гораздо лучше описывается подробным рядом, однако наиболее характерные детали прослеживаются на картинах коэффициентов вейвлет-преобразования обоих рядов.

Картина распределения плотности энергии индекса Южного Колебания (рис. 15в, здесь масштаб меняется до 1 года) показывает ярко выраженный годовой ход и существенно нестационарную структуру процесса на меньших временных масштабах. Подробный анализ выявляет в этой нестационарной структуре диапазоны локальных периодичностей процесса с масштабами около недели (большинство максимумов наблюдается на масштабах ≈ 5 и ≈ 9 дней), месяца (≈ 25 дней), 8–9 месяцев и около 2 лет (≈ 22 месяца).

Эти и описанные в разделах 6.2 и 6.3 масштабы можно обнаружить на спектрах мощности, представленных на рис. 16. Здесь показаны спектры мощности, рассчитанные по коэффициентам преобразования Фурье E_F (рис. 16а) и вейвлет-преобразования E_W (рис. 16б) рядов среднемесячных (штриховые линии) и суточных (сплошные линии) значений $C(t)$. Спектр мощности E_W (см. формулу (28)) соответствует сглаженному на каждом масштабе спектру Фурье. Оба спектра имеют довольно большие отрезки со степенным поведением на масштабах от нескольких дней до месяца и от двух-трех месяцев до года.

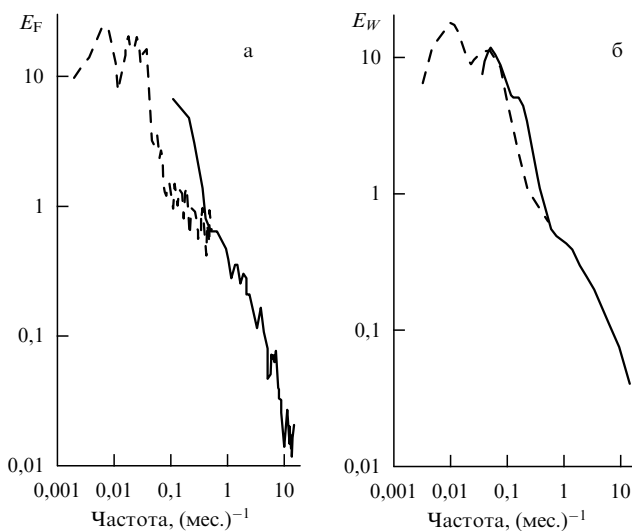


Рис. 16. Спектры мощности (а) и скалограммы (б) для среднемесячных (штриховые линии) и суточных (сплошные линии) значений $C(t)$.

Таким образом, описываемый временным рядом $C(t)$ процесс, как и большинство процессов в природе, происходит в очень широком диапазоне временных масштабов. Спектры Фурье анализируемого ряда достаточно зашумлены, однако на них выделяются пики вблизи выделенных характерных периодов (практически тех же, что и на спектрах мощности, полученных по коэффициентам вейвлет-преобразования). Картины распределения плотности энергии $E_W(a, b)$, представленные выше, демонстрируют сложное нестационарное поведение процесса, наличие периодических и непериодических составляющих на разных масштабах.

Такой процесс может быть композицией стохастической компоненты и нескольких регулярных компонент.

Воспользуемся процедурой Такенса (теорией вложения нелинейных динамических систем [27]) для конструирования фазового пространства по временной реализации и построения возможного аттрактора.

Следуя Такенсу, сконструируем из $C(t)$ m -компонентные векторы состояния следующим образом:

$$X_i = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_m(t_i)\}.$$

Здесь $x_k(t_i) = x(t_i + (k - 1)\tau)$ и τ — временная задержка. Распределение векторов состояния составляет реконструированное фазовое пространство размерности m .

Двумерные проекции полученных траекторий показаны на рис. 17 для разных значений параметра временной задержки τ . Первые три портрета получены на основе ряда суточных значений, два последних — из ряда среднемесячных значений. Все траектории ограничены, однако не показывают явно периодической структуры. Характерные петельки видны на двух первых портретах, пропадают при задержке в один месяц и снова появляются при $\tau = 3$ мес. В остальном портреты с задержкой равной одному и трем месяцам практически повторяют друг друга.

