

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Нелинейные пилообразные волны

О.В. Руденко

*Обсуждаются результаты экспериментальных и теоретических исследований процессов взаимодействия и самовоздействия сильно искаженных волн, содержащих ударные фронты. Такие пилообразные возмущения формируются при распространении волн в средах, где нелинейность преобладает над конкурирующими факторами — дисперсией, дифракцией и поглощением. Подчеркнута специфика протекания нелинейных процессов в полях пилообразных волн. Описаны недавно наблюдавшиеся явления (самовоздействие пучков, саморефракция ударных импульсов, ограничение сигнала в фокусе), а также актуальные прикладные направления.*

PACS numbers: 43.25. + y

## Содержание

1. Введение (1011).
  2. Полевой и спектральный подходы в теории нелинейных волн (1012).  
2.1. Общие замечания. 2.2. Генерация гармоник. 2.3. Вырожденное параметрическое взаимодействие. 2.4. Безынерционная самофокусировка в кубично-нелинейной среде без дисперсии.
  3. Дифрагирующие пучки пилообразных волн (1017).
  4. Волны в неоднородных средах и нелинейная геометрическая акустика (1020).
  5. Фокусирование разрывных волн (1022).
  6. Нелинейное поглощение и насыщение (1026).
  7. Кинетика пилообразных волн (1028).
  8. О взаимодействиях и самовоздействиях волн, содержащих ударные фронты (1030).
  9. Заключение (1034).
- Список литературы (1035).

## 1. Введение

Интересный и своеобразный объект — пилообразная волна может наблюдаться в распределенных системах различной физической природы. Множество экспериментальных данных о нелинейной динамике пилообразных волн получено в работах по нелинейной акустике. Поэтому большинство нелинейных явлений, связанных с распространением и взаимодействием этих волн, удобно обсуждать на примере акустических волн большой интенсивности.

**О.В. Руденко.** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет  
119899 Москва, Воробьевы горы  
Тел. (095) 939-29-36  
E-mail: rudenko@na.phys.msu.ru

Статья поступила 23 февраля 1995 г.,  
после доработки 20 марта 1995 г.

О нелинейной акустике говорят, часто имея в виду не только современный раздел акустики, но и принципиальную часть физики нелинейных волн. Взаимодействия возмущений акустических сред, где дисперсия скорости звука очень слаба или ее нет вовсе, отличаются большим своеобразием. Практически все виртуальные процессы обмена энергией между волнами разных частот являются резонансными и протекают со сравнимой эффективностью. В результате происходит лавинообразное нарастание числа спектральных компонент волнового поля, что на пространственно-временном языке соответствует образованию разрывов в профиле волны (или, с учетом диссипативных свойств среды, слабых ударных волн с малой длительностью фронта) [1].

С точки зрения физики нелинейных волн наиболее специфичным и поэтому интересным объектом изучения в нелинейной акустике являются возмущения с пилообразной формой волнового профиля.

Пилообразные волны — это распространяющиеся возмущения, временной профиль которых содержит как разрывы, так и гладкие участки. В недиспергирующей среде любое периодическое возмущение на больших расстояниях превращается в "пилу". При этом в средах с квадратичной нелинейностью плоская волна принимает вид "пилы" с треугольными "зубцами". Каждый период содержит разрыв и прямолинейный участок профиля. На рис. 1а изображен процесс трансформации периодического сигнала в "пилу". С увеличением расстояния  $x$ , пройденного волной, мелкие детали исходного временного профиля постепенно исчезают. На удалении от источника порядка нескольких характерных нелинейных длин ( $x = x_2$  на рис. 1) профиль одинаков как для гармонического исходного возмущения (кривая 1), так и для более сложного сигнала (кривая 2).

Одинокое (локализованное во времени) возмущение в квадратично-нелинейной среде на больших расстояниях превращается в N-волну (рис. 1б). Интеграл от функции, описывающей профиль, стремится к нулю при

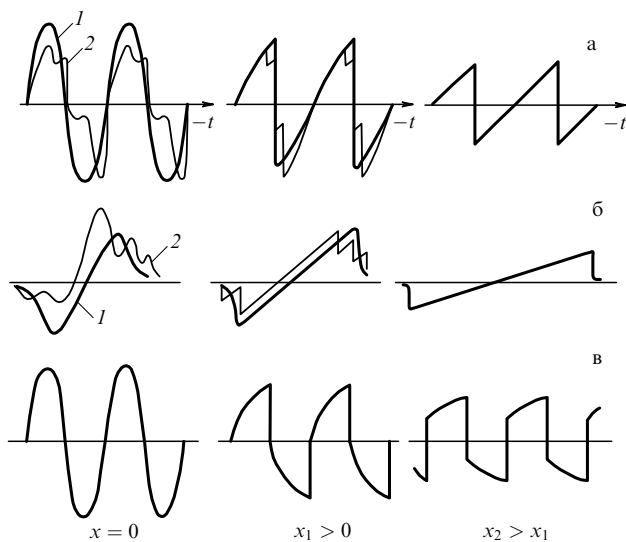


Рис. 1. Формирование пилообразных волн: (1) — гармоническое исходное возмущение; (2) — сложный сигнал

$x \rightarrow \infty$  из-за дифракции, поскольку реальные возмущения всегда ограничены в пространстве.

В кубично-нелинейной среде "зубцы пилы" имеют трапециевидную форму (рис. 1в); каждый из периодов содержит две ударные волны: сжатия и разрежения.

В средах с более сложными нелинейными, диссипативными и дисперсионными свойствами могут существовать пилообразные волны иных типов. Однако возмущения, показанные на рис. 1, наиболее типичны.

Важно отметить, что указанные формы временных профилей асимптотически универсальны для широкого класса исходных возмущений. Сформировавшись, эти волны остаются квазистабильными. При дальнейшем распространении изменяются лишь отдельные параметры: для периодических "пил" — это пиковые значения возмущений, для одиночных импульсов — пиковые значения и длительность сигнала. Профиль волны довольно устойчив и мало изменяется как при взаимодействии "пил" друг с другом, так и при слабом воздействии дополнительных факторов — дифракции, дисперсии, низкочастотной модуляции и т.п. Таким образом, пилообразная волна представляет собой универсальный объект, устойчивость которого связана с сильным проявлением нелинейных свойств среды.

В физике нелинейных волн гораздо более известен другой объект с сильно выраженными нелинейными свойствами, стабильность которого обеспечивается конкуренцией между дисперсией и нелинейностью. Это — солитон. Однако, строго говоря, солитон устойчив лишь в идеализированных консервативных средах, в то время как квазистабильность "пил" имеет место в реальных диссипативных системах.

Говоря о взаимодействии солитонов (или пилообразных волн) друг с другом, можно провести аналогию с теориями гидродинамической турбулентности. Как известно, в физике нелинейных волн можно выделить две группы явлений: 1) объясняемых слабым проявлением нелинейных эффектов (пример — поведение газа фононов в твердом теле с учетом ангармонизма решетки); 2) связанных с сильным проявлением нелинейности.

Аналогично этому существует два взгляда на турбулентное движение: 1) как на ансамбль взаимодействующих квазигармонических возмущений; 2) как на совокупность взаимодействующих вихревых структур, каждая из которых сама по себе есть существенно нелинейный объект. Именно второй взгляд на турбулентность имеет аналогию с проблемой взаимодействия волновых объектов с сильно выраженными нелинейными свойствами, таких как пилообразные волны и солитоны. Однако, если физика солитонных взаимодействий исчерпывающим образом освещена в монографиях и обзорах, то пилообразным возмущениям уделялось явно недостаточное внимание.

Классические работы по формированию пилообразных волн, эффектам нелинейного поглощения и насыщения были выполнены в конце 50-х годов [2–6].

В последние годы экспериментально наблюдались и получили объяснение новые явления: самофокусировка пилообразных волн [7–13], саморефракция импульсов [14, 15], существование физического предела для пикового акустического давления в фокусе [16] и ряд других. Кроме того, многие известные эффекты (параметрическое взаимодействие, подавление и усиление сигналов, столкновения локализованных волн и др.) в пилообразных волнах протекают существенно иначе, чем для квазигармонических возмущений или солитонов. В силу своей специфики эти явления были детально изучены сравнительно недавно. Для описания пилообразных волн развит оригинальный математический аппарат, совершенно не похожий на методы, используемые в других разделах теории нелинейных волн.

Интерес к указанным явлениям связан с их использованием для решения многочисленных прикладных задач. Из последних "горячих" проблем отметим нелинейные методы неразрушающего контроля и диагностики в промышленности [17]; медицинскую тематику (разрушение почечных камней, других биоконкрементов [18, 19]); звуковой удар и мощные аэроакустические шумы [20, 21] (их экологические последствия сейчас интенсивно изучаются в связи с созданием нового поколения сверхзвуковых пассажирских самолетов [22, 23]). В соответствующих разделах обзора будут даны ссылки, поясняющие связь описываемых здесь явлений с актуальными прикладными задачами.

## 2. Полевой и спектральный подходы в теории нелинейных волн

### 2.1. Общие замечания

Известно, что при описании нелинейных волн в средах со слабой и сильной частотной дисперсией используются различные подходы. Когда дисперсия слабая или ее нет вовсе, т.е. скорости различных составляющих спектра волны почти одинаковы или совпадают, коллинеарные гармоники взаимодействуют друг с другом резонансным образом и эффективно обмениваются энергией. Это приводит к лавинообразному размножению гармоник и уширению спектра. Иными словами, любое виртуальное возмущение, рождение которого разрешено типом нелинейности среды, реализуется в процессе взаимодействия и начинает влиять на энергообмен. Здесь представляются две возможности: описывать волновое поле на пространственно-временном

языке либо ввести комплексные амплитуды для каждой квазигармонической составляющей спектра и следить за пространственным изменением этих амплитуд. Очевидно, что, когда гармоник много или спектр сплошной, второй (спектральный) способ неудобен. При проведении аналитических расчетов он эффективен лишь для диспергирующих сред (при строго определенных зависимостях от частоты фазовой скорости волны, согласованных со спектром исходного сигнала), когда взаимодействует небольшое число гармоник. Примером могут служить классические задачи нелинейной оптики [24]. Так, чтобы добиться эффективной генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью, подбирают двулучепреломляющий кристалл, имеющий "направление синхронизма". Гармоники с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ , бегущие в этом направлении, имеют близкие фазовые скорости и обмениваются энергией. В то же время виртуальные высшие гармоники с частотами  $3\omega, 4\omega, \dots$ , рождение которых возможно в результате каскадных процессов в среде с квадратичной нелинейностью, имеют сильно отличающиеся скорости и не могут вырасти до значений, обеспечивающих их участие в перераспределении энергии волны по спектру.

Правильная схема применения спектрального подхода сводится в основном к следующему. Вначале формулируется проблема (например, организовать резонансный триплет  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  в целях преобразования энергии волны накачки с частотой  $\omega_3$  в энергию более низких гармоник с частотами  $\omega_1, \omega_2$ ). Затем находятся условия (среда с нужными дисперсионными характеристиками), в которых такое взаимодействие может быть организовано. Наконец, применительно к реальной ситуации выводятся "укороченные" уравнения для комплексных амплитуд  $A_1, A_2, A_3$  рассматриваемого триплета.

Возможна, конечно, обратная схема действий. Допустим, имеется среда с известными дисперсионными характеристиками. Анализируя форму этих характеристик, можно легко понять, какие взаимодействия будут резонансными и существуют ли они вообще в данной среде. Затем определяется спектр исходного сигнала и для амплитуд волн, участвующих в резонансных взаимодействиях, записываются соответствующие уравнения.

Однако во многих работах авторы искусственно ограничивают спектр волны (число взаимодействующих гармоник) безотносительно к дисперсионным характеристикам среды. Тем самым нелинейным процессам "навязываются" условия их протекания, отличающиеся от реальных. Выводятся решаемые уравнения, которые гораздо проще правильных, более общих полевых уравнений. Получаемые результаты могут представлять интерес для математической теории. Что же касается физических следствий, то они, как правило, не соответствуют реальности.

Правильное понимание возможностей полевого и спектрального подходов полезно при решении задач о взаимодействии волн (акустических, гравитационных на мелкой воде, в плазме, в потоках частиц и т.д.), где оба подхода по традиции используются на равноправной основе. Кроме того, недавно возникла необходимость применить новый для оптики полевой подход при описании широкополосных сигналов — фемтосекундных лазерных импульсов [25]. Напротив, акустические

аналоги нелинейных оптических процессов [26], кажется, требуют использования спектрального подхода.

Очевидно, что активный обмен идеями и методами между различными областями физики нелинейных волн должен сопровождаться учетом специфики рассматриваемых явлений.

В разделах 2.2–2.4 приведены примеры нелинейных процессов, описываемых в рамках полевого и спектрального подходов. Интересно сравнить результаты, полученные двумя разными способами, и установить их соответствие данным физического эксперимента.

## 2.2. Генерация гармоник

Распространение плоских волн в нелинейной среде без дисперсии и диссипации описывается уравнением римановых волн [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

где  $u$  — колебательная скорость,  $c_0$  — равновесная скорость звука,  $\varepsilon$  — параметр нелинейности среды,  $x$  — координата вдоль направления распространения волны,  $\tau = t - x/c_0$ . Полевое уравнение (1) правильно описывает такие наблюдаемые эффекты, как увеличение крутизны переднего фронта волны вплоть до появления разрыва, генерацию гармоник комбинационных частот и т.д. В частности, при задании на входе  $x = 0$  гармонического сигнала  $u = u_0 \sin \omega t$  из (1) следует решение Бесселя–Фубини для амплитуд гармоник с частотами  $n\omega$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$B_n(x) = \frac{u_0 2J_n(z)}{z}, \quad z = \frac{\varepsilon \omega u_0 x}{c_0^2}, \quad (2)$$

дающее хорошее количественное согласие с результатами измерений. В решении (2)  $J_n(z)$  — обычные (при  $z \leq 1$ ) или неполные (при  $z > 1$ ) функции Бесселя [27]. Если спектр искусственно ограничить двумя первыми гармониками, т.е. искать решение (1) в виде

$$u = B_1(x) \sin \omega \tau + B_2(x) \sin 2\omega \tau,$$

получим пару укороченных уравнений

$$\frac{dB_1}{dx} = -\frac{\varepsilon \omega}{2c_0^2} B_1 B_2, \quad \frac{dB_2}{dx} = \frac{\varepsilon \omega}{2c_0^2} B_1^2. \quad (3)$$

Решение уравнений (3)

$$B_1 = \frac{u_0}{\operatorname{ch}(z/2)}, \quad B_2 = u_0 \tanh \frac{z}{2}, \quad z = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega u_0 x \quad (4)$$

соответствует правильному результату (2) только на малых расстояниях  $z \ll 1$ . Но при  $z \ll 1$  вообще не имеет смысла пользоваться укороченными уравнениями, поскольку правильный результат удастся получить из (1) методом последовательных приближений, считая амплитуду первой гармоники  $B_1 = u_0$  постоянной. В области  $z \geq 1$ , где укороченные уравнения в принципе могли бы дать новую информацию, они описывают взаимодействие неправильно. Поведение амплитуд первых двух гармоник описывается неточно, а генерация высших гармоник не учитывается вовсе (рис. 2).

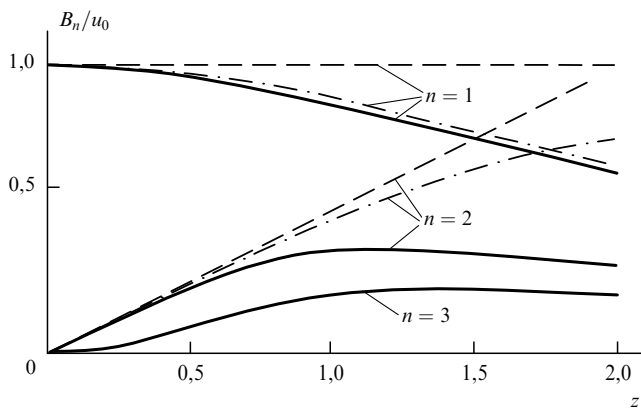


Рис. 2. Амплитуды гармоник, рассчитанные методом последовательных приближений (штриховые кривые) и на основе укороченных уравнений (3) (штрихпунктирные кривые). Сплошные кривые — точное решение (2)

**2.3. Вырожденное параметрическое взаимодействие**

Для иллюстрации своеобразия нелинейных процессов, протекающих в полях пилообразных волн, рассмотрим интересный и поучительный пример, относящийся к вырожденному параметрическому взаимодействию. Этот процесс хорошо изучен для волн в средах с дисперсией. Как известно, стабильным волновым образованием в сильно диспергирующей среде является квазигармонический сигнал, частота и волновой вектор которого связаны дисперсионным соотношением. При некоторых специально подобранных формах закона дисперсии удастся создать условия (они могут быть реализованы, например, в нелинейно оптических кристаллах для лазерных пучков) для эффективного энергообмена только между двумя волнами: волны с основной частотой  $\omega_0$  и субгармоники с частотой  $\omega_0/2$ . Синхронное взаимодействие волн интенсивной накачки с частотой  $\omega_0$  и слабого сигнала с частотой  $\omega_0/2$  (рис. 3а) — фазо-чувствительный эффект; при оптимальном сдвиге фаз можно добиться практически полной концентрации энергии в сигнальной волне, реализовав тем самым большие коэффициенты параметрического усиления  $K \gg 1$  [1].

Казалось, что при расчете взаимодействия волн с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_0/2$  в недиспергирующей среде достаточно будет учесть потери энергии волны накачки на генерацию собственных высших гармоник. Действительно, "паразитные" каналы оттока энергии  $\omega_0 \rightarrow 2\omega_0 \rightarrow 3\omega_0 \dots$  существенно ослабляют полезный процесс  $\omega_0 \rightarrow \omega_0/2$  (рис. 3б). Как показал расчет [28], коэффициент  $K$  не превышает значения  $K = \Gamma^{-1/2}$ . Здесь  $\Gamma = b\omega_0 / (2\epsilon c_0 \rho_0 u_0)$  — обратное акустическое число Рейнольдса (число Гольдберга), равное отношению характерной длины образования разрыва  $x_s = c_0^2 / (\epsilon \omega_0 u_0)$  к длине поглощения  $x_a = 2c_0^3 \rho_0 / (b\omega_0^2)$ ,  $b$  — эффективный параметр диссипации [1]. Отсюда следует, что, например, при значениях  $\Gamma \sim 10^{-2}$ , легко достигаемых в лабораторных экспериментах, усиление все-таки может быть значительным:  $K \sim 10$ .

Однако этот вывод неправилен, что представляется удивительным, поскольку в расчетах [28] учтено бесконечное число взаимодействующих волн — кратных гармоник  $n\omega_0$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), а также сигнал  $\omega_0/2$ .

Оказалось, что для получения правильного результата необходимо учесть высшие субгармонические составляющие с частотами  $3\omega_0/2, 5\omega_0/2, \dots$ . Каждая из этих волн имеет малую амплитуду (по сравнению с гармониками накачки с частотой  $n\omega_0$ ), и потери на их генерацию незначительны. Однако высшие субгармоники открывают новые каналы переброса энергии из основной субгармоники с частотой  $\omega_0/2$  (сигнала, который следует усиливать) вверх по спектру. В результате этих процессов, показанных на рис. 3в штриховыми линиями, усиления практически не происходит и коэффициент  $K = 4/\pi \approx 1,28$  [29] едва превосходит единицу. Последний факт давно известен для нелинейных волн в длинных электрических линиях [30].

Картина взаимодействия большого числа гармоник и субгармоник весьма запутана потому, что спектральный язык не удобен для описания нелинейных волн в средах без дисперсии. Если проследить, как искажается при распространении волны ее профиль, все будет гораздо понятнее. На рис. 4 (кривая 1) показан исходный профиль волны

$$\frac{u}{u_0} = \sin \omega_0 t + 0,2 \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \tag{5}$$

представляющей собой сумму волны накачки и сигнала половинной частоты. Задан сдвиг фаз  $\pi/2$ , при котором усиление идет наилучшим образом. Кривые 1–11 на рис. 4 соответствуют увеличивающимся расстояниям  $z = x/x_s$ : 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3; 4; 6; 10; 15; 30. По мере распространения волны нелинейные искажения накапливаются, приводя к формированию ударных фронтов. Скачки несимметричны относительно нулевого уровня. Поэтому они движутся навстречу друг другу, сталкиваются по законам удара абсолютно неупругих частиц и сливаются [1]. В результате образуется волна (кривая 11 на рис. 4) с периодом, вдвое большим периода волны накачки. Таким образом, наблюдается параметрическое деление частоты в 2 раза.

