

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ
В СРЕДАХ С ПОГЛОЩЕНИЕМ И ДИСПЕРСИЕЙ

Б.Б. Воронов, А.И. Коробов, О.В. Руденко

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	159
1. Экспериментальное исследование нелинейных волн в среде с поглощением	
2. Исследование нелинейных явлений в акустических пучках методом математического моделирования на персональном компьютере	165
3. Экспериментальное исследование распространения волн в среде с дисперсией (капиллярные волны на поверхности жидкости)	170
Заключение	175
Примечания	176
Список литературы	176

Введение

Интенсивное развитие нелинейной акустики и оптики в настоящее время потребовало включения в учебную подготовку студентов физических специальностей разделов, посвященных распространению волн конечной амплитуды в нелинейных средах с учетом поглощения, дисперсии и дифракции. Это нашло отражение в ряде монографий и учебных пособий [1 — 8].

Мы расскажем о демонстрациях, реализованных в практикуме кафедры акустики МГУ. Они ориентированы на студентов 4 — 5 курсов радиофизического отделения, изучающих основы физики и математического описания нелинейных волновых процессов [1]. Демонстрации посвящены эффектам, проявляющимся из-за влияния поглощения, дифракции или дисперсии на протекание нелинейных взаимодействий. Разумеется, эти явления присущи не только акустическим волнам. Поэтому студенты знакомятся, фактически, с универсальными особенностями поведения интенсивных скалярных волн относительно к их физической природе. С этой точки зрения акустические волны — удобный объект для простого моделирования. С другой стороны, выполнение задач практикума позволяет освоить специфическую технику физического эксперимента.

Для акустических сред характерны квадратичная нелинейность и слабая дисперсия, поэтому распространение осесимметричного волнового пучка вдоль оси x может быть описано эволюционным уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = \hat{L}p + \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \int p \, d\tau; \quad (1)$$

$p(x, r, \tau)$ — поле акустического давления, ρ_0 — плотность, ε — параметр нелинейности среды. За искажением **временного** профиля удобно наблюдать, двигаясь вместе с волной со скоростью звука c_0 : $\tau = t - (x/c_0)$. Поперечные координаты r , по которым берется лапласиан $\hat{\Delta}_\perp$, вводятся в сечении пучка, ортогональном к оси x . Линейный оператор \hat{L} описывает эффекты частотно-зависимого поглощения и дисперсии [1].

Поскольку все три процесса (поглощение, дифракция и дисперсия) конкурируют с нелинейными эффектами, поведение волны существенно зависит от соотношения соответствующих характерных длин x_n , $x_{дф}$, $x_{дс}$ и нелинейной длины x_n . Наиболее интересны ситуации, когда нелинейность выражена сильно. Поэтому расстояние x_n , на котором проявляются нелинейные эффекты, следует считать малым по сравнению с тремя другими характерными расстояниями; однако соотношение между последними может быть произвольным.

Для практического ознакомления студентов с отмеченными характерными ситуациями в практикуме создан цикл из трех задач. При этом две задачи реализованы на экспериментальных установках, а одна — путем математического моделирования на персональном компьютере.

1. Экспериментальное исследование нелинейных волн в среде с поглощением^(1*)

Для изучения плоских волн в диссипативной среде реализована ситуация, в которой можно пренебречь дифракцией $x_{дф} \rightarrow \infty$ и дисперсией $x_{дс} \rightarrow \infty$. Математическое описание основывается на уравнении Бюргерса [1, 3]

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (1.1)$$

которое следует из (1) при $p = p(x, \tau) = \rho_0 c_0 U$, $\hat{L} = (b/2c_0^3 \rho_0) \partial^2 / \partial \tau^2$; U — колебательная скорость. Эта форма диссипативного члена типична для акустики, где вязкостно-теплопроводное поглощение имеет квадратичную зависимость от частоты, b — эффективный параметр диссипации (для воды $b = 4 \cdot 10^{-2}$ пуаз, параметр нелинейности $\varepsilon = 3,5 - 4$, $c_0 = 1480$ м/с).

При возбуждении исходного гармонического сигнала на частоте ω в среде без дисперсии происходит синхронная генерация высших гармоник $2\omega, 3\omega \dots$ (их число $n \approx x_n / x_n \gg 1$), профиль $U(\tau)$ прогрессивно искажается с увеличением расстояния x , проходимого волной вплоть до образования крутых ударных фронтов (при $x = x_p$).

При больших значениях числа Рейнольдса $Re = c_0 \rho_0 U_0 / b \omega \gg 1$ вплоть до x_p форма волны меняется практически так же, как и в случае идеальной жидкости. При этом для наблюдения за эволюцией профиля волны удобно воспользоваться уравнением простых волн

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \quad (1.2)$$

которое получается из (1.1) при $b = 0$.

Решение уравнения (1.2) при гармоническом возмущении на границе $U(x=0, t) = U_0 \sin \omega t$ в переменных x, t при $U\epsilon/c_0 \ll 1$ имеет вид (решение Римана) [1—4]

$$U = U_0 \sin \left[\omega \left(t + \frac{\epsilon}{c_0^2} Ux \right) \right] = U_0 \sin \left\{ \omega \left[t - \frac{x}{c_0(1 + \epsilon U c_0^{-1})} \right] \right\}. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что участки волны, имеющие различные значения колебательной скорости U , распространяются с различной скоростью, т.е. частицы с $U > 0$ обгоняют частицы с $U < 0$, в результате чего происходит искажение профиля волны. При малых значениях числа Маха $Ma = U/c_0 \ll 1$ (что характерно для распространения акустических волн в жидкостях, где числа Маха не превышают $10^{-3} - 10^{-4}$) [1 — 6, 8] искажения профиля волны на малых расстояниях, сравнимых с длиной волны λ , незначительны. Однако даже эти слабые искажения при распространении волны накапливаются и приводят к заметному искажению профиля волны на больших расстояниях. Такое явление характерно для сред без дисперсии.

Выражение (1.3) позволяет проследить эволюцию профиля волн в зависимости от расстояния. Это удобно сделать графически.

При $Ma \ll 1$ вблизи источника при $x \ll \lambda$ пространственная форма волны будет повторять **временную**, т.е. при $U(0, t) = U_0 \sin \omega t$

$$U(x) = U_0 \sin(2\pi x/\lambda). \quad (1.4)$$

Через время $t_1 \gg 2\pi/\omega$ нулевые точки волны ($U = 0$) переместятся на расстояние $x_1 = c_0 t_1$, другие точки ($U \neq 0$) переместятся на расстояние

$$x = (c_0 + \epsilon U) t_1,$$

т.е. точка волны, имеющая скорость U , окажется смещенной относительно точки с $U = 0$ на

$$\Delta x = \epsilon U t_1 = \epsilon x_1 U / c_0 = \epsilon Ma x_1. \quad (1.5)$$

Новую форму волны (через время t_1) можно получить, построив синусоиду, соответствующую форме волны при $x \leq \lambda$ и сдвинув ее точки по оси абсцисс на x_1 . На рис. 1,а приведено такое построение, для удобства которого дополнительно проведена прямая $U = kx$, где $k = c_0/\epsilon x_1$, и каждая точка синусоиды смещена на соответствующую величину.