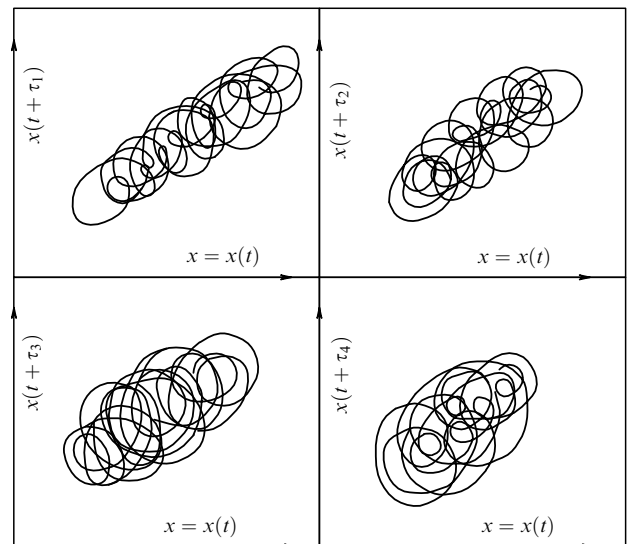


Рис. 17. Проекция фазового пространства, полученные на основе рядов суточных и среднемесячных значений $C(t)$; $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 30$ сут.; $\tau_4 = 3$ мес.

Портрет с задержкой $\tau = 12$ мес., т.е. построенный на пределе или уж совсем за пределами возможностей длины имеющейся у нас реализации, отличается от предыдущих и интересен тем, что траектория этого аттрактора имеет три оси (можно представить себе динамическую систему с тремя стационарными решениями).

Ограниченность траекторий и не слишком большая размерность системы говорят о возможности построения модели процесса и хотя бы о принципиальной возможности предсказания его поведения на не слишком больших временах. Ясно, однако, что длина имеющихся реализаций не позволяет делать категорических выводов, а форма последней проекции говорит по крайней мере о необходимости анализа более представительных данных.

6.5. Глобальные температуры и ЮКЭН

На рисунке 18 представлены график изменения аномалий среднегодовых значений приповерхностной температуры воздуха за период с 1850-го по 1990 гг. и соответствующая картина коэффициентов вейвлет-преобразования в диапазоне масштабов, охватывающем практически все крупномасштабные детали процесса, описываемые рядом (масштаб линейно растет до 85 лет).

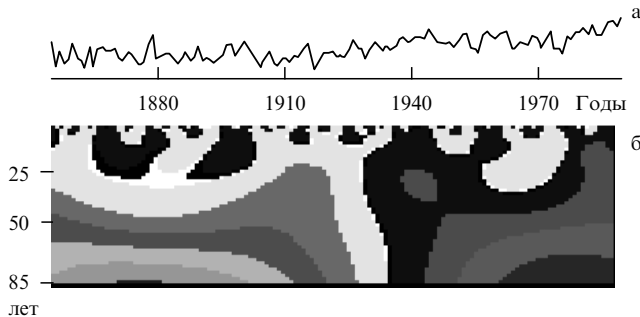


Рис. 18. Аномалии среднегодовой глобальной температуры и картина коэффициентов вейвлет-преобразования.

Обращает на себя внимание тот факт, что масштаб 25–30 лет разделяет картину коэффициентов на две заметно различающиеся области. В нижней части картины видны всего лишь две крупномасштабные детали. Совершенно отличная структура наблюдается в верхней части картины, где сосредоточена практически вся временная динамика анализируемых данных.

Нижняя часть картины коэффициентов отражает наличие в анализируемых данных крупномасштабной компоненты, похожей на положительный тренд, — светлая область слева соответствуют отрицательным значениям коэффициентов, которые с течением времени (при движении направо) возрастают, и в правой нижней части картины формируется почти равноценная область положительных значений коэффициентов (темная).