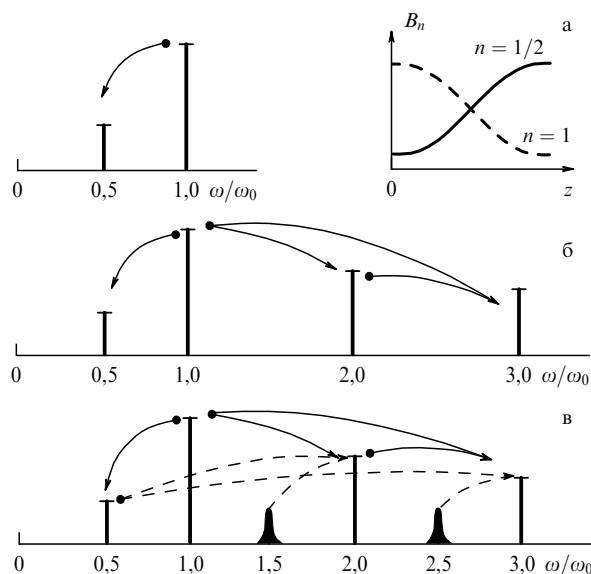


Рис. 3. Направления основных потоков энергии при взаимодействии волн накачки и субгармонического сигнала (а), с учетом высших гармоник накачки (б) и высших субгармоник (в)

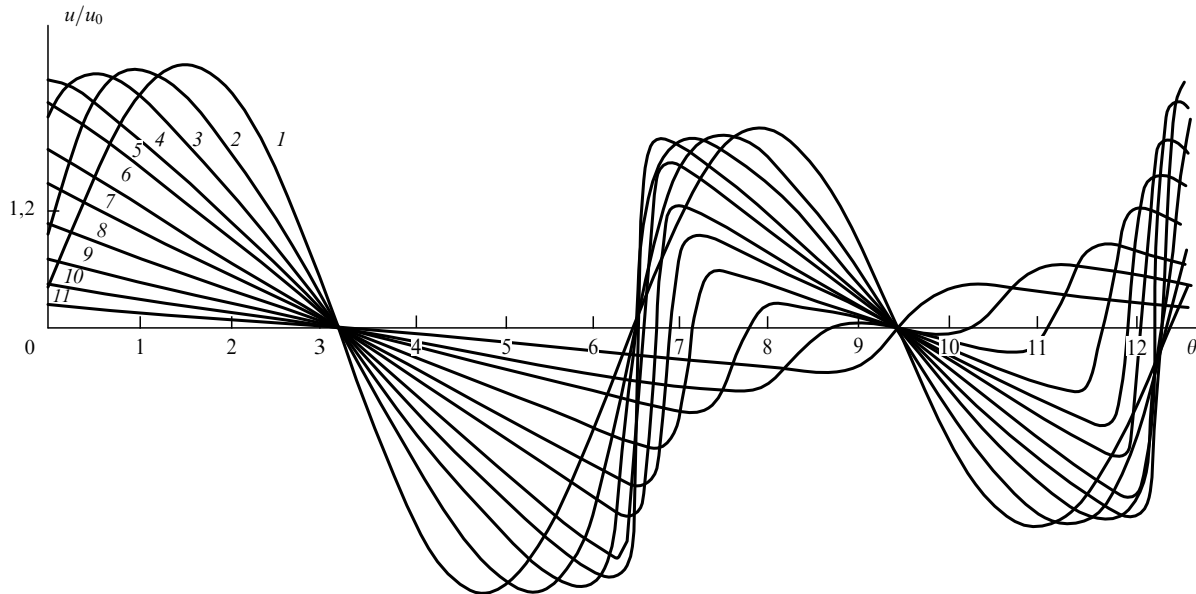


Рис. 4. Профиль волны при вырожденном параметрическом взаимодействии

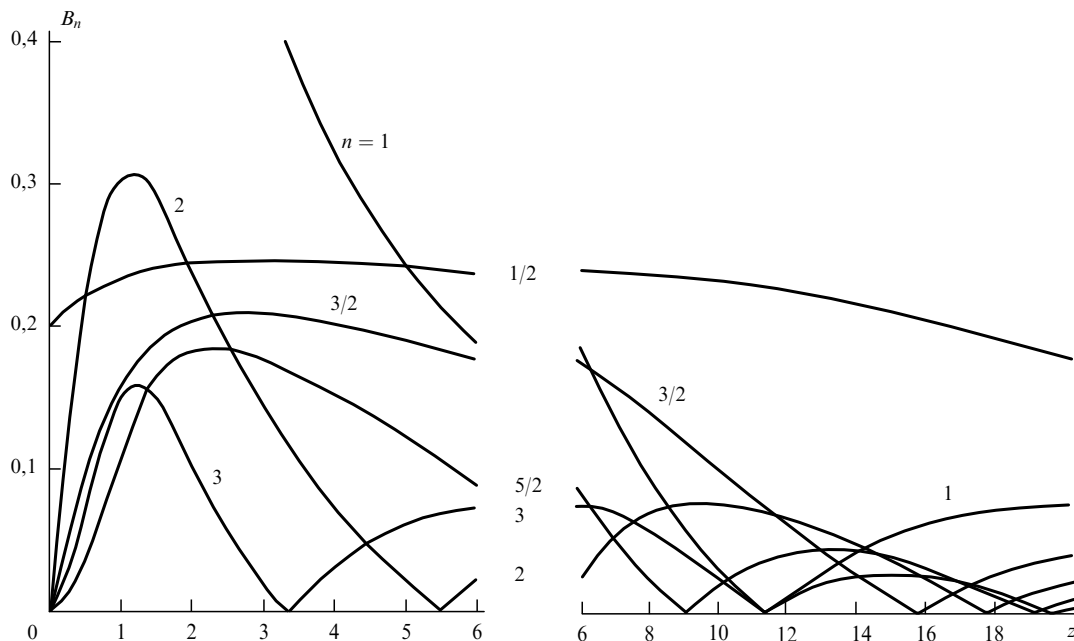


Рис. 5. Спектр волнового поля при вырожденном параметрическом взаимодействии

Если теперь искаженные при распространении волны профили [31] разложить в ряд Фурье, можно получить полный спектр волнового поля (рис. 5). Видно, что все полуцелые субгармоники имеют сравнимые по модулю амплитуды, а основной сигнал с частотой  $\omega_0/2$  усиливается незначительно по сравнению со своим исходным значением, причем усиление проявляется в ограниченной области расстояний.

Однако сказанное не означает, что в недиспергирующих средах вовсе нельзя добиться заметного усиления. Ясно, что рождение высших субгармоник в среде возможно лишь при наличии на входе сигнала с частотой  $\omega_0/2$ . Этих субгармоник много. Поэтому, суммируя их интенсивности (для этого нужны специальные способы обработки), можно извлечь информацию о сигнале

из многих компонент спектра и получить значительный эффект [32].

На рис. 6 показана возможная схема эксперимента [31]. Волна накачки с частотой  $\omega_0$  распространяется изолированно в опорном канале 2, а также в приемном (открытом) канале 1, где она взаимодействует с сигнальной волной с частотой  $\omega_0/2$ . На выходе канала 2 формируется профиль в виде симметричной "пилы", спектр которой содержит только целые гармоники с частотами  $n\omega_0$ . На выходе канала 1 формируется "пила" с попарно несимметричными фронтами, смещенными навстречу друг другу; спектр содержит как гармоники, так и полуцелые субгармонические составляющие. Вычитая сигналы на выходе каналов 1 и 2, имеем разностный сигнал в виде двух (на каждом периоде) пиков разной

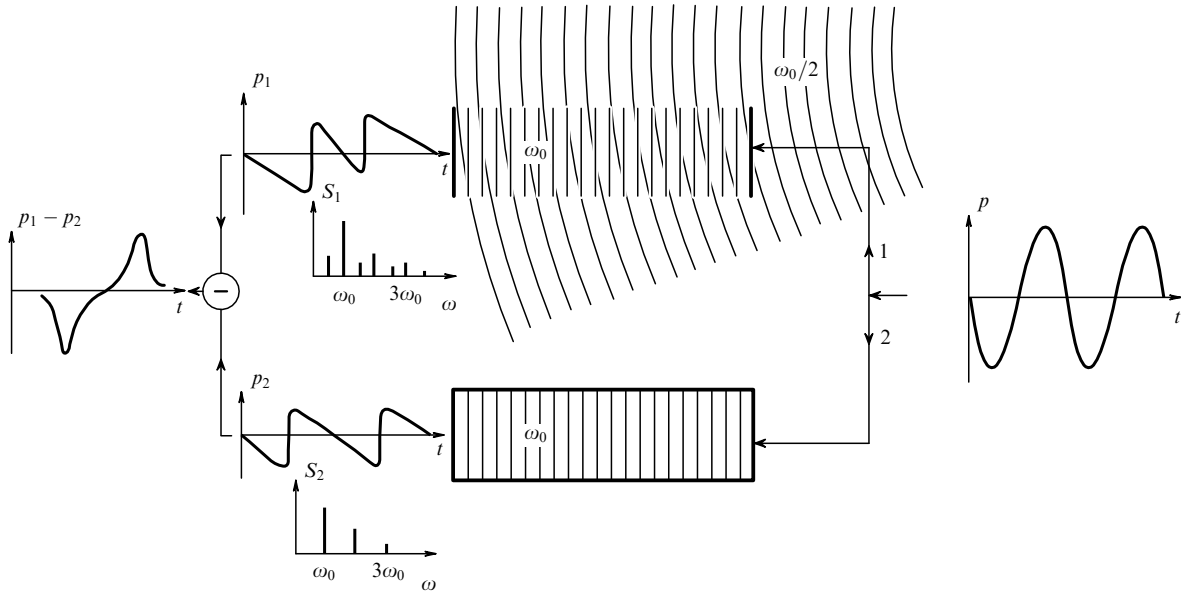


Рис. 6. Схема эксперимента, реализующего значительное усиление сигнала в среде без дисперсии

полярности. Величина этих пиков достигает амплитуды волны накачки, т.е. получается значительное усиление.

Этот пример показывает, насколько специфична картина взаимодействия в недиспергирующей среде и как трудно ее понять без анализа поведения волновых профилей, ограничившись с самого начала только рассмотрением спектров.

**2.4. Безынерционная самофокусировка в кубично-нелинейной среде без дисперсии**

Этот пример наглядно объясняет, почему спектральный подход для пучков пилообразных волн не дает правильных результатов.

Пространственно ограниченные пучки, на поведение которых влияют дифракция и нелинейное самовоздействие, могут быть описаны уравнением [11, 12]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u. \tag{6}$$

Здесь  $\gamma$  — коэффициент, учитывающий кубическую нелинейность среды,  $\Delta_{\perp}$  — лапласиан по координатам в поперечном сечении пучка. Для правильного описания ударных фронтов в (6) сохранен диссипативный член, пропорциональный  $b$ . Но фронты считаем бесконечно тонкими и  $b \rightarrow 0$ ; это сингулярно возмущенная задача (малый параметр при старшей производной) [31].

Следуя формально спектральному подходу, можно искать решение (6) в виде гармонической во времени волны

$$u = A(x, \mathbf{r}_{\perp}) \exp(i\omega t) + \text{компл. сопр.} \tag{7}$$

Для комплексной амплитуды  $A$  получаем из (6) нелинейное уравнение типа Шрёдингера [33, 34]

$$i\omega \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} A + \gamma \omega^2 |A|^2 A. \tag{8}$$

Как известно, (8) описывает неустойчивость фронта исходной плоской волны, когда ее интенсивность пре-

вышает критическое значение [34]. При этом амплитуды пространственных гармоник возмущения (добавки к амплитуде плоской волны) растут по экспоненте с увеличением расстояния  $x$ . В результате развития неустойчивости в самофокусирующей среде ( $\gamma > 0$ ) плоская волна разбивается на отдельные "нити", несущие мощность порядка критической [34].

С другой стороны, решение (6) можно искать в виде плоской волны:

$$p = p(x, \tau). \tag{9}$$

Соответствующее (9) решение (6) [35] описывает трансформацию исходной гармонической волны в пилообразную (рис. 1в), каждый "зубец" которой имеет трапецевидную форму. Из-за нелинейного поглощения на ударных фронтах пиковые значения возмущений ("амплитуды зубцов") затухают с расстоянием по закону [13, 35]

$$A(x) = A_0 (1 + c\gamma\omega A_0^2 x)^{-1/2}, \quad c = \frac{3 - 2 \ln 2}{4\pi}. \tag{10}$$

Таким образом, два противоположных процесса (рост амплитуды вследствие самофокусировки и нелинейное затухание волны из-за формирования ударных фронтов) описываются одним и тем же нелинейным членом в уравнении (6). Ясно, что переходить от (6) к (8) на основе предположения (7) нельзя; здесь необходимы адекватные методы анализа, учитывающие специфику поведения пилообразных волн.

Соответствующие подходы и результаты описаны в [13]. В частности, на стадии развитых трапецевидных "пил" в приближении нелинейной геометрической акустики для средней по периоду интенсивности  $J = u^2$  получается система

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (JV) + \frac{1}{r} JV = -\alpha\omega\gamma J^2, \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = \gamma c_0 \frac{\partial J}{\partial r}. \tag{12}$$

Вторая переменная  $V = \partial\psi/\partial r$  (где  $\psi$  — эйконал) — это угол наклона луча к оси пучка,  $\alpha$  — константа, определяемая структурой профиля пилообразной волны. Интересно, что нелинейный член ( $\sim \gamma$ ) в уравнении (6) привел к появлению правых частей одновременно в уравнениях (11) и (12). Правая часть в (12) ответственна за нелинейное искривление лучей (т.е. самофокусировку), а правая часть (11) — за нелинейное поглощение. Система уравнений (11), (12) аналогична уравнениям одномерного течения сжимаемой жидкости, использованным для анализа абберационной самофокусировки света [33]. Однако в оптической задаче поглощение отсутствует — равна нулю правая часть (11). В нашем же случае при  $\gamma \rightarrow 0$  исчезнет не только поглощение, но и самофокусировка.

Как показало исследование [13] решений уравнения (6), а также системы (11), (12), процесс самофокусировки пучков в нелинейных средах без дисперсии развивается на расстояниях, существенно превышающих длину образования разрывов. Здесь формируется "пила" и происходит конкуренция двух процессов — самофокусировки и затухания, рожденных одной и той же нелинейностью. В результате ширина пучка может заметно уменьшиться, но "амплитуда пилы" возрастает незначительно.

Таким образом, существуют принципиальные различия в процессах самовоздействия пучков в средах с дисперсией и без нее, что требует различных способов описания.

### 3. Дифрагирующие пучки пилообразных волн

Изучение волновых взаимодействий в средах без дисперсии до начала 70-х годов основывалось на анализе простых теоретических моделей. Рассматривались, главным образом, плоские или другие одномерные (сферически и цилиндрически симметричные) волны. Однако в реальных условиях приходится иметь дело с пучками, на эволюции которых сказывается дифракция, и указанная идеализация часто оказывается чересчур грубой.

Особенности поведения нелинейных ограниченных пучков отмечались в ранних экспериментах [2–5]. Однако систематические исследования были проведены позднее [36, 37], после создания адекватной теории в целях ее проверки.

На рис. 7 изображен профиль исходного гармонического сигнала, измеренный [37] на различных расстояниях от источника ультразвука в воде. В качестве излучателя использовался пьезокерамический диск диаметром 30 мм с резонансной частотой 1 МГц. Сигнал регистрировался широкополосным гидрофоном (пластинка пьезокварца  $x$ -срезы) диаметром 10 мм с резонансной частотой 14,5 МГц. Видно, что на небольших расстояниях сигнал близок к гармоническому. Затем фронт начинает укрупняться, появляется асимметрия в искажении полупериодов сжатия и разрежения. На расстоянии, примерно равном 25 см, образуется разрыв в профиле волны, что приводит к осцилляциям позади фронта, связанным с резонансным возбуждением гидрофона. При дальнейшем распространении наблюдается нелинейное затухание волны, но несимметрия искажения полуволн выражена по-прежнему четко: отрицательный полупериод скруглен и растянут, положительный — округлен и заострен.

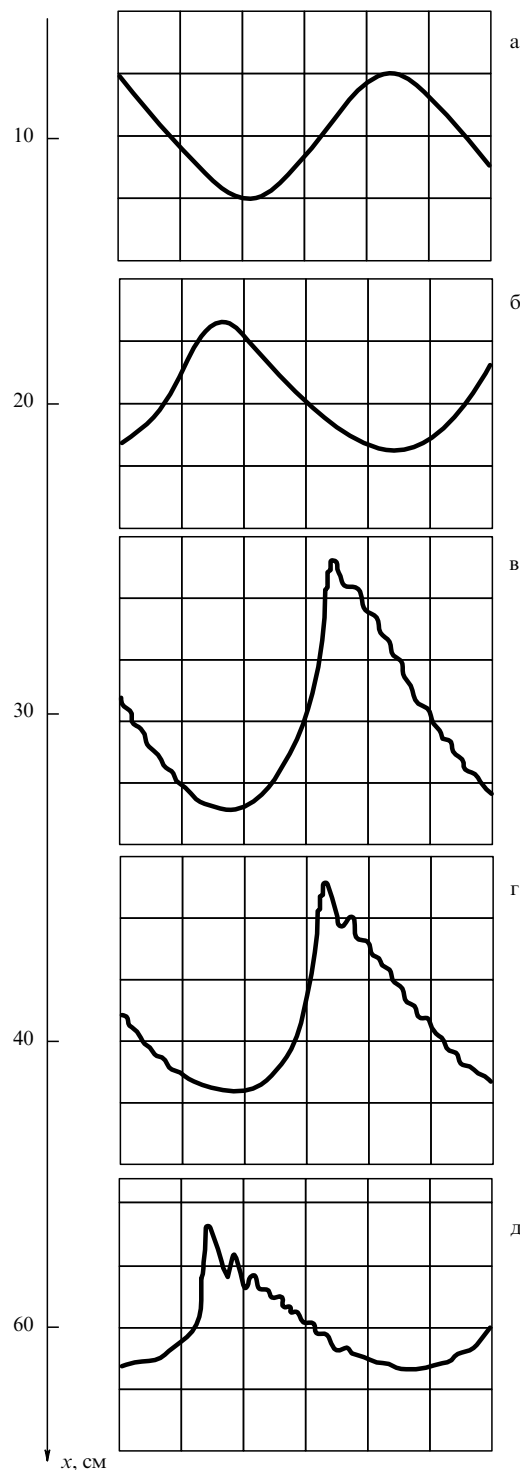


Рис. 7. Нелинейное искажение формы волны на оси пучка при увеличении расстояния  $x$  от излучателя.  $I = 0,9$  Вт/см<sup>2</sup>;  $N = 2,5$ ; скорость развертки 0,2 мкс/дел, масштаб по вертикали: (а, б) — 2,8 атм/дел; (в–д) — 1,1 атм/дел

В ряде экспериментов (см., например, [38]) наблюдалось "сглаживание" поперечного распределения поля в пучке. Поскольку вблизи оси ударная волна формируется раньше, начинается ее интенсивное затухание. В то же время в удаленных от оси областях разрывов еще нет и амплитуда волны постоянна. Таким образом, более сильное затухание в приосевой области приводит к

уширению пучка, и волна постепенно превращается в плоскую волну малой амплитуды — радиальное распределение становится более однородным [39]. Этому явлению аналогичен процесс нелинейного "сглаживания" диаграмм направленности мощных акустических излучателей, рассмотренный в [40].

Процессы несимметричного искажения дифрагирующих нелинейных волн детально изучены в численных экспериментах [41], в которых было также обнаружено превышение положительным пиковым давлением своего исходного значения.

Теоретические исследования нелинейных эффектов с учетом дифракции были начаты после того, как Р.В. Хохлов предложил дополнить метод медленно изменяющегося профиля [42] приближением квазиоптики, идеи которого восходят к работам 40-х годов М.А. Леонтовича и В.А. Фока по распространению радиоволн вдоль земной поверхности. После упрощения систему уравнений механики сжимаемых сред удалось свести к одному уравнению [43]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p, \tag{13}$$

которое мы предложили называть уравнением Хохлова–Заболотской (ХЗ). В настоящее время это название стало общепринятым. В уравнении (13)  $p$  — акустическое давление, остальные обозначения — те же, что в уравнениях (1) и (6).