Из этого построения видно, что при увеличении расстояния, проходимого волной x_1 : передний фронт волны становится более крутым, а задний более пологим. На некотором расстоянии в нулевой точке ($U = 0$) фронт волны испытывает разрыв. Это расстояние x_p (имеющее смысл характерной нелинейной длины x_n) определяется из условия, что угол наклона прямой $U = kx$ равен углу наклона синусоиды $U = U_0 \sin(2\pi x/\lambda)$ при $U = 0$; $\partial U / \partial x|_{U=0} = k$ или $U_0 \cdot 2\pi/\lambda = c_0/\epsilon x_p$, откуда

$$x_p = \frac{c_0^2}{\epsilon \omega U_0} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon M} = \lambda N_\lambda, \quad (1.6)$$

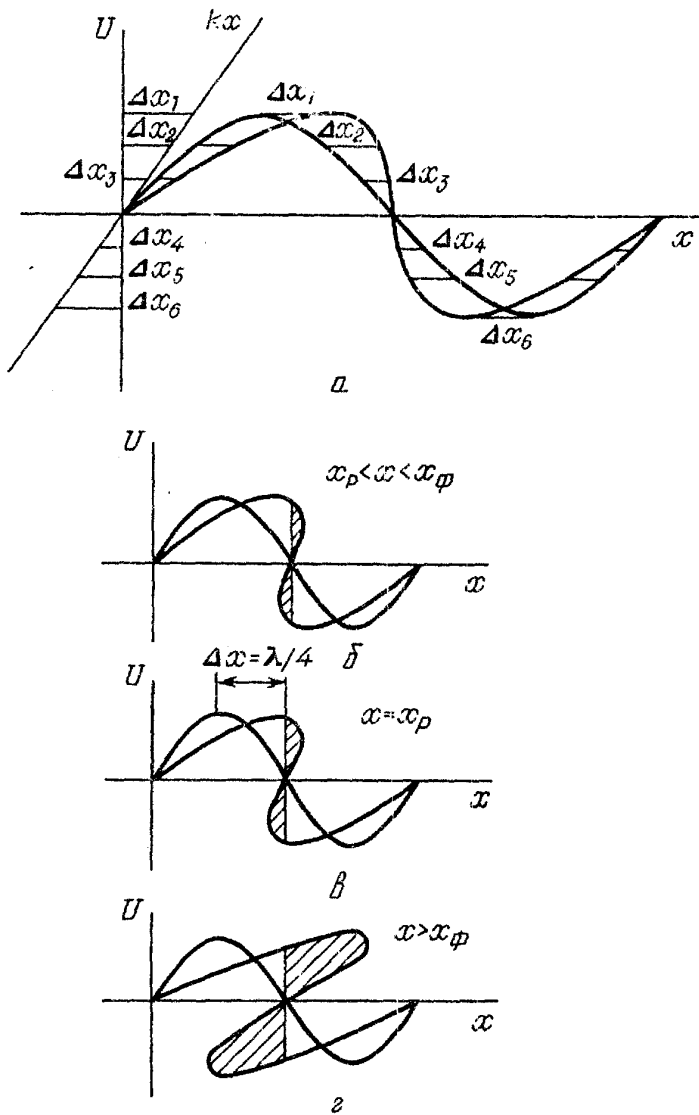


Рис. 1. Графический анализ нелинейной деформации профиля простой волны

нения, пренебрегая шириной фронта, но оставляя при этом те участки волны, которые не заходят за границы разрыва (см. рис. 1, б). При этом часть энергии, соответствующая заштрихованным участкам, поглощается средой.

Из рис. 1 следует, что величина перепада скорости на "разрыве" будет расти и при достижении максимальной величины $2U_0$ волна приобретает пилообразную форму. Расстояние, на котором это происходит, называется расстоянием формирования пилы x_ϕ , и его можно найти, воспользовавшись выражением (1.5) из условия $\Delta x|_{U=U_0} = \lambda/4$ (что видно из рис. 1, б):

$$x_\phi = \frac{\lambda}{4\epsilon M} = \frac{\pi}{2} x_p. \tag{1.8}$$

При дальнейшем распространении волны величина перепада скорости будет

где $N_\lambda = (2\lambda\epsilon M)^{-1}$ — число длин волн, укладываемых на расстоянии образования разрывного фронта волны; N_λ зависит от свойств среды, определяемых параметром ϵ и от величины начального возмущения U_0 .

Если продолжать такое построение для $x > x_p$, то появится неоднозначность $U(x)$ (рис. 1, б—г). Этого в реальной среде не может произойти. Наличие сколь угодно малых потерь приводит к значительной диссипации энергии на крутых участках волн. Поэтому вместо "опрокидывания" волны образуется фронт малой, но конечной ширины Δ . Его относительная ширина равна

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{1 + (\epsilon\omega M x / c_0)}{\pi\epsilon Re} \tag{1.7}$$

а при $Re \gg 1$ составляет малые доли длины волны.

Поэтому для определения формы профиля на расстояниях $x \geq x_p$ можно продолжить построение

уменьшаться (рис. 1,2). Можно показать, что на расстоянии $x_n = \pi \rho c_0^3 / 2b\omega^2$ от излучателя, на котором задано $U = U_0 \sin \omega t$, акустическая волна становится почти синусоидальной, а ее амплитуда не превышает значения $U'_0 = \omega b \epsilon / \rho_0 c_0$, т.е. при $x > x_n$ амплитуда волны не зависит от ее начальной мощности и определяется только частотой и параметрами жидкости (так называемый эффект нелинейного насыщения [2, 3]).

Превращение синусоидальной волны в пилообразную на спектральном языке означает обогащение исходного спектра волны кратными частотами.

Решение (1.3) при $x < x_p$ можно представить в виде [1 — 3]

$$\frac{U}{U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z) \sin \left[n\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right], \quad (1.9)$$

где $B_n(z) = 2J_n(nz)/nz$, $z = \epsilon\omega Ux/c_0^2$, J_n — функция Бесселя n -го порядка. Решение вида (1.9) обычно называют разложением Бесселя—Фубини, и оно позволяет проследить зависимость амплитуд гармоник от расстояния $x < x_p$ (рис. 2).

Для экспериментального изучения плоских волн в диссипативной среде использована установка, изображенная на рис. 3. С генератора 1 на частоте 1 МГц на пьезопреобразователь 2 подается радиоимпульс, амплитуда и длительность которого могут изменяться. Максимальная мощность $2,5 \times 10^3$ Вт. Преобразователь укреплен в торце кюветы 8, конструкция которой позволяет реализовать режим бегущих волн. Прием-

