

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Нелинейная динамика квадратично кубических систем

О.В. Руденко

Предложены модификации известных уравнений нелинейной динамики, в которых кубическая нелинейность моделируется квадратичными соотношениями. Показано, что некоторые из таких квадратично кубических уравнений допускают точные решения. При этом иногда облегчается качественный анализ исходной задачи. В ряде случаев точные решения помогают исследовать новые явления. Приведены примеры как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и нелинейных уравнений в частных производных (уравнения Хопфа, Бюргерса, Кортевега–де Вриза, Шрёдингера). Для некоторых задач найдены точные решения в пространственно-временном и спектральном представлениях. Описан круг нерешённых задач, для решения которых может быть использован предложенный подход.

PACS numbers: 02.30.Jr, 05.45. – a, 42.65. – k, 43.25. + y

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201307b.0719

Содержание

1. Введение (719).
 2. Пример системы с квадратично кубической нелинейностью (720).
 3. Римановы волны (721).
 4. Слабые ударные волны сжатия и разрежения (722).
 5. Периодическая трапециевидная пилообразная волна (723).
 6. Квадратично кубическое уравнение Бюргерса (723).
 7. Квадратично кубическое уравнение Шрёдингера (725).
 8. Квадратично кубическое уравнение Кортевега – де Вриза (725).
 9. Заключение (726).
- Список литературы (726).

1. Введение

Рассматриваемые в настоящей статье процессы могут быть названы сильно нелинейными. Различия между эффектами сильной нелинейности и сильно выраженными проявлениями слабой нелинейности подробно обсуждаются в обзоре [1], там же даны примеры сильно нелинейных систем и предложена их классификация.

Важным примером сильно нелинейной системы 1-го типа (см. [1]) служит система с квадратично кубической

(КК) нелинейностью. Иногда квадратично кубической называют систему, содержащую одновременно и квадратичную, и кубическую нелинейности. Мы будем вкладывать в термин "квадратично кубическая система" иной смысл. Речь здесь пойдёт о модели кубично нелинейных систем, построенной на основе квадратичных соотношений. Такие системы реально существуют. Не менее важно, что соответствующие нелинейные уравнения решаются иногда гораздо проще, чем уравнения для истинно кубических систем. Возможность получить точное аналитическое описание нелинейных процессов в рамках модельной задачи часто позволяет лучше понять их реальные физические особенности.

В простейшем случае колебательной системы с одной степенью свободы $x(t)$ КК-нелинейность даётся функцией $x|x|$. Соответствующий ангармонический осциллятор описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2}x|x| = 0. \quad (1)$$

В отличие от "ям", описываемой квадратичной параболой $U = x^2/2$ (потенциальной функцией гармонического осциллятора), здесь "яма" $U = x^2|x|/2$ формируется двумя ветвями кубической параболы $U = x^3/2$, непрерывно сшитыми в точке $x = 0$. Как и в известном случае [2, 3], когда в уравнении (1) вместо $x|x|$ присутствует обычный кубический член x^3 , здесь нет предельного перехода при $x \rightarrow 0$ к линейной системе. Энергия колебаний

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2|x| \equiv \frac{1}{2} A^3 \quad (2)$$

определяется кубом их амплитуды ($A > 0$). Период колебаний

$$T = \frac{4}{\sqrt{A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^3}},$$

О.В. Руденко. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru
Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация;
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Б. Грузинская 10, 123242 Москва, Российская Федерация;
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, ул. Б. Покровская 60, 603000 Н. Новгород, Российская Федерация;
Blekinge Institute of Technology, SE-371 Karlskrona, Sweden

Статья поступила 9 апреля 2013 г.,
после доработки 29 апреля 2013 г.

который уменьшается с возрастанием амплитуды как $1/\sqrt{A}$, даётся формулой

$$\begin{aligned} T\sqrt{A} &= \frac{4}{3^{1/4}} F\left(\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \approx 5,61. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $F(\psi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Форма колебаний описывается эллиптическими функциями Якоби [4] и содержит только нечётные гармоники.

Заметим, что колебания осциллятора с похожим по форме нелинейным затуханием $\sim \dot{x}|\dot{x}|$ хорошо изучены (см., например, [5]).

В последние годы популярна модель демпфированного "бистабильного" осциллятора:

$$\dot{x} + x^3 - x = F(t), \quad (4)$$

которую используют при изучении так называемого стохастического резонанса [6]. Уравнение (4) описывает, например, движение броуновской частицы в сильно вязкой среде в поле ангармонического (с двумя ямами) потенциала $U = x^4/4 - x^2/2$. На частицу действует внешняя сила $F(t)$, представляющая собой сумму шума $\sqrt{2D}\xi(t)$ с интенсивностью D и периодического во времени сигнала $A \cos(\Omega t)$. Уравнение (4) исследуют численно или приближённо аналитически, например, с помощью уравнения Фоккера–Планка. Вместе с тем уравнению (4) можно поставить в соответствие КК-нелинейную модель

$$\dot{x} + x|x| - x = F(t). \quad (5)$$

Достоинство модели (5) заключается в возможности её линеаризации. Полагая $|x| = \dot{u}/u$, получим

$$\ddot{u} - \dot{u} = \pm F(t) u.$$

Здесь знак плюс соответствует $x > 0$, минус — $x < 0$.