Позднее были предложены модификации этого уравнения.

В [44] учтен диссипативный член, содержащий вторую производную поля в скобках в формуле (13), — такой же, как в уравнении (6). В [45] учтен дисперсионный член с третьей производной, позволивший описать пространственно ограниченные солитоны. В [46] добавлен интегральный член, ядро которого может быть восстановлено для любых частотных зависимостей поглощения и дисперсии [47, 48].

К настоящему времени известно более сотни работ, посвященных расчетам на основе уравнения ХЗ или его модификаций. Это в основном либо результаты численного интегрирования [41], либо данные по гармоникам и комбинационным частотам при слабо выраженной нелинейности [49–51]. Последние работы имеют важное прикладное значение, поскольку связаны с расчетами параметрических приборов в гидроакустике [49, 52].

Однако настоящий обзор посвящен пилообразным волнам, в пучках которых нелинейные эффекты выражены сильно. Из-за математических сложностей аналитического и численного решения таких задач работ по этой проблеме немного.

В [53] использован приближенный метод анализа уравнения ХЗ (13), основанный на разложении решения в ряд по малому параметру — отношению текущего значения радиальной координаты  $r$  к исходной ширине пучка  $a$ :

$$p(x, r, \tau) = p_0(x, \tau) + \frac{r^2}{2a^2} p_2(x, \tau) + \frac{r^4}{4a^4} p_4(x, \tau) + \dots \tag{14}$$

Такой подход аналогичен безаберрационному приближению в теории лазерной самофокусировки [33]. Отличие

состоит в том, что здесь вместо системы обыкновенных уравнений получается бесконечная цепочка нелинейных уравнений в частных производных. Ограничившись двумя первыми уравнениями ( $p_4 = p_6 = \dots = 0$ ), приходим к канонической системе

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \begin{pmatrix} p \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad F = \frac{N}{2} \int p_2 d(\omega \tau) \tag{15}$$

(здесь  $p \equiv p_0(x, \tau)$  — поле на оси пучка), содержащей нелинейный оператор с общей главной частью [54], которая решается точно. В формуле (15)  $g(x)$  — функция, определяемая условием сохранения количества движения волны,  $N$  — число (единственный критерий подобия в уравнении ХЗ), равное отношению длины образования разрыва к дифракционной длине [39]:

$$N = \frac{x_s}{x_d} = \frac{c_0^3 / (\varepsilon \omega p_0)}{\omega a^2 / (2c_0)}. \tag{16}$$

Заметим, что в безразмерных обозначениях

$$V = \frac{p}{p_0}, \quad z = \frac{x}{x_s}, \quad \theta = \omega \tau, \quad R = \frac{r}{a} \tag{17}$$

уравнение ХЗ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} \right). \tag{18}$$

На рис. 8 приведены результаты графического анализа решения системы (15) на оси пучка при значении числа  $N = 0, 4$ . Кривая 1 изображает профиль волны при  $z = 0$ . Если бы волна была плоской, нелинейные эффекты приводили бы к искажению профиля, показанному кривыми 2' ( $z = 1$ ) и 3' ( $z = 2$ ). При наличии дифракции волна ведет себя по-иному: положительный полупериод уменьшается по длительности, отрицательный — увеличивается. Поскольку площади полупериодов должны быть равны, в некоторой области значений  $x$  вблизи  $x_s$  имеет место превышение амплитуды положительного давления над исходным значением (кривая 2,  $z = 1$ ). В

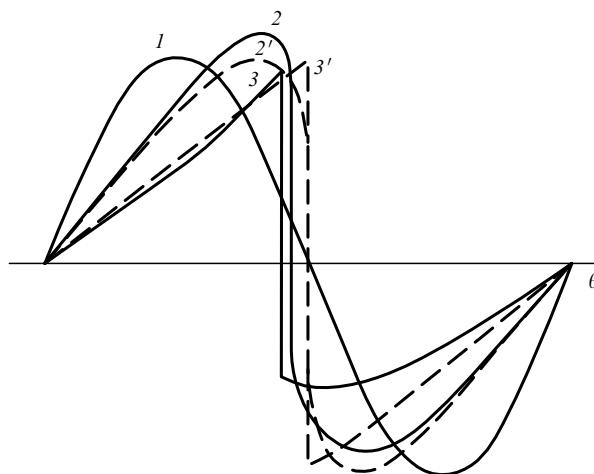


Рис. 8. Влияние дифракционных фазовых сдвигов на изменение поведения волны в пучке (сплошные кривые) по сравнению с плоской волной (штриховые кривые) при  $N = 0, 4$



разрывной области  $x > x_s$  отмеченный выброс "срезается" движущимся фронтом, но отличие от плоской волны (кривые 3 и 3') проявляется в еще большей степени.

Эти явления не связаны с эффектами самовоздействия [33] или с более интенсивной генерацией гармоник в пучке [55]. Их нетрудно объяснить различием дифракционных фазовых сдвигов или скоростей распространения основной и высших гармоник [48]. Аналогичные сдвиги в открытых резонаторах, например, приводят к различию частот разных поперечных мод [48].

Однако непосредственное разложение в ряд (14) по поперечной координате с учетом только двух членов (15) в разложении приводит к существенным ограничениям в применимости результатов. Оказывается, что решения хорошо описывают процессы вблизи оси, но только на малых расстояниях по сравнению с дифракционной длиной.

В [56] для устранения указанного недостатка метод [53] был модифицирован следующим образом. Решение (18) отыскивалось в виде

$$V = V(z, R, T = \theta - \psi(z, R)), \quad (19)$$

где  $\psi$  — неизвестная функция, описывающая искривление фазового фронта. Вместо уравнения ХЗ получалась следующая система:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{N}{4} \left( V \Delta_{\perp} \psi + 2 \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) - \frac{N}{4} \frac{\partial V}{\partial T} Q \right] = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{N}{4} \left( \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 = \frac{N}{4} Q(z, R). \quad (21)$$

Здесь  $Q$  — произвольная функция. Выбирая  $Q$  из соображений простоты (например так, как в линейной квазиоптической теории дифракции [48]) и используя параксиальное разложение (14) для  $V$ , а также для  $\psi$ , получаем решение на оси пучка в параметрической форме  $V = V(T_0)$ ,  $T = T(T_0)$ :

$$V = \frac{1}{f} \sin(T_0 + \eta) + \frac{1}{2Nf} \int_0^{\eta} f(y) \sin(\eta - y) dy, \quad (22)$$

$$T = T_0 - \frac{1}{N} \int_0^{\eta} f(y) \sin(T_0 + y) dy - \frac{1}{2N^2} \int_0^{\eta} f(y) dy \int_0^y f(y') \sin(y - y') dy'.$$

Здесь  $T_0$  — параметр,  $f = (\cos \eta)^{-1}$ ,  $\eta = \arctg Nz$ .

Процесс формирования пилообразной волны, рассчитанный по формулам (22), качественно аналогичен представленному на рис. 8. Сравнение показало [56], что как форма волны (22), так и пространственное распределение гармоник очень точно соответствуют результатам численного интегрирования на любых расстояниях от излучателя.

Однако в тех случаях, когда требуется знать структуру пучков вне параксиальной области, подходы [53, 56]

неприменимы. Простая асимптотическая теория, учитывающая влияние дифракции и нелинейности на гауссовы пучки, развита в [57]. Здесь использован переход к неявной "римановой" переменной  $T = \theta + zV$ , которая содержит неизвестную функцию  $V$ . Затем полученные нелинейные уравнения решались методом возмущений для дифрагирующих пучков. Оказалось, что оба предельных случая (линейные пучки с дифракцией и недифрагирующие нелинейные волны) уже в первом приближении описываются этим методом точно. В промежуточной области (для чисел  $N \sim 1$ ) возможны ошибки на расстояниях, где образование ударных волн сопровождается трансформацией плоской волны в сферически расходящуюся.

В дальнейшем метод [57] был уточнен с учетом высших приближений [58]. Теория пучков с негауссовым (полиномиальным или однородным) поперечным профилем развита в [59]. В отличие от [57] здесь использован метод возмущений наряду с процедурой ренормализации не только по временной переменной, но и по поперечным координатам пучка. Хорошая точность достигнута в [60], где процедура ренормализации, позволяющая описать пилообразные волны, проведена на базе первых трех приближений квазилинейной теории возмущений.

В заключение этого раздела укажем на работы [61, 62], в которых дан анализ границ применимости подхода, основанного на уравнении ХЗ, и показана его адекватность лабораторным экспериментам. Напомним, что в тех ситуациях, когда нелинейные эффекты выражены слабо и ударных фронтов нет, точность уравнения ХЗ подтверждена также натурными гидроакустическими экспериментами и расчетами реальных параметрических приборов [52].

Уравнению ХЗ и разнообразным модификациям полевых уравнений такого типа посвящаются ежегодно десятки публикаций. Поэтому интересно отметить, что наряду с описанной выше линией развития этих исследований, берущей начало в классических работах по теории волн, существует, по-видимому, независимая вторая линия. Она восходит к работам Р. Прандтля (см., например, [63]) по гидродинамике. Действительно, идеи вывода уравнений ламинарного пограничного слоя (1904 г.) полностью аналогичны идеям приближения квазиоптики. Развитие этих идей в механике привело к появлению работ, близких по смыслу к работам по теории волн, но практически не повлиявших на нее. Так, еще в 1948 г. было получено уравнение [64], формально совпадающее с уравнением ХЗ, однако там физический смысл переменных и постановка задачи иные. Вместо формы волнового профиля и формы пучка на поверхности излучателя в задаче обтекания тел задается форма тела и условие равенства нулю нормальной компоненты скорости на его поверхности. В [65] аналогичный подход использован для расчета трансзвукового обтекания крыла. Известный "след" [64] имеется в книге [63, с. 655], где стационарный вариант уравнения типа ХЗ используется для получения закона околосзвукового подобия Т. Кармана.

Однако продолжение "механической линии" привело к появлению уже чисто "волновых" работ, в которых уравнение ХЗ выводится заново. Это работы по теории слабых ударных волн — особенностям их фокусировки [66] и устойчивости по отношению к поперечной модуля-

ции [67] (см. также [63, с. 493]). Полезно знать обо всех этих работах, поскольку многие из них содержат важные математические результаты или физические выводы, которые могут быть перенесены на другие объекты исследований.

#### 4. Волны в неоднородных средах и нелинейная геометрическая акустика

Тенденции развития исследований и приложения теории нелинейных пилообразных волн выдвигают сегодня на первый план работы по распространению волн в неоднородных средах. Например, импульсов звукового удара от сверхзвуковых пассажирских самолетов [68, 69], взрывных волн в атмосфере и океане [70], непрерывного акустического излучения мощных источников звука и т.п.

Возникающие здесь проблемы можно условно разделить на три группы. Это задачи, связанные с передачей информации (пример — взрывные сигналы в подводном звуковом канале), проблемы формирования интенсивных воздействий и защиты окружающей среды от них (звуковой удар), а также обратные задачи нелинейного неразрушающего контроля и диагностики (восстановление параметров источника, рассеивателей, трассы распространения сигнала).

Для описания пилообразных волн необходимо правильно определить положение и форму ударного фронта, а также величины возмущений при переходе через фронт ударной волны. С этой целью используются методы газовой динамики, упрощенные с учетом малости акустических чисел Маха [71–73]. Однако иметь информацию только о фронте волны, конечно, недостаточно. Волну нужно рассматривать как сигнал сложного спектрального состава, несущий информацию об источнике и трассе своего распространения. Например, при движении волны в атмосфере, грунте или океане она непрерывно взаимодействует с неоднородностями, которые служат рассеивателями, естественными волноводами, линзами, фильтрами и имеют выраженные частотно-избирательные свойства. Поэтому необходимо следить за искажением волнового спектра. На языке пространственно-временных характеристик возмущения это означает, что наряду с динамикой ударных фронтов нужно описывать эволюцию гладких участков профиля, а также их взаимодействия друг с другом. Эта сложная задача может эффективно решаться лишь в приближении нелинейной акустики с использованием результатов, полученных на основе линейной теории волн в неоднородных средах [74–76] и теории нелинейных недиспергирующих волн [1, 71–73].

Применительно к плавно-неоднородным средам были развиты приближения типа нелинейной геометрической акустики (см., например, [77–79]). В [80–82] получены эволюционные уравнения типа ХЗ для неоднородных сред, позволившие учесть дифракцию пучков. Однако, несмотря на упрощения, эти задачи остаются сложными, что объясняет немногочисленность полученных здесь конкретных результатов.

В настоящее время имеет смысл выделить два способа упрощения исходных уравнений, дающих возможность решить различные нелинейные задачи. Первый подход основан на приближении нелинейной геометрической акустики и применяется в случае пучков с большой расходимостью лучей. Однако он не справедлив в

абберационной области, где лучи пересекаются. Второй подход, основанный на квазиоптическом приближении, рассчитан только на пучки с узким угловым спектром, зато позволяет описать поля в окрестности фокусов и каустик.

С использованием второго подхода в [21] было выведено эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial s} \ln(\rho c) - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] - \frac{1}{2c^2} \left[ (\bar{\xi} \nabla_{\perp})^2 c \right]_{\bar{\xi}=0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = \frac{\rho}{2} \nabla_{\perp} \left( \frac{c}{\rho} \nabla_{\perp} p \right). \quad (23)$$

Для описания поля акустического давления  $p$  в окрестности произвольно выбранного луча используются криволинейные координаты. Расстояние  $s$  отсчитывается вдоль луча от некоторой фиксированной точки, а координаты  $\bar{\xi} = (\xi, \eta)$  вводятся в поперечном сечении специальным образом: базис этой системы повернут относительно трехгранника Френе на угол, определяемый криволинейным интегралом от кручения луча [21]. Параметры среды, скорость звука  $c$ , плотность  $\rho$  и нелинейность  $\varepsilon$  в уравнении (23) зависят от пространственных координат. Заметим, что, используя подход [21], можно обобщить (23) на диссипативные, релаксационные и другие среды с произвольными частотными зависимостями их линейных свойств (так, как это сделано в [46] для однородной среды).

В приближении нелинейной геометрической акустики для периодических волн с сильно искаженным профилем получаются уравнения

$$(\nabla \psi)^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = n^2, \quad (24)$$

$$\nabla \psi \nabla p + \frac{1}{2} \Delta \psi p - \frac{p}{2} \nabla \ln \rho \nabla \psi - \frac{\varepsilon n}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \quad (25)$$

где  $p = p(\tau = t - \psi(\mathbf{r})/c_0, \mathbf{r})$ . Заметим, что уравнение эйконала (24) здесь такое же, как в линейной задаче. Справедливость этого совпадения для периодических сигналов очевидна. Действительно, если для основной частоты сигнала дифракцией можно пренебречь, то это тем более верно для высших гармоник. Иная ситуация имеет место для модулированных сигналов, в процессе распространения которых происходит генерация низкочастотных компонент спектра, а также для интенсивных импульсов, содержащих низкие частоты уже на входе нелинейной среды. В некоторых случаях уравнение эйконала удобно модифицировать, включив в него нелинейные члены; так делается при расчете эффектов самовоздействия в кубично-нелинейной недиспергирующей среде [13] и при учете движения ударного фронта [14–16] в сопровождающей системе координат.

Рассмотрим для примера двумерную задачу, принимая в качестве независимых переменных эйконал  $\psi$  и параметр  $\alpha$ , "нумерующий" лучи на прямой  $x = 0$  (рис. 9). При этом система уравнений (24), (25) сведется к уравнению [83]

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{D(\alpha, \psi)}{\rho c^2} \right] - \frac{\varepsilon}{c_0 c^2 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \quad (26)$$

где  $D = \partial(x, z)/\partial(\alpha, \psi)$  — якобиан перехода от декартовых координат  $x, z$  к криволинейным координатам

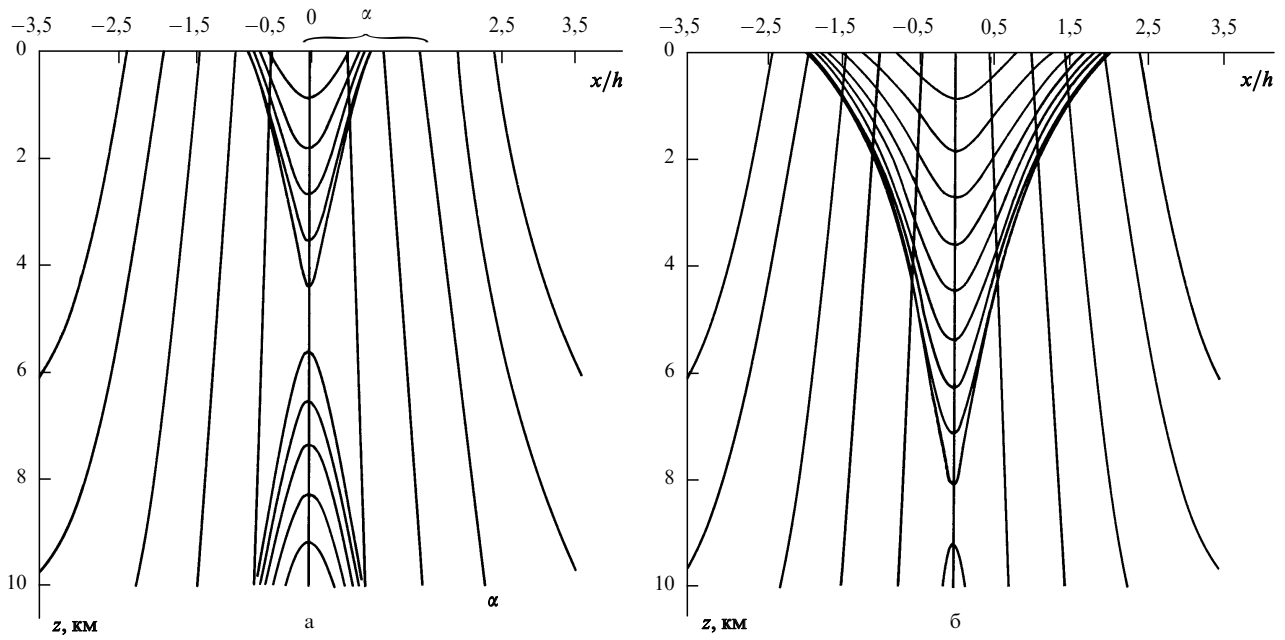


Рис. 9. Лучи и линии равных уровней пикового давления для одиночного импульса (а) и периодической "пилы" (б)

$\alpha, \psi$ . Для стратифицированной среды, параметры которой зависят лишь от координаты  $z$ , решение уравнения эйконала (24) удобно записать в параметрическом виде

$$\psi(\alpha, z) = \psi_0(\alpha) + \int_0^z \frac{n^2(y) dy}{[n^2(y) - a^2(\alpha)]^{1/2}}, \quad (27)$$

$$x(\alpha, z) = \alpha + a(\alpha) \int_0^z \frac{dy}{[n^2(y) - a^2(\alpha)]^{1/2}}, \quad (28)$$

где функция

$$a(\alpha) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{z=0} = n_0 \cos \theta_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = n \cos \theta = \text{const}(\alpha) \quad (29)$$

описывает наклон луча с номером  $\alpha$  к оси  $x$ ;  $\theta$  — угол между направлением  $x$  и касательной к лучу. Задавая функцию  $a(\alpha)$  (29), мы тем самым фиксируем угол выхода каждого луча. Формула (27) позволяет при  $z = 0$  задать произвольный фазовый фронт на "веере" сформированной системы лучей. Якобиан при этом равен [83]

$$D = \frac{[n^2(z) - a^2(\alpha)]^{1/2}}{n^2(z)} \left[ 1 + \frac{da}{d\alpha} \int_0^z \frac{n^2(y) dy}{[n^2(y) - a^2(\alpha)]^{3/2}} \right]. \quad (30)$$

Обратимся теперь к уравнениям переноса (25), (26). В отличие от линейного случая они содержат дополнительную временную переменную  $\tau$ . В линейных задачах эту переменную исключают, переходя от  $p$  к комплексной амплитуде  $A$ :  $p = A(\mathbf{r}) \exp(-i\omega\tau)$ . Однако уравнения (25), (26) могут описывать существенно негармонические волны с широким спектром взаимодействующих фурье-компонент; для таких волн исключить  $\tau$ , вообще говоря, нельзя.