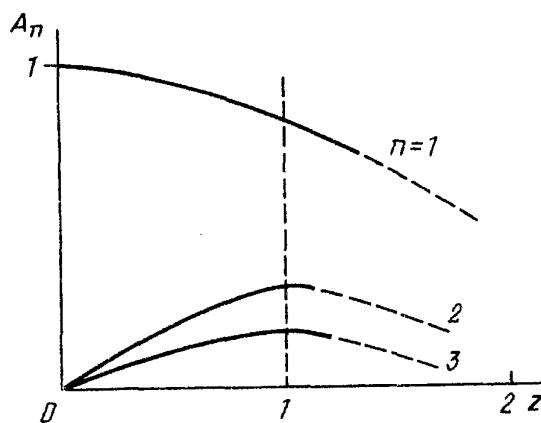


Рис. 2. Зависимости амплитуд 1-, 2-, 3-й гармоник от расстояния при $Re \gg 1$

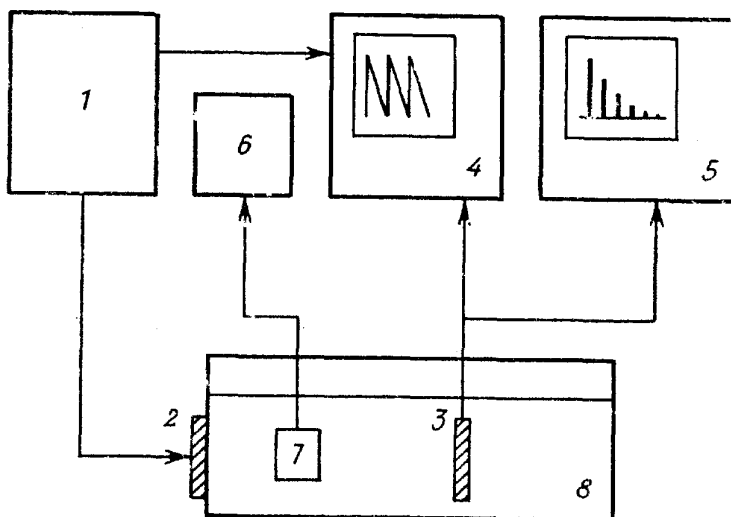


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для изучения плоских волн в диссипативной среде

ник 3 — кварцевая пластинка X-среза с резонансной частотой 10 МГц. АЧХ приемника равномерна вплоть до 10 МГц, что позволяет принимать сигналы на основной частоте и высших гармониках, а также регистрировать временной профиль волны. Для усреднения по поперечному сечению пучка выбран диаметр приемника порядка 10 длин волн. Принимаемый сигнал подается на широкополосный осциллограф 4 и анализатор спектра 5. Это позволяет наблюдать эволюцию профиля и спектра волны в зависимости от расстояния, проходимого волной (рис. 4). Некоторая изрезанность положительного полупериода профиля волны при $x \geq x_p$ объясняется появлением в спектре сигнала 10-й гармоники, совпадающей с собственной резонансной частотой приемного преобразователя. Расстояние от излучателя изменялось передвижением каретки, на которой укреплен приемник.

Для определения интенсивности волны 1 использовался калориметр 6 с электронным термометром 7, который после проведения соответствующего измерения удалялся из кюветы. По известной интенсивности рассчитывались амплитуды избыточного давления $p_0 = (2I/\rho_0 c_0)^{1/2}$ и колебательной скорости $U_0 = (2I/\rho_0 c_0)^{1/2}$, определялось акустическое число Рейнольдса $2\varepsilon Re$, где

$Re = p_0/b\omega$. Студентам предлагается найти характерные точки

(расстояния образования разрыва x_p и формирования "пилы" x_ϕ), построить профиль (см. рис. 1) в этих точках и сравнить с данными эксперимента (см. рис. 2, 4).

Поскольку размеры кюветы не позволяли наблюдать диссипативное сглаживание "пилы", влияние диссипации изучалось при малых $Re \ll 1$; когда влияние нелинейного члена мало, уравнение (1.1) можно ре-

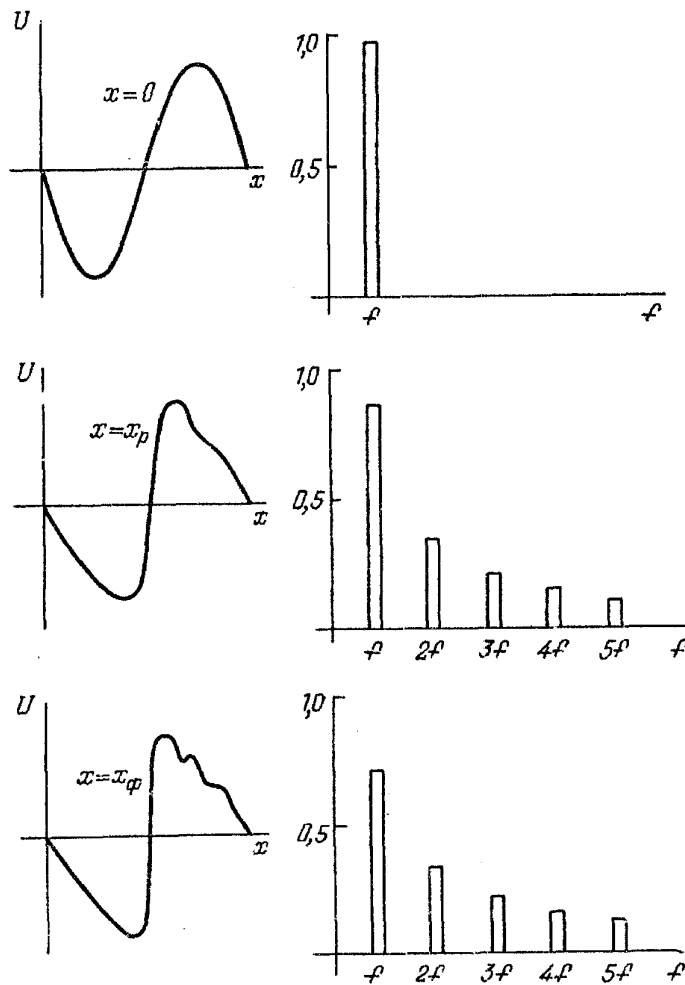


Рис. 4. Экспериментальные осциллограммы профиля волны (а) и ее спектра на экране спектроанализатора (б) для различных расстояний

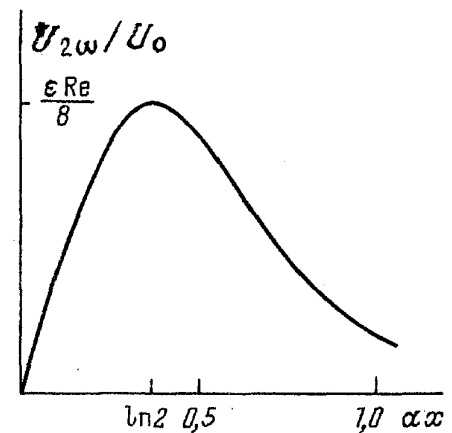


Рис. 5. Зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния при $Re < 1$

шать методом последовательных приближений. При граничном условии $U_{2\omega}(x=0) = 0$, соответствующем отсутствию второй гармоники на входе в систему, решение имеет вид [4]

$$U_{2\omega} = \frac{\varepsilon U_0 \text{Re}}{2} [\exp(-2\alpha x) - \exp(-4\alpha x)] \sin 2\omega t, \quad (1.10)$$

где $\alpha = b\omega^2/2c_0^3\rho_0$ — коэффициент поглощения волны, зависящий от частоты. На рис. 5 изображена кривая, иллюстрирующая ход соотношения $U_{2\omega}/U_0$ с координатой x . Амплитуда второй гармоники вначале нарастает по линейному закону вследствие нелинейной перекачки энергии из волны основной частоты, а затем начинает убывать за счет преобладающего влияния диссипативных процессов.

Для экспериментального наблюдения этого процесса излучаемая мощность понижалась до значений, при которых форма волны искажается, но разрыв не формируется. Затем снимается зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния; полученные результаты сравниваются с расчетными данными (см. рис. 5).