При решении задачи о воздействии на КК-систему (5) последовательности коротких (дельтаобразных) импульсов

$$F(t) = \sum_{n=1}^N A_n \delta(t - t_n) \quad (6)$$

с "амплитудами" A_n и моментами появления t_n уравнение (5) также можно линеаризовать. Полагая $x = 1/u$, в промежутках между импульсами (6) найдём

$$\dot{u} + u = \pm 1, \quad u_n(t) = \pm 1 + [u_n(t_n) \mp 1] \exp(-(t - t_n)), \quad (7)$$

$t_{n-1} < t < t_n$. Верхние знаки соответствуют положительным значениям переменной u_n , нижние — отрицательным. Из решения (7) видно, что имеются две "притягивающие" точки: при $t \rightarrow \infty$ положительные начальные значения функции стремятся к 1, а отрицательные — к -1. Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$x_n(t) = \frac{x_n(t_{n-1})}{\exp(-(t - t_{n-1})) + [1 - \exp(-(t - t_{n-1}))]|x_n(t_{n-1})|}. \quad (8)$$

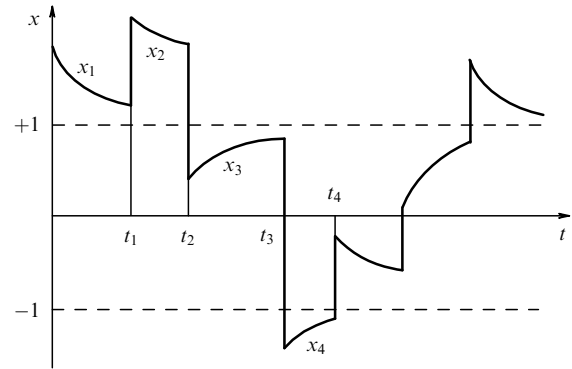


Рис. 1. Отклик КК-системы (5) на последовательность коротких импульсов, описываемую формулой (6).

Формула (8) описывает эволюцию функции $x_n(t)$ на временном промежутке $t_{n-1} < t < t_n$. В момент t_n происходит "перескок" функции $x_n(t)$ к новому значению:

$$x_{n+1}(t_n) = x_n(t_n) + A_n. \quad (9)$$

Формула (9) получается интегрированием уравнения (5) с правой частью (6) по малой окрестности t_n . Если для случайной последовательности импульсов известны распределение "амплитуд" и времён появления, то с помощью (8), (9) можно рассчитать статистические характеристики отклика, изображённого на рис. 1.

Заметим, что с помощью замены $x = 1/u$ можно линеаризовать и более общую КК-модель:

$$\dot{x} + f_1(t) x|x| - f_2(t) x = 0. \quad (10)$$

В частности, если функции $f_{1,2}(t)$ — периодические, то они могут описать колебания "ям" бистабильного потенциала, которые используются при объяснении явления стохастического резонанса [6]. Решение динамического уравнения (10), например, при $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = \dot{f}(t)$ в промежутке $t_{n-1} < t < t_n$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_n(t_{n-1}) \left[\exp(-(f(t) - f(t_{n-1}))) + \right. \\ &\quad \left. + |x_n(t_{n-1})| \int_{t_{n-1}}^t \exp(-(f(t) - f(t'))) dt' \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Изменение переменной $x_n(t)$ при "перескоке" в момент t_n по-прежнему определяется формулой (9).

2. Пример системы с квадратично-кубичной нелинейностью

Кубичная нелинейность, о моделировании которой с помощью кусочно-непрерывных квадратичных соотношений здесь идёт речь, как известно, используется в нелинейной динамике очень широко.

Например, кубичная нелинейность является основной для сдвиговых упругих волн в однородном изотропном твёрдом теле. Квадратичные эффекты здесь запрещены по соображениям симметрии. Сдвиговые волны представляют собой эффективный инструмент диагностики мягких биологических тканей, поскольку модуль сдвига в нормальных и патологически изменённых тканях различается на несколько порядков [7]. В то же время

скорость звука и плотность изменяются лишь на несколько процентов. Изучение нелинейностей модуля сдвига даёт новую информацию о механических параметрах твёрдых сред, что важно для медицинской и промышленной диагностики.

Примеры механических систем с сильной кубической нелинейностью приведены на рис. 2. На рисунке 2а изображена цепочка масс, движение которых ограничено направляющими в виде параллельных прямых, лежащих в одной плоскости на одинаковом расстоянии a друг от друга. Удлинение пружинок подчиняется линейному закону Гука $F = -k\Delta l$. Если фиксировать все массы в положении равновесия, за исключением одной с номером n , то её малые колебания, $|x_n| \ll a$, при малом статическом удлинении, $\Delta l_0 \ll a$, будут описываться нелинейным уравнением

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} + k \frac{\Delta l_0}{a} x_n + \frac{k}{2a^2} x_n^3 = 0. \quad (12)$$

Интересно, что при $\Delta l_0 = 0$, т.е. когда пружина предварительно не натянута, в движении отсутствует линейный режим. Нелинейность полностью определяет движение системы при сколь угодно малых по амплитуде колебаниях:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X^3 = 0, \quad X = \frac{x_n}{a\sqrt{2}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (13)$$

Эту нелинейность можно назвать "геометрической", поскольку она обусловлена наличием связей (ограничениями движения), а не "физической" нелинейностью деформирования пружин.

В континуальном пределе для волн в дискретной цепочке получается уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \frac{\beta}{3} \frac{\partial^2 \zeta^3}{\partial z^2}, \quad \zeta = \frac{\partial x}{\partial z}. \quad (14)$$

Здесь ζ — деформация, $z = na$ — координата, вдоль которой распространяется колебание. Нелинейный коэффициент и квадрат скорости звука даются соответственно выражениями $\beta = (3k/2m)a^2$, $c^2 = (k/m)\Delta l_0 a$.