Тем не менее в наиболее интересном случае, когда нелинейные эффекты выражены сильно и профиль волны имеет пилообразную форму (рис. 1а), можно положить

$$p(\tau, \mathbf{r}) = -2f\tau A(\mathbf{r}) \quad (31)$$

и перейти от (25), (26) к уравнениям для пиковых значений  $A$  поля  $p$ :

$$\nabla\psi\nabla A + \frac{A}{2} \Delta\psi - \frac{A}{2} \nabla \ln \rho \nabla\psi + \frac{2\epsilon n f}{c^3 \rho} A^2 = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \psi} + A \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \sqrt{\frac{D}{\rho c^2}} + \frac{2\epsilon f}{c_0 c^2 \rho} A^2 = 0. \quad (33)$$

Формула (31) описывает прямолинейные участки профиля периодической "пилы";  $f$  — ее основная частота. Ударные фронты расположены при  $2f\tau_n = \pi(2n + 1)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и не смещаются из точек  $\tau_n$  в процессе распространения волны. Уравнения (32), (33) линеаризуются подстановкой  $A = B^{-1}$  и легко решаются.

Для двуполярного N-импульса (рис. 1б) также можно воспользоваться уравнениями (32), (33). Однако при этом переменная  $A$  (31) будет иметь смысл наклона прямолинейных участков профиля, а оба фронта будут смещаться в процессе распространения, занимая положения  $\tau = \pm T(\psi)$ . Чтобы учесть эти различия, воспользуемся условием сохранения количества движения (оно очевидным образом следует из (26)) и связью между "амплитудами" N-волны ( $A_N$ ) и "пилы" ( $A_s$ ) (последняя следует из (31)):

$$\left( \frac{D}{\rho c^2} \right)^{1/2} A_N(\psi) T(\psi) = \text{const}, \quad A_N = 2f T A_s. \quad (34)$$

Решив (33) для  $A = A_s$  и пользуясь условиями (34), получим аналогичный результат для  $A_N$ .

Для плоскослоистой среды, параметры которой зависят только от  $z$ , эти решения имеют вид [83]

$$A_{s,N}(\alpha, z) = \frac{A_0(\alpha)}{n} \left( \frac{D_0 \rho}{D \rho_0} \right)^{1/2} \times \left[ 1 + \frac{1}{l_s} \frac{A_0(\alpha)}{p_0} \int_0^z \left( \frac{D_0 \rho_0 \varepsilon^2}{D \rho \varepsilon_0^2} \frac{n^6}{n^2 - a^2(x)} \right)_{z=z_1}^{1/2} dz_1 \right]^m. \quad (35)$$

В формуле (35) периодической "пиле" соответствует  $m = -1$ , N-волне —  $m = -1/2$ . Характерная нелинейная длина (расстояние образования разрыва)  $l_s = c_0^3 \rho_0 / (2f \varepsilon_0 p_0)$ ; в случае двуполярного N-импульса здесь удобно положить  $f = (2T_0)^{-1}$ , где  $T_0$  — исходная длительность фазы сжатия (или разрежения).

В [83] решение (35) использовано для расчета акустического поля в атмосфере, стратифицированной по плотности и скорости звука:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \frac{z}{H}, \quad c = c_0(1 + kz).$$

Плоскость  $z = 0$  помещена на высоте 10 км, ось  $z$  направлена вертикально вниз;  $H = 8$  км,  $k = 1,3 \cdot 10^{-2}$  км $^{-1}$ ,  $c_0 = 300$  м/с,  $\rho_0 = 0,37$  кг/м $^3$ . При этом  $z = 0$  были заданы искривленный фазовый фронт и неоднородное распределение амплитуды:

$$\psi_0(x = \alpha) = h \left( 1 + \frac{\alpha^2}{h^2} \right)^{1/2}, \quad A_0(\alpha) = p_0 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{h^2} \right)^{-1/2}, \quad (36)$$

где  $h$  — высота (над плоскостью  $z = 0$ ), на которой лежит фокус расходящейся цилиндрической волны ( $h < 0$  отвечает сходящейся волне),  $\alpha$  — текущее значение абсциссы, фиксирующее точку выхода луча. Длина образования разрыва полагалась равной  $l_s = 2,3$  км, что соответствует, например, N-импульсу с характерной длительностью  $T_0 = 0,05$  с и пиковым давлением  $p_0 = 180$  Па.

На рис. 9 представлена картина лучей (28) для расходящегося пучка ( $h = 21,3$  км), а также линии равных уровней пикового давления в одиночном импульсе (рис. 9а) и периодической "пиле" (рис. 9б). С ростом пройденного волной расстояния акустическое давление уменьшается из-за нелинейного затухания и расходимости лучей. Затем волна входит в более плотные слои атмосферы и давление начинает расти. В результате пространственные распределения пиковых давлений имеют седловую точку; для импульса она расположена на высоте примерно 5 км, а для периодической "пилы" (она затухает сильнее) — на расстоянии 1 км от земли.

Поведение амплитуд определяется совместным влиянием рефракции, изменением параметров среды вдоль каждого луча, а также нелинейным затуханием. Для того чтобы выделить роль нелинейного затухания, рассмотрим сходящуюся волну в однородной среде, где (30) и (28) с учетом первой формулы (36) примут вид

$$D = \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \left( 1 + \frac{\alpha^2}{h^2} \right)^{-1/2}, \quad x = \alpha \left( 1 - \frac{z}{h} \right). \quad (37)$$

Из формул (37) следует очевидный факт, что в однородной среде уменьшение сечения лучевых трубок, пропорционального  $D$ , происходит только вследствие схо-

димости исходного пучка лучей. При этом лучи  $x(z)$  являются прямыми. Пиковые давления на оси пучков вначале убывают из-за нелинейного затухания, но затем неограниченно возрастают при подходе к фокусу. Ширины пучков, напротив, растут в результате более сильного затухания в приосевой области. Но в точке  $z = h$  пучки схлопываются — их ширины обращаются в нуль.

Простейшие явления, описанные выше, оказывают существенное влияние на сложную картину поля пилообразных волн в неоднородной среде.

## 5. Фокусировка разрывных волн

Для создания сильных волновых полей используются фокусирующие устройства, применяемые во многих ультразвуковых технологиях и приборах медицинской техники. В процессе фокусировки происходит концентрация волновой энергии, и роль нелинейных эффектов существенно возрастает. Кроме них, важны линейные диссипативные свойства среды, а в фокальной области принципиален учет дифракции.

Рассмотрим вначале роль указанных явлений по отдельности. Решение линеаризованного уравнения ХЗ (13) для гауссовых пучков на оси ( $r = 0$ ) имеет вид [48, 52]

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega\tau + \varphi) \frac{\tilde{p}_0(\omega) d\omega}{[(1 - x/x_0)^2 + x^2/x_d^2]^{1/2}}, \quad (38)$$

$$\varphi = \arctg \frac{x/x_d}{1 - x/x_0} + \pi\Theta(x - x_0).$$

Здесь  $x_d = \omega a^2 / 2c_0$  — дифракционная длина (16),  $\Theta$  — функция единичного скачка (Хевисайда),  $\tilde{p}_0$  — исходный спектр сигнала. В геометрическом фокусе  $x = x_0$  решение (38) принимает вид

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_d}{x_0} \tilde{p}_0 \sin \left( \omega\tau + \frac{\pi}{2} \right) d\omega = \frac{a^2}{2c_0 x_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_0(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (39)$$

Таким образом, форма профиля в фокусе есть производная по времени от исходной (при  $x = 0$ ) формы сигнала.

Если сигнал гармонический, максимум его амплитуды достигается в точке  $x_{\max} < x_0$  (расположенной между излучателем и геометрическим фокусом), а коэффициент максимального усиления  $K \gg 1$  (при слабом влиянии дифракции). Эти величины согласно (38) равны

$$x_{\max} = \frac{x_0}{1 + x_0^2/x_d^2}, \quad K = \left( 1 + \frac{x_0^2}{x_d^2} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

В [84] описан процесс искажения формы однополярного импульсного сигнала  $p = p_0 \exp(-|\tau|/T_0)$ . По мере распространения вследствие дифракции появляется "хвост" отрицательной полярности. При стремлении волны к фокусу "амплитуды" фаз сжатия и разрежения увеличиваются, а сигнал дифференцируется. За фокусом из-за расходимости эти максимумы уменьшаются; импульс стремится принять форму, инвертированную по сравнению с исходной.

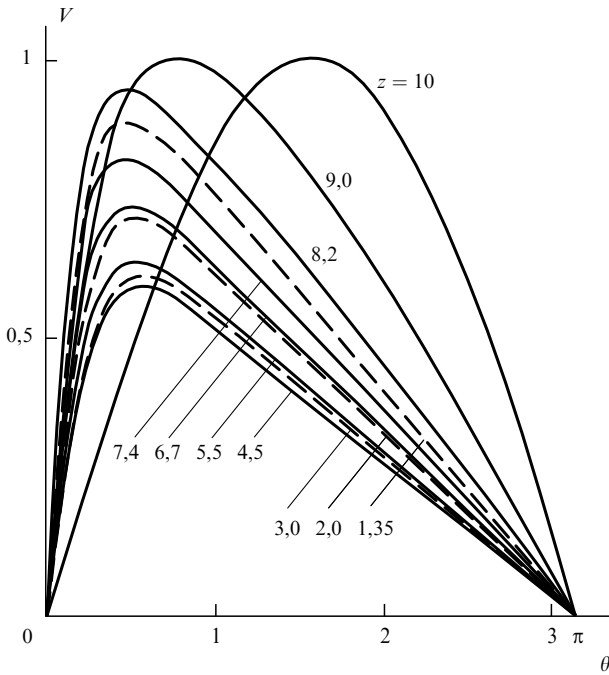


Рис. 10. Искажение полупериода сферической волны при ее сжатии к фокусу. Число  $\Gamma = 0, 1$ . Цифрами у кривых указано безразмерное расстояние  $z = x/x_s$  от текущего положения фронта до фокуса

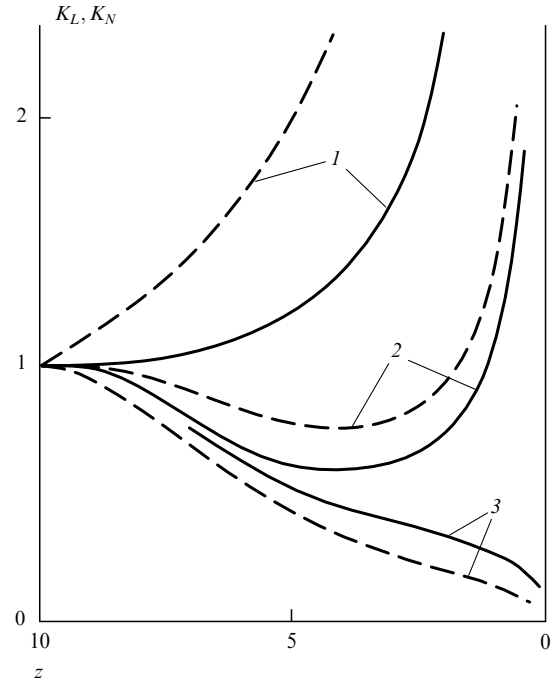


Рис. 11. Изменение линейных (1) и нелинейных (2) коэффициентов усиления, а также их отношения (3) при распространении волны от излучателя ( $z = 10$ ) к фокусу ( $z = 0$ ): сплошные кривые —  $\Gamma = 0, 1$ ; штриховые —  $\Gamma = 0$

Теперь пренебрежем дифракцией и рассмотрим, как ведет себя нелинейная сферически сходящаяся волна. Соответствующее решение уравнения (18) с добавлением диссипативного члена (или модифицированного уравнения Бюргерса для сходящихся волн [85]) в безразмерных переменных (17) имеет вид [31]

$$V = A(z) \left[ -\theta + \pi \tanh\left(\frac{\pi A(z)}{2\Gamma} \theta\right) \right], \tag{41}$$

$$A = \frac{z_0}{z} \left( 1 + z_0 \ln \frac{z_0}{z} \right)^{-1}. \tag{42}$$

Решение (41) при малых значениях чисел  $\Gamma = x_s/x_a$  описывает один период ( $-\pi < \theta < \pi$ ) пилообразной волны. Оно получено для сигнала, гармонического на излучателе (при  $x = x_0$  или  $z = x_0/x_s = z_0$ ). Сигнал распространяется к центру ( $x = z = 0$ ), т.е. безразмерное расстояние уменьшается от  $z_0$  до 0.

На рис. 10 [31] изображен один полупериод волны для  $z_0 = 10$ , когда расстояние от исходной сферической поверхности до фокуса существенно превышает длину образования разрыва. В этом случае наблюдается интересное явление — двукратное формирование ударного фронта [85, 31]. На рис. 10 видно, как исходная ( $z = z_0 = 10$ ) гармоническая волна искажается в процессе сжатия к фокусу. На кривой  $z = 8,2$  уже отчетливо заметен крутой передний фронт. После этого максимальное возмущение в волне уменьшается, а фронт расширяется — до кривой  $z = 4,5$ . Ширина ударного фронта достигает максимального значения в точке  $z_{\max} = z_0 \exp(1/z_0 - 1)$ ; в ее окрестности процесс нелинейного затухания "пилы" ослаблен. Однако еще ближе к фокусу возмущение снова начинает расти (сходимость преобладает над диссипацией), и фронт снова становится крутым.

Очевидно, что нелинейное затухание "пилы" приводит к уменьшению коэффициента усиления при фокусировке [5]. Согласно решению (41), отношение коэффициентов нелинейного  $K_N$  и линейного  $K_L$  усиления равно

$$\frac{K_N}{K_L} = \frac{2\Gamma}{\pi} \frac{z}{z_0} \exp[\Gamma(z_0 - z)] \times [y^{1/2}(y - 1)^{1/2} - \operatorname{arcosh}(y^{1/2})], \quad y = \frac{\pi A^2}{2\Gamma}, \tag{43}$$

где  $A$  дается формулой (42). Зависимости коэффициентов усиления  $K_N, K_L$  от  $z$ , а также их отношения (43) приведены на рис. 11 (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Штриховые кривые отвечают случаю исчезающе малой диссипации,  $\Gamma \rightarrow 0$ , сплошные кривые —  $\Gamma = 0, 1$ . Коэффициент нелинейного усиления  $K_N$  имеет минимум в области между излучателем и фокусом, где наблюдается "размытие" ударного фронта (см. рис. 10). При подходе к фокусу оба коэффициента  $K_N, K_L$  возрастают, но их отношение стремится к нулю (кривые 3 на рис. 11).

Однако нелинейность может не только уменьшать, но и увеличивать коэффициент усиления из-за более сильной фокусировки высших гармоник, генерируемых интенсивной волной [86, 73]. Такой обратный эффект возможен в том случае, когда нелинейное затухание на всем пути от излучателя к фокальной области не приводит к заметным потерям энергии, т.е. пилообразная волна, если и формируется, то в непосредственной близости от фокуса. Соответствующий расчет сделан в [87] с использованием поэтапного подхода.

Предполагалось, что на первом этапе распространения в области  $x_0 > x > x_*$  волна испытывает только нелинейные искажения, как в сферически-симметричной

сходящейся волне [31]

$$\frac{p}{p_0} = \frac{x_0}{x} \sin\left(\omega\tau + \frac{p}{p_0} \frac{x}{x_s} \ln \frac{x_0}{x}\right). \quad (44)$$

Граница этапа  $x_*$  выбирается из компромиссных условий: она мала по сравнению с фокусным расстоянием ( $x \ll x_0$ ) и велика по сравнению с размером фокальной области ( $x_* \gg x_0^2/x_d$ ). На втором этапе  $x_* > x > 0$  предполагалось, что волна испытывает только дифракционные искажения; здесь нелинейные искажения не накапливаются (ввиду малых размеров фокальной области) несмотря на большие пиковые давления и крутизну фронта ударной волны.

Используя (44) в качестве граничного условия (при  $x = x_*$ ) для решения дифракционной задачи (39)

$$p\Big|_{x=0} = \frac{a_*^2}{2c_0x_*} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_{x=x_*}, \quad a_* = a \frac{x_*}{x_0},$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_{\max} = \omega p_0 \frac{x_0}{x_*} \left(1 - \frac{x_0}{x_s} \ln \frac{x_0}{x_*}\right)^{-1},$$

удается рассчитать нелинейный коэффициент усиления

$$\frac{K_N}{K_L} = \left(1 - \frac{x_0}{x_s} \ln \frac{x_0}{x_*}\right)^{-1}. \quad (45)$$

Видно, что  $K_N$  тем больше  $K_L$ , чем сильнее нелинейность (меньше нелинейная длина  $x_s$ ); зависимость от неопределенной границы  $x_*$  этапа — слабая. Возрастание поля в фокусе по сравнению с линейным случаем отмечалось в экспериментах [88, 89]. Однако принципиальный вопрос о максимально возможном значении отношения  $K_N/K_L$  не выяснен до сих пор. Это связано со сложностями одновременного учета нелинейных, дифракционных и диссипативных явлений в условиях "острой" фокусировки.

Только для малых углов схождения волнового фронта в [56] удалось получить решение уравнения ХЗ, описывающее нелинейно-дифракционную эволюцию профиля. Это решение записывается в параметрическом виде (21), где

$$f = \frac{Nz_0}{\sin \eta + Nz_0 \cos \eta}, \quad \eta = \pi\theta(z - z_0) + \arctg \frac{Nz}{1 - z/z_0}. \quad (46)$$

Безразмерное расстояние  $z = x/x_s$  изменяется здесь от  $z = 0$  (излучатель) в сторону возрастающих значений  $z$ . Геометрический фокус расположен при  $z = z_0 = x_0/x_s$ .

Профили, построенные согласно решению (21), (46), показаны на рис. 12. В процессе распространения к фокусу наблюдается увеличение амплитуды и укрупнение переднего фронта. Кроме того, из-за дифракции происходит сдвиг нулевых точек профиля вперед. В геометрическом фокусе благодаря дифракционной дефазировке гармоник профиль становится несимметричным; область положительного давления усиливается сильнее. Сразу же за фокусом (кривая для  $x/x_0 = 1,2$  на рис. 12) профиль волны приобретает вид, похожий на производную от профиля перед фокусом (кривая для  $x/x_0 = 0,8$ ). Отношение коэффициентов линейного и нелинейного усиления в фокусе согласно этому решению для положи-

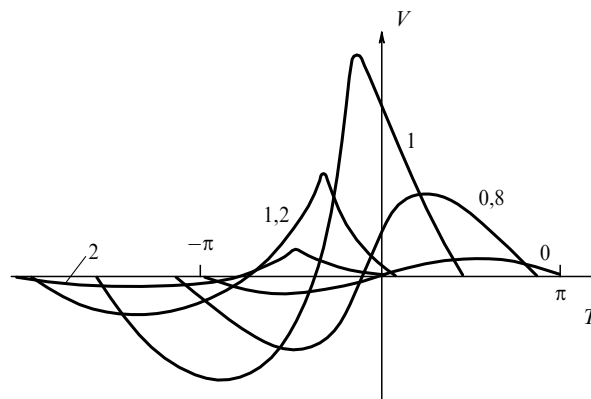


Рис. 12. Искажение профиля исходного гармонического сигнала при прохождении через фокус. Цифры у кривых — безразмерное расстояние  $x/x_0$  в единицах фокусных длин  $x_0$ . Существенны дифракция ( $x_d = 10x_0$ ) и нелинейность ( $x_s = 3,3x_0$ )

тельного пикового давления равно

$$\frac{K_N}{K_L} = 1 + \frac{x_0}{2x_s} Q\left(y = \frac{x_0}{x_d}\right), \quad Q = \frac{(\pi/2)y - \ln y}{1 + y^2}. \quad (47)$$

Формула (47) несколько отличается от результата поэтапного анализа (45), хотя дает ту же качественную зависимость от  $x_0/x_s$ .

Перейдем теперь к рассмотрению явлений, возникающих в процессе фокусировки нелинейных импульсных сигналов с ударными фронтами. Исследования этих проблем в последние годы стимулировались медицинскими приложениями — прежде всего ударноволновой экстракорпоральной литотрипсией [18, 19]. Ее цель — бесконтактное удаление почечных и желчных камней из организма человека. Мощные акустические импульсы генерируются вне тела пациента, фокусируются на биоконкремент и дробят его на мелкие фрагменты, выходящие затем естественным путем. Заметная часть работ, докладывавшихся на последних симпозиумах по нелинейной акустике, акустических конгрессах и семинарах (см., например, [16, 90–94]), посвящена физическим аспектам генерации мощных импульсов, их фокусировки, а также механизмам разрушения конкрементов.