Параметры установки подобраны так, что измерения проводятся в ближней зоне, а в расчетах можно использовать приближение плоских волн.

2. Исследование нелинейных явлений в акустических пучках методом математического моделирования на персональном компьютере^(2*)

В реальных условиях практически всегда приходится иметь дело с волнами, имеющими ограниченную апертуру, — пучками. На характер нелинейных явлений в пучках существенное влияние оказывает дифракция. Для изучения нелинейных явлений в пучках целесообразно уменьшить влияние поглощения ($x_n \rightarrow \infty$) и дисперсии ($x_{дс} \rightarrow \infty$). Полагая в (1) $\hat{L} = 0$, приходим к уравнению Хохлова—Заболотской (ХЗ) [1], которое описывает распространение волн с учетом дифракции и нелинейных эффектов:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (2.1)$$

Искажение профиля волны, описываемой уравнением ХЗ (2.1), происходит вследствие двух причин: нелинейности и дифракции. Следует отметить, что для уравнения ХЗ, в отличие, например, от уравнения Бюргерса, не найдено физически интересных точных решений. Поэтому имеет смысл рассмотреть предельные случаи.

Если пренебречь дифракцией, т.е. положить в (2.1) $\Delta_{\perp} p = 0$, приходим к уравнению простых волн, решение которого (решение Римана) подробно проанализировано в предыдущей задаче.

В другом предельном случае, если в уравнении (2.1) пренебречь нелинейным членом (т.е. принять $\varepsilon = 0$), получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (2.2)$$

Для гармонического во времени сигнала $p = A(x, r) \exp(-i\omega t)$ уравнение (2.2) сводится к хорошо известному в теории волн [1] параболическому урав-

нению теории дифракции

$$-2ik \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r}. \quad (2.3)$$

Его решение с условием на границе в виде гауссова пучка $A(x=0, r) = p_0 \exp(-r^2/a^2)$ имеет вид

$$A = \frac{p_0}{1 + i(x/x_{дф})} \exp \left[-\frac{r^2/a^2}{1 + i(x/x_{дф})} \right], \quad (2.4)$$

где

$$x_{дф} = \frac{ka^2}{2} = \frac{\omega a^2}{2c_0} \quad (2.5)$$

— характерная дифракционная длина (рис. 6). На расстояниях $x \geq x_{дф}$ пучок с плоским исходным фронтом превращается в сферически расходящуюся волну, сосредоточенную в конусе с углом раствора $\theta_{дф} = \lambda/\pi a$.

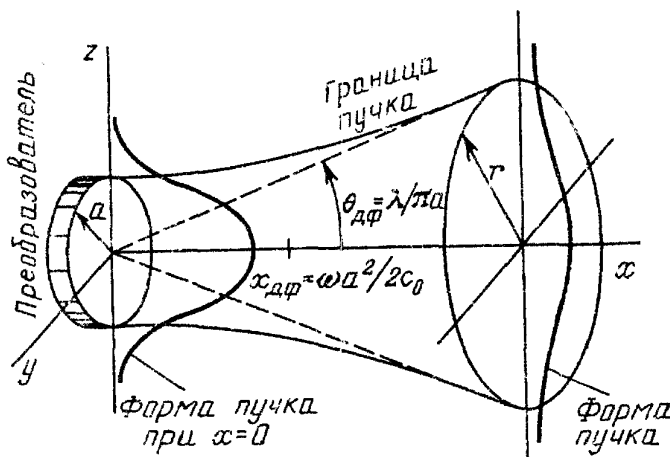


Рис. 6. Форма дифрагирующего акустического пучка

Используя решение (2.4) параболического уравнения (2.3), получим решение линейной задачи дифракции синусоидального во времени сигнала:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{x^2}{x_{дф}^2} \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{r^2/a^2}{1 + (x^2/x_{дф}^2)} \right] \times \sin \left[\omega \tau + \operatorname{arctg} \frac{x}{x_{дф}} - \frac{r^2}{a^2} \frac{x/x_{дф}}{1 + (x^2/x_{дф}^2)} \right]. \quad (2.6)$$

Воспользовавшись формулой (2.6), можно проследить, как меняется фаза волны на оси пучка (при $r = 0$):

$$\varphi = \omega \tau + \operatorname{arctg} \frac{x}{x_{дф}}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует важный вывод: скорость распространения волны на оси выпуклого пучка зависит от частоты и по величине несколько больше скорости

c_0 плоской волны. Это легко видеть в случае $x \ll x_{\text{дф}}$, когда в (2.7) можно положить $\text{arctg}(x/x_{\text{дф}}) \approx x/x_{\text{дф}}$:

$$\varphi \approx \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \frac{2c_0}{\omega a^2} x = \omega \left(t - \frac{x}{c(\omega)} \right), \quad (2.8)$$

где $c(\omega) = c_0(1 - 2(c_0/\omega a)^2)^{-1}$.

Как видно из (2.8), с увеличением частоты, когда $\omega \rightarrow \infty$, эффекты дифракции ослабевают к $c(\omega) \rightarrow c_0$. Дифракционный сдвиг фазы (2.7) сопровождается процесс превращения плоской волны в сферически расходящуюся (который описывается решением (2.6)) и заметен на расстояниях от $x = 0$ до нескольких длин $x_{\text{дф}}$.

Рассмотрим теперь общую ситуацию, описываемую уравнением ХЗ, когда нелинейность и дифракция действуют одновременно. Обратим внимание только на два явления: несимметрию в искажении областей сжатия и разрежения периодического сигнала и эффект изотропизации пучка.

Несимметрия связана с нелинейным эффектом генерации гармоник и дифракционными сдвигами фаз (2.7), или, иначе говоря, с небольшими отличиями в скоростях распространения $c(\omega)$ различных гармоник (2.8). Качественное объяснение факта несимметричного искажения полупериодов дано на рис. 7.

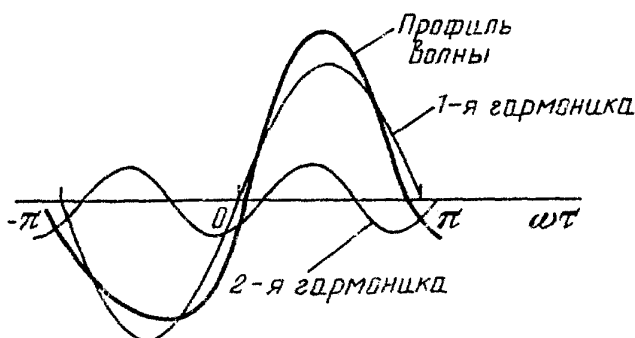


Рис. 7. Сложение сдвинутых по фазе волн первой (1) и второй (2) гармоник дает профиль (3) с несимметричным искажением полупериодов

Пусть (для простого рассуждения) профиль волны образуется при суммировании лишь двух гармоник: на основной частоте ω и частоте 2ω второй гармоники. Как следует из (2.8), превышение скорости волны над значением c_0 из-за дифракции тем меньше, чем выше частота. Поэтому вторая гармоника, возникающая в нелинейной среде, оказывается сдвинутой по фазе относительно волны основной частоты. Складывая амплитуды двух гармоник, получим результирующий профиль, искаженный несимметричным образом: положительный полупериод уменьшается по длительности, отрицательный увеличивается. В силу сохранения количества движения площади полупериодов должны быть равны. Поэтому в некоторой области расстояний $x \approx x_{\text{дф}} \approx x_p$ наблюдается превышение положительного пикового давления над исходным значением p_0 . Учет большего числа гармоник не изменяет особенностей поведения профиля волны.