Уравнение (14) можно назвать нелинейным волновым уравнением, если его правая часть мала по сравнению с любым из членов левой части. Однако при отсутствии натяжения пружин или их слабом натяжении, когда скорость $c \rightarrow 0$, нелинейная эволюция формы волны "преобладает" над процессом её распространения. Таким образом, говорить об искажении профиля бегущей волны здесь не представляется возможным.

Уравнение (14) связано с уравнением первого порядка, являющимся моделью простейшей КК-нелинейной распределённой системы:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \pm \sqrt{\beta} |\zeta| \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (15)$$

Действительно, дифференцируя уравнение (15) по переменной t и заменяя в правой части полученного соотношения производную по t производной по z , получим уравнение второго порядка (14). Свойства сильно нелинейных систем типа (14) исследованы в работе [2]. В частности, показано, что в таких системах есть локализованные периодические осцилляции, но для них могут не существовать решения типа бегущих волн.

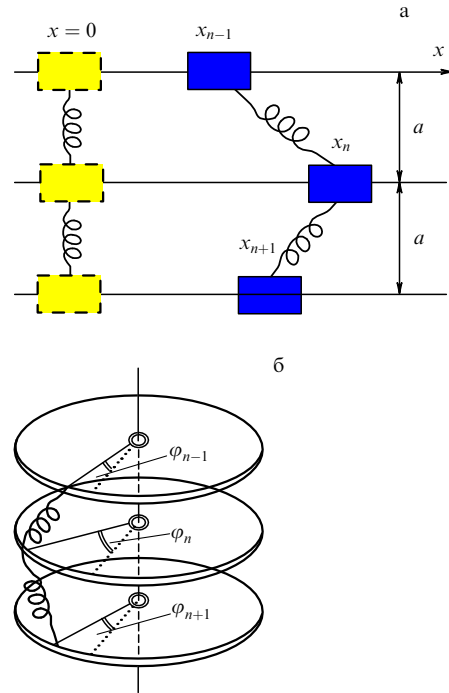


Рис. 2. (а) Цепочка связанных линейными пружинками масс, движущихся вдоль стержней. (б) Цепочка линейно связанных дисков, совершающих крутильные колебания.

Заметим, что для экспериментального моделирования [2] сильно нелинейной динамики более удобна цепочка из дисков (рис. 2б). Диски совершают крутильные колебания, при которых трение в осях существенно меньше, чем при скольжении масс вдоль направляющих стержней (рис. 2а). Математические модели для обеих цепочек — одни и те же.

3. Римановы волны

Если дисперсия и диссипация отсутствуют, то плоские волны в КК-системе описываются уравнением простых (римановых) волн:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c^2} |u| \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (16)$$

Математики иногда называют уравнение типа (16), но с квадратичной нелинейностью уравнением Хопфа, физики — уравнением Римана. Здесь использованы те же обозначения, что и для обычных сред с квадратичной нелинейностью [8]. Именно, u — колебательная скорость, ε — нелинейный параметр, $\tau = t - z/c$ — время в системе координат, движущейся вдоль оси z со скоростью звука c . В случае малых чисел Маха $|u|/c$ уравнение (16) может описывать слабо нелинейные волны, при этом z — "медленная" координата. Похожее уравнение (15), как показано в разделе 2, справедливо также для сильно нелинейных сдвиговых и крутильных колебаний в распределённых системах [2]. В этом случае уравнение (15) нельзя считать эволюционным.

Решение уравнения (16), отвечающее волне с временным профилем $u = \Phi(\tau)$ на границе среды $z = 0$, даётся неявной функцией:

$$u = \Phi \left(\tau + \frac{\varepsilon}{c^2} |u| z \right). \quad (17)$$

Если исходная волна — гармоническая, $u = u_0 \sin(\omega\tau)$, то интересно проследить за изменением её спектрального состава. Применяем стандартную технику разложения неявных функций в ряды Фурье, которая описана в книге [8]:

$$u = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(Z) \sin(n\omega\tau + \varphi_n(Z)).$$

Здесь Z — расстояние, нормированное на характерную нелинейную длину z_{SH} образования разрыва в профиле волны:

$$Z = \frac{z}{z_{SH}} = \frac{\varepsilon}{c^2} \omega u_0 z.$$

После простых, но громоздких вычислений найдём

$$C_n = [1 - (-1)^n] \frac{2}{nZ} \left[\left(\frac{2}{\pi n} - E_n(nZ) \right)^2 + J_n^2(nZ) \right]^{1/2},$$

$$\tan \varphi_n = \frac{(2/\pi n) - E_n(nZ)}{J_n(nZ)}. \tag{18}$$

Здесь E_n — функции Вебера, J_n — функции Бесселя. Результат (18) представляет собой аналог решения Бесселя–Фубини, известного для квадратичных нелинейных сред [8]. Выводу аналогичного разложения для истинно кубических сред посвящена статья [9].

Видно, что в решении (18) отличны от нуля только амплитуды нечётных гармоник. Амплитуда волны на частоте первой гармоники убывает с возрастанием пройденного волной расстояния — энергия перекачивается в высшие гармоники. Амплитуды высших гармоник увеличиваются, причём третья гармоника при $Z \ll 1$ возрастает по линейному закону: $C_3 \approx 4Z/(5\pi)$.

Точные формулы (18) верны на расстояниях $0 < Z < 1$. При $Z = 1$ образуется ударный фронт, поведение которого нужно исследовать отдельно.