Обычно используются генераторы трех типов: электрогидравлические, электромагнитные и пьезоэлектрические [19, 91]. Однако для улучшения характеристик литотриптеров и снижения вредных побочных воздействий разрабатываются альтернативные способы, например детонация микропорций взрывчатых веществ [94]. Широкие возможности управления длительностью импульса, его формой и диаграммой направленности излучения открывает применение оптоакустических генераторов [95], в которых мощный импульс возбуждается при поглощении модулированного лазерного излучения [96–99].

Проблема фрагментации конкрементов такими импульсами полностью не выяснена. Имеются экспериментальные свидетельства в пользу того, что фронтальная поверхность мишени разрушается в основном за счет кавитации — большими давлениями при коллапсе пузырьков либо кумулятивными струйками, образующимися при их несимметричном схлопывании [92]. Тыльная поверхность может разрушаться отрицательными давле-

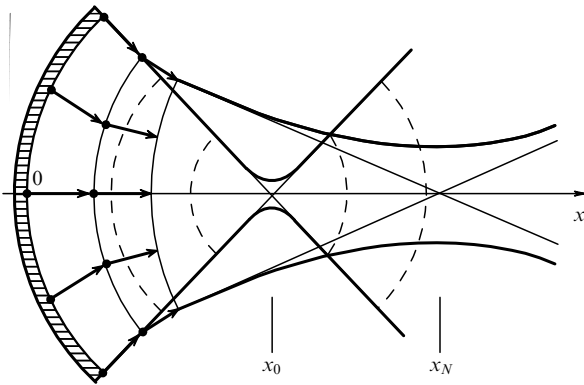


Рис. 13. Саморефракция ударного фронта, приводящая к сдвигу и уширению фокальной области

ниями ("откол"), формирующимися при отражении фронта импульса от поверхности внутри образца [100].

В процессе разработки коммерческих литотриггеров и при проведении измерений в возбуждаемых ими полях мощных фокусированных импульсов наблюдался ряд интересных нелинейных явлений: саморефракция, насыщение пикового давления в фокусе, увеличение размеров фокальной области, ее сдвиг от излучателя и др. [101–103]. Нужно было разобраться в природе этих явлений и дать им математическое описание, для чего понадобились новые экспериментальные и теоретические исследования.

Рис. 13 иллюстрирует процесс саморефракции ударного фронта. Для сравнения штриховыми линиями изображены сферические фронты, отвечающие линейной фокусировке; конечный размер перетяжки здесь определяется дифракцией, по-разному проявляющейся для различных компонент широкополосного спектра сигнала.

Поскольку скорость распространения слабой ударной волны  $c = c_0 [1 + \varepsilon A / (2c_0^2 \rho_0)]$  зависит от величины  $A$  скачка давления на фронте, перемещения точек фронта (отмечены стрелками) вблизи оси пучка больше, чем на его периферии. В результате около источника наблюдается "выпрямление" фронта. Одновременно идет процесс нелинейного затухания, и распределение  $A$  по фронту становится более однородным (см. раздел 3). Это замедляет саморефракцию. Как показано на рис. 13, описанные выше процессы сдвигают нелинейный фокус  $x_N$  относительно линейного  $x_0$ ; размер нелинейной перетяжки при этом увеличен.

Эти явления наблюдались и в экспериментах [15, 104], в которых кроме того измерялись пиковые импульсные давления на различных расстояниях от излучателя. Для возбуждения использовался импульсный лазер на неодимовом стекле с электрооптической модуляцией добротности. Он генерировал одиночные импульсы света длительностью 30 нс на длине волны 1,06 мкм с энергией 5–10 Дж. Специальная конструкция [95] оптоакустического преобразователя позволяла получать акустические импульсы длительностью 0,1–1 мкс, с пиковым давлением до 1000 атм и формировать сходящиеся пучки диаметром до 50 мм и фокусным расстоянием 15–200 мм. Широкополосный гидрофон на основе пьезопленки ПВДФ был откалиброван, имел временное разрешение порядка 10 нс, пространственное 1 мм.

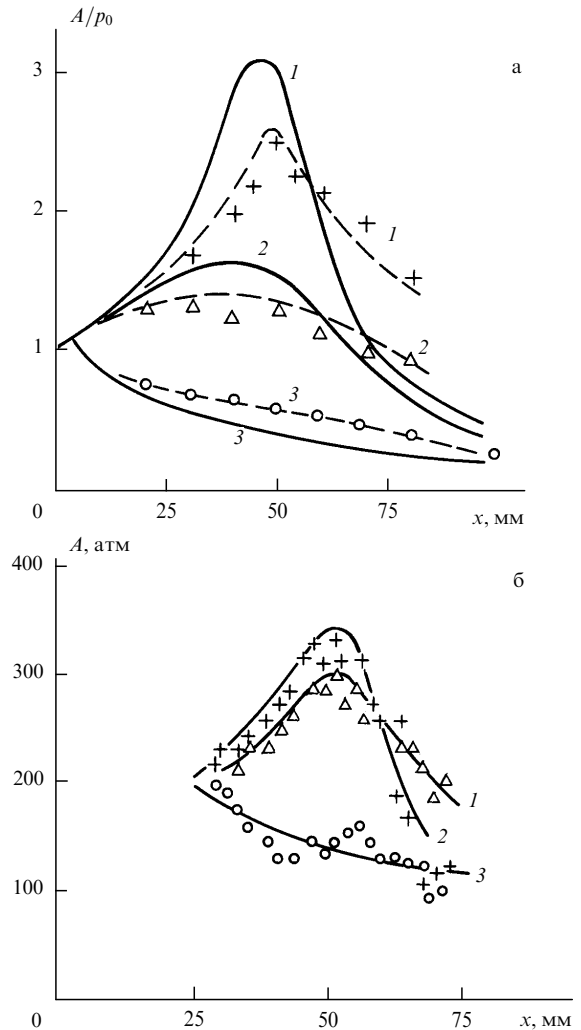


Рис. 14. Осевые зависимости пикового давления при фокусировке импульсных пучков с различными исходными значениями давления (а) и для разных углов схождения (б)

На рис. 14а представлены зависимости нормированной "амплитуды" давления  $A/p_0$  от расстояния  $x$  вдоль оси пучка при различных значениях исходного пикового давления  $p_0$ , равного 9 атм (кривые 1), 100 атм (2) и 500 атм (3). Исходный радиус пучка  $a = 8$  мм. Штриховые кривые проведены через экспериментальные точки.

Видно, что заметное усиление наблюдается лишь при небольших  $p_0$  (кривая 1). При фокусировке более мощных импульсов усиление было незначительным (кривая 2) или отсутствовало вовсе (кривая 3). Все экспериментальные точки в области фокуса лежат ниже сплошной кривой 1, рассчитанной по линейной теории, что свидетельствует о заметном влиянии нелинейных эффектов. Теоретические зависимости 2 и 3 (сплошные кривые) рассчитаны с учетом поглощения и саморефракции [14, 105] для описания экспериментальных (штриховых) кривых 2 и 3. В теории отношение  $x_0/x_d = 2x_0c_0T_0/a^2$  фокусного расстояния к дифракционной длине полагалось равным 0,3, а отношение  $x_0$  к длине образования разрыва  $x_0/x_s = \varepsilon x_0 p_0 / (c_0^3 \rho_0 T_0)$  для кривых 1, 2 и 3 равнялось 0; 3,2 и 16 соответственно.

На рис. 14б построены осевые зависимости пикового давления  $A$  для различных углов схождения  $\varphi = 2 \arcsin(a/x_0)$ , равных  $32^\circ$ ,  $22^\circ$  и  $12^\circ$  для кривых 1, 2

и 3 соответственно. Исходная амплитуда  $p_0 = 140$  атм ( $x_0/x_s = 4, 5$ ) была фиксирована. Кривым 1–3 отвечали значения параметров  $a$  и  $x_0/x_d$ , равные 14 мм и 0,1, 10 мм и 0,18, 5 мм и 0,75. По аналогии с рис. 14а вблизи фокуса наблюдается рост пикового давления, однако не во всех случаях. Для больших углов  $\varphi$  эффект заметнее: на кривых 1, 2 величина  $A$  существенно превышает  $p_0$ . На зависимости 3 с ростом  $x$  давление падает из-за нелинейного поглощения и саморефракции, и лишь вблизи фокуса слабо выражен локальный максимум. Таким образом, при малых углах раскрытия волнового фронта  $\varphi$  не удается получить заметного усиления.

Для преодоления вредного влияния нелинейных процессов имеет смысл, во-первых, возбуждать импульсы с очень пологим передним фронтом, чтобы затянута формирование ударной волны (момент начала нелинейного поглощения); во-вторых, нужно использовать сильно вогнутые несферические излучатели для компенсации рефракционного спрямления ударного фронта.

При обсуждении фокусировки мощных импульсных возмущений не рассматривалась трансформация временного профиля сигнала по мере его прохождения через фокальную область. Эти задачи весьма сложны и их решение даже в рамках упрощенной модели — уравнения ХЗ — возможно на сегодняшний день только численными методами [106, 107]. Задача упрощается, когда сильно выраженная саморефракция подавляет дифракционные искажения в фокальной области (см. рис. 13). Эти случаи, важные в практическом отношении, анализируются модифицированными методами типа нелинейной геометрической акустики, в которых для описания гладких участков профиля и ударных фронтов используются разные уравнения переноса и эйконала [14, 105].

## 6. Нелинейное поглощение и насыщение

Нелинейное, т.е. зависящее от величины возмущения (амплитуды, пикового давления и т.п.) поглощение, — важный эффект физики пилообразных волн, принципиальная роль которого не раз подчеркивалась выше. Это явление интенсивно исследовалось уже в первых работах по нелинейной акустике конденсированных сред (см. обзоры [3–5]), однако в последнее время здесь получены и новые результаты.

Пиковые значения  $A(x)/A_0$  в плоских волнах, изображенных на рис. 1а–в, уменьшаются с расстоянием  $x$  по законам

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega A_0 x\right)^{-1}, \left(1 + \frac{\varepsilon}{c_0^2 T_0} A_0 x\right)^{-1/2}, (1 + c_7 \omega A_0^2 x)^{-1/2}. \quad (48)$$

Затухания (48) отличаются от экспоненциального в линейных диссипативных средах и зависят от  $A_0$  для квадратично-нелинейных сред (первые две формулы (48)) либо от  $A_0^2$  для сред с кубической нелинейностью (последняя формула (48) и (10)).

Затухание пилообразных волн с бесконечно крутым фронтом не зависит от линейных диссипативных констант. Это легко показать, воспользовавшись уравнением Бюргерса [1], которое отличается от (1) наличием в правой части диссипативного члена  $(b/2c_0^3 \rho_0) \partial^2 u / \partial \tau^2$ , такого же, как в уравнении (6). Рассмотрим для опреде-

ленности периодическую "пилу" в квадратично-нелинейной среде. Домножая уравнение Бюргерса на  $u$  и усредняя по периоду волны, получаем

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} = -\frac{b}{c_0^3 \rho_0} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2}. \quad (49)$$

Видно, что уменьшение с расстоянием средней интенсивности  $I = c_0 \rho_0 \bar{u}^2 / 2$  идет быстрее при наличии фронтов с большими значениями производной  $\partial u / \partial \tau$ . Для линейного поглощения гармонической волны  $u = A(x) \sin \omega t$ , в которой крутых участков профиля нет, из (49) следует обычный закон  $A(x) = A_0 \exp(-\alpha x)$ , где коэффициент поглощения  $\alpha = b \omega^2 / (2c_0^3 \rho_0)$ . Для пилообразной волны с конечной шириной фронта воспользуемся асимптотическим ( $\Gamma \rightarrow 0$ ) решением (41), в котором  $A(z)$  дается первой из формул (48). При этом квадрат производной в правой части (49)  $(\partial u / \partial \tau)^2 \sim b^{-2}$  велик для слабопоглощающих сред с малой диссипацией  $b$ . При усреднении (49) основной вклад в интеграл дает область ударного фронта шириной  $\sim b$ . Таким образом, зависимость от  $b$  становится слабой, а (49) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} = -\frac{2\pi^2}{3} \frac{\varepsilon \omega}{c_0^2} A^3(x) + O(b \sim \Gamma). \quad (50)$$

При исчезающе малой диссипации ( $b \rightarrow 0$ ) справа в (50) остается только нелинейный член.

На рис. 15 штрихпунктирными линиями изображены зависимости от расстояния нормированной средней интенсивности исходного гармонического сигнала в квадратично-нелинейной среде. Цифры у кривых — это числа  $\Gamma = x_s / x_a \sim b$ . При  $\Gamma = 0,01$  диссипация слабая и заметное затухание происходит только в области  $z = x/x_s > 1$ , после образования крутых фронтов. С ростом  $\Gamma$  фронты становятся более пологими и относительный вклад линейного поглощения увеличивается.

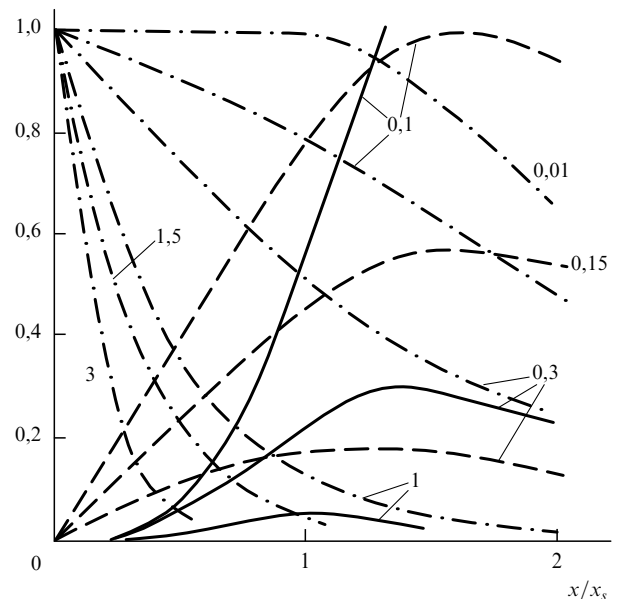


Рис. 15. Зависимости от расстояния нормированной средней интенсивности (штрихпунктирные линии) и избыточного нелинейного затухания (сплошные линии) при различных числах  $\Gamma$ . Штриховыми линиями показано избыточное поглощение первой гармоники



Сплошными линиями на рис. 15 показано избыточное нелинейное затухание

$$\frac{\alpha_N - \alpha}{\alpha} = -\frac{1}{2\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \ln \overline{u^2} - 1, \quad (51)$$

рассчитанное по кривым для средней интенсивности. Оно максимально при малых  $\Gamma$  в той области пространства, где есть крутые фронты.

В экспериментах часто измеряются парциальные коэффициенты затухания различных гармоник. Для их расчета нужно использовать спектральные разложения типа разложений Фея [1] решений (41), описывающих пилообразные волны. В частности, для первой гармоники получается выражение [5]

$$\frac{\alpha_N - \alpha}{\alpha} = \exp[-\Gamma(1+z)] \sinh^{-1}[-\Gamma(1+z)]. \quad (52)$$

Оно справедливо в области  $x > 3x_s$ . На меньших расстояниях ( $0 < x < 2x_s$ ) для построения штриховых кривых на рис. 15 ( $\Gamma = 0,1; 0,15$  и  $0,3$ ) использованы данные численного интегрирования [31]. Штриховые кривые рис. 15 свидетельствуют также о том, что наиболее интенсивное поглощение происходит в малой окрестности фронта "пилы".

Чтобы учесть не только потери, но и внесение энергии в волну, рассмотрим неоднородное уравнение Бюргерса [108]

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = Q. \quad (53)$$

Поле  $Q$  внешних источников может создаваться, например, благодаря нагреванию поверхности движущимся "пятном" электромагнитного излучения [96] или за счет стрикционного механизма встречными лазерными пучками [109]. Примем для определенности, что  $Q = \partial(\beta T'/2)/\partial \tau$  создается термоупругими напряжениями  $p = c_0^2 \rho_0 \beta T'$ , где  $\beta$  — коэффициент объемного расширения,  $T'$  — приращение температуры. Когда  $T'$  изменяется во времени по гармоническому закону,  $Q = (p_0 \omega / 2c_0^2 \rho_0) \sin \omega \tau$ . Уравнение (53) при этом удобно записать в безразмерной форме

$$\frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = A \sin \theta, \quad (54)$$

где

$$\theta = \omega \tau, \quad z = \frac{x}{x_a} = \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0} x, \quad U = \frac{2\varepsilon c_0 \rho_0}{b\omega} u, \\ A = \frac{2\varepsilon p_0 c_0^2 \rho_0}{b^2 \omega^2} = \frac{\omega}{2c_0} \frac{x_a^2}{x_s}. \quad (55)$$

При малых расстояниях  $z$ , пройденных волной, ее форма во времени  $U \approx zA \sin \theta$  повторяет профиль внешних источников. С ростом амплитуды усиливаются нелинейные искажения, которые приводят к появлению ударного фронта на каждом периоде волны. При  $z \rightarrow \infty$  устанавливается стационарный профиль [108]

$$U = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \text{se}_0 \left( \frac{\theta}{2}, A \right), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (56)$$

где  $\text{se}_0$  — функция Матье. При  $A \gg 1$  стационарная волна приобретает вид "пилы" с конечной шириной фронта

$$U = 2\sqrt{A} \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \tanh(\sqrt{A}\theta) - 1 \right], \quad 0 \leq \theta < \pi. \quad (57)$$

Следовательно, динамика процесса установления такова. Энергия вносится источниками во всю область  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  рассматриваемого периода волны. Из-за нелинейного искажения профиля она стремится сконцентрироваться в окрестности  $\theta = 0$ , где образуется ударный фронт. Когда приток энергии от источника компенсируется растущими потерями на фронте, наступает стационарный режим распространения. Средняя интенсивность описывается уравнением

$$\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial z} = -2 \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 + 2A \overline{U \sin \theta}. \quad (58)$$

Пользуясь решением (57), нетрудно показать, что оба члена в правой части (58) равны  $(8/3\pi)A^{3/2}$ , но с разными знаками, т.е. имеется энергетический баланс. При этом  $\overline{U^2} = 2A = \text{const}$ .

Нелинейное поглощение пилообразных волн в ряде случаев приводит к эффекту насыщения. Из первой формулы (48) видно, что пиковое возмущение колебательной скорости периодической "пилы" на расстоянии нескольких нелинейных длин  $x_s = c_0^2/(\varepsilon \omega A_0)$ , пройденных волной в квадратично-нелинейной среде, не зависит от своего исходного значения  $A_0$ :  $A_{\text{lim}} = c_0^2/(\varepsilon \omega x)$ . Это означает, что с увеличением  $A_0$  усиливается нелинейное затухание, которое ослабляет зависимость  $A(A_0)$  на фиксированном расстоянии  $x$ . При  $A_0 \rightarrow \infty$  возмущение  $A$  перестает зависеть от  $A_0$ , достигая предельного значения  $A_{\text{lim}}$ .

Аналогично "насыщается" и трапецевидная "пила" в кубично-нелинейной среде (третья формула (48)). Напротив, одиночный импульс (вторая формула (48)) не испытывает ограничения; при  $x \gg x_s$  здесь возникает лишь более слабая (корневая) зависимость  $A(A_0)$ :  $A = (c_0^2 T_0 A_0 / \varepsilon x)^{1/2}$ . Таким образом, усиливая исходный импульсный сигнал  $A_0$ , можно добиться сколь угодно большого усиления возмущения  $A(x)$  в среде.

Однако предельные значения  $A_{\text{lim}}$  могут определяться не только нелинейными, но и диссипативными константами среды. Если на входе задан гармонический сигнал, причем обратное акустическое число Рейнольда  $\Gamma \ll 1$ , на расстояниях  $x \approx 2x_s$  формируется пилообразная волна и в области ее существования может наблюдаться описанный выше эффект насыщения. На еще больших расстояниях ( $x \approx 2x_a$ ) из-за совместного действия нелинейного затухания и диссипативного сглаживания профиля волна снова превращается в гармоническую с амплитудой, не зависящей от своего исходного значения  $A_0$  [1]. Таким образом, предельные поля на одном периоде волны ( $-\pi \leq \omega \tau \leq \pi$ ) могут быть описаны формулами

$$u_{\text{lim}} = \frac{c_0^2}{\varepsilon \omega x} [-\omega \tau + \pi \text{sign}(\omega \tau)], \quad 2x_s < x < x_a, \\ u_{\text{lim}} = \frac{2b\omega}{\varepsilon c_0 \rho_0} \exp\left(-\frac{x}{x_a}\right) \sin \omega \tau, \quad x > 2x_a. \quad (59)$$

С помощью (59) нетрудно показать, что даже в такой слабодиссипативной среде, как вода, интенсивность

ультразвука с частотой 4 МГц на расстоянии 1 м не может превысить  $0,2 \text{ Вт/см}^2$ , а на расстоянии 5 м —  $10^{-3} \text{ Вт/см}^2$ .