Структура гораздо более сложная и, на первый взгляд, без какого-либо заметного порядка наблюдается на масштабах до 25–30 лет. Более подробное рассмотрение позволяет, однако, выделить повторяющиеся характерные детали: существует диапазон временных масштабов, на которых картина имеет практически квазипериодическую структуру. Можно сказать, что если самой крупномасштабной составляющей анализируемого процесса является почти линейный положительный тренд, то на "мезомасштабах" процесс представляется составленным из небольшого набора гармонических колебаний.

На рисунке 19 в том же масштабе и за тот же период времени представлены графики аномалий среднегодовых значений приповерхностной температуры воздуха отдельно для Северного (рис. 19а) и Южного (рис. 19б) полушарий и картины коэффициентов вейвлет-преобразования полушарных данных: на рис. 19в показана картина коэффициентов для Северного полушария, на рис. 19г — для Южного полушария.

Картины коэффициентов полушарных данных имеют качественно схожую структуру. Наиболее заметное различие между полушариями состоит в запаздывании тренда в Южном полушарии: глобальное потепление в

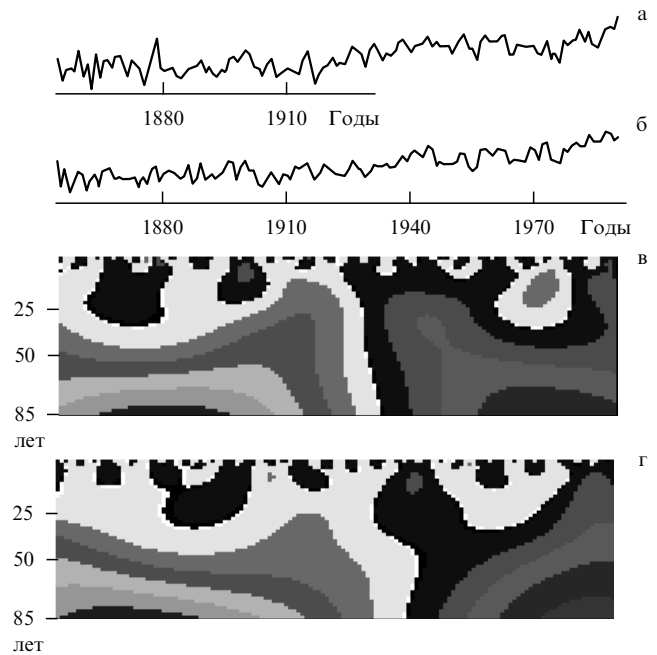


Рис. 19. Аномалии среднегодовой температуры для Северного и Южного полушарий и соответствующие картины коэффициентов вейвлет-преобразования.

Северном полушарии и начинается раньше, и более значительно, чем в Южном. Основной причиной такого различия является, по-видимому, неравномерное распределение суши, большее количество которой приходится на Северное полушарие. Нельзя сбрасывать со счетов и антропогенный фактор, влияние которого более заметно также в Северном полушарии. Необходимо принимать во внимание также тот факт, что метеостанций в Южном полушарии меньше и, возможно, данные менее представительны. Отметим, что тренд, полученный после вычитания из исходных данных реконструированного с помощью обратного вейвлет-преобразования ряда, не имеет в начале столетия характерного излома, связываемого обычно с техногенной нагрузкой.

Так же, как и для аномалий глобальной температуры вся временная динамика анализируемых полушарных данных сосредоточена на масштабах приблизительно до 25–30 лет.



Рис. 20. Фрагменты картин коэффициентов для Северного и Южного полушарий.

На рисунке 20 показаны фрагменты полушарных картин с более подробным разрешением по масштабу: масштаб растет до 30 лет на рис. 20а и до 8 лет на рис. 20б (временная ось осталась той же, что и на рис. 18, 19). Чтобы удобнее было сравнивать полушарные данные, картины совмещены малыми масштабами — в нижней половине каждого рисунка показана картина коэффициентов для Южного полушария, а в верхней половине показана зеркально отраженная картина для Северного полушария (масштаб в верхней половине, соответственно, растет вверх).