4. Слабые ударные волны сжатия и разрежения

Воспользуемся известным способом графического анализа римановых волн [8]. Для этого запишем решение (17) как явную функцию времени:

$$\tau = \Phi^{-1}(u) - \frac{\varepsilon}{c^2} |u|z. \tag{19}$$

Из формулы (19) следует: для того чтобы построить форму волны на некотором расстоянии z , к исходной функции $\Phi^{-1}(u)$ нужно прибавить функцию $-\varepsilon|u|z/c^2$, пропорциональную $|u|$. Такое построение выполнено на рис. 3 для ударной волны сжатия в виде симметричного скачка между значениями переменной $u = -u_0$ и $u = +u_0$. В соответствии с (19) точка А на фронте переместится в положение А', а точка В — в положение В'. Новые положения остальных точек исходного скачка АВ образуют ломаную (показана штриховой линией), соединяющую точки А', В' с началом координат.

Смещение фронта $\tau_{SH}(z)$ определяется законом сохранения количества движения [8] и соответствует равенству площадей двух треугольников, выделенных на рис. 3

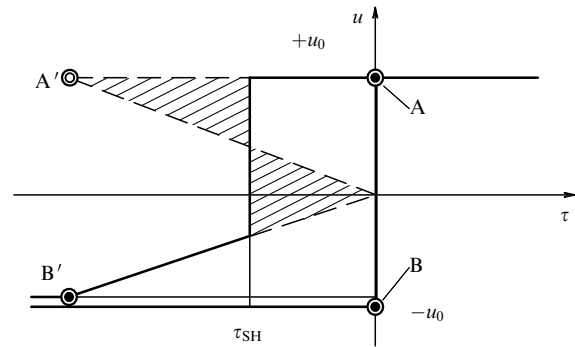


Рис. 3. Трансформация симметричного ударного фронта сжатия.

штриховкой:

$$\tau_{SH}(z) = -(\sqrt{2} - 1) \frac{\varepsilon}{c^2} u_0 z. \tag{20}$$

Из построения видно, что симметричный скачок, в отличие от скачка в квадратично нелинейной среде, в целом неустойчив. В профиле волны появляется наклонный участок. Впереди фронта бежит "предвестник". Величина скачка уменьшается от исходного значения $2u_0$ до "устойчивого" значения $\sqrt{2}u_0$, которое не зависит от расстояния z . В среде, "жесткость" которой возрастает с увеличением давления ($\varepsilon > 0$), скачок, согласно (20), движется со сверхзвуковой скоростью:

$$v_{SH} \approx c_0 \left[1 + (\sqrt{2} - 1) \varepsilon \frac{u_0}{c} \right].$$

Процесс трансформации фронта сжатия показан на рис. 4а. Видно, что на малых расстояниях на фронте образуется излом; затем формируется наклонный участок, который уширяется со временем — становится более пологим. В пределах наклонного участка колебательная скорость возрастает линейно со временем от $-u_0$ до $-u_1 = -(\sqrt{2} - 1)u_0$. На фронте скорость увеличивается скачком от $-u_1$ до u_0 .

Итак, устойчивому скачку сжатия в рассматриваемой среде должно соответствовать отношение возмущений (непосредственно перед ударным фронтом и сразу за ним) $|u_1|/u_0 = \sqrt{2} - 1$.

Построения, аналогичные показанным на рис. 3, для симметричного скачка разрежения приводят к картине, изображённой на рис. 4б. Известно, что в квадратично нелинейной среде любой скачок разрежения неустойчив. Здесь же устойчивым оказывается разрыв между значениями колебательной скорости $-u_0$ и $u_2 = (\sqrt{2} - 1)u_0$. Интересно, что скорость распространения этого скачка также оказывается сверхзвуковой; более того, она совпадает со скоростью распространения скачка сжатия,

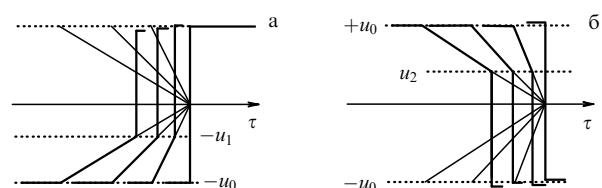


Рис. 4. Процессы формирования и распространения стабильных ударных фронтов сжатия (а) и разрежения (б).

изображённого на рис. 4а. Таким образом, чередующиеся устойчивые скачки сжатия и разрежения могут быть соединены гладкими участками профиля. При этом они будут разделены одинаковыми промежутками времени, не меняющимися с пройденным расстоянием. Такая картина соответствует бегущему периодическому сигналу.

В заключение приведём общую формулу для положения ударного фронта:

$$\tau_{SH}(z) = -\frac{\varepsilon z}{2c^2} \frac{u_2|u_2| - u_1|u_1|}{u_2 - u_1}. \tag{21}$$

Здесь значения u_1, u_2 могут иметь любые знаки. Фронт сжатия в общем случае ($u_1 < 0, u_2 > 0$) будет устойчивым, если возмущение u_1 одновременно лежит и на разрыве, и на прилегающем к нему участке профиля простой волны. Это означает, что $\tau_{SH} \leq \tau_1$, где, согласно (19),

$$\tau_1 = -\frac{\varepsilon z}{c^2} |u_1|. \tag{22}$$

Из формул (21) и (22) следует условие устойчивости для фронта сжатия

$$|u_1| \leq u_{CR} = (\sqrt{2} - 1)u_2. \tag{23}$$

Для скачка сжатия, бегущего по невозмущённой среде ($u_1 = 0$), а также для скачка, оба значения возмущения у которого положительны ($u_1 > 0, u_2 > u_1$), специфика квадратично кубичной нелинейности не проявляется. При этом из формулы (21) получается известный результат теории квадратично нелинейных римановых волн [8, 10–12].