Невозможность транспортировки высоких плотностей энергии на существенную глубину слабодиспергирующей среды ограничивает применение дистанционного силового и энергетического воздействия таких волн.

В [110] предложен способ, позволяющий уменьшить нелинейные потери, связанные с образованием ударных фронтов. Идея состоит в следующем. Крутой фронт, очевидно, сформирован высшими гармониками, которые появились в результате каскада нелинейных процессов с переменным участием второй гармоники. Если в спектре сигнала частота  $2\omega$  отсутствует, канал оттока энергии вверх по спектру ( $\omega \rightarrow 2\omega \rightarrow 3\omega \rightarrow \dots$ ) будет перекрыт. Чтобы удалить гармонику с частотой  $2\omega$  из когерентной части волнового поля, можно ввести в среду селективно поглощающие или рассеивающие элементы (монодисперсные пузырьки газа, узкополосные фильтры и т.п.). Однако заранее не ясно, как это повлияет на волну основной частоты  $\omega$ : станет ли она затухать слабее или же новый канал потерь энергии ( $\omega \rightarrow 2\omega$  и далее в тепло или рассеянное поле) просто заменит прежний поток энергии вверх по спектру.

Для расчета профиля волны в нелинейной среде, содержащей селективный поглотитель на частоте  $2\omega$ , необходимо решить интегриродифференциальные уравнения [110]

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -DB_2(z) \sin 2\theta, \quad (60)$$

$$B_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi V(z, \theta) \sin 2\theta d\theta.$$

Здесь  $D$  — коэффициент дополнительного затухания, вносимого селективными элементами,  $B_2$  — амплитуда второй гармоники. В записи (60) использованы безразмерные переменные (17).

Зависимости от расстояния амплитуд гармоник с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  [111] показывают, что с увеличением селективного поглощения  $D$  вторая гармоника генерируется менее эффективно, а уменьшение амплитуды первой гармоники с ростом  $z$  происходит значительно медленнее, чем при отсутствии поглощения на частоте  $2\omega$  ( $D = 0$ ). Уже при значениях  $D > 4$  профиль волны остается гладким на нескольких нелинейных длинах  $x_s$ . Ударные фронты не образуются, нелинейное затухание подавлено.

Это явление исследовалось в эксперименте [112]. На одном из торцов открытого акустического резонатора помещался источник ультразвука с частотой, перестраиваемой в окрестности 1 МГц, а на другом торце — зеркало. Оно могло быть полностью отражающим либо частично пропускало волну с частотой  $2\omega$  (до 40 % по амплитуде). С помощью селективно пропускающего зеркала в резонаторе искусственно создавались потери на частоте второй гармоники. При этом оказалось, что в нелинейном режиме колебаний резонатора с потерями его добротность возрастала более чем в 2 раза. Таким образом, расчеты и эксперименты [110–112] обнаружили удивительный, на первый взгляд, факт: введение в среду диссипативных элементов приводит к уменьшению потерь.

До сих пор речь шла только о плоских пилообразных волнах, образовавшихся в результате искажения сигналов, гармонических на входе среды. В одномерных сходящихся или расходящихся волнах (сферических, цилиндрических) насыщение по-прежнему будет происходить, только темпы протекания нелинейных процессов будут иными [31].

Принципиально новое поведение обнаруживает однополярный импульс, распространяющийся в виде сфокусированного пучка. Выше отмечалось, что пиковое возмущение импульса — плоской волны (вторая формула (48)) не ограничивается. Однако в разделе 5 показано, что эффекты саморефракции и нелинейного затухания вызывают падение усиления при фокусировке и уширение фокальной области (см. рис. 13, 14). Именно эти эффекты ограничивают максимальные давления, которые удается получить в фокусе мощных импульсных концентраторов. Предельные давления определяются характерным внутренним давлением среды  $p_* = c_0^2 \rho_0 / 2\varepsilon$  и углом сходимости  $\beta = a/x_0$  при фокусировке. В случае гауссовых пучков с исходным сферическим фронтом получена теоретическая оценка [14, 100]

$$p_{\text{lim}} \approx 1,5 p_* \beta^2. \quad (61)$$

Для воды при углах сходимости  $\beta = \pi/6$  предельные давления согласно (61) составляют примерно 1300 атм. Это значение близко к экспериментальным данным [102], полученным при измерениях полей коммерческих литотриптеров. Разумеется, предельные давления зависят от формы фокусирующей поверхности и распределения исходного поля на ней, что должно отразиться на численном коэффициенте в формуле (61).

## 7. Кинетика пилообразных волн

Во многих задачах полезно воспользоваться аналогией между ансамблем слабых ударных волн (рис. 16) и газом из абсолютно неупругих частиц. Рассмотрим одиночную "ступеньку" с конечной шириной фронта, эволюция которой в диссипативной квадратично-нелинейной среде описывается решением уравнения Бюргерса [1, 113]

$$u = \frac{u_{i+1} + u_i}{2} + \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \tanh \left[ \frac{\varepsilon c_0 \rho_0}{b} \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \left( \tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{u_{i+1} + u_i}{2} x \right) \right]. \quad (62)$$

Здесь  $u_i$  и  $u_{i+1}$  — значения колебательной скорости перед и за ударным фронтом. Сопоставим высоте "ступеньки" ( $u_{i+1} - u_i$ ) массу  $m_i$  ассоциированной с ней частицы, а изменению положения в сопровождающей системе координат ( $\tau = t - x/c_0$ ) — скорость  $v_i$  этой частицы. Согласно (62) движение фронта происходит по закону

$$v_i = \frac{d\tau_i}{dx} = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_{i+1} + u_i). \quad (63)$$

Скорость (63) возрастает с увеличением номера  $i$ . Поэтому последующий,  $(i+1)$ -й, фронт догоняет предыдущий,  $i$ -й. Происходит их слияние, при котором сохраняются масса и количество движения:

$$m'_i = m_i + m_{i+1}, \quad m'_i v'_i = m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}. \quad (64)$$

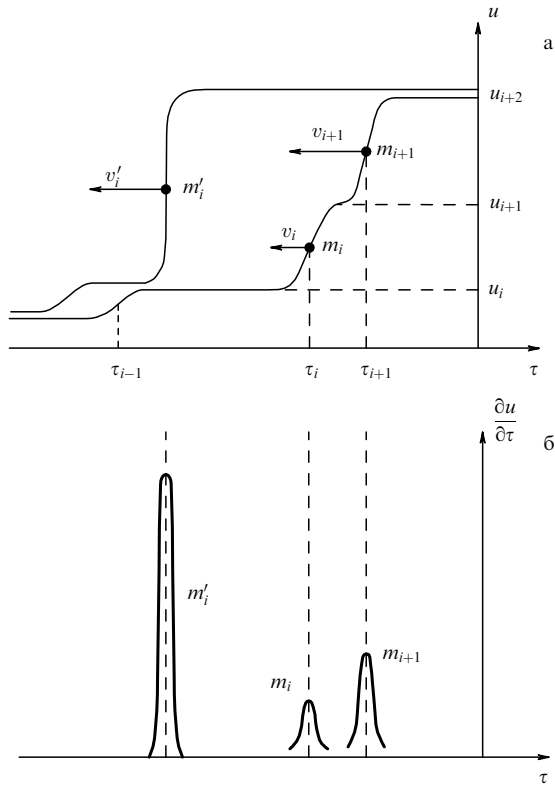


Рис. 16. Слияние двух слабых ударных волн (а) и аналогия с неупругим соударением частиц (б)

Аналогия с частицами будет еще более наглядной, если вместо возмущения скорости рассмотреть волну ускорения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D \cosh^{-2} \left[ \left( \frac{\varepsilon c_0 \rho_0}{b} D \right)^{1/2} (\tau + x v_i) \right]. \quad (65)$$

Выражение (65) напоминает солитонное решение уравнения Кортевега–де Вриза (рис. 16б). Как и для солитона, длительность этого импульсного возмущения с ростом его "амплитуды"  $D = (\varepsilon c_0 \rho_0 / 4b)(u_{i+1} - u_i)^2$  уменьшается как  $D^{-1/2}$ . Однако скорость  $v_i$  (63) от  $D$  не зависит; согласно решению (62) она определяется не величиной скачка  $(u_{i+1} - u_i)$ , а средним значением возмущения на фронте  $(u_{i+1} + u_i)/2$ . И, наконец, принципиальное различие: если солитоны сталкиваются как упругие частицы (см., например, [48]), то одиночные импульсы (65) — как абсолютно неупругие.

Последовательность нескольких "ступенек", изображенная на рис. 16, может быть реализована, например, в экспериментах с ударными трубами. Но более типично возмущение, представляющее собой пилообразную волну с различными по величине и нерегулярно расположенными скачками. Такая волна представляет интерес для описания свойств одномерной акустической турбулентности [114–116]; она формируется в процессе эволюции профиля широкополосных шумовых волн, бегущих по нелинейной слабодиссипативной среде. В отличие от "ступенек" (рис. 16) в пилообразной волне происходит уменьшение "зубцов" (в промежутках времени между столкновениями фронтов) из-за нелинейного поглощения энергии на разрывах. Это уменьшение можно трак-

товать как "испарение" частиц. Таким образом, случайной пилообразной волне можно сопоставить одномерный поток испаряющихся частиц, движущихся относительно потока (его скорость  $c_0$ ) со случайными скоростями и попарно сталкивающихся между собой по законам абсолютно неупругого удара.

Оба типа ансамблей — "ступенек" (рис. 16) и "зубцов" — удастся описать кинетическими уравнениями. Введем функцию распределения  $g(x, t, m)$  — плотность вероятности того, что промежуток времени между двумя соседними разрывами равен  $t$ , а величина второго из них равна  $m$ . Эволюция функции распределения  $g$  происходит как за счет свободного движения разрывов в соответствии с (63), так и в результате их парных соударений.

Кинетическое уравнение (типа уравнения Больцмана) для ансамбля "ступенек" имеет вид [117]

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (m + \langle m \rangle) \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \left\{ m \int_0^m g(x, t, \xi) \times \right. \\ \left. \times g(x, 0, m - \xi) d\xi - (m - \langle m \rangle) g \int_0^\infty g(x, 0, \xi) d\xi \right\}. \quad (66)$$

Квадратично-нелинейная правая часть (66) ответственна за парные неупругие столкновения.

Аналогичное уравнение для ансамбля "зубцов" [118] учитывает нелинейное затухание разрывов ("испарение" частиц), а также изменение наклонов пологих участков профиля. Оно отличается от (66) наличием дополнительных линейных членов в левой части кинетического уравнения, описывающей бесстолкновительный перенос вероятности.

Функция распределения  $g$ , как видно из (66), оказывается нормированной. При известной функции  $g$  статистическое усреднение проводится обычным образом:

$$\langle \Phi \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, t, m) g(x, t, m) dt dm. \quad (67)$$

В [117] для кинетического уравнения (66) получен ряд точных и приближенных решений, найдены интегралы движения. Одно из точных решений отвечает пуассоновскому процессу; вводя новую функцию  $f(x, m)$  и ее изображение Лапласа  $\tilde{f}(x, s)$  согласно формулам

$$g = \frac{1}{t_0} \exp\left(-\frac{t}{t_0} - \frac{\varepsilon x}{c_0^2 t_0} m\right) f, \quad \tilde{f} = \int_0^\infty f \exp(-sm) dm, \quad (68)$$

придем к уравнению типа римановых волн

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c_0^2 t_0} \tilde{f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} = 0. \quad (69)$$

Решение (69) дается неявной функцией, вид которой определяется исходной (при  $x = 0$ ) функцией распределения:

$$\tilde{f} = \Phi\left(s - \frac{\varepsilon x}{c_0^2 t_0} \tilde{f}\right), \quad \Phi(s) = \int_0^\infty f(x=0, m) \exp(-sm) dm. \quad (70)$$

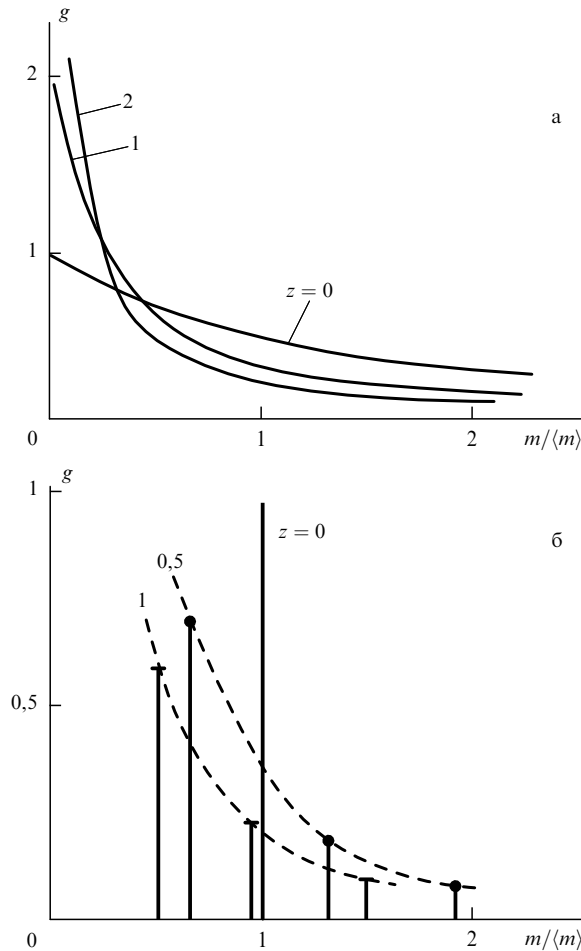


Рис. 17. Трансформация вероятностных распределений скачков возмущения на разрывах в бегущей пилообразной волне для экспоненциального (а) и дельтообразного (б) исходных распределений масс

Аналогичным образом решается кинетическое уравнение для ансамбля "зубцов" случайной пилообразной волны [118].

На рис. 17 изображены типичные процессы — трансформация экспоненциального (а) и дельтообразного (б) исходных распределений масс  $g(x, m)$ . Цифрами у кривых отмечено безразмерное расстояние  $z = \varepsilon \langle m \rangle x / (c_0^2 t_0)$ , пройденное волной. Как видно из рис. 17б, столкновения фронтов в пилообразной волне приводят к образованию скачков удвоенной ( $n = 2$ ), утроенной ( $n = 3$ ) и т.д. высоты. Они изображены отрезками соответствующей длины, вершины которых для  $n$ , равного 1, 2 и 3, при данном  $z$  соединены штриховыми кривыми. Одновременно величина каждого из скачков уменьшается как  $(1 + z)^{-1}$  из-за нелинейного поглощения.

Основные тенденции трансформации функций распределения (см. рис. 17) состоят в увеличении плотности вероятности для малых и больших значений  $\mu = m/\langle m \rangle$  и уменьшении ее в срединной области распределения. Рост вероятности малых значений  $\mu$  обусловлен нелинейным затуханием разрывов; основной вклад здесь вносят отрезки реализации, на которых поле в среднем уменьшается и столкновения происходят редко. Увеличение  $g$  при больших значениях  $\mu$  обусловлено слиянием разрывов и образованием скачков суммарной высотой. Конку-

ренция этих двух тенденций приводит к формированию автомодельной асимптотики, которая для пуассоновских процессов имеет вид

$$g \propto z^{-1/2} \mu^{-3/2} \exp\left(-\frac{\mu}{4z}\right).$$

При этом среднее значение  $\langle \mu \rangle$  остается постоянным, а дисперсия  $\langle \mu^2 \rangle$  линейно растет с увеличением пройденного волной расстояния.

Спектральные характеристики одномерной акустической турбулентности также могут быть рассчитаны с помощью функции распределения  $g$  и решений типа (62), учитывающих конечность ширины ударного фронта. В частности, для спектра интенсивности пуассоновского процесса получается формула [118]

$$G(\omega) = \frac{2\pi^3 \Gamma^2}{1+z} \int_0^\infty \frac{g(z, \mu) d\mu}{\sinh^2(\pi \Gamma \omega t_0 / \mu)}, \quad (71)$$

где  $\Gamma = \varepsilon c_0 \rho_0 \langle m \rangle t_0 / b$ . Для иллюстрации особенностей поведения спектра обсудим результат, получаемый усреднением (71) с автомодельным распределением  $g$ . Оказывается, что в спектре есть два характерных участка. Для частот  $\omega t_0 \ll (\pi \Gamma)^{-1}$  имеется универсальная зависимость  $G \propto \omega^{-2}$ , которая, как и в случае регулярной волны, обусловлена присутствием разрывов. В области  $\omega t_0 \gg (\pi \Gamma)^{-1}$  асимптотика  $G \propto \exp[-(\omega z)^{1/2}] z^{-3/2} \omega^{-1/2}$  убывает с частотой медленнее, чем для регулярной пилообразной волны (см. также [119]), у которой  $G \propto \exp(-2\Gamma \omega t_0 z)$  [1].

Поведение спектров нелинейных недиспергирующих волн (не только пилообразных), которое изучалось ранее без использования описанного здесь кинетического подхода, детально обсуждается в работах [20, 120] по статистической нелинейной акустике.

## 8. О взаимодействиях и самовоздействиях волн, содержащих ударные фронты

Эффектам взаимодействия волн в средах без дисперсии посвящено множество исследований, часть из которых отражена в монографиях [1, 4, 6, 31, 52, 73, 120]. В разные годы были обнаружены и изучены такие интересные явления, как самодетектирование модулированных сигналов, рассеяние звука на звуке, избыточное затухание сигнала из-за его взаимодействия с внешним (в частности, шумовым) полем и многие другие. Особое внимание уделялось нелинейной генерации низких (разностных) частот в полях модулированной высокочастотной накачки. Как известно, низкие частоты могут излучаться той областью пространства, в которой происходит взаимодействие, и распространяться в виде направленного слабозатухающего пучка на большие расстояния; это их свойство используется в параметрических системах гидролокации [52].

Однако лишь немногие работы содержат сведения по взаимодействиям пилообразных волн. Для изучения этих процессов в последние годы все чаще привлекаются компьютерные методы. Так, для решения разнообразных задач взаимодействия слабодиспергирующих возмущений создан универсальный пакет прикладных программ NACSI [121] (Nonlinear Acoustics — Computer Simulation). С его помощью рассчитываются профили и спектры сильно искаженных волн и волновых пучков,

распространение и генерация которых описываются эволюционными уравнениями типа Бюргера, Холлова–Заболотской, Уизема и их модификациями для сред с различными дисперсионными и диссипативными свойствами. Проблема численного решения таких уравнений состоит в том, чтобы достичь высокой точности как в разрывных областях (ударные волны и контактные разрывы), так и в гладких участках профилей. Для этого необходимо устранить известные дефекты классических схем, приводящие к паразитным осцилляциям вблизи фронтов (без введения существенной вязкости), нелинейным неустойчивостям и ошибкам в расчетах гладких участков, порождаемым "численным рассеянием" — влиянием больших градиентов поля. Для устранения перечисленных трудностей в последние годы разработаны новые удароуправляющие схемы — так называемые "схемы высокого разрешения". Их основные свойства: порядок точности для гладкой части решения не ниже второго; возможность расчета разрывов без порождения фиктивных осцилляций. При этом, в противоположность классическим схемам второго и высших порядков точности, они не требуют априорного указания искусственной вязкости.

С помощью пакета NACSI эффективно решаются задачи взаимодействия в плоских, цилиндрических и сферических (расходящихся и сфокусированных) волнах, в дифрагирующих и сходящихся пучках, а также возмущений в волноводах, трубах, рупорах и лучевых трубках при использовании геометроакустического приближения (см. раздел 4).