Эффект изотропизации связан с нелинейным затуханием разрывов. Напомним, что даже в идеальной невязкой среде на расстояниях $x > x_p$ (см. первую задачу) подобное затухание может быть существенным. Нелинейность приводит к уменьшению "амплитуды" пилообразной волны, причем это затухание зависит от амплитуды и, следовательно, от r . Нелинейное затухание силь-

нее проявится для тех r , где величина возмущения больше. Поэтому происходит сглаживание формы пучка, деталей поперечного распределения волны. Этот процесс для значений $x > x_p$ показан на рис. 8,а.

Сглаживание поперечного распределения поля (по координате r) означает, что угловое распределение поля (по малым углам $\theta \approx r/x$ между осью пучка и направлением на точку наблюдения) также сглаживается, т.е. происходит изотропизация диаграммы направленности излучения (это имеет место, например, в параметрических гидроакустических антеннах [5, 6]). Этот процесс для расстояний $x > x_p$ изображен на рис. 8,б.

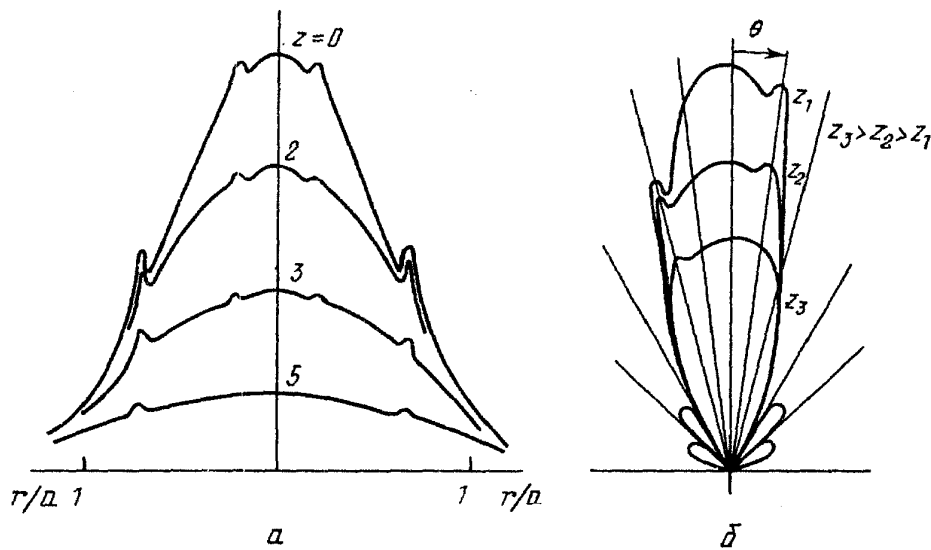


Рис. 8. Сглаживание формы пучка (а) и изотропизация диаграммы направленности вследствие нелинейного затухания (б)

Экспериментальное наблюдение нелинейных дифракционных явлений студентами в практикуме связано с определенными трудностями. Поэтому работа выполняется на основе математического моделирования процессов, описываемых уравнением ХЗ, на персональном компьютере.

Для решения уравнения ХЗ (2.1) на ЭВМ его удобно привести к безразмерному виду. Пусть поле на излучателе задано в виде гармонического сигнала и гауссова пучка

$$p(x=0, r, \tau) = p_0 \exp(-r^2/a^2) \sin \omega \tau, \quad (2.9)$$

где a , ω , p_0 — характерные значения ширины пучка, частоты и амплитуды волны соответственно.

Переходя в уравнении (2.1) к безразмерным переменным

$$\Pi = \frac{p}{c_0^2 \rho_0}, \quad \theta = \omega \tau, \quad R = \frac{r}{a}, \quad z = \frac{x}{x_p} = \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} \omega p_0 x, \quad (2.10)$$

приведем его к виду

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \Pi \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial R} \right); \quad (2.11)$$

здесь $N = x_n / x_{дф}$ — число, равное отношению характерных нелинейной x_n (1.6) и дифракционной $x_{дф}$ (2.5) длин.

Смысл числа N можно понять из следующих соображений. Оценим относительный вклад дифракционного и нелинейного членов уравнения (2.1):

$$\frac{(c_0/2)\Delta_1 p}{(\epsilon/c_0^3 \rho_0) \partial(p \partial p / \partial \tau) / \partial \tau} \approx \frac{(c_0/2) p_0 / a^2}{(\epsilon/c_0^3 \rho_0) p_0^2 \omega^2} = \frac{c_0^4 \rho_0}{2 \epsilon \omega^2 a^2 p_0} = \frac{N}{4}. \quad (2.12)$$

Ясно, что при $N \gg 1$ преобладает дифракционный член, при $N \ll 1$ — нелинейный. Например, при $N = 10$ мы имеем практически линейную задачу вплоть до расстояний $z \approx 10$. В этом случае нелинейный член в уравнении ХЗ мал, а решения уравнения ХЗ с хорошей точностью соответствуют решениям линейного уравнения (2.2); в частности, для гармонического исходного сигнала (2.9) имеем решение (2.6). При малых числах $N \ll 1$ решения уравнения ХЗ совпадают с решением для простых волн при $z \leq 1$. При больших z нужно устранять неоднозначность профиля, проводя разрыв по правилу равенства площадей.

На персональном компьютере проводится моделирование уравнения ХЗ в виде (2.11) с условием (2.9) при $z = 0$, которое в безразмерных параметрах имеет вид

$$\Pi(z = 0, R, \theta) = \exp(-R^2) \sin \theta. \quad (2.13)$$

Непосредственное интегрирование задачи (2.11), (2.13), проведенное специально разработанными сеточными методами [9] на мощных современных ЭВМ, требует больших затрат машинного времени, что не подходит для студенческого практикума. В [10] были предложены асимптотические методы решения уравнения ХЗ, которые позволяют рассчитать на персональном компьютере форму профиля, амплитудный и фазовый спектры волны как функции безразмерных параметров N, z, R за несколько секунд.

Задавая различные значения параметров N, z, R , студент имеет возможность наблюдать различные ситуации, возникающие при распространении нелинейных пучков. В результате работы программы на экране графического монитора возникает картинка, на которой при данных N, z, R изображен профиль волны, график амплитудного спектра и таблица с численными значениями амплитуд и фаз первых десяти гармоник, а также данные о характеристиках асимметрии профиля волны. При необходимости содержание экрана распечатывается на матричном принтере (рис. 9).