Хорошо заметная цикличность периодов потепления и похолодания на масштабах около 10–11 лет (рис. 20б) формирует более длительные эпохи потепления и похолодания климата. Повторяющиеся относительно крупномасштабные детали на рис. 20а свидетельствуют о том, что более или менее длительные эпохи (продолжительностью от > 10 до < 30 лет) с повышением и понижением среднегодовой температуры сменяли друг друга в течение всего анализируемого периода времени без ярко выраженной регулярности. Так, эпохи потепления можно наблюдать примерно в 60-е и 80-е годы прошлого столетия и на рубеже столетий, в середине нашего столетия и в конце ряда.

Здесь, как и в результатах анализа характеристик ЮКЭН, выделяются локальные периодичности. Относительно устойчивый 10–11-летний цикл наблюдается в начале ряда. Затем структура этого цикла начинает претерпевать некоторые изменения, но можно наблюдать установление относительно устойчивого 5–6-летнего цикла (особенно в картине для Северного полушария). Этот период времени соответствует ветвям дерева на картине коэффициентов вейвлет-преобразования ряда значений индекса Южного Колебания (раздел 6.3). Более крупномасштабная динамика среднегодовых аномалий температуры не показывает какой-либо устойчивой периодичности.

Большой интерес к истории ЮКЭН связан также с тем, что частота процесса Эль-Ниньо иногда ассоциируется с глобальным потеплением климата [28]. Автор [21] отмечает, однако, что тесной связи между частотой событий Эль-Ниньо и глобальным потеплением им не замечено.

На самом деле, о прямой связи между частотой событий Эль-Ниньо и глобальным потеплением судить сложно, поскольку важна, по-видимому, не только частота, но и длительность и интенсивность событий. Как уже упоминалось, изменение этих характеристик явления Эль-Ниньо хорошо описывается значениями индекса Южного Колебания.

На рисунке 21 для сравнения в одинаковом масштабе приведены картина коэффициентов вейвлет-преобразования ряда аномалий среднегодовой температуры Южного полушария (она расположена в верхней части рисунка, масштаб растет вверх) и картина коэффициентов для индекса Южного Колебания (она в нижней части, масштаб растет вниз). Картины черно-белые; черные области соответствуют положительным значениям коэффициентов (и связаны с теплыми эпохами в картине для аномалий температуры), белые — отрицательным (напомним, что отрицательные значения индекса $C(t)$ ассоциируются с событиями Эль-Ниньо).

Треугольниками отмечены лишь наиболее значительные за этот период события Эль-Ниньо 1899–1900, 1902,

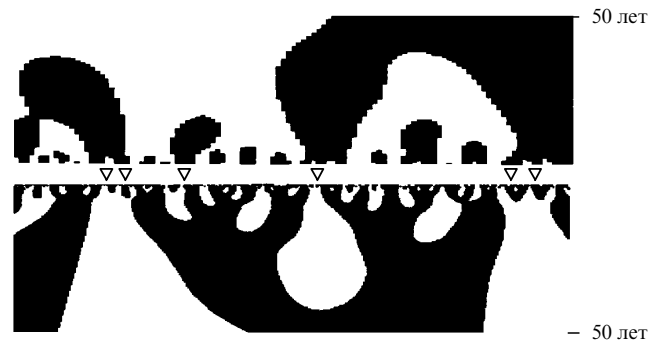


Рис. 21. Фрагменты картин коэффициентов вейвлет-преобразования среднемесячных значений индекса Южного Колебания и аномалий среднегодовых значений температуры для Южного полушария.

1913–1914, 1940–1941, 1970 и 1982–1983 годов. Легко видеть, что все более или менее продолжительные теплые периоды связаны с наиболее интенсивными событиями Эль-Ниньо (даже структура черных деталей в верхней картине повторяет структуру белых в нижней). Однако частота событий Эль-Ниньо, по-видимому, не оказывает решающего влияния на глобальное потепление.