Исходный профиль может представлять собой одиночный импульс произвольной формы или последовательность нескольких различных импульсов (если исследуется их взаимодействие друг с другом). Профиль может быть задан также как сумма нескольких (до десяти) гармоник с любыми амплитудами, частотами, фазами либо аппроксимирован кусочно-линейной функцией. Для получения результатов, приведенных, например, на рис. 4, 5 или 10, требуется время на персональном компьютере порядка минуты.

Численные методы исследования взаимодействий пилообразных волн сейчас совершенствуются на основе привлечения известных асимптотических формул. Время решения сложных задач можно сильно сократить, если использовать комбинированные подходы, сочетающие прямое интегрирование уравнений по разностным схемам с быстрыми вычислениями имеющихся асимптотик. Другой путь совершенствования схем — более полный учет априорной информации о волновом процессе. Так, расчет разрывных волн в спектральном представлении требует решения системы связанных уравнений для комплексных амплитуд гармонических составляющих, число которых равно  $10^2$ – $10^3$ . Однако заранее известно, что высокочастотное крыло спектра при наличии разрывов формируется сфазированными гармониками, амплитуды которых уменьшаются как  $\omega^{-1}$ . Поэтому расчет амплитуд и фаз высших гармоник можно проводить на основе простых алгебраических соотношений, связывающих эти величины с расчетными данными для нескольких первых (порядка 10) компонент спектра [122]. Время расчетов при этом может быть сокращено на 1–2 порядка.

Итак, взаимодействия пилообразных волн разнообразны, а результаты в основном — численные.

Поэтому остановимся только на некоторых наиболее принципиальных или общих свойствах таких явлений.

Рассмотрим вначале, как происходит взаимодействие слабых возмущений с гладкими и разрывными участками пилообразных профилей. Пусть форма плоской "пилы" дается функцией  $V_0$ , а возмущение — функцией  $V_1$ . Тогда из однородного уравнения Бюргера (см. (60),  $D = 0$ ) получим

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta}(V_0 V_1) = \Gamma \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2}. \quad (72)$$

Для линейных во времени участков "пилы"  $V_0 = (\theta_0 - \theta)/(z_0 + z)$  решение имеет вид

$$V_1 = \left[ 4\pi\Gamma z \left( 1 + \frac{z}{z_0} \right) \right]^{-1/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1+z/z_0}{4\Gamma z} \left( \frac{\theta - \theta_0}{1+z/z_0} - t \right)^2 \right] V_0(t) dt. \quad (73)$$

На рис. 18 штриховыми прямыми изображен полупериод "пилы"  $V_0 = (\pi - \theta)/(1 + z)$ ,  $0 < \theta \leq \pi$ . Пиковое возмущение на разрыве, расположенном в точке  $\theta = 0$ , уменьшается с ростом пройденного расстояния  $z$ , равного 0; 0,3; 0,8; 1,5. Поведение гармонического исходного возмущения  $V_1(0, \theta) = m \sin 6\theta$ ,  $m \ll 1$ , рассчитано по формуле (73) для тех же расстояний  $z$  в отсутствие диссипации ( $\Gamma = 0$ ). Видно, что амплитуда и частота возмущения уменьшаются как  $(1+z)^{-1}$ . Возможен и обратный процесс усиления сигнала и роста его частоты на укручающемся переднем фронте [123, 20], который возникает при формировании "пилы" (на рис. 18 не показан); ему соответствуют значения  $z_0 < 0$  в решении (73). Изменение частоты сигнала при его взаимодействии

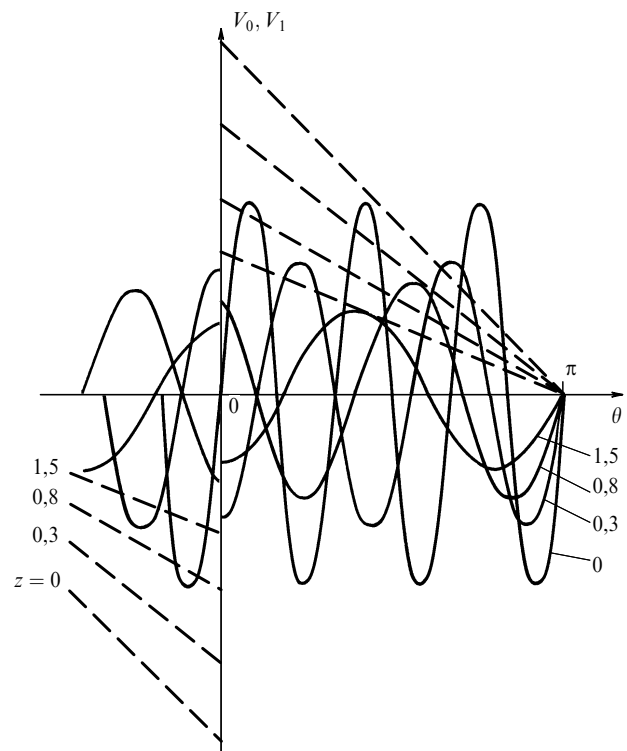


Рис. 18. Эволюция гармонического возмущения линейных участков профиля пилообразной волны

с линейными во времени участками "пилы" наблюдалось в работах [124, 125].

Итак, трансформация профиля интенсивной пилообразной волны является причиной того, что гармоническое возмущение "натекает" на фронт с обеих сторон (см. рис. 18) и исчезает на нем из-за нелинейного поглощения (см. раздел 6).

Чтобы выяснить поведение возмущений в окрестности разрыва, положим в (72)  $V_0 = \tanh(\theta/2\Gamma)$  — эта функция описывает внутреннюю структуру слабого ударного фронта. Решение полученного уравнения удобно записать для нормированного смещения  $S$ , через которое скорость выражается как  $V_1 = \partial S/\partial \theta$ :

$$S = \frac{\exp(-z/4\Gamma)}{(4\pi\Gamma z)^{1/2} \cosh(\theta/2\Gamma)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\theta-t)^2}{4\Gamma z}\right) \cosh\left(\frac{t}{2\Gamma}\right) S_0(t) dt. \quad (74)$$

Используя результат (74), нетрудно видеть, как с увеличением расстояния  $z$  исходное возмущение (см. рис. 18) концентрируется вблизи фронта и поглощается на нем.

Эволюционная картина взаимодействия возмущений с пилообразными профилями, иллюстрированная рис. 18 и решением (74), нарушается с ростом интенсивности волны. Наблюдается эффект самоотражения [1]: после появления разрывов волна перестает быть бегущей в одном направлении. Из-за малого скачка энтропии на разрыве [63] он выступает как слабая неоднородность профиля, и "натекание" возмущений на фронт приводит к появлению отраженных волн, бегущих в противоположную сторону. В периодической "пиле" каждый из разрывов является генератором отраженных сигналов. Поэтому суммарный эффект от их сложения может быть значительным, приводя, в частности, к формированию акустического ветра [1].

Экспериментальное наблюдение самоотражения [126] проводилось в радиодиапазоне на модели нелинейной недиспергирующей среды — длинной линии типа фильтра нижних частот. Излучался короткий радиоимпульс, в котором на расстоянии  $x_s$  образовывались ударные фронты. С этого момента начинала возбуждаться обратная волна, регистрируемая на входе линии с временной задержкой  $2x_s/c$  ( $c$  — скорость распространения сигнала). В последние годы появились новые работы [127, 128], посвященные самоотражению разрывных волн.

Обратимся теперь к взаимодействиям волн, пересекающихся под углом друг к другу. Как известно [1], вне области пересечения двух пучков интенсивных волн, содержащих гармоники с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , может быть зарегистрирован лишь слабый сигнал комбинационной частоты  $\omega_1 \pm \omega_2$ . Это связано с невозможностью организовать синхронное взаимодействие неколлинеарных волн в средах без дисперсии или, иными словами, с отсутствием эффекта резонансного рассеяния звука на звуке [129].

Решение задачи методом последовательных приближений показывает, что нелинейность генерирует возмущения двух типов, поведение которых в пространстве существенно различается. Вдоль направления распространения каждого из пучков возбуждаются гармоники, амплитуда которых растет с увеличением пройденного

расстояния. Напротив, наблюдаемые в иных направлениях гармоники осциллируют в пространстве, оставаясь слабыми по сравнению с исходными волнами. Проводя усреднение уравнений по быстрым осцилляциям, удается показать [130], что для периодических во времени интенсивных сигналов приближенно справедлив принцип суперпозиции: нелинейные волны испытывают самовоздействие и форма их может быть сильно искажена, однако пересечение таких волн не приводит к появлению интенсивных рассеянных сигналов.

Несинхронные возмущения малы по сравнению с амплитудами резонансно возбуждаемых волн при углах пересечения  $\beta > (\epsilon M)^{1/2}$ , где  $\epsilon$  — нелинейность среды,  $M$  — акустическое число Маха. В типичных условиях, когда, например, ультразвуковые волны с интенсивностями  $1-10^2$  Вт/см<sup>2</sup> взаимодействуют в воде, амплитуды нерезонансных возмущений пренебрежимо малы при углах пересечения  $\beta > 4^\circ$ .

Идея суперпозиции двух сильно искаженных встречных волн использована в [130] для построения поля внутри резонатора с жесткими стенками. Показано, что в резонаторе возникают разрывные колебания после того, как встречные волны приобретут пилообразную форму. Добротность при этом сильно уменьшается из-за нелинейного поглощения. Поле уже не является стоячей волной; появляется фронт возмущения скорости, движущийся между стенками. Для высших мод таких фронтов ("бегающих узлов") может быть несколько. В [130] проанализированы также вынужденные колебания, возбуждаемые распределенной силой; они представлены как сумма встречных пилообразных волн, описываемых неоднородным уравнением Бюргерса (53).

В [131–133] рассмотрены колебания резонатора, возбуждаемого на одном из торцов периодической силой; здесь также наблюдалось формирование разрывного поля, являющегося суперпозицией встречных волн.

Дальнейшее развитие этих идей изложено в [134, 135]. Оказалось возможным учесть импедансный характер и движение границ [135]. Если эти факторы мало изменяют форму возмущения за времена порядка его пробеге по резонатору, поле также можно представить как сумму бегущих нелинейных волн, взаимодействующих между собой только на границах.

Перейдем теперь от резонаторов к волноводным системам. Известно [48], что нормальные волны в слое можно представить как участок интерференционной картины, образованной двумя гармоническими волнами равной частоты, распространяющимися под углами  $\pm\beta$  к оси  $x$  (рис. 19). При этом в узловые плоскости (например,  $y = \pm a$ ) для вертикальной компоненты скорости можно поместить две жесткие стенки, не нарушив картины движения. Ширина такого волновода  $2a$  связана с длиной волны соотношением  $2a \sin \beta = n\lambda/2$ . Для интенсивных возмущений возможно аналогичное представление волноводных мод как суммы двух плоских нелинейных периодических во времени волн, бегущих под углами  $\pm\beta$  к оси волновода [136].

На рис. 19 изображены распределения продольной  $u_x$  (сплошные кривые) и поперечной  $u_y$  (штриховые кривые) компонент скорости в различных сечениях волновода, отвечающих расстояниям до ( $x = 0, 9x_s$ ) и после ( $x = 2x_s$ ) формирования "пилы". Кривые построены для второй моды ( $n = 2$ ); номерам 0–4 отвечают равные промежутки времени  $\Delta t = T/8$  в пределах половины периода  $T$ .

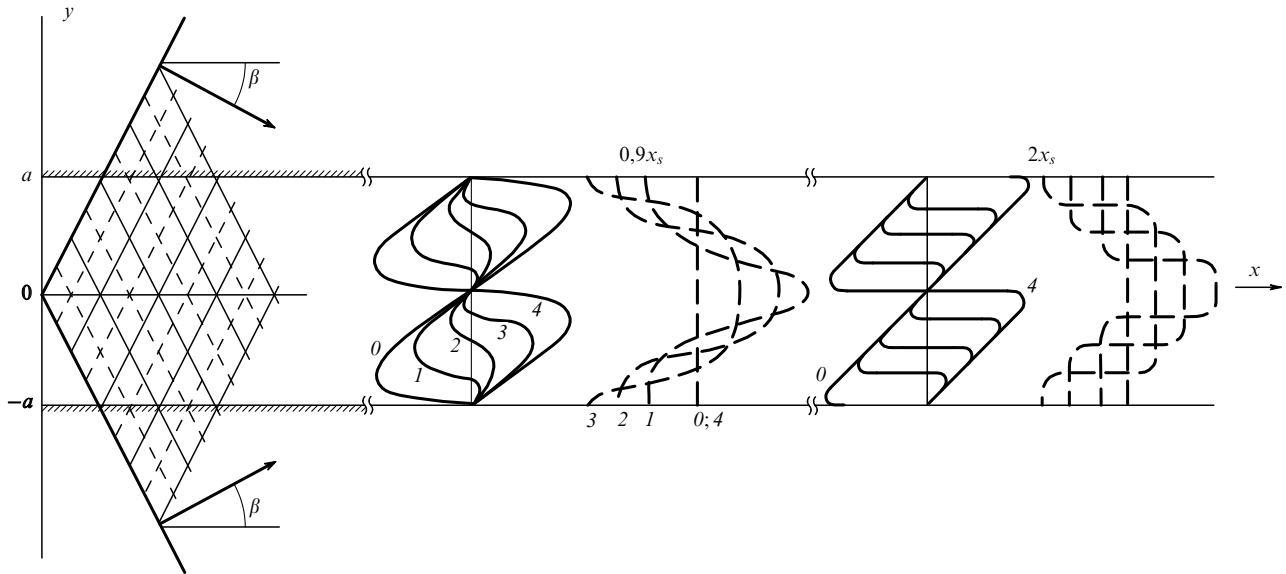


Рис. 19. Формирование моды суперпозицией нелинейных волн, бегущих под равными углами к оси волновода

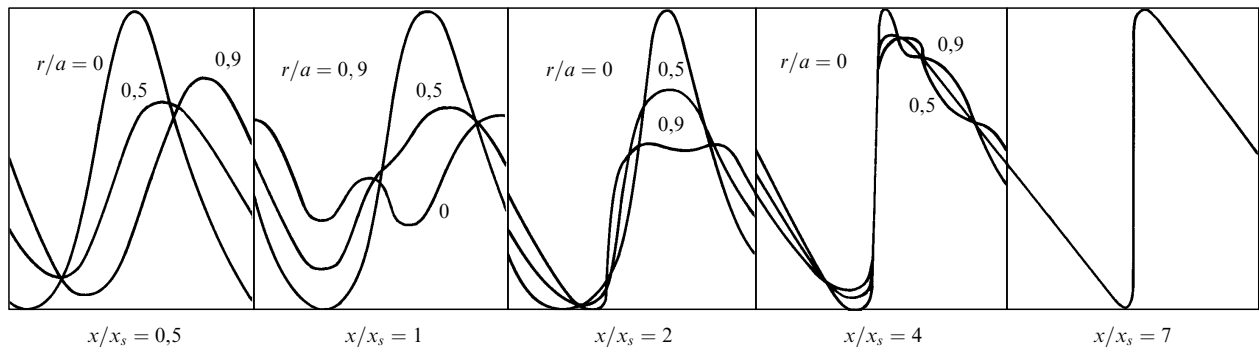


Рис. 20. Профили одного периода волны в точках поперечного сечения  $r/a$ , равных 0; 0,5 и 0,9, и в разных сечениях  $x$  трубы

Видно, что на оси волновода и у стенок возникают большие градиенты скорости  $u_x$ ; распределение в сечении имеет пилообразную форму с двумя дополнительными "бегущими узлами". Качественно изменяется картина линий тока, которые претерпевают излом [136]; формируются зоны, где идут сильные нелинейные потери.

Исследования интенсивных акустических и ударных волн, распространяющихся в волноводах, трубах, струйных течениях и т.д., представляют большой практический интерес [137]. Наличие отражающих возмущения границ позволяет избавиться от дифракционных потерь, что способствует проявлению нелинейных эффектов; поэтому трубы, наполненные газом или жидкостью, часто используются в экспериментах при больших уровнях звукового давления [138–141]. Модовая структура поля во многих экспериментах незначительна, поскольку используются длинные (по сравнению с размером сечения) волны.

В [142] изучен процесс распространения высокочастотного интенсивного возмущения в круглой трубе с жесткими стенками. Решалась система уравнений для продольной и поперечной компонент колебательной скорости, полученная в тех же приближениях, что и уравнение ХЗ (18). Оси трубы и пучка совпадали. Как оказалось, в отличие от случая неограниченной среды

интенсивность волны вдоль оси осциллирует с пространственным периодом порядка дифракционной длины  $x_d$  (16). Такое поведение связано с многократными отражениями от стенок трубы волн, формирующих пучок. На расстояниях 3–5 длин  $x_d$  в результате диффузионного "расплывания" и влияния стенок интенсивность распределяется практически равномерно по сечению, и в дальнейшем волна распространяется как плоская.

Интересное поведение обнаруживает форма волны. На рис. 20 приведены зависимости продольной компоненты скорости от времени (в пределах одного периода) в трех точках поперечного сечения трубы:  $r/a = 0$  (на оси), 0,5 и 0,9 (у стенки). Число  $N$  (16) полагалось равным единице. На расстоянии  $x$ , равном половине длины образования разрыва  $x_s$ , нелинейные эффекты выражены слабо и профили близки к гармоническим. Однако заметно влияние дифракции, приводящей к фазовым сдвигам и диффузии энергии из центра пучка к его краям. На расстоянии  $x = x_s$  в плоской волне должен был бы образоваться разрыв. Но дефазировка гармоник затягивает этот процесс, особенно вдали от оси. Образование устойчивого ударного фронта ( $x/x_s = 7$ ) наступает лишь после того, как вследствие диффузии и отражения от стенок устанавливается равномерное по сечению распределение всех характеристик волны.

Остановимся теперь на принципиальном эффекте — самовоздействии пучков пилообразных волн. В отличие от безынерционной самофокусировки в кубично-нелинейных средах, описанной в разделе 2.4, здесь речь пойдет о тепловом самовоздействии в квадратично-нелинейной среде.

Тепловое самовоздействие пучков, хорошо известное в оптике [33], возникает вследствие зависимости скорости волны от температуры и неоднородного нагревания среды пучком. Тепловая самофокусировка гармонических волн, предсказанная в работе [143], наблюдалась в акустических экспериментах с сильно вязкими жидкостями [144, 145]. Специфика таких экспериментов связана с разрушением тепловой линзы акустическим ветром, сложной структурой ближнего поля источников мощного ультразвука [146], а также "самопросветлением" среды, вызванным уменьшением поглощения с ростом температуры [26]. Если преодолеть эти трудности [147], то в средах с большим коэффициентом поглощения звука  $\alpha$  явление будет похоже на самовоздействие лазерных пучков; при  $\alpha \rightarrow 0$  эффект исчезает. В отличие от оптического аналога, тепловое самовоздействие "пил" имеет место даже в идеальных средах с  $\alpha = 0$ , поскольку нагревание происходит из-за нелинейного поглощения (см. раздел 6).

В [8] описан эксперимент по наблюдению самофокусировки пилообразных волн. Пучок мощностью 20 Вт шириной 30 мм на частоте 2 МГц излучался в воду, где происходило формирование периодической "пилы". Затем волна проникала в кювету с ацетоном, который имеет малый коэффициент  $\alpha$  и отрицательный температурный коэффициент скорости звука  $\delta = c_0^{-1}(\partial c/\partial T)_p$ , т.е. является (в отличие от воды) фокусирующей средой. Наблюдалось заметное возрастание интенсивности волны на оси пучка.

Теория этого явления развита в [7, 9]. Модель наиболее проста, если пренебречь дифракцией и описывать пучок в приближении нелинейной геометрической акустики:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2} p \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = -\delta T, \quad (76)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{\rho_0 c_p} \Delta_{\perp} T = \frac{b}{c_0^4 \rho_0^3 c_p} \overline{\left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2}. \quad (77)$$

Уравнение (75) отличается от уравнения Бюргера двумя последними слагаемыми, учитывающими изменение наклона и сечения лучевых трубок; здесь  $\theta = t - x/c_0 - \psi(x, r)/c_0$ ,  $\psi$  — сдвиг фронта волны из-за нагрева среды. Уравнение эйконала (76) описывает искривление лучей вследствие прироста температуры  $T$ . Правая часть уравнения теплопроводности (77) отвечает притоку энергии из волны в среду; как и в уравнении (49), она учитывает оба вида потерь — линейные и нелинейные.