На рис. 9,а изображен профиль и спектр одного периода искаженной волны, имевший при $x = 0$ синусоидальную во времени исходную форму. Значение параметра $N = 0$ соответствует недифрагирующей волне с плоским фронтом. Результаты относятся к точке пространства $R = 0, z = 1$, т.е. измерение проводится на оси пучка и на расстоянии $x = x_p$ от излучателя. В точке $x = x_p$ на переднем фронте начинает образовываться разрыв — касательная к профилю при $\tau = 0$ ($\theta = 0$) становится вертикальной. Численные значения амплитуд гармоник соответствуют формуле **Бесселя—Фубини** (1.9),

На рис. 9,б изображен тот же профиль, но на большем расстоянии

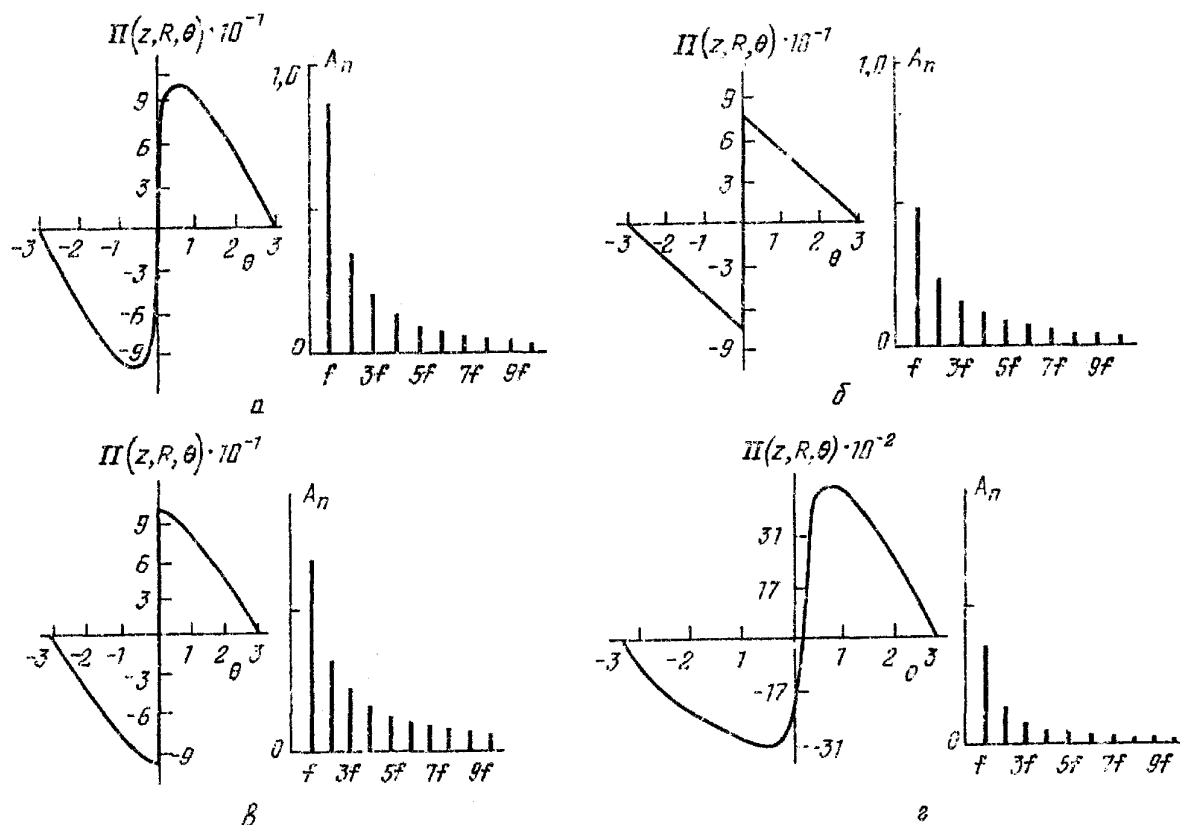


Рис. 9. Профили волны и их спектры (справа) для различных значений параметров z и N при $R=0$. а - $z=1$, $N=0$. б - $z=3$, $N=0$. в - $z=1,5$, $N=0$. г - $z=1,5$, $N=1,5$

$z = 3$ ($x = 3x_p$). Здесь неоднозначность профиля устраняется разрывом, расположенным при $\tau = 0$ ($\theta = 0$) в соответствии с правилом равенства площадей [1]. Видно, что сформировалась пилообразная волна, представляющая собой прямолинейные участки гладкого профиля простой волны, разделенные ударными фронтами. Амплитуды гармоник с номерами m, n в "пиле" относятся как $A_m/A_n \approx n/m$.

Рис. 9, в, г иллюстрируют одновременное влияние нелинейных и дифракционных процессов. Для сравнения на рис. 9, в изображен профиль в точке $R = 0$, $z=1,5$ при $N=0$ (дифракция "выключена") и на рис. 9, г — при $N = 1,5$ ($x_{дф} = 1,5x_p$). Видно, что дифракционные фазовые сдвиги между различными характеристиками приводят к несимметричному искажению областей сжатия и разрежения в каждом из периодов сигнала.

Оставляя фиксированными значения N и z и меняя величину R , имеем возможность исследовать поперечный амплитудный профиль пучка, эффект изотропизации, амплитудные профили различных гармоник.

3. Экспериментальное исследование распространения волн в среде с дисперсией (капиллярные волны на поверхности жидкости)^(3*)

Третья задача посвящена свойствам нелинейных волн в диспергирующих средах и основана на экспериментальном исследовании распространения капиллярных волн на поверхности воды.

Колебания свободной поверхности жидкости происходят под действием

сил, стремящихся вернуть возмущенную поверхность к равновесному положению: силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Как известно, волны на поверхности жидкости удовлетворяют дисперсионному соотношению [1]

$$\omega^2 = gk + (\sigma k^3 / \rho_0), \quad (3.1)$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ_0 — равновесная плотность. Отметим, что величина σ сильно зависит от чистоты поверхности и дня специально не очищенной жидкости может быть на 15 — 20% меньше.

Из (3.1) фазовая скорость волн, распространяющихся на поверхности жидкости бесконечной глубины h ($h \gg \lambda$), равна

$$V_\Phi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\sigma k}{\rho_0} + \frac{g}{k} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho_0\lambda} \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Зависимость $V_\Phi(f)$, приведенная на рис. 10, соответствует дистиллированной

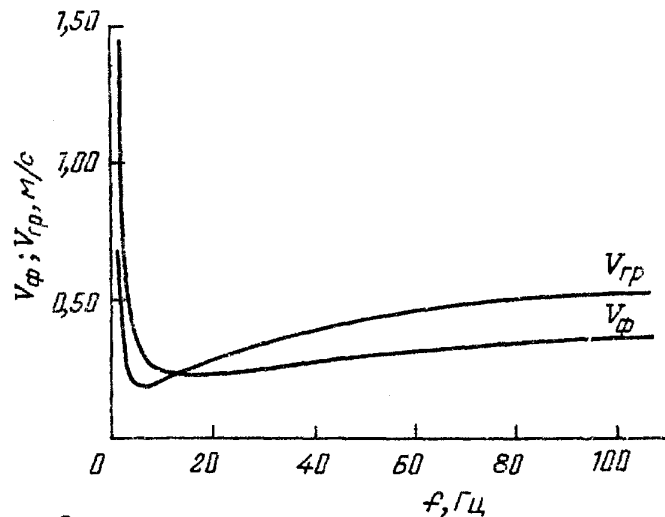


Рис. 10. Зависимость фазовой V_Φ и групповой $V_{гр}$ скоростей волн на поверхности воды от частоты f

воде ($\sigma = 7,4 \cdot 10^2 \text{ Н/м}$, $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$). На частоте

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\rho g^3}{\sigma} \right)^{1/4}$$