Аналогично, используя формулу (21), можно показать, что скачок разрежения ($u_1 > 0, u_2 < 0$) в общем случае будет устойчивым, если $u_1 \leq u_{CR} = (\sqrt{2} - 1)|u_2|$. Устойчивым будет также скачок разрежения, бегущий по невозмущённой среде ($u_1 = 0$), или скачок разрежения с отрицательными возмущениями перед фронтом и за фронтом ($u_1 < 0, u_2 < u_1$). В этих случаях также исчезают проявления кубичной нелинейности. Однако здесь нет противоречия с известным выводом о неустойчивости волны разрежения в квадратично нелинейной среде. Дело в том, что "жесткость" среды для такого фронта разрежения при увеличении давления не возрастает, а убывает.

5. Периодическая трапецевидная пилообразная волна

Известно, что в квадратично нелинейных средах существуют квазистабильные нелинейные структуры в виде пилообразных волн, представляющие собой периодическую последовательность линейно наклонённых участков, соединённых ударными фронтами сжатия. Форма этих волн не изменяется при распространении. Изменяется лишь величина скачка на каждом периоде. Стабильность указанных структур позволяет рассматривать процессы их взаимодействия и самовоздействия [11, 13], так же как это делается для квазигармонических сигналов в нелинейных средах с дисперсией.

Найдём квазистабильную форму волны в квадратично кубичной среде. Ищем решение уравнения (16), не

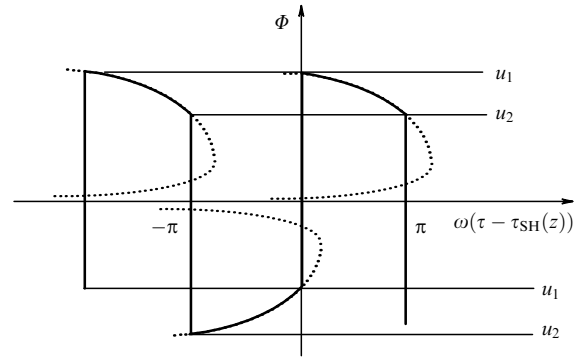


Рис. 5. Трапецевидная пилообразная волна в квадратично кубичной среде без дисперсии.

изменяющее своей формы $\Phi(\tau)$ при распространении:

$$u = A(z) \Phi(\tau - \tau_{SH}(z)).$$

Решение получаемых обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями $A(0) = u_0, \tau_{SH}(0) = 0$ имеет вид

$$A(z) = \frac{u_0}{1 + z/z_0}, \quad \omega(\tau - \tau_{SH}(z)) + C = \ln |\Phi| + Z_0 |\Phi|, \tag{24}$$

$$\omega \tau_{SH}(z) = -\ln \left(1 + \frac{z}{z_0} \right), \quad Z_0 = \frac{z_0}{z_{SH}} = \frac{\varepsilon}{c^2} \omega u_0 z_0.$$

Здесь z_0, ω, C — константы. Функция Φ в решении (24) неоднозначна и неограниченна, поэтому, на первый взгляд, она не имеет физического смысла. Однако произвольная константа C позволяет перемещать ветви функции $\Phi(\tau - C)$ вдоль оси времени τ , формируя их периодическую последовательность (рис. 5). Соединяя эти ветви разрывами, удаётся построить профиль периодической во времени пилообразной волны. Каждый полупериод волны, в отличие от такового в случае квадратично нелинейной среды, имеет не треугольную, а трапецевидную форму. Период содержит как ударную волну сжатия, так и ударную волну разрежения. Это скачки между значениями $-u_1 = -(\sqrt{2} - 1)A(z)$ и $u_2 = A(z)$, а также между $u_1 = +(\sqrt{2} - 1)A(z)$ и $-u_2 = -A(z)$ соответственно. Оба разрыва являются стабильными ударными волнами, бегущими с одной и той же скоростью вместе с гладкими участками Φ профиля волны.

Изображённая на рис. 5 "трапецевидная пила" представляет собой асимптотическую форму (на расстояниях $z \gg z_{SH}$) волны, которая на входе в среду ($z = 0$) была гармонической. Заметим, что процедура построения этой волны аналогична той, которая описана в работах [10, 13] для обычной кубично нелинейной среды.

6. Квадратично кубичное уравнение Бюргера

Для того чтобы учесть линейное поглощение, уравнение (16) следует обобщить, включив в него диссипативный член со второй производной:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c^2} |u| \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{b}{2c^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \tag{25}$$

Здесь b — диссипативный коэффициент, выражающийся через сдвиговую и объёмную вязкости и теплопроводность среды [8]. Запишем уравнение (25) для краткости в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (|V|V) + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (26)$$

Здесь

$$Z = \frac{z}{z_{SH}}, \quad \theta = \omega \tau, \quad V = \frac{u}{u_0}, \quad \Gamma = \frac{z_{SH}}{z_{DISS}} = \frac{b\omega}{2\epsilon c \rho_0 u_0}.$$

Число Γ , равное отношению нелинейной и диссипативной длин, называют обратным акустическим числом Рейнольдса (или числом Гольдберга). При $\Gamma \gg 1$ диссипативные эффекты преобладают над нелинейными. При $\Gamma \ll 1$, напротив, сильнее выражено влияние нелинейности.