Для пилообразных волн, каждый период которых описывается решением Хохлова [48]

$$p = A(x, r) \left[ -\frac{\omega \theta}{\pi} + \tanh \left( \frac{\varepsilon}{b} A \theta \right) \right], \quad -\pi < \omega \theta < \pi,$$

удается исключить "быстрое" время  $\theta$  и перейти от поля  $p(x, r, \theta)$  к пиковому давлению  $A(x, r)$ . Уравнения (75), (77) принимают вид

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{2} A \Delta_{\perp} \psi = -\frac{\varepsilon \omega}{\pi c_0^3 \rho_0} A^2, \quad (78)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{\rho_0 c_p} \Delta_{\perp} T = \frac{2}{3\pi} \frac{\varepsilon \omega}{c_0^4 \rho_0^3 c_p} A^3. \quad (79)$$

Система (78), (79), (76) описывает самовоздействие пучков разрывных волн. Из (78) видно, что поглощение — нелинейное; в случае линейного поглощения правая часть имела бы вид  $-\alpha A$ . Специфична и правая часть (79); мощность тепловыделения  $\sim A^3$  (в линейном случае она была бы пропорциональна квадрату амплитуды  $A^2$ ).

Результаты решения этой системы описывают следующие процессы. В начальный момент времени с увеличением расстояния пучок расширяется вследствие изотропизации (см. раздел 3), а пиковое давление уменьшается из-за нелинейного поглощения. С течением времени среда прогревается и тепловая линза усиливается. Пучок самофокусируется, и фокус движется к излучателю. При  $t \rightarrow \infty$  устанавливается стационарный режим, при котором ширина пучка на некотором расстоянии между излучателем и нелинейным фокусом имеет максимум, а пиковое давление — минимум.

Интересное явление возникает при фокусировке пучков внутрь самодефокусирующей среды ( $\delta > 0$ ), наиболее важный пример которой — вода при комнатных температурах. Тепловое самовоздействие при этом препятствует фокусировке, в результате чего возникает нелинейная "перетяжка" конечных размеров [9]. Пусть, например, пучок пилообразных волн в воде имеет следующие параметры: начальный радиус 3 см, радиус кривизны исходного волнового фронта 9,4 см, пиковое давление 1,3 атм, основная частота 4 МГц. В этом случае радиус перетяжки составляет 3,6 мм, в то время как размер дифракционного фокального пятна был бы 0,36 мм. Таким образом, самодефокусировка расширяет перетяжку на порядок. Это явление не требует экстремальных значений амплитуды волны и, по-видимому, неоднократно наблюдалось при работе приборов медицинской техники (устройств визуализации внутренней структуры тканей, ультразвуковой терапии и гипертермии [148]).

## 9. Заключение

В этом обзоре сделана попытка описать лишь некоторые интересные (в силу своей специфики) для физики нелинейных волн явления, связанные с распространением пилообразных возмущений. Возможность рассказать все об этих волнах в рамках обзора с самого начала представлялась нереальной, поскольку почти все вопросы, о которых здесь только упоминается (современное состояние проблем звукового удара, ударноволновой литотрипсии, получения предельно интенсивных полей при фокусировке, нелинейной диагностики, распространения разрывных волн в средах со сложной внутренней динамикой, структурой и многие другие) заслуживают отдельных обобщений. Более подробно следовало бы рассказать о математических моделях,



описывающих пилообразные волны, а также об асимптотических и численных методах решения соответствующих нелинейных уравнений. Возможно, это будет сделано позднее.

Я глубоко благодарен И.А. Яковлеву за его предложение написать этот обзор.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-02-15453), Центра исследований в области фундаментального естествознания и фонда Сороса.

## Список литературы

1. Руденко О В, Солуян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975) [Rudenko O V, Soluyan S I *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (New York: Plenum, Consultants Bureau, 1977)]
2. Буров В А, Красильников В А *ДАН СССР* **118** (5) 920 (1958)
3. Зарембо Л К, Красильников В А, Шкловская-Корди В В *ДАН СССР* **109** (4) 731 (1956)
4. Зарембо Л К, Красильников В А *Введение в нелинейную акустику* (М.: Наука, 1966)
5. Наугольных К А, в кн. *Мощные ультразвуковые поля* (М.: Наука, 1967) с. 7
6. Beyer R T *Nonlinear Acoustics* (USA, Naval Sea Systems Command, 1974)
7. Руденко О В, Сапожников О А *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астроном.* **29** (6) 91 (1988)
8. Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **35** (1) 67 (1989)
9. Руденко О В, Сагатов М М, Сапожников О А *ЖЭТФ* **96** (3(9)) 808 (1990)
10. Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **34** (4) 644 (1988)
11. Rudenko O V, in *Advances in Nonlinear Acoustics* (Singapore: World Scientific, 1993) p. 3
12. Руденко О В, Сапожников О А *Квант. электроника* **29** (10) 1028 (1993)
13. Руденко О В, Сапожников О А *ЖЭТФ* **106** (2(8)) 395 (1994)
14. Мусатов А Г, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **38** (3) 502 (1992)
15. Мусатов А Г, Сапожников О А *Акуст. журн.* **39** (3) 510 (1993)
16. Rudenko O V, Sapozhnikov O A, in *Proc. of IEEE 1992 Ultrasonics Symposium* Vol. 1 (New York: IEEE, 1992) p. 489
17. Руденко О В *Дефектоскопия* (8) 24 (1993)
18. Руденко О В, Сапожников О А *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астроном.* **32** (1) 3 (1991)
19. Андреев В Г, Вероман В Ю, Денисов Г А, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **38** (4) 588 (1992)
20. Руденко О В *УФН* **149** (3) 413 (1986)
21. Руденко О В, Сухорукова А К, Сухоруков А П *Акуст. журн.* **40** (1) 212 (1994)
22. Maglieri D J *J. Acoust. Soc. America* **92** (4) 2328 (1992)
23. Pierce A D, in *Advances in Nonlinear Acoustics* (Singapore: World Scientific, 1993) p. 7
24. Ахманов С А, Хохлов Р В *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНТИ, 1964)
25. Ахманов С А, Выслухов В А, Чиркин А С *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М.: Наука, 1988)
26. Бункин Ф В, Кравцов Ю А, Ляхов Г А *УФН* **149** (3) 391 (1986)
27. Blackstock D T *J. Acoust. Soc. America* **39** (4) 1019 (1966)
28. Ляхов Г А, Руденко О В *Акуст. журн.* **20** (5) 738 (1974)
29. Новиков Б К, Руденко О В *Акуст. журн.* **22** (3) 461 (1976)
30. Landauer R J *Appl. Phys.* **31** (3) 479 (1960)
31. Васильева О А, Карабутов А А, Лапшин Е А, Руденко О В *Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983)
32. Гурбатов С Н, Малахов А Н *Акуст. журн.* **25** (1) 53 (1979)
33. Ахманов С А, Сухоруков А П, Хохлов Р В *УФН* **93** (1) 19 (1967)
34. Беспалов В И, Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **3** (12) 471 (1966)
35. Lee-Barty J P, Crighton D G *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* **323** 173 (1987)
36. Webster D A, Theobald M A, Blackstock D T, in *Proc. 9th Inter. Congress on Acoustics. Madrid* **2** (32) 740 (1977)
37. Андреев В Г, Карабутов А А, Руденко О В *Акуст. журн.* **31** (4) 423 (1985)
38. Webster D A, Blackstock D T *J. Acoust. Soc. America* **62** (3) 518 (1977)
39. Руденко О В, Солуян С И, Хохлов Р В *Акуст. журн.* **19** (6) 871 (1973)
40. Островский Л А, Фридман В Е *Акуст. журн.* **18** (4) 584 (1972)
41. Бахвалов Н С, Жилейкин Я М, Заболотская Е А *Нелинейная теория звуковых пучков* (М.: Наука, 1982)
42. Хохлов Р В *Радиотехника и электроника* **6** (6) 917 (1961)
43. Заболотская Е А, Хохлов Р В *Акуст. журн.* **15** (1) 40 (1969)
44. Кузнецов В П *Акуст. журн.* **16** (4) 548 (1970)
45. Кадомцев Б Б, Петгвиашвили В И *ДАН СССР* **192** (4) 753 (1970)
46. Руденко О В, Солуян С И, Хохлов Р В *Акуст. журн.* **20** (3) 449 (1974)
47. Андреев В Г, Руденко О В, Сапожников О А, Хохлова В А *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астроном.* **26** (3) 58 (1985)
48. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* (2-е изд.) (М.: Наука, 1990)
49. Hobaek H *Parametric Acoustic Transmitting Arrays — a Survey of Theories and Experiment* Sci. Techn. Report 99 (Norway: University of Bergen, 1977)
50. Hamilton M F, Tjotta J N, Tjotta S J *J. Acoust. Soc. America* **78** (1) 202 (1985)
51. Aaonson S I, Barkve T, Tjotta J N, Tjotta S J *J. Acoust. Soc. America* **75** (3) 749 (1984)
52. Новиков Б К, Руденко О В, Тимошенко В И *Нелинейная гидроакустика* (Л.: Судостроение, 1981); Novikov B K, Rudenko O V, Timoshenko V I *Nonlinear Underwater Acoustics* (New York: Amer. Inst. of Physics, 1987)
53. Руденко О В, Солуян С И, Хохлов Р В *ДАН СССР* **225** (5) 1053 (1975)
54. Гильберт Д, Курант Р *Методы математической физики* (М.: Гостехиздат, 1951)
55. Бахвалов Н С, Жилейкин Я М, Заболотская Е А, Хохлов Р В *Акуст. журн.* **22** (4) 487 (1976)
56. Hamilton M F, Khokhlova V A, Rudenko O V *J. Acoust. Soc. America* **96** (5) 3321 (1994)
57. Лапидус Ю Р, Руденко О В *Акуст. журн.* **30** (6) 797 (1984)
58. Лапидус Ю Р, Солуян С И *Акуст. журн.* **31** (5) 615 (1985)
59. Ginsberg J H *J. Acoust. Soc. America* **76** (4) 1201 (1984)
60. Coulouvrat F Y *J. Acoust. Soc. America* **90** (3) 1592 (1991)
61. Bacon D R, Baker A C *Phys. Med. Biol.* **34** 1633 (1989)
62. Baker A C, Anastasiadis K, Humphrey V F *J. Acoust. Soc. America* **84** (5) 1483 (1988)
63. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1976)
64. Lin C C, Reissner E, Tsien H S *J. Math. Phys.* **27** 3 (1948)
65. Карабутов А А, Руденко О В *ДАН СССР* **248** (5) 1082 (1979)
66. Cramer M S, Seebass A R *J. Fluid Mech.* **88** (2) 209 (1978)
67. Спектор М Д *Письма в ЖЭТФ* **35** 181 (1983)
68. Муниа А Г, Квитка В Е *Авиационная акустика* (М.: Машиностроение, 1973)
69. Pierce A D, Maglieri D J *J. Acoust. Soc. America* **51** (3) 702 (1972)
70. Фридман В Е Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук (М.: ИОФ АН СССР, 1985)
71. Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
72. Пелиновский Е Н, Фридман В Е, Энгельбрехт Ю К *Нелинейные эволюционные уравнения* (Таллин: Валгус, 1984)
73. Наугольных К А, Островский Л А *Нелинейные волновые процессы в акустике* (М.: Наука, 1990)
74. Блохинцев Д И *Акустика неоднородной движущейся среды* (2-е изд.) (М.: Наука, 1981)
75. Кравцов Ю А, Орлов Ю И *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980)
76. Осташев В Е *Распространение звука в движущихся средах* (М.: Наука, 1992)
77. Губкин К Е *ПММ* **22** (4) 561 (1958)
78. Рыжов О С *ПМТФ* (2) 15 (1961)
79. Жилин Ю Л *Тр. ЦАГИ* Вып. 1489 3 (1973)
80. Зарембо Л К, Чунчuzов И П *Акуст. журн.* **23** (1) 143 (1977)
81. Пелиновский Е Н, Соустова И А, Фридман В Е *Акуст. журн.* **24** (5) 740 (1978)
82. Reiso E, Tjotta J N, Tjotta S, in *Frontiers of Nonlinear Acoustics* (London: Elsevier, 1990) p. 177
83. Руденко О В, Сухорукова А К, Сухоруков А П *Акуст. журн.* **41** (1) 91 (1995)
84. Мусатов А Г, Сапожников О А *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астроном.* **34** (4) 94 (1993)
85. Наугольных К А, Солуян С И, Хохлов Р В *Акуст. журн.* **9** (1) 54 (1963)

86. Сутин А М, в кн. *Нелинейная акустика* (Горький: ИПФ АН СССР, 1980) с. 45
87. Островский Л А, Сутин А М *ДАН СССР* **221** (6) 1300 (1975)
88. Smith C W, Beyer R T *J. Acoust. Soc. America* **46** (3) 806 (1969)
89. Борисов Ю Я, Гылкина Л М *Акуст. журн.* **19** (4) 433 (1973)
90. Cathignol D, Chapelon J Y, in *Advances in Nonlinear Acoustics* (Singapore: World Scientific, 1993) p. 21
91. Delius M, in *Frontiers of Nonlinear Acoustics* (London: Elsevier, 1990) p. 31
92. Church C C, Crum L A, in *Proc. of 13 Inter. Congress on Acoust.* Vol. 4 (Belgrade, 1989) p. 205
93. Agarwal L, Singh V R, Sud S P, in *Proc. of 14 Inter. Congress on Acoust.* Vol. 2 (Beijing, 1992) p. 1
94. Takayama K, in *Proc. of 15 Inter. Workshop on Shock Wave Focusing* (Sendai, Japan, 1989) p. 217
95. Руденко О В, Вероман В Ю, Денисов Г А и др. Оптоакустический излучатель для бесконтактного разрушения конкрементов в теле биообъекта. Патент (авт. свид. № 1673085)
96. Гусев В Э, Карабутов А А *Лазерная оптоакустика* (М.: Наука, 1991)
97. Ахманов С А, Гордиенко В М, Карабутов А А и др., в кн. IX Всесоюзн. ак. конф. (М.: АКИН, 1977) 4 IV-6, с. 25
98. Божков А И, Бункин Ф В, Галстян А М и др. *Изв. АН СССР, сер. физ.* **46** (8) 1624 (1982)
99. Аскарьян Г А, Клебанов Л Д *Квант. электроника* **15** (11) 2167 (1988)
100. Musatov A G, Rudenko O V, Sapozhnikov O A, in *Advances in Nonlinear Acoustics* (Singapore: World Scientific, 1993) p. 321
101. Coleman A J, Saunders J E, Preston R C, Bacon D R *Ultrasound Med. Biol.* **13** 651 (1987)
102. Coleman A J, Saunders J E *Ultrasound Med. Biol.* **15** 213 (1989)
103. Muller M, in *Proc. of 13 Inter. Congress on Acoust.* Vol. 1 (Belgrade, 1989) p. 259
104. Мусатов А Г, Сапожников О А *Акуст. журн.* **39** (2) 315 (1993)
105. Сапожников О А *Акуст. журн.* **37** (4) 760 (1991)
106. Жилейкин Я М, Руденко О В *Акуст. журн.* **27** (3) 363 (1981)
107. Жилейкин Я М, Осипик Ю И, в кн. *Современные проблемы математического моделирования* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984) с. 152
108. Руденко О В *Письма в ЖЭТФ* **20** (7) 445 (1974)
109. Карабутов А А, Лапшин Е А, Руденко О В *ЖЭТФ* **71** (1(7)) 111 (1976)
110. Руденко О В *Акуст. журн.* **29** (3) 398 (1983)
111. Андреев В Г, Руденко О В, в кн. *Тр. 10 Всесоюзн. ак. конф.* (М.: АКИН, 1983) секц. Б., с. 24
112. Андреев В Г, Гусев В Э, Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **31** (2) 275 (1985)
113. Гурбатов С Н, Руденко О В *Нелинейная акустика в задачах* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990)
114. Захаров В Е, Сагдеев Р З *ДАН СССР* **192** (2) 297 (1970)
115. Кадомцев Б Б, Петвиашвили В И *ДАН СССР* **208** (4) 794 (1973)
116. Наугольных К А, Рыбак С А *ЖЭТФ* **68** (1) 78 (1975)
117. Руденко О В, Хохлова В А *Акуст. журн.* **34** (3) 500 (1988)
118. Руденко О В, Хохлова В А *Акуст. журн.* **37** (1) 182 (1991)
119. Гурбатов С Н, Саичев А И *ЖЭТФ* **80** (2) 689 (1981)
120. Гурбатов С Н, Малахов А Н, Саичев А И *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии* (М.: Наука, 1990)
121. Lapshin E A et al. *Application package NACSI (1-1.2: Plane, converging and diverging waves in dissipative and relaxing media; 2.1-4: High-intense acoustic beams in nonlinear media)* (Moscow: Dialogue-MGU, 1992)
122. Khokhlova V A, Sapozhnikov O A *J. Acoust. Soc. America* **96** (5) 3321 (1994)
123. Гурбатов С Н, Саичев А И, Якушкин И Г *УФН* **141** (2) 221 (1983)
124. Moffett M B, Konrad W L, Carlton L F *J. Acoust. Soc. America* **63** (4) 1048 (1978)
125. Буров В А, Красильников В А, Тагунов Е Я *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астрон.* **19** (4) 53 (1978)
126. Воляк К И, Горшков А С, Руденко О В *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астрон.* **16** (1) 32 (1975)
127. Makarov S N *Acustica* **80** 1 (1994)
128. Morfey C L, in *Advances in Nonlinear Acoustics* (Singapore: World Scientific, 1993) p. 167
129. Westervelt P J *J. Acoust. Soc. America* **96** (5) 3320 (1994)
130. Канер В В, Руденко О В, Хохлов Р В *Акуст. журн.* **23** (5) 756 (1977)
131. Seymour B R, Mortell M P *J. Fluid Mech.* **52** (2) 353 (1973)
132. Temkin S J *J. Acoust. Soc. America* **45** (1) 224 (1969)
133. Островский Л А *Акуст. журн.* **20** (1) 140 (1974)
134. Ochmann M J *J. Acoust. Soc. America* **77** (1) 61 (1985)
135. Гусев В Э *Акуст. журн.* **30** (2) 204 (1984)
136. Канер В В, Руденко О В *Вест. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.,* **19** (4) 78 (1978)
137. Nayfeh A H, Kaiser J E, Telionis D P *AIAA J.* **13** (2) 130 (1975)
138. Webster D A, Blackstock D T *J. Acoust. Soc. America* **63** (3) 687 (1978)
139. Smith R T, Bjorno L, Stephens R W *Acustica* **39** (2) 123 (1978)
140. Hamilton M F, Ten Cate J A *J. Acoust. Soc. America* **84** (1) 327 (1988)
141. Nakamura A *Mem. Inst. Sci. Ind. Rec.* (Osaka Univ.) **32** 23 (1975)
142. Жилейкин Я М, Журавлева Т М, Руденко О В *Акуст. журн.* **26** (1) 62 (1980)
143. Аскарьян Г А *Письма в ЖЭТФ* **4** (4) 144 (1966)
144. Ассман В А, Бункин Ф В, Верник А В и др. *Письма в ЖЭТФ* **41** (4) 148 (1985)
145. Андреев В Г, Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Письма в ЖЭТФ* **41** (9) 381 (1985)
146. Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Вест. Моск. ун-та. Сер. 3, физ., астрон.* **29** (4) 63 (1988)
147. Армеев В Ю, Карабутов А А, Сапожников А А *Акуст. журн.* **33** (2) 177 (1987)
148. *Применение ультразвука в медицине. Физические основы* (Под ред. Л Р Гаврилова и А П Сарвазяна) (М.: Мир, 1989)

## NONLINEAR SAWTOOTH-SHAPED WAVES

**O.V. Rudenko**

*M.V. Lomonosov Moscow State University, Physics Department*

*Vorob'evy gory, 119899 Moscow, Russia*

*Tel. (7-095) 939-29 36*

*E-mail: rudenko@na.phys.msu.su*

Experimental and theoretical results on the interaction and self-action processes of strongly distorted waves containing shock fronts are surveyed. Such sawtooth-shaped disturbances form during the propagation of waves through media where the nonlinearity predominates over competing factors such as dispersion, diffraction, and absorption. The specificity of nonlinear processes in the fields of sawtooth-shaped waves is emphasized. Recently observed phenomena, such as self-action of beams, self-refraction of shock pulses, and signal saturation at the focus, are described together with the directions of current applied research.

PACS numbers: **43.25. + y**

Bibliography — 148 references

*Received 23 February 1995, revised 20 March 1995*