Вообще же Эль-Ниньо могут оказывать не только непосредственное влияние на климат, но и опосредованное. Непосредственное влияние (через атмосферу) происходит на временных масштабах порядка 1–2 лет — в течение действия события Эль-Ниньо. Опосредованное влияние (через океан), как оказалось [29], может происходить на временах порядка десятилетия и даже, возможно, больших временных масштабах.

Спутниковые наблюдения показали [29], что волны планетарного масштаба, отраженные от американского побережья во время очень интенсивного Эль-Ниньо 1982–1983 гг., пересекли Тихий океан и десятью годами позже оказали воздействие на Курошио, в результате чего большое количество теплой воды растеклось от южного побережья Японии в средние широты Тихого океана и привело к заметному росту поверхностной температуры на высоких широтах в северо-западной части Тихого океана. Таким образом, переработанные океаном последствия событий Эль-Ниньо могут оказаться очень долгоживущими.

7. Заключение

Итак, на простых примерах применения вейвлет-преобразования для анализа одномерных функций с хорошо известными свойствами показаны некоторые возможности этого относительно нового математического аппарата, позволяющего выявить и наглядно показать структуру (квазипериодическую, автомодельную и т.д.) описываемого анализируемой функцией процесса и дающего информацию о характерных масштабах процесса.

То, что модельные примеры были одномерными рядами, не нарушает общности применения вейвлет-преобразования: определения и свойства преобразования легко переносятся на многомерные случаи, а независимая переменная (у нас — время) может быть любой скалярной или векторной величиной.

Масштабно-временная развертка, получающаяся в результате вейвлет-преобразования сигнала, позволяет выявить не только осцилляции с хорошо фиксированным

периодом, но и нестационарные осцилляции, локализованные периодичности и т.п.

Энергия (или дисперсия) коэффициентов вейвлет-преобразования $E_W(a)$ пропорциональна дисперсии анализируемых данных и дает распределение энергии процесса по масштабам. Возможность получения этой характеристики локально позволяет, например, при анализе турбулентных процессов не только получить набор характерных масштабов, но и объективно определить масштабы, связанные с когерентными структурами, и исследовать перемежаемость процесса.

По коэффициентам вейвлет-преобразования, а также по значениям локальных экстремумов можно вычислить размерность анализируемого множества или спектр размерностей, если оно мультифрактально.

Фильтрационные и реконструкционные свойства преобразования позволяют оперировать информацией (сглаживание, разложение на компоненты, свертка и т.п.) без потери значимых деталей. Разрывы непрерывности, скачки и другие особенности, возникающие из-за вариаций измеряемой характеристики и сбоя или шума инструментов измерения, легко детектируются, локализуются и при необходимости могут быть устранены или скорректированы.

Возможности вейвлет-преобразования показаны также на примерах анализа некоторых природных временных метеорологических рядов.

Вейвлет-преобразование представляется очень перспективным математическим аппаратом не только для задач, связанных с анализом сигналов различной природы, но и для решения уравнений, описывающих сложные нелинейные процессы с взаимодействиями в широких диапазонах масштабов.

Следует сказать, что вейвлет-преобразование ни в коем случае не является заменой гармонического анализа и не умаляет его достоинств. Оно просто иное и позволяет посмотреть на анализируемый процесс с несколько иной точки зрения — с точки зрения другого анализатора (семейства анализаторов).

В заключение автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за частичную поддержку (грант № 93-01-17342) и Ю.А. Кравцова за внимание к работе и ценные замечания.

Wavelet analysis: basic theory and some applications

N.M. Aстафьева

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences

ul. Profsoyuznaya 84/32, 117810 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 333-21 45

E-mail: ast@nat.iki.rssi.ru, ast@iki.rssi.ru

The basic theory of the wavelet transform, an effective investigation tool for inhomogeneous processes involving widely different scales of interacting perturbations, is presented. In contrast to the Fourier transform, with the analysing function extending over the entire axis of time, the two-parametric analysing function of the one-dimensional wavelet transform is well localised in both time and frequency. The potential of the method is illustrated by analysing familiar model series (such as harmonic, fractal, and those with various types of singularities) and the long-term variation of some meteorologic characteristics (Southern oscillation index and global and hemispheric temperatures). The analysis of a number of El-Nino events and of the temporal behaviour of the Southern oscillation index reveals periodic components, local periodicity features, and time scales on which self-similarity structures are seen. On the whole, both stochastic and regular components seem to be present. The global and hemispheric temperatures are qualitatively similar in structure, the main difference — presumably due to the greater amount of land and stronger anthropogenic factor — being that the warming trend in the Northern hemisphere is slightly stronger and goes first in time.