Уравнение (26) можно линеаризовать с помощью следующего обобщения замены Хопфа — Коула — Флорина [8]:

$$|V| = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U. \quad (27)$$

Однако, в отличие от линеаризации обычного уравнения Бюргера для квадратично нелинейной среды, формальная линеаризация здесь оказывается менее продуктивной. Разрыв производной, возникающий в окрестности точки $V = 0$, приводит к перемещению фронта в сопровождающей системе координат (см. рис. 3) и требует нетривиальных обобщений известных результатов.

Найдём одно из стационарных решений уравнения (26), описывающих диссипативную структуру ударного фронта. Для определённости рассмотрим устойчивую ударную волну сжатия, описывающую переход от одного постоянного значения, $V_1 = -(\sqrt{2} - 1)$, к другому, $V_2 = 1$. В соответствии с формулой (20) ищем решение в виде

$$V(Z, \theta) = V[\theta_* = \theta - \theta_{SH}(Z)], \quad \theta_{SH}(Z) = -(\sqrt{2} - 1)Z. \quad (28)$$

Подстановка (28) в (26) после интегрирования приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta_*} + \frac{1}{2} |V|V - \alpha V = \frac{1}{2} \alpha^2, \quad \alpha \equiv \sqrt{2} - 1. \quad (29)$$

Постоянная интегрирования (правая часть (29)) определена из условия $V(\theta_* \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. Из уравнения (29) для отрицательных значений V получаем

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta_*} = \frac{1}{2} (V + \alpha)^2. \quad (30)$$

Отсюда следует, что второе граничное условие, $V(\theta_* \rightarrow -\infty) \rightarrow -\alpha$, выполняется автоматически. Решение уравнения (30), удовлетворяющее условию $V(\theta_* = \theta_0) = 0$, имеет вид

$$V = \alpha^2 \left(\frac{\theta_* - \theta_0}{2\Gamma} \right) \left[1 - \alpha \left(\frac{\theta_* - \theta_0}{2\Gamma} \right) \right]^{-1}, \quad -\infty < \theta_* < \theta_0. \quad (31)$$

Здесь θ_0 — константа интегрирования, подлежащая определению. "Отрицательная" часть фронта, описываемая

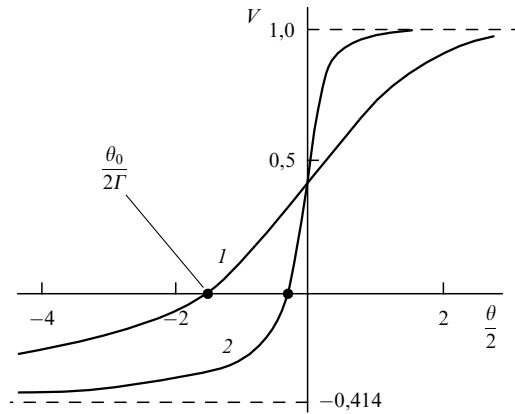


Рис. 6. Форма ударного фронта сжатия в квадратично кубичной нелинейной среде при значениях числа $\Gamma = 1,0$ (кривая 1) и $\Gamma = 0,2$ (кривая 2). Места сшивания положительной и отрицательной ветвей отмечены тёмными кружками.

мая решением (31), должна быть непрерывно сшита с "положительной" ветвью, которая находится из уравнения (29):

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta_*} + \frac{1}{2} (V - \alpha)^2 = \alpha^2. \quad (32)$$

Решение уравнения (32), которое удовлетворяет условию на бесконечности $V(\theta_* \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, имеет вид

$$V = \alpha \left[1 + \sqrt{2} \tanh \left(\alpha \sqrt{2} \frac{\theta_*}{2\Gamma} \right) \right], \quad \theta_0 < \theta_* < \infty. \quad (33)$$

Требую непрерывности решения и сшивая формулы (31) и (33) при $V = 0$ или $\theta_* = \theta_0$, найдём

$$\frac{\theta_0}{2\Gamma} = -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,52. \quad (34)$$

Интересно, что диссипация сглаживает разрыв производной при $V = 0$. В точке $\theta_* = \theta_0$ оказывается непрерывной не только сама функция, но и её производная. Это непосредственно видно из сравнения уравнений (30) и (32). Таким образом, структура ударного фронта сжатия даётся формулами (31) и (33). Она изображена на рис. 6. Характерная длительность фронта $\Delta\theta \sim \Gamma$ уменьшается с возрастанием нелинейности и увеличивается с возрастанием диссипации. Возмущение V на фронте монотонно возрастает.

Структура фронта разрежения рассчитывается аналогичным образом или находится из решений (31) и (33) с помощью очевидных преобразований симметрии.

Зная решение для гладких участков профиля квадратично кубичной нелинейной волны (см. рис. 5) и решение, описывающее структуру фронтов (см. рис. 6), можно построить "погранслоиную асимптотику" с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений и описать профиль волны полностью, после чего рассчитать спектральный состав, нелинейные потери энергии и другие важные характеристики.

В заключение этого раздела укажем, что замена кубичной нелинейности КК-моделью использовалась в ряде известных нам задач. Так, с помощью этой замены

удалось точно решить задачу [14]

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta} + V^3 + 3 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^2(\theta) d\theta - \delta \right) V = \sin \theta, \quad \langle V \rangle = 0, \quad (35)$$

и рассчитать тем самым частотную характеристику акустического резонатора, внутри которого "бегают" ударные волны. В уравнении (35) δ — это безразмерная расстройка между частотой колебаний стенки и частотой одной из собственных мод резонатора.