зависимость фазовой скорости от частоты имеет минимум $V_{\Phi \min} = (4\sigma g / \rho_0)^{1/4}$; ей соответствует $\lambda_{\min} = 2\pi (\sigma / \rho_0 g)^{1/4}$. Для дистиллированной воды $f_{\min} = 13,5 \text{ Гц}$, $V_{\Phi \min} = 0,235 \text{ м/с}$, $\lambda_{\min} = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

В области коротких (капиллярных) волн при $f \geq f_{\min}$ из двух возвращающихся сил преобладает сила поверхностного натяжения, первым членом в правой части (3.1) можно пренебречь, и из (3.1) следует

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho_0} k^3, V_\Phi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\sigma}{\rho_0 k} \right)^{1/2} = \left(\frac{\sigma}{\rho_0 \omega} \right)^{1/3}, \quad (3.3)$$

$$V_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \frac{\sigma k^2}{\omega} = \frac{3}{2} V_\Phi.$$

Для длинных (гравитационных) волн при $f < f_{\min}$ преобладает сила тяжести, т.е.

$$\omega^2 = gk, \quad V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}, \quad V_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2}V_{\phi}. \quad (3.4)$$

В области $f \approx f_{\min}$ оба слагаемых сравнимы по величине: такие волны называют гравитационно-капиллярными.

Групповая скорость гравитационных волн меньше фазовой. У капиллярных волн, наоборот, групповая скорость больше фазовой скорости — имеет место аномальная дисперсия (см. рис. 10).

Наличие дисперсии у волн на поверхности жидкости приводит к существенному отличию протекания нелинейных процессов в них по сравнению с первой задачей: фазовые скорости для различных гармоник различны, и соотношения между фазами гармоник при их распространении в пространстве меняются быстро. Вследствие нарушения фазового синхронизма нелинейные эффекты не накапливаются и обмен энергии между гармониками незначителен, а поэтому заметных искажений формы волны не происходит.

Для изучения взаимодействия между гармониками в диспергирующей среде следует отказаться от описания акустического поля на основе (1) и перейти к уравнениям для медленно изменяющихся комплексных амплитуд квазигармонических компонент поля. В частности, если дисперсия такова, что эффективно обмениваться энергией могут только первая и вторая гармоники, в (1) следует положить

$$p(x, \tau) = \frac{1}{2}A_1 \exp(i\omega\tau) + \frac{1}{2}A_2 \exp(i \cdot 2\omega\tau) + \text{к.с.}$$

При этом из (1) для случая отсутствия диссипации энергии получается пара укороченных уравнений [1]

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = -i\gamma A_1^* A_2 \exp(ix\Delta k), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} + \hat{U} \frac{\partial A_2}{\partial \tau} = -\gamma A_1^2 \exp(ix\Delta k),$$

где $\hat{U} = V_{\text{гр}}^{-1}(2\omega) - V_{\text{гр}}^{-1}(\omega)$ — расстройка групповых скоростей,

$$\Delta k = k_2(2\omega) - 2k_1(\omega) = \frac{2\omega}{V_{\phi}(2\omega)} - 2 \frac{\omega}{V_{\phi}(\omega)} \quad (3.6)$$

— расстройка волновых чисел, γ — эффективная константа нелинейности поверхностных волн.

Система уравнений (3.5) позволяет выявить основные закономерности генерации второй гармоники. Зададим на входе в нелинейную среду при $x = 0$ следующие граничные условия:

$$A_1(0) = A_0, \quad A_2(0) = 0. \quad (3.7)$$

Проанализируем генерацию гармоники в непрерывном режиме в условиях, когда ее амплитуда мала по сравнению с амплитудой основной волны: $|A_2| \ll |A_1|$. В этом случае можно положить расстройку групповых скоростей

$U = 0$, а амплитуду основной волны неизменной: $A_1(x) \approx A_0$. В этом случае гармоника возбуждается в заданном поле основной волны и систему уравнений (3.5) можно заменить следующим уравнением:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = -\gamma A_0^2 \exp(ix\Delta k). \quad (3.8)$$

Интегрируя (3.8), получим

$$A_2 = \frac{\gamma A_0^2}{\Delta k} [1 - \exp(i\Delta k x)], \quad (3.9)$$

согласно которому амплитуда второй гармоники не остается постоянной, а испытывает биения в пространстве по закону

$$|A_2| = \gamma \frac{|\sin(\Delta k x/2)| A_0^2}{\Delta k/2}. \quad (3.10)$$

В отсутствие $\Delta k = 0$ и выполнения условия фазового синхронизма $k_2 = 2k_1$ из (3.10) следует, что амплитуда гармоники нарастает прямо пропорционально пройденному расстоянию (рис. 11):

$$|A_2| = \gamma A_0^2 x. \quad (3.11)$$

В связи с наложенным ограничением $|A_2| \ll A_0$ выражение (3.11) справедливо и при $x \ll x_{\text{нл}}$.

В случае $\Delta k \neq 0$ монотонное возрастание амплитуды второй гармоники происходит на отрезке $L_{\text{ког}}$, называемом длиной когерентного взаимодействия и равном [1 — 4]

$$L_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{\pi}{|2k_1 - k_2|}, \quad (3.12)$$

при котором наблюдается первый максимум амплитуды второй гармоники

$$|A_2|_{\text{max}} = \frac{2\gamma A_0^2}{\Delta k}. \quad (3.13)$$

Период пространственных биений волны второй гармоники равен

$$\begin{aligned} \Delta_{2\omega} &= 2L_{\text{ког}} = \\ &= \frac{2\pi}{|2k_1 - k_2|} \end{aligned} \quad (3.14)$$

(см. рис. 11).

Блок-схема установки для исследования капиллярных волн изображена на рис. 12. Поверхностные волны возбуждаются в кювете 1, наполненной водой, при колебаниях лег-

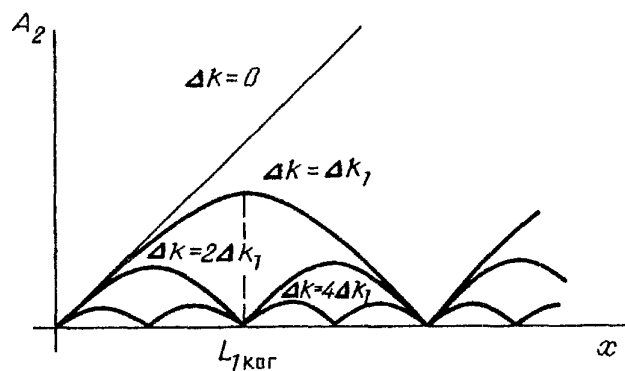


Рис. 11. Процесс генерации второй гармоники в зависимости от дисперсионных свойств системы