PACS numbers: 02.30.-f, 02.90.+p, 92.60.-e, 92.60.Ry

Bibliography — 29 references

Список литературы

- Grossmann A, Morlet J *SIAM J. Math. Anal.* **15** 723 (1984)
- Wavelets* (Eds J M Combes, A Grossmann, P Tchamitchian) (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
- Wavelets and Their Applications* (Ed. R Coifman) (Boston: Jones and Barlett Publ., 1992)
- Wavelet Analysis and Its Applications* (Vol. 1: *An Introduction to Wavelets* Vol. 2: *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*) (San Diego: Academ. Press Inc., 1992)
- Daubechies I *Comm. Pure Appl. Math.* **41** 906 (1988); *IEEE Trans. Inform. Theory* **36** 961 (1990); *Ten Lectures on Wavelets* (CBMS Lecture Notes Series) (Philadelphia: SIAM, 1991)
- Farge M *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24** 395 (1992)
- Poullighy B et al. *J. Appl. Cryst.* **24** 526 (1991); Muzy J F, Bacry E, Arneodo A *Phys. Rev. Lett.* **67** 3515 (1991)
- Paul T J *Math. Phys.* **25** (11) 3252 (1984)
- Mallat S G *Trans. Am. Math. Soc.* **315** 69 (1989); *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Int.* **31** 674 (1989)
- Lemarie P G, Meyer Y *Rev. Math. Ibero-Americana* **2** 1 (1986)
- Battle G *Commun. Math. Phys.* **110** 601 (1987)
- Застенкер Г Н и др. *Космич. исслед.* **20** 900 (1982); Астафьева Н М, Застенкер Г Н, Эйгес П Е *Космич. исслед.* **34** 407 (1996)
- Beylkin G, Coifman R, Rokhlin V *Comm. Pure Appl. Math.* **44** 141 (1991)
- Holschneider M *J. Stat. Phys.* **50** 963 (1988)
- Arneodo A, Grasseau G, Holschneider M *Phys. Rev. Lett.* **61** 2281 (1988)
- Collineau S, Brunet Y *Boundary-Layer Meteorology* **65** 357 (1993)
- Астафьева Н М, Препринт № 1891 (Москва: ИКИ РАН, 1994); Препринт № 1946 (Москва: ИКИ РАН, 1996)
- Wyrtki K J *Phys. Oceanogr.* **5** 572 (1975)
- MacKenzie D *New Scientist* (16 April) 16 (1987)
- Сидоренков Н С *Тр. Гидрометеоцентра СССР* (316) 31 (1991)
- Wang Shaowu *Acta Meteorologica Sinica* **6** (1) 47 (1992)
- Астафьева Н М, Сонечкин Д М *ДАН* **344** (4) 539 (1995)
- JPCCE, 1990: Climate Change. The JPCCE Scientific Assessment* (Eds J T Houghton, F J Jenkins, J J Ephraums) (Cambridge: Cambridge University Press, 1990)
- Currie R G J *Geophys. Res.* **89** 7213 (1984)
- Quinn W H, Neal V T, Antunez de Maylo S E *J. Geophys. Res.* **92** 14449 (1987)
- Haudler R, Andsager K *Inter. J. Climato.* **10** 413 (1990)
- Takens F *Lecture Notes in Mathematics* (Eds D Rand, L-S Young) (New York: Springer-Verlag, 1981) p. 366
- Enfield D B, Cids L *TOGA Notes* (1) 1 (1990)
- Jacobs G A et al. *Nature* (London) **370** 360 (1994)

Received 23 May 1996, revised 18 July 1996