7. Квадратично кубическое уравнение Шрёдингера

Замена кубичной нелинейности КК-нелинейностью использовалась выше для уравнений, которые сопоставлялись с механическими системами. Интересно рассмотреть более широкий круг задач, проанализировав квадратично кубические обобщения уравнений Кортевега – де Вриза, нелинейного уравнения Шрёдингера и других "эталонных" уравнений теории нелинейных волн.

Рассмотрим КК-уравнение Шрёдингера

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A + \gamma k^2 |A| A. \quad (36)$$

В случае, когда модель (36) предназначена для описания эффектов самовоздействия световых пучков, переменная A — комплексная амплитуда волны, Δ_{\perp} — оператор Лапласа, действующий в поперечном сечении пучка [15]. Как и кубическое уравнение Шрёдингера, уравнение (36) обладает законами сохранения. В этом случае законы сохранения выражаются в виде

$$I_1 = \iint |A|^2 d^2 \mathbf{r}_{\perp} = \text{const}, \quad (37)$$

$$I_2 = \iint \left\{ |\nabla_{\perp} A|^2 - \frac{2}{3} \gamma k^2 |A|^3 \right\} d^2 \mathbf{r}_{\perp} = \text{const}.$$

Первая сохраняющаяся величина имеет смысл полной энергии, вторая учитывает нелинейные и дифракционные эффекты.

Перейдём от (36) к уравнениям для действительной амплитуды B и фазы Ψ , положив $B = A \exp(-ik\Psi)$. Разделяя действительную и мнимую части, получим связанные уравнения эйконала и переноса [15]:

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (\nabla_{\perp} \Psi)^2 = \gamma B, \quad (38)$$

$$2 \frac{\partial B}{\partial z} + 2 \nabla_{\perp} B \nabla_{\perp} \Psi + B \Delta_{\perp} \Psi = 0.$$

Пренебрежение членом $\Delta_{\perp} B$ в уравнении эйконала (38) соответствует переходу к приближению нелинейной геометрической оптики. Для плоских (щелевых) пучков система (38) примет вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} + \alpha \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{2} B \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Уравнения (39), форма которых известна и в гидродинамике, линеаризуются преобразованием годографа. Они описывают изэнтропийное течение баротропной жид-

кости. Эти уравнения имеют точное решение [15, 16], которое в нелинейной оптике соответствует абберационному самовоздействию волновых пучков. Однако если для кубичной нелинейности независимой переменной является интенсивность, то для рассматриваемой КК-модели в уравнениях (39) вместо интенсивности присутствует действительная амплитуда B волны.

Ещё один интересный случай соответствует мнимому коэффициенту γ в КК-уравнении Шрёдингера (36). Деля в (36) замену $\gamma \rightarrow i\gamma/k$ и разделяя действительную амплитуду и фазу, придём к системе

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} + \alpha \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{2} B \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\gamma}{2} B^2.$$

Правая часть уравнения переноса (второе уравнение (40)), как нетрудно увидеть, ответственна за квадратичное (двухфотонное) поглощение волнового пучка [17, 18]. Уравнение переноса с помощью замены $B = 1/U$ сводится к линейному виду:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} U = -\frac{\gamma}{2}, \quad (41)$$

а уравнение эйконала (первое уравнение (40)) независимо и легко решается. Следовательно, вся система (40) может быть решена точно.

8. Квадратично кубическое уравнение Кортевега – де Вриза

Запишем уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ) в тех же обозначениях, что и (16):

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} (|V| V) + \Gamma \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}. \quad (42)$$

Три первых закона сохранения для уравнения (42) имеют вид $I_{1,2,3} = \text{const}$, где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} V(z, \theta) d\theta, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} V^2(z, \theta) d\theta, \quad (43)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha V^2 |V| - 3\Gamma \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta.$$

Первые два выражения (сохранение количества движения и энергии) — такие же, как для кубичного КдВ, третье несколько отличается.

Уравнение для стационарных волн $V = V(T = \theta - \beta Z)$ имеет вид

$$\Gamma \left(\frac{dV}{dT} \right)^2 = E - W(V), \quad W = \frac{\alpha}{3} |V|^2 + \beta V^2. \quad (44)$$

Фазовая плоскость для уравнения (44) качественно не отличается от таковой для кубичного КдВ [19]. В зависимости от знаков коэффициентов α , Γ перед нелинейным и дисперсионным членами, а также скорости распространения стационарной волны, зависящей от параметра β , потенциал $W(V)$ может иметь одну или две потенциальные ямы. Следовательно, существуют периодические решения, а также решения в виде уединённых волн — солитонов и кинков.

Изложенные выше качественные соображения подчёркивают важность построения строгой теории квадратично кубического уравнения КдВ. Прежде всего интересно выяснить, удастся ли решить его методом обратной задачи рассеяния [20].

9. Заключение

Список КК-моделей, указанных в настоящей статье, можно дополнить КК-аналогами иных математических моделей, среди которых — нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au - bu|u|,$$

Ньюэлла–Уайтхеда [21]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = au - bu|u|,$$

Гинзбурга–Ландау [22]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u + (1 + ib)\Delta u - (1 + ic)u|u|,$$

КК-модификации уравнений типа Хохлова–Заболотской [23]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} (u|u|) \right] = N\Delta_{\perp} u$$

и общего нелинейного интегро-дифференциального уравнения [24]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} (u|u|) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{\infty} K(s) u(t-s) ds \right] = N\Delta_{\perp} u$$

с невырожденным ядром $K(s)$. В этот список войдут, конечно, и многие другие известные математические модели. Возможно, некоторые из них решаются проще для такого (КК) вида нелинейности. Возможно также, что при их анализе удастся изучить новые особенности некоторых физических явлений. Примеры таких реализованных возможностей описаны в этой заметке. Во всяком случае, даже если не удастся получить чего-либо стоящего, попытки такого анализа могут стать неплохим упражнением для заинтересованных читателей.