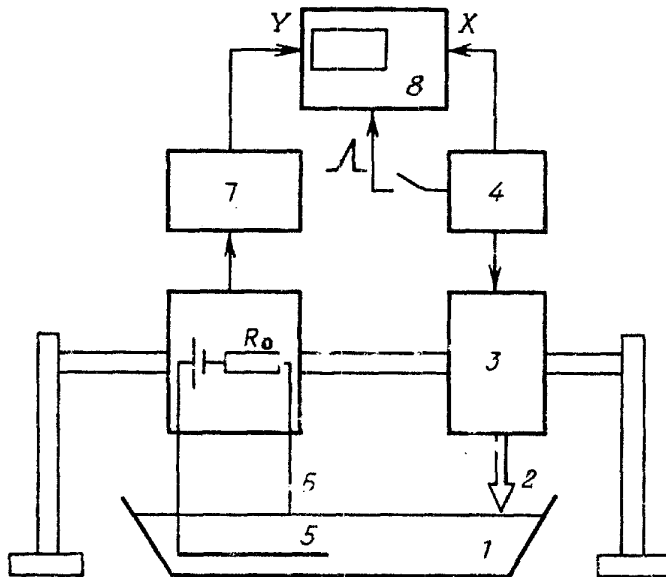


Рис. 12. Блок-схема экспериментальной установки для исследования капиллярных волн на поверхности воды

кого алюминиевого бойка 2, прикрепленного к электродинамическому преобразователю 3, на который подавались электрические колебания с генератора 4. Генератор звуковой частоты 4 может работать как в непрерывном, так и в импульсном режимах. Толщина слоя воды в кювете (≥ 5 см) была достаточной, чтобы пренебречь влиянием дна на распространение волн в диапазоне частот 40 — 200 Гц. Для регистрации капиллярных волн использовано приемное устройство, состоящее из помещенной на дно медной пластины 5 и тонкого позолоченного электрода 6. На пластину и электрод через сопротивление R_0 подается постоянное напряжение ≈ 5 В. При колебании поверхности жидкости вследствие изменения глубины погружения электрода меняется сопротивление слоя жидкость—электрод. В результате на R_0 возникает переменное напряжение, пропорциональное амплитуде волны. Оно усиливается с помощью селективного вольтметра 7 и подается на вход Y осциллографа 8. Приемное устройство размещено на подвижной каретке и может перемещаться вдоль направления распространения волны.

Описанная установка позволяет исследовать дисперсию фазовой V_ϕ и групповой $V_{гр}$ скорости, а затем — процесс генерации второй гармоники. Для измерения V_ϕ с генератора 4 на преобразователь 3 и на вход X осциллографа подается непрерывный электрический сигнал на частоте f . В результате на экране возникает фигура Лиссажу, показывающая сдвиг фазы между колебаниями на излучателе и приемнике. Изменяя расстояние между ними, находим два положения приемника, для которых фигуры Лиссажу одинаковы. Расстояние между ближайшими такими точками равно длине волны $\lambda(f)$, которой соответствует фазовая скорость $V_\phi(f) = \lambda(f) \cdot f$. Проведя измерения на различных частотах, можно снять дисперсионную кривую $V_\phi(f)$.

Для определения групповой скорости генератор 4 переводится в импульсный режим работы, а осциллограф — в режим внешней синхронизации; он синхронизируется прямоугольной огибающей исходного радиоимпульса, подаваемого на излучатель. На экране наблюдается волновой пакет с огибающей, испытывавшей в среде дисперсионное искажение. Задержка во времени Δt максимума огибающей при перемещении приемника на известное расстояние

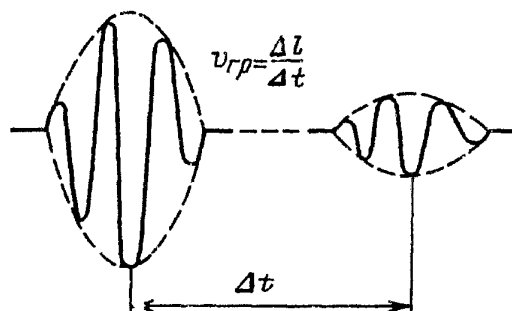


Рис. 13. Методика экспериментального определения групповой скорости капиллярной волны

Δl позволяет определить $V_{гр}(\omega) = \Delta l / \Delta t$ (рис. 13).

Результаты измерений $V_{ф}(\omega)$ и $V_{гр}(\omega)$ сравниваются с теоретическими значениями $V_{ф}(\omega)$ и $V_{гр}(\omega)$, приведенными на рис. 10. Экспериментальные значения получаются несколько меньше расчетных. Это связано с тем, что сила поверхностного натяжения, а следовательно, и коэффициент поверхностного натяжения а существенно зависят от чистоты поверхности жидкости, на которую влияют абсорбция поверхностью мельчайших частичек пыли, находящихся в воздухе, и продукты электролиза, который происходит в результате работы приемного устройства.

Для наблюдения 2-й гармоники используется непрерывный режим. Селективный вольтметр настраивается на удвоенную частоту. Настройка фиксируется по фигуре Лиссажу в форме горизонтальной "восьмерки". Перемещая приемник от излучателя, можно наблюдать монотонный рост амплитуды гармоники. Он продолжается вплоть до расстояния $L_{\text{ког}}$, а потом амплитуда гармоники начинает уменьшаться из-за рассогласования фазовых скоростей (см. рис. 11). Студентам предлагается измерить пространственный период биеений амплитуды $\Delta_{2\omega}$ и сравнить, его с расчетными значением, полученным по формуле (3.14).

Заключение

Рассмотренный цикл задач практикума охватывает, на наш взгляд, наиболее интересные нелинейные волновые явления. В результате выполнения этих задач студенты осваивают современные методы исследования нелинейных волновых явлений в различных средах.

Все экспериментальные установки, описанные выше, практически полностью собраны из серийных приборов. Надежность установок и их простота в эксплуатации проверена многолетней работой в студенческом практикуме. Вторая задача, основанная на математическом моделировании уравнения ХЗ, реализована как на отечественных (ДВК-2,3, "Электроника-60", "Искра-1130", так и на зарубежных (совместимых с IBM PC) персональных компьютерах.

Более подробно с конструктивными решениями, техническими данными приборов, программным обеспечением, описанием рассмотренных задач можно ознакомиться на кафедре акустики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность И.А. Яковлеву за проявленный интерес к работе и ее обсуждение.

ПРИМЕЧАНИЯ

- ① Авторы задачи В.А. Буров.
- ② Авторы задачи Ю.Р. Лапидус, О.В. Руденко.
- ③ Авторы задачи Б.Б. Воронов, А.И. Коробов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. — М.: Наука, 1990.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. — М.: Наука, 1966.
3. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984.
4. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975; *Rudenko O. V., Soluyan S. I.* Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. — New York: Plenum, 1977.
5. *Beyer R. T.* Nonlinear Acoustics. Naval Ship Systems Command. — 1974.
6. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И.* Нелинейная гидроакустика. — Л. Судостроение, 1981; *Novikov B. K., Rudenko O. V., Timoshenko V. I.* Nonlinear Underwater Acoustics. — New York: American Inst. of Physics, 1987.
7. *Цернике Ф., Мидвинтер Дж.* Прикладная нелинейная оптика. — М.: Мир, 1976; *Zernike F., Midwinter J. E.* Applied Nonlinear Optics. — New York. John Wiley and Sons, 1973.
8. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. — М.: Наука, 1990; *Naugolnykh K. A., Ostrovsky L. A.* Nonlinear Wave Processes in Acoustics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
9. *Бахвалов И.О., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.* Нелинейная теория звуковых пучков. — М.: Наука, 1982.
10. *Лапидус Ю.Р., Руденко О.В.* Новые методы и результаты теории нелинейных акустических пучков//Акуст. ж. 1984. Т. 30. С. 797.