Работа поддержана грантом Правительства РФ для исследований под руководством ведущих учёных в учреждениях высшего образования (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, до-

говор № 11.G34.31.0066), а также грантами Президиума РАН, РФФИ и грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации.

Список литературы

1. Руденко О В, в сб. *Нелинейные волны* — 2012 (Под ред. А В Гапонова-Грехова, В И Некоркина) (Нижний Новгород: Ин-т прикладной физики РАН, 2013)
2. Руденко О В, Солодов Е В *Акуст. журн.* **57** 56 (2011) [Rudenko O V, Solodov E V *Acoust. Phys.* **57** 51 (2011)]
3. Heisenberg W *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. IIa* (8) 111 (1953)
4. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover Publ., 1970)
5. Stoker J J *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems* (New York: Interscience Publ., 1950)
6. Анищенко В С и др. *УФН* **169** 7 (1999) [Anishchenko V S et al. *Phys. Usp.* **42** 7 (1999)]
7. Руденко О В *УФН* **177** 374 (2007) [Rudenko O V *Phys. Usp.* **50** 359 (2007)]
8. Руденко О В, Солюян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975) [Rudenko O V, Soluyan S I *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (New York: Consultants Bureau, 1977)]
9. Гусев В А, Маков Ю Н *Акуст. журн.* **56** 591 (2010) [Gusev V A, Makov Yu N *Acoust. Phys.* **56** 626 (2010)]
10. Rudenko O V, Gurbatov S N, Hedberg C M *Nonlinear Acoustics through Problems and Examples* (Victoria, BC: Trafford, 2010)
11. Руденко О В *УФН* **165** 1011 (1995) [Rudenko O V *Phys. Usp.* **38** 965 (1995)]
12. Gurbatov S N, Rudenko O V, Saichev A I *Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media* (New York: Springer, 2011)
13. Руденко О В, Сапожников О А *ЖЭТФ* **106** 395 (1994) [Rudenko O V, Sapozhnikov O A *JETP* **79** 220 (1994)]
14. Руденко О В, Хедберг К М, Энфло Б О *Акуст. журн.* **53** 522 (2007) [Rudenko O V, Hedberg C M, Enflo B O *Acoust. Phys.* **53** 455 (2007)]
15. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* 2-е изд. (М.: Наука, 1990)
16. Ахманов С А, Сухоруков А П, Хохлов Р В *УФН* **93** 19 (1967) [Akhmanov S A, Sukhorukov A P, Khokhlov R V *Sov. Phys. Usp.* **10** 609 (1968)]
17. Руденко О В, Сапожников О А *Квантовая электроника* **20** 1028 (1993) [Rudenko O V, Sapozhnikov O A *Quantum Electron.* **23** 896 (1993)]
18. Руденко О В, Сухоруков А А *Изв. РАН Сер. физ.* **60** (12) 6 (1996)
19. Островский Л А, Потапов А И *Введение в теорию модулированных волн* (М.: Физматлит, 2003)
20. Захаров В Е, Фаддеев Л Д *Функц. анализ и его прил.* **5** (4) 18 (1971) [Zakharov V E, Faddeev L D *Funct. Anal. Appl.* **5** (4) 280 (1971)]
21. Newell A C, Whitehead J A J *Fluid Mech.* **38** 279 (1969)
22. Aranson I S, Kramer L *Rev. Mod. Phys.* **74** 99 (2002)
23. Руденко О В *Акуст. журн.* **56** 452 (2010) [Rudenko O V *Acoust. Phys.* **56** 457 (2010)]
24. Ibragimov N H, Meleshko S V, Rudenko O V *J. Phys. A Math. Theor.* **44** 315201 (2011)

Nonlinear dynamics of quadratically cubic systems

O.V. Rudenko. Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 38, 119991 Moscow, Russian Federation;
O.Yu. Schmidt Institute of the Earth, Russian Academy of Sciences, ul. B. Gruzinskaya 10, 123242 Moscow, Russian Federation;
N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, ul. B. Pokrovskaya 60, 603000 Nizhny Novgorod, Russian Federation;
Blekinge Institute of Technology, SE-371 Karlskrona, Sweden

A modified form of the known nonlinear dynamics equations is proposed which uses quadratic relations to model cubic nonlinearity. It is shown that such quadratically cubic equations are sometimes amenable to exact solutions and that sometimes they make the original problem easier to analyze qualitatively. Occasionally, exact solutions provide a useful tool for studying new phenomena. Examples considered include nonlinear ordinary differential equations and nonlinear partial differential equations of the Hopf, Burgers, Korteweg–de Vries, and Schrödinger types. Some problems are solved exactly in the spatiotemporal and spectral representations. The unsolved problems potentially amenable to the proposed approach are listed.

PACS numbers: 02.30.Jr, **05.45. – a**, **42.65. – k**, **43.25. + y**
Bibliography — 24 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (7) 719–726 (2013)

DOI: 10.3367/UFN.0183.201307b.0719
Received 9 April 2013, revised 29 April 2013
Physics – Uspekhi **56** (7) (